

Komm, Ellen; Huhmann, Tobias

Mathematiktreiben und Reflektieren. Entdecken dokumentieren, um neu zu entdecken

Gläser, Eva [Hrsg.]; Poschmann, Julia [Hrsg.]; Büker, Petra [Hrsg.]; Miller, Susanne [Hrsg.]: *Reflexion und Reflexivität im Kontext Grundschule. Perspektiven für Forschung, Lehrer:innenbildung und Praxis. Bad Heilbrunn* : Verlag Julius Klinkhardt 2022, S. 251-257. - (Jahrbuch Grundschulforschung; 26)



Quellenangabe/ Reference:

Komm, Ellen; Huhmann, Tobias: Mathematiktreiben und Reflektieren. Entdecken dokumentieren, um neu zu entdecken - In: Gläser, Eva [Hrsg.]; Poschmann, Julia [Hrsg.]; Büker, Petra [Hrsg.]; Miller, Susanne [Hrsg.]: *Reflexion und Reflexivität im Kontext Grundschule. Perspektiven für Forschung, Lehrer:innenbildung und Praxis. Bad Heilbrunn* : Verlag Julius Klinkhardt 2022, S. 251-257 - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-255763 - DOI: 10.25656/01:25576

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-255763>

<https://doi.org/10.25656/01:25576>

in Kooperation mit / in cooperation with:



<http://www.klinkhardt.de>

Nutzungsbedingungen

Dieses Dokument steht unter folgender Creative Commons-Lizenz: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.de> - Sie dürfen das Werk bzw. den Inhalt unter folgenden Bedingungen vervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen: Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen. Dieses Werk bzw. dieser Inhalt darf nicht für kommerzielle Zwecke verwendet werden und es darf nicht bearbeitet, abgewandelt oder in anderer Weise verändert werden.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

This document is published under following Creative Commons-License: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.en> - You may copy, distribute and transmit, adapt or exhibit the work in the public as long as you attribute the work in the manner specified by the author or licensor. You are not allowed to make commercial use of the work or its contents. You are not allowed to alter, transform, or change this work in any other way.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.



Kontakt / Contact:

peDOCS
DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation
Informationszentrum (IZ) Bildung
E-Mail: pedocs@dipf.de
Internet: www.pedocs.de

Mitglied der


Leibniz-Gemeinschaft

Ellen Komm und Tobias Huhmann

Mathematiktreiben und Reflektieren – Entdecken dokumentieren, um neu zu entdecken

Abstract

Das reziprok aufeinander bezogene *Handeln und Dokumentieren* eröffnet vielfältige Entdeckungs- und Reflexions*möglichkeiten* für substanzielles Mathematiklernen in der Elementar- und Primarbildung. Hierzu bietet der sogenannte *Spiel- und Dokumenten-Raum* Möglichkeiten zum aktiv entdeckenden Mathematiktreiben und zur Reflexion *in and on action*. *Welche* Entdeckungs- und Reflexions*wirklichkeiten wie* in individuellen Lernverläufen in reziprok designten Lernumgebungen entwickelt werden, dies wird in einer qualitativen Studie rekonstruiert und modelltheoretisch analysiert.

Schlüsselwörter

Entdeckendes Lernen, Substanzielle Lernumgebungen, Mathematikunterricht, Elementar- und Primarbildung

1 Lernen durch Mathematiktreiben

So wie Musik erklingt, wenn sie gespielt wird, entsteht Mathematik, indem sie im Prozess des Mathematiktreibens denkend (vgl. Devlin 2002, 6) und konkret handelnd erlebt wird. Mathematik als individuell nachzuerfindende Wissenschaft der Muster und Strukturen wird somit als Tätigkeit im Entstehen verstanden (vgl. Freudenthal 1991, 14). Sie umfasst das Reflektieren als kritisches Hinterfragen aktueller Denkstrukturen, wobei der gesunde Menschenverstand (vgl. ebd., 4ff.) den stets neu zu reflektierenden Ausgangspunkt bildet, und ist grundgelegt durch die elementaren strukturgebenden Operationen „Klassifizieren“ und „Seriiieren“ (Piaget & Inhelder 1973). Im Sinne Korthagens (2001, 58) verstehen die Autor:innen des Beitrages Reflexion als „[...] mental process of trying to structure or restructure an experience, a problem, or existing knowledge or insights“ und übertragen dies auf das Mathematiktreiben.

