



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Joël BRIANÇON, Philippe MAISONOBE & Tristan TORRELLI

**Matrice magique associée à un germe de courbe plane et division par l'idéal jacobien**

Tome 57, n° 3 (2007), p. 919-953.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2007\\_\\_57\\_3\\_919\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_3_919_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# MATRICE MAGIQUE ASSOCIÉE À UN GERME DE COURBE PLANE ET DIVISION PAR L'IDÉAL JACOBIEN

par Joël BRIANÇON,  
Philippe MAISONOBE & Tristan TORRELLI

---

RÉSUMÉ. — Nous nous donnons, dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , une fonction  $f$  définissant une singularité isolée et nous nous intéressons à l'équation  $uf'_x + vf'_y = wf$ , lorsque la fonction  $w$  est donnée. Nous introduisons les multiplicités d'intersection relatives de  $w$  et  $f'_y$  le long des branches de  $f$  et nous étudions les solutions à l'aide de ces valuations. Grâce aux résultats ainsi démontrés, nous construisons explicitement une équation fonctionnelle vérifiée par  $f$ .

ABSTRACT. — In the ring of holomorphic functions at the origin of  $\mathbb{C}^2$ , we consider the equation  $uf'_x + vf'_y = wf$  where  $f$  and  $w$  are given. We introduce intersection multiplicities relative to  $w$  and  $f'_y$  along the branches of  $f$ , and we study the solutions  $(u, v)$  using these valuations. As an application, we construct an explicit functional equation satisfied by  $f$ .

## Introduction

Soient  $\bar{K} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C}[[x^{1/d}]][[1/x]]$  le corps des séries de Puiseux muni de sa valuation naturelle  $\nu$  et  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i)$  un polynôme unitaire, réduit, de degré  $n \geq 2$ , à coefficient dans  $\bar{K}$ . Nous lui associons

- la famille des multiplicités  $m_{i,j} = \nu(a_i - a_j)$  pour  $1 \leq i \neq j \leq n$ , et
  - la matrice magique  $A = (\alpha_{i,j})$  définie par  $\alpha_{i,j} = -m_{i,j}$  pour  $i \neq j$
- et  $\alpha_{i,i} = \sum_{j \neq i} m_{i,j}$ .

Nous démontrons dans un premier temps que cette matrice est diagonalisable sur  $\mathbb{Q}$  et nous exhibons ses valeurs propres et ses sous-espaces propres (corollaire 1.18).

---

*Mots-clés* : polynôme de Bernstein-Sato, germe de courbe plane, matrices magiques.  
*Classification math.* : 32S40, 32S10, 32C38, 32C40, 14B05.

Nous nous proposons alors d'expliciter une solution  $(u, v)$  du système linéaire

$$uf'_x + vf'_y = wf$$

lorsque  $w$  est un polynôme donné de  $\bar{K}[y]$ , de degré strictement inférieur à  $n$ ; notons

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{K}[y]^{(n)}$$

cet espace de polynômes et  $\varepsilon_i = \prod_{j \neq i} (y - a_j)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , la base d'interpolation de Lagrange (aux coefficients près). Nous filtrons  $\bar{\mathcal{E}}$  à l'aide de la valuation des coordonnées dans cette base :

$$\text{val}(w) = \inf \{ \nu(w(x, a_i)/f'_y(x, a_i)), 1 \leq i \leq n \} \quad \text{pour } w \in \bar{\mathcal{E}}.$$

Nous nous apercevons que les matrices colonnes des coordonnées de  $u$  et  $w$  respectivement, dans cette base, sont liées par

$$\mathcal{W} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{U}$$

où  $\mathcal{A}$  est une matrice magique à coefficients dans  $\bar{K}$ , dont la forme initiale est  $(1/x)A$ . Nous pouvons alors déterminer la valuation de la solution  $(u, v)$  et sa forme initiale, sous certaines conditions (corollaire 2.5).

Nous appliquons ces résultats au cas où  $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$  est un polynôme distingué de degré  $n$ , définissant un germe de courbe plane à singularité isolée; nous en déduisons que lorsque  $w \in \mathbb{C}\{x\}[y]^{(n)}$  est de valuation positive ou nulle,  $wf$  appartient à l'idéal jacobien (corollaire 2.7). Nous retrouvons, par exemple, l'appartenance de  $f^2$  à cet idéal. Nous généralisons également ces résultats au cas où  $f$  n'est plus un polynôme réduit.

En application, nous consacrons la dernière partie à la construction d'un multiple du polynôme de Bernstein de  $f$  (à singularité isolée de multiplicité  $n$ ) et de l'opérateur associé, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$b(s)f^s = P \cdot f^{s+1}.$$

Le polynôme trouvé  $b(s)$  se calcule à partir des valeurs propres de la matrice magique de  $f$ , et il ne dépend donc que du type topologique du germe de courbe défini par  $f$  (théorème 3.6). Cela répond à la question de la construction effective, question qui interpelle les deux premiers auteurs depuis longtemps, après la démonstration de l'existence du polynôme de Bernstein par M. Kashiwara [4] à l'aide de la résolution des singularités.

## 1. Matrices magiques

### 1.1. La matrice magique associée à un bouquet

#### 1.1.1. Les bouquets

Considérons une famille de  $n$  germes de courbes lisses distinctes ( $n \geq 2$ ), transverses à l'axe des  $y$  dans le plan  $\mathbb{C}^2$  des couples  $(x, y)$ . Ce « bouquet de courbes lisses » est défini par un unique polynôme unitaire  $f$  appartenant à  $\mathbb{C}\{x\}[y]$  :

$$f = \prod_{i=1}^n (y - a_i)$$

avec  $a_i \in \mathbb{C}\{x\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , deux à deux distincts. Dans nos résultats, les problèmes de convergence ne posent pas de difficulté sérieuse et nous prendrons les  $a_i$  dans  $\mathbb{C}[[x]]$ . Plus généralement, nous envisagerons les  $a_i$  dans le corps des fractions de  $\mathbb{C}[[x]]$ ,

$$K = \mathbb{C}((x)) = \mathbb{C}[[x]][1/x]$$

et dans la clôture algébrique de  $K$

$$\bar{K} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C}[[x^{1/d}]] [1/x]$$

que nous munissons de sa valuation naturelle  $\nu : \bar{K} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ .

**DEFINITION 1.1.** — Un bouquet de  $n$  branches est une famille ordonnée de  $n$  éléments ( $n \geq 2$ )  $a_i \in \bar{K}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , deux à deux distincts. Le bouquet passe par l'origine lorsque les valuations  $\nu(a_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont strictement positives.

Un bouquet est donc donné par un polynôme unitaire réduit de degré  $n \geq 2$  de  $\bar{K}[y]$  et avec un ordre sur ses racines ; nous continuerons à écrire  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i)$ .

**EXEMPLE 1.2.** — Soit  $f \in \mathbb{C}[[x]][y]$  un polynôme distingué de degré  $n$ , c'est-à-dire unitaire et vérifiant  $f(0, y) = y^n$ . Notons  $d \in \mathbb{N}^*$  le ppcm des degrés de ses facteurs irréductibles. D'après le théorème de Newton-Puiseux, nous savons que

$$f(t^d, y) = \prod_{i=1}^n (y - \phi_i(t))$$

avec  $\phi_i \in \mathbb{C}[[t]]$  et  $\phi_i(0) = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Lorsque  $f$  est réduit, en numérotant ainsi les racines, nous obtenons le bouquet passant par l'origine

$$f = \prod_{i=1}^n (y - \phi_i(x^{1/d})).$$

Nous nous intéresserons aussi à des bouquets de branches multiples.

DEFINITION 1.3. — Un bouquet de branches avec multiplicités est la donnée d'un bouquet de  $n$ -branches et d'une famille  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  d'entiers naturels non nuls. Nous écrirons

$$f_\mu = \prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i}.$$

Lorsque les  $a_i$  appartiennent à  $K$ , nous parlerons alors de « bouquet de courbes méromorphes ». Nous associons à un bouquet donné

$$f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \bar{K}[y]$$

la famille  $\{m_{i,j} = \nu(a_i - a_j); i \neq j\}$  des multiplicités d'intersection de ses branches deux à deux et nous posons

$$m_i = \sum_{j \neq i} m_{i,j} = \nu(f'_y(a_i)).$$

En prenant les valuations dans la somme

$$(a_i - a_j) + (a_j - a_k) + (a_k - a_i) = 0$$

pour des indices distincts  $i, j, k$ , nous constatons encore que le minimum des entiers  $m_{i,j}, m_{j,k}, m_{k,i}$  est atteint pour au moins deux couples d'indices.