Ein solches Mathematiktreiben (vgl. Freudenthal 1991) impliziert ein konstruktivistisches Lernverständnis, welches verschieden interpretierte entdeckende Lernansätze umfasst. Entdeckendes Lernen kann als Erwerb von Wissen und Können,

nicht durch Informationsübertragung von außen, sondern durch eigenes Wahrnehmen und Handeln sowie Analysieren und Reflektieren mit stetem Bezug auf bereits vorhandene Wissensstrukturen, gekennzeichnet werden (vgl. Huhmann 2013, 155; Neber nach Winter 2016, 3). Dabei stehen das Beobachten, Erkunden, Probieren und Fragenstellen der Lernenden im Zentrum (vgl. Winter 2016, 5) und zudem das Entdecken als (geistige) Tätigkeit im Sinne Bruners und in Einklang mit Korthagens Definition von Reflexion als

„a matter of rearranging or transforming evidence in such a way that one is enabled to go beyond the evidence so reassembled to additional new insights. It may well be that an additional fact or shred of evidence makes this larger transformation of evidence possible. But it is often not even dependent on new information” (Bruner 1961, 22).

2 Mathematiklernen organisieren und begleiten

Die Lehrperson ist als Organisator:in von Lerngelegenheiten verantwortlich, Lernsettings mit Entdeckungsmöglichkeiten zu schaffen, sowie als Lernbegleitung, Lernende in ihren individuellen Entdeckungswirklichkeiten zu unterstützen (Huhmann & Komm 2021, 141 in Anlehnung an Winter 2016, 2). Die Organisation von Lerngelegenheiten als substanzielle Lernumgebungen (Wollring 2008) soll mathematisch reichhaltige Entdeckungsmöglichkeiten für möglichst viele Lernende schaffen. Entscheidend ist dabei die artikulationsreiche Gestaltung mit Möglichkeiten zum flüchtigen und nicht-flüchtigen Darstellen. Wollring (2008, 16f.) prägt hierzu zwei Begriffe: Der Spiel-Raum eröffnet Möglichkeiten, mit Repräsentanten mathematischer Objekte handelnd tätig zu sein und dabei *im* Handeln zu reflektieren (vgl. von Aufschnaiter u. a. 2019, 146) und ist durch die Darstellungsflüchtigkeit der Handlungen gekennzeichnet (Huhmann 2013, 152ff.). Im Dokumenten-Raum werden Handlungsprozesse und -produkte nicht-flüchtig dargestellt, wodurch zur Reflexion *über* das Handeln angeregt wird (vgl. ebd., 146). Außerdem weist Wollring darauf hin, dass Dokumentationen Möglichkeiten zur Aufarbeitung bieten sollten. Dies aufgreifend erforschen die Autor:innen des Beitrages im Rahmen einer qualitativen Untersuchung von 28 Unterrichtsstunden mit substanziellen Lernumgebungen anhand von Unterrichtsplanungen, -beobachtungen und -reflexionen Gestaltungsmöglichkeiten zur *Verbindung* zwischen Spiel- und Dokumenten-Räumen. Dabei wurde identifiziert, dass es eine *Verbindung vom Spiel-Raum zum Dokumenten-Raum* geben kann, indem konkret ausgeführte Handlungen, Prozesse und entstandene Produkte dokumentiert werden. Zudem kann es eine *Verbindung vom Dokumenten-Raum zum Spiel-Raum* geben, indem durch die Auseinandersetzung mit Dokumentationen Impulse für weitere (und neue) Handlungen ermöglicht werden. Darauf aufbauend ließen sich verschiedene Verbundenheitsgrade von Spiel- und Dokumenten-Räumen feststellen, welche die Möglichkeiten des Mathematiktreibens zentral beeinflussen:

- 1) *Nicht verbunden*: Dokumentationen können nicht aus Handlungen mit materiellen Objekten im Spiel-Raum entstehen und sind dadurch kein Anlass für weitere Handlungen.
- 2) *Einseitig verbunden*: Es besteht die Möglichkeit, Prozesse und Produkte des Spiel-Raums zu dokumentieren. Wie im unverbundenen Setting bieten diese aber nicht die Möglichkeit für weitere Aktivitäten im Spiel-Raum.
- 3) *Wechselseitig verbunden*: Es besteht die Möglichkeit, Prozesse und Produkte des Spiel-Raums zu dokumentieren. Diese Dokumente bieten als neue mathematische Objekte Möglichkeiten für weitere und neue Handlungen im (neuen) Spiel-Raum.

Der Grad der Verbundenheit von Spiel- und Dokumenten-Räumen kann durch den Einsatz verschiedener Dokumentationstypen (Huhmann & Komm 2022, 119f.) mitbestimmt werden. Zur wechselseitig verbundenen, reziproken Gestaltung, insbesondere in Erarbeitungs- und Austauschphasen, eignen sich leicht dynamisierbare Dokumentationen. Das bedeutet, dass das materielle Trägermedium aus veränderbaren Einheiten besteht: Einzelne Dokumentationseinheiten („Notizzettel“) können mit reversiblen Fixierungsgrad (wiederablösbar) zu einem Gesamtdokument verbunden und wieder aufgelöst bzw. dynamisiert werden. Sie können ähnlich einer Concept Map gestaltet werden, wobei der Fokus auf den immer wieder neuen Möglichkeiten der (Re-)Strukturierung liegt, die im Zuge eines entdeckenden Mathematiktreibens und Reflektierens *in* und *über* mathematische (Handlungs-)Prozesse individuelle Lernwege charakterisieren.

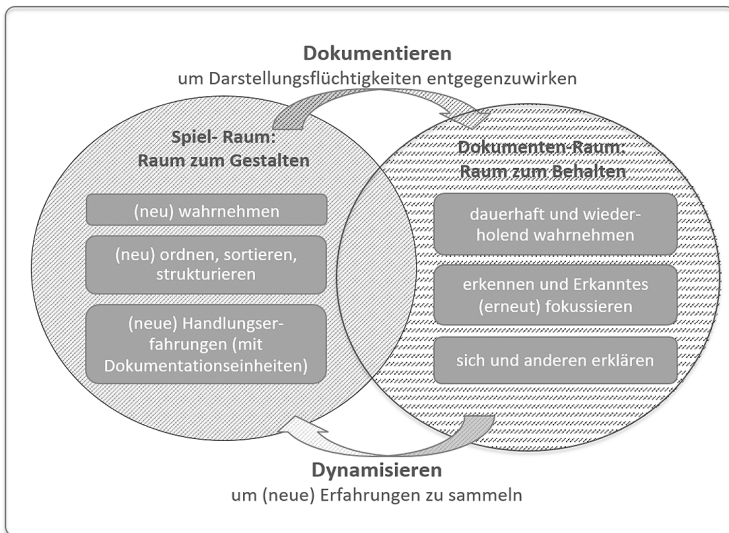


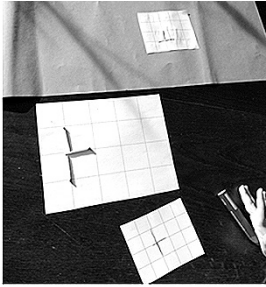
Abb. 1: Modell zum entdeckenden Lernen in reziprok gestalteten substanzialen Lernumgebungen mit dynamisierbaren Dokumenten (Huhmann & Komm 2022, 122)

Das Modell in Abbildung 1 erfasst ein reziprokes entdeckenlassendes Setting mit leicht dynamisierbaren Dokumentationen. Im Spiel-Raum können sich immer wieder neue Möglichkeiten zum Wahrnehmen und Handeln eröffnen, sei es mit konkreten Anschauungsobjekten oder mit durch Dynamisierung gewonnenen Dokumentationseinheiten. Besonders bedeutsam sind dabei Handlungsmöglichkeiten, wie das Klassifizieren und Seriieren von Dokumentationseinheiten, die wiederholtes und neues (Re-)Strukturieren im Sinne einer Reflexion *im Handeln* ermöglichen. Im Dokumenten-Raum können Aktivitäten wie das wiederholte und neue Erkennen sowie das Erklären Entdeckungen fördern und zu einer Reflexion *über das Handeln* im Spiel-Raum anregen. Entdeckenlassende Lernbegleitung lässt sich dabei als Hilfe zur Selbsthilfe (Winter 2016, 5) realisieren: Lernen-de können ihre Dokumentationen zur Reflexion *im* und *über* ihr Handeln nutzen bzw. dazu angeregt werden.

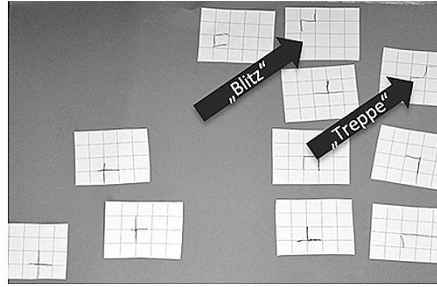
3 Rekonstruktion individueller Entdeckungswirklichkeiten

Nachfolgend werden mithilfe des vorgestellten Modells Entdeckungswirklichkeiten individueller Lernverläufe rekonstruiert. Aus 41 videografierten Lernverläufen der Elementar- und Primarbildung wird exemplarisch ein Lernweg aus dem Elementarbereich (Anna; 4,5 Jahre) zu Streichholzmehrlingen¹ analysiert. Diese wohlbedachte Auswahl hebt aufgrund der überaus voraussetzungsreichen Situation bezüglich der Kompetenzen junger Lerner:innen, die fachliche Adaptivität der substanziellen Lernumgebung sowie die fachdidaktische und methodische Adaptivität des für den jeweiligen Spiel- und Dokumenten-Raum reziprok gestalteten Settings besonders hervor. Im Spiel-Raum waren Streichhölzer zum handelnden Erkunden des Figurentyps verfügbar (s. Abb. 2a). Einzelne Dokumentationsvorlagen (Gitterraster) lagen bereit, zudem konnten diese mit geringem Fixierungsgrad (ablösbarer Klebestift) auf einem großen Trägermedium (Plakat) zum Gesamtdokument zusammengestellt werden. Nachfolgend wird Annas Lernweg in verschiedene Phasen gegliedert rekonstruiert (vgl. Huhmann & Komm 2021, 150ff.). Die Analyse fokussiert die Ein- und Auswirkungen des reziproken Designs der Lernumgebung auf den individuellen Lernprozess in Zusammenhang mit (re-)strukturierenden und reflektierenden Elementen. Im Lernverlauf erstellte Anna folgende Dokumente:

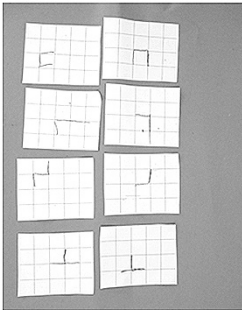
1 „Streichholzmehrlinge“ ist ein substanzielles Lernangebot zur Symmetrie- und Raumvorstellungsentwicklung. Der Figurentyp basiert auf folgenden Bildungsregeln: (1) Streichhölzer werden geradlinig oder rechtwinklig aneinandergelegt, (2) Streichhölzer stoßen mit ihren Eckpunkten aneinander, (3) alle Streichhölzer sind miteinander verbunden und (4) die Ausrichtung der Streichholzköpfe ist egal. Die Fragestellung lautet „Welche und wie viele verschiedene Streichholzmehrlinge gibt es?“.