### 1.1.2. La matrice magique associée à un bouquet de branches

Rappelons qu'une matrice carrée  $A$  à coefficients dans un anneau commutatif  $\mathcal{K}$  est dite *magique* si la somme des coefficients de ses lignes et de ses colonnes est la même; nous la notons  $s(A)$ .

• L'ensemble des matrices magiques  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathcal{K}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre, notée  $\text{Mag}(n, \mathcal{K})$ , et

$$s : \text{Mag}(n, \mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{K}$$

est un morphisme de  $\mathcal{K}$ -algèbres.

• Le noyau de  $s$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices magiques de somme nulle, est un idéal bilatère de  $\text{Mag}(n, \mathcal{K})$  noté  $\text{Mag}_0(n, \mathcal{K})$ .

• Lorsque  $\mathcal{K}$  est totalement ordonné, nous définissons l'ensemble  $\text{Mag}^*(n, \mathcal{K})$  des matrices magiques exceptionnelles : c'est l'ensemble des matrices magiques  $A = (\alpha_{i,j})$  vérifiant la propriété

$$(\star) \quad \begin{cases} \text{pour tout triplet } (i, j, k) \text{ d'indices distincts, le maxi-} \\ \text{mum de } \alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,i} \text{ est atteint au moins deux fois.} \end{cases}$$

Signalons que cet ensemble  $\text{Mag}^*(n, \mathcal{K})$  n'est en général stable ni par addition, ni par multiplication par un élément de  $\mathcal{K}$ . Nous noterons enfin  $\text{Mag}_0^*(n, \mathcal{K})$  l'ensemble des matrices exceptionnelles de somme nulle.

Donnons maintenant la définition motivant ces rappels et ces notations.

DEFINITION 1.4. — Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \bar{K}[y]$  un polynôme réduit de degré  $n \geq 2$ . La *matrice magique associée au bouquet* défini par  $f$  est la matrice carrée  $A = (\alpha_{i,j})$  à  $n$  lignes et  $n$  colonnes, à coefficients rationnels, définie par  $\alpha_{i,j} = -m_{i,j}$  pour  $i \neq j$  et  $\alpha_{i,i} = m_i = \sum_{j \neq i} m_{i,j}$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Ainsi, la matrice magique associée à un bouquet de courbes lisses est dans  $\text{Mag}_0^*(n, \mathbb{Z})$  et dans  $\text{Mag}_0^*(n, \mathbb{Q})$  pour un bouquet de branches ; elle est de plus symétrique.

REMARQUE 1.5. — Lors de la permutation des branches d'un bouquet, la matrice magique est remplacée par la matrice semblable donnée par l'action de la matrice de permutation.

EXEMPLE 1.6. — La matrice magique associée au bouquet de courbes lisses défini par

$$f = y(y - 1)(y - 1 - x)(y + 1)(y + 1 + x)(y + 1 + x + x^3)$$

(avec  $a_1 = 0, a_2 = 1, \dots$ ) est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas d'un bouquet de branches avec multiplicités, nous considérerons une matrice  $A_\mu$  définie à partir des multiplicités  $m_{i,j}$  et  $\mu$ , et qui généralise la matrice magique  $A$ . Le paragraphe 1.4 lui est entièrement consacré.

### 1.2. L'arbre associé à un bouquet

#### 1.2.1. Le cas d'un bouquet de courbes lisses

Rappelons que la donnée des multiplicités d'intersection  $\{m_{i,j}; i \neq j\}$  d'un bouquet de  $n$  courbes lisses équivaut à la donnée de l'arbre des points infiniment voisins (ou « arbre d'éclatements », ou « arbre de désingularisation »).

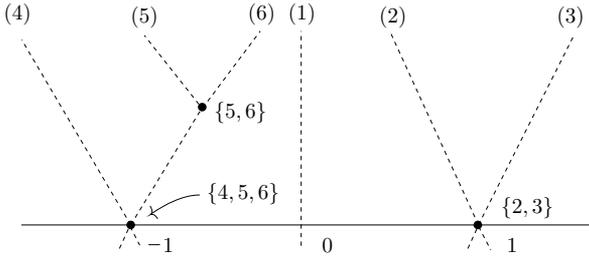


FIG. 1.1. L'arbre d'éclatements de l'exemple 1.6

Une *bifurcation* est un point infiniment voisin dont l'éclatement sépare des branches du bouquet ; en particulier, elle est caractérisée par les branches qui y passent. Nous allons décrire cet arbre d'éclatement en précisant pour chaque bifurcation les indices des branches qui y passent et sa hauteur.

Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des parties  $T$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- le nombre d'éléments de  $T$  est au moins égal à deux ;
- pour tout couple d'indices distincts  $(i, j) \in T^2 : m_{i,j} > 0$  ;
- pour tout couple d'indices distincts  $(i, j) \in T^2$  et pour tout indice  $k$  n'appartenant pas à  $T : m_{i,j}$  est strictement supérieur à  $m_{i,k} = m_{j,k}$ .

On associe alors à une bifurcation de l'arbre d'éclatement l'ensemble  $T \subset \{1, 2, \dots, n\}$  des indices des branches qui y passent ; et la bifurcation correspondant à  $T \in \mathcal{B}$  est le point infiniment voisin dont l'éclatement sépare des branches indexées par  $T$ .

Pour  $T \in \mathcal{B}$ , nous notons :

$$\alpha(T) = \inf\{m_{i,j}; i \in T, j \in T, i \neq j\}.$$

C'est le nombre minimum d'éclatements nécessaires pour séparer des branches indexées par  $T$  (ou encore,  $\alpha(T) - 1$  est la hauteur de la bifurcation correspondant à  $T$ ).

Pour  $T \in \mathcal{B}$ , nous notons également

$$\alpha'(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T = \{1, 2, \dots, n\}, \\ \sup\{m_{i,k}; i \in T, k \notin T\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque  $\alpha'(T)$  est strictement positif, il existe un plus petit majorant strict  $T' \supset T$  dans  $\mathcal{B}$  défini par

$$T' = \{k; \exists i \in T \text{ tel que } m_{i,k} \geq \alpha'(T)\}$$

et on a  $\alpha(T') = \alpha'(T)$ . La bifurcation correspondant à  $T'$  est la bifurcation qui précède celle correspondant à  $T$  dans l'arbre d'éclatements, et  $\gamma(T) = \alpha(T) - \alpha'(T)$  est la longueur de la branche entre ces deux bifurcations (ou encore la différence des hauteurs des bifurcations  $T$  et  $T'$ ). Lorsque  $\alpha'(T) = 0$ , alors  $T$  est une partie maximale de  $\mathcal{B}$  et elle correspond à une première bifurcation de l'arbre. Dans tous les cas, nous posons

$$\gamma(T) = \alpha(T) - \alpha'(T).$$

Constatons enfin que l'ensemble  $\mathcal{B}$  des parties de  $\{1, 2, \dots, n\}$  vérifie les propriétés suivantes :

- si  $T \in \mathcal{B}$  alors  $T$  possède au moins deux éléments ;
- si  $T_1, T_2 \in \mathcal{B}$  alors  $T_1 \cap T_2$  est vide, ou  $T_1 \subset T_2$ , ou  $T_2 \subset T_1$  et la fonction  $\gamma$  définie sur  $\mathcal{B}$  est à valeurs dans les entiers naturels.

Réciproquement, nous pouvons reconstituer la famille des multiplicités  $\{m_{i,j}; i \neq j\}$  à partir de  $(\mathcal{B}, \gamma)$  en posant

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \{i, j\} \text{ n'est inclu dans aucun élément de } \mathcal{B}, \\ \sum_{\{i,j\} \subset T, T \in \mathcal{B}} \gamma(T) & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 1.2.2. Le cas général

Considérons maintenant un bouquet à  $n$  branches. Par analogie avec le cas précédent, nous dirons qu'une partie  $T$  de  $T_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  est un *rameau* associé au bouquet si

- $T$  possède au moins deux éléments ;
- pour tout  $(i, j, k) \in T^2 \times T_0$  avec  $i \neq j$  et  $k \notin T$  :  $m_{i,j} > m_{i,k} = m_{j,k}$ .

Avec cette définition, la partie totale  $T_0$  est donc toujours un rameau. De plus, les notions de rameau et de bifurcation sont les mêmes pour un bouquet de courbes lisses – mise à part éventuellement la partie totale (voir la remarque 1.9). En particulier, la famille  $\mathcal{R}$  des rameaux vérifie les propriétés suivantes :

- un rameau  $T \in \mathcal{R}$  possède au moins deux éléments ;
- si  $T_1, T_2 \in \mathcal{R}$  alors  $T_1 \cap T_2$  est vide, ou  $T_1 \subset T_2$ , ou  $T_2 \subset T_1$ .

Pour  $T \in \mathcal{R}$ , nous posons comme précédemment

$$\alpha(T) = \inf\{m_{i,j} ; i, j \in T, i \neq j\}.$$

Constatons que la fonction  $\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  est strictement décroissante. Lorsque  $T \in \mathcal{R}$  n'est pas la partie totale,  $T$  possède un plus petit majorant strict  $T'$  dans  $\mathcal{R}$ , et on pose  $\gamma(T) = \alpha(T) - \alpha(T')$ . Pour la partie totale, on pose  $\gamma(T_0) = \alpha(T_0) = \inf\{m_{i,j} ; i \neq j\}$ . Nous avons alors de nouveau, pour des indices  $i \neq j$  distincts,

$$(1.1) \quad m_{i,j} = \sum_{\substack{\{i,j\} \subset T \\ T \in \mathcal{R}}} \gamma(T).$$

Nous dirons que  $(\mathcal{R}, \gamma)$  est *l'arbre associé au bouquet*.

DEFINITION 1.7. — Une famille  $\mathcal{R}$  de parties de  $T_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  est une *espèce d'arbre à  $n$  branches* si elle vérifie les conditions

- la partie totale  $T_0$  appartient à  $\mathcal{R}$  ;
- toute partie  $T \in \mathcal{R}$  a au moins deux éléments ;
- si  $T_1, T_2 \in \mathcal{R}$ , alors  $T_1 \cap T_2$  est vide, ou  $T_1 \subset T_2$ , ou  $T_2 \subset T_1$ .

DEFINITION 1.8. — Un *arbre* est un couple  $(\mathcal{R}, \gamma)$  formé d'une espèce d'arbre  $\mathcal{R}$  à  $n$  branches et d'une fonction  $\gamma$  sur  $\mathcal{R}$  à valeurs rationnelles, avec  $\gamma(T) > 0$  pour  $T \neq T_0$ .

Nous pouvons dire que  $\gamma$  donne l'altitude du premier rameau et les dimensions de l'arbre. On démontre facilement qu'un arbre est l'arbre associé à un bouquet, et ce bouquet est un bouquet de courbes méromorphes (resp. lisses) lorsque  $\gamma$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  (resp. dans  $\mathbb{N}$ ).

REMARQUE 1.9. — Dans le cas d'un bouquet de courbes lisses, l'arbre  $(\mathcal{R}, \gamma)$  contient la même information que le couple  $(\mathcal{B}, \gamma)$ . En effet, ceux-ci coïncident lorsque  $T_0 \in \mathcal{B}$ . Et quand  $T_0 \notin \mathcal{B}$ , au moins deux courbes du bouquet coupent l'axe des  $y$  en des points distincts *i.e.*  $m_{i,j} = 0$  pour un couple  $(i, j)$  ; par suite,  $\gamma(T_0) = 0$ .

EXEMPLE 1.10. — L'arbre associé au bouquet de courbes lisses considéré dans l'exemple 1.6 est de l'espèce suivante :

$$\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 6\}\},$$

et la fonction  $\gamma$  associée est définie par

$$\begin{aligned} \gamma(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) &= 0, & \gamma(\{2, 3\}) &= 1, \\ \gamma(\{4, 5, 6\}) &= 1, & \gamma(\{5, 6\}) &= 2. \end{aligned}$$

### 1.3. L'algèbre magique associée à une espèce d'arbre

#### 1.3.1. Décomposition des matrices symétriques de $\text{Mag}^*(n, \mathbb{Q})$

Nous associons à une partie  $T$  de  $T_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ , de cardinal  $n(T)$  au moins égal à deux, la matrice magique exceptionnelle  $A(T) = (\alpha_{i,j})$  symétrique, de somme nulle, définie par

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } i \neq j \text{ et } \{i, j\} \subset T, \\ n(T) - 1 & \text{si } i = j \in T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette notation est motivée par le fait suivant.

PROPOSITION 1.11. — Soient  $A$  la matrice magique associée à un bouquet à  $n$  branches et  $(\mathcal{R}, \gamma)$  l'arbre associé à ce bouquet. Alors

$$A = \sum_{T \in \mathcal{R}} \gamma(T)A(T).$$

C'est une conséquence directe de la formule (1.1).

Dans la suite,  $I$  désignera toujours la matrice identité de taille  $n$ .

COROLLAIRE 1.12. — Soit  $A = (\alpha_{i,j})$  une matrice magique exceptionnelle, symétrique, à coefficients rationnels. Il existe un arbre  $(\mathcal{R}, \gamma)$  tel que

$$A = s(A)I + \sum_{T \in \mathcal{R}} \gamma(T)A(T) \quad \text{avec} \quad \gamma(T_0) = \inf \{ -\alpha_{i,j} ; i \neq j \}.$$

REMARQUE 1.13. — Ce corollaire reste valable lorsque la matrice est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ , la fonction  $\gamma$  étant alors à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ .

#### 1.3.2. L'algèbre magique associée à une espèce d'arbre

Étant fixée une espèce d'arbre  $\mathcal{R}$ , nous étudions ici l'algèbre engendrée par les matrices  $A(T)$ ,  $T \in \mathcal{R}$ . Donnons d'abord quelques propriétés des matrices  $A(T)$ .

FORMULAIRE 1.14. — Soit  $T_1$  et  $T_2$  deux parties de  $T_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinal  $n(T_1)$  et  $n(T_2)$  au moins égal à deux. Alors :

- si  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ , on a

$$A(T_1)A(T_2) = A(T_2)A(T_1) = 0;$$

- si  $T_1 \subset T_2$ , on a

$$A(T_1)A(T_2) = A(T_2)A(T_1) = n(T_2)A(T_1).$$

Afin de diagonaliser  $A(T)$ , fixons maintenant quelques notations.

NOTATION 1.15. — Soient  $E = \mathbb{C}^n$  et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  sa base canonique. Pour une partie  $T$  de  $T_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinal  $n(T)$ , notons

$$E(T) = \bigoplus_{i \in T} \mathbb{C}e_i, \quad F(T) = \left\{ \sum_{i \in T} u_i e_i ; \sum_{i \in T} u_i = 0 \right\}, \quad \omega(T) = \sum_{i \in T} e_i.$$

Nous convenons d'identifier un endomorphisme de  $E$  et sa matrice dans la base canonique. Constatons que  $A(T)(e_j) = -\omega(T) + n(T)e_j$  si  $j \in T$ , et  $A(T)(e_j) = 0$  sinon. Il vient alors aisément

$$E = E(T^c) \oplus F(T) \oplus \mathbb{C}\omega(T),$$

$$\ker A(T) = E(T^c) \oplus \mathbb{C}\omega(T), \quad \ker(A(T) - n(T)I) = F(T)$$

où  $T^c = T_0 - T$  désigne le complémentaire de  $T$ . En particulier,  $A(T)$  est diagonalisable dans  $\mathbb{Q}$ ; ses valeurs propres sont 0 et  $n(T)$ , et les sous-espaces propres correspondants sont respectivement  $E(T^c) \oplus \mathbb{C}\omega(T)$  et  $F(T)$ .

Donnons deux conséquences de ces résultats.

PROPOSITION 1.16. — Soit  $\mathcal{R}$  une espèce d'arbre.

(i) Le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de base  $\{A(T); T \in \mathcal{R}\}$  est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative de matrices magiques symétriques, de somme nulle, diagonalisables.

(ii) Le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de base  $\{I\} \cup \{A(T); T \in \mathcal{R}\}$  est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative de matrices magiques symétriques, diagonalisables.

Nous dirons que la  $\mathbb{Q}$ -algèbre définie au (i) est la  $\mathbb{Q}$ -algèbre magique associée à l'espèce d'arbre  $\mathcal{R}$ .

Démonstration. — Constatons que toutes