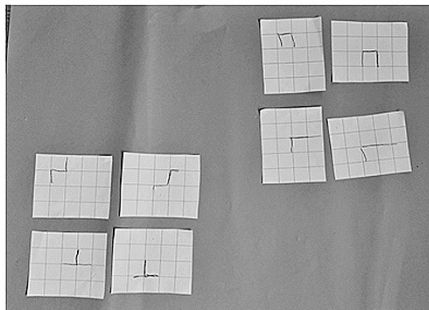
a) Drillinge finden



b) Regelkonformes Sortieren



c) Paarweises Ordnen I



d) Paarweises Ordnen II

Abb. 2: Im Lernverlauf erstellte Dokumente von Anna

Phase I – Finden und Dokumentieren der Streichholzdrillinge: Anna erkundet Drillinge durch Legen von Streichhölzern, dokumentiert diese jeweils auf einer Leervorlage (s. Abb. 2a) und sammelt sie mit geringem Fixierungsgrad zunächst in willkürlicher Anordnung auf einem Plakat. Es entstehen elf, auch nicht regelkonforme Drillinge (s. Abb. 2b, unten links).

Phase II – Strukturierungsprozess zur Regelkonformität: Anna betrachtet die dokumentierten Drillinge hinsichtlich der im Lernbegleitungsgespräch kommunizierten Bildungsregeln und reflektiert über ihre zuvor vollzogenen Legehandlungen. Sicher erkennt sie „nicht regelkonforme Drillinge“ und dynamisiert das Gesamtdokument, indem sie die Dokumenteneinheiten löst, um neue Handlungsobjekte zu gewinnen. Diese (s. Abb. 2b) sortiert sie in die beiden Kategorien „regelkonform“ (acht Drillinge, Plakatteil rechts) und „nicht regelkonform“ (drei Drillinge, Plakatteil links unten) und sortiert diese dann aus.

Phase III – Strukturierungsprozess zur Drehsymmetrie: Anna äußert sich zu den beiden von ihr als „Blitz“ und „Treppe“ (s. Abb. 2b, Pfeilmarkierungen) bezeich-

neten Drillingen: „Die da sind *fast* schon gleich“. Damit verdeutlicht sie, dass sie die Ähnlichkeit beider Figuren erkennt, sie aber dennoch unterscheidet. Dieser Entdeckung schließt sich eine erneute Dynamisierung an, indem die Dokumentationseinheiten gelöst werden. Die jeweils drehsymmetrischen Drillinge sortiert sie durch Verschiebungen auf der linken Plakathälfte paarweise nebeneinander. Die räumliche Ausrichtung der vorherigen Anordnung bleibt dabei identisch. So entsteht ein neues Plakat mit vier reihenweise angeordneten Drillingspaaren (s. Abb. 2c). Die paarweise Zueinandergehörigkeit begründet Anna spontan durch verbale Erklärungen („Und jetzt zeig ich dir, warum sie fast schon gleich sind“) und Zeigegesten auf die dokumentierten Drillinge.

Phase IV – Vertiefender Strukturierungsprozess zur Drehsymmetrie bzw. zur Gleichheit: Auf Nachfrage, warum die neu sortierten Drillinge „fast schon gleich“ und nicht „ganz gleich“ sind, findet Anna zunächst keine Antwort. Mit Eifer greift sie den Impuls auf, die bereits dokumentierten Drillinge nachzulegen. Sie beginnt, einen dokumentierten Drilling (s. Abb. 2c, dritte Reihe links) auf der Legeunterlage zu legen, hält dann inne, zeigt auf die entsprechende Dokumenteneinheit (s. Abb. 2c, erste Reihe links) und erklärt ihre Erkenntnis: „Da kann man den hier im Rechteck drehen“. Sie löst die Dokumenteneinheit und dreht sie um 90 Grad. Bei den weiteren Drillingen geht sie identisch vor: Teils durch erneutes Nachlegen der dokumentierten Drillinge, insbesondere aber durch Dynamisieren der Dokumente erkennt sie, *ob* und *wie* die dokumentierten Drillinge durch Drehung mit einem Partner zur Deckung gebracht werden können.

So entsteht das abschließende Dokument mit acht Drillingen (s. Abb. 2d), deren paarweise Gleichheit Anna durch die paarweise identische Raumlage belegt („Also schau mal, das da ist jetzt alles gleich“) und so zur Einsicht der Deckungsgleichheit gelangt.

4 Fazit

Das Beispiel von Anna zeigt stellvertretend, wie bereits junge Lernende *Entdeckungs- und Reflexionsmöglichkeiten* in reziproken Lernumgebungen zu Entdeckungs- und Reflexions*wirklichkeiten* entfalten: Insbesondere durch (i) die Aktivitäten mit konkreten Objekten (Streichhölzern), (ii) das Dokumentieren und (iii) das Strukturieren von Dokumentationseinheiten als selbst erschaffene mathematische Objekte wurden an dem Figurentyp „Streichholzmehrlinge“ Erkenntnisse im Entdecken und begründenden Tätigsein zur Drehsymmetrie und Kongruenz ebener Figuren gewonnen sowie raumwahrnehmungs- und raumvorstellungsbezogene Kompetenzen aktiviert. Die Dynamisierung von Dokumentationen eröffnet Möglichkeiten, die wechselseitige Aufeinanderbezogenheit von Spiel- und Dokumenten-Räumen durch neues Wahrnehmen, Ordnen, Sortieren

und Strukturieren zu realisieren. Das eng verwobene Wechselspiel zwischen diesen zentralen Tätigkeiten und dem *jeweiligen Dokumentieren von Prozessen und Dynamisieren von Produkten* konnte mit der exemplarischen modelltheoretischen Verlaufsdarstellung der individuellen Lernprozesse erfasst werden. Ausgehend von der Nutzung des Modells zur Analyse von Lernverläufen kann die Frage der Betrachtung als Denk-, Analyse- und Reflexionswerkzeug zur Unterrichtsentwicklung und -erforschung vor dem Hintergrund fachdidaktischer, allgemeindidaktischer oder erziehungswissenschaftlicher Bedeutungsdimensionen aufgeworfen werden.

Literatur

- Bruner, J. S. (1961): The act of discovery. In: Harvard Educational Review 31 (1), 21-32.
- Devlin, K. J. (2002): Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur (2. Aufl.). Heidelberg & Berlin: Spektrum.
- Freudenthal, H. (1991): Revisiting mathematics education: China lectures. Mathematics education library 9. Dordrecht: Kluwer.
- Huhmann, T. (2013): Einfluss von Computeranimationen auf die Raumvorstellungsentwicklung. Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. Bd. 13. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Huhmann, T. & Komm, E. (2021): Ordnen, Sortieren, Strukturieren – Mathematik entdecken und dokumentieren. In: G. Lang-Wojtasik & S. König (Hrsg.): Frühkindliche Bildung und Förderung. Weingartner Dialog über Forschung. Bd 4. Münster & Ulm: Klemm & Oelschläger, 139-154.
- Huhmann, T. & Komm, E. (2022): Entdeckendes Lernen in substantiellen Lernumgebungen fördern: Zur systematischen Gestaltung von Spiel- und Dokumenten-Räumen. In: K. Eilerts, R. Möller & T. Huhmann (Hrsg.): Auf dem Weg zum neuen Mathematiklehren und -lernen 2.0: Festschrift für Prof. Dr. Bernd Wollring. Wiesbaden: Springer Spektrum, 111-126.
- Korthagen, F. A. J. (2001): Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education. New York: Routledge.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1973): Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen. Düsseldorf: Schwann Verlag.
- von Aufschnaiter, C.; Fraij, A. & Kost, D. (2019): Reflexion und Reflexivität in der Lehrerbildung. In: HLZ 2 (1), 144-159. Online unter: <https://www.herausforderung-lehrerinnenbildung.de/index.php/hlz/article/view/2439> (Abrufdatum: 29.03.2022).
- Winter, H. W. (2016): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik (3. Aufl.). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Wollring, B. (2008): Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Kasseler Forschergruppe (Hrsg.): Lernumgebungen auf dem Prüfstand: Zwischenergebnisse aus den Forschungsprojekten. Kassel: kassel university press, 9-26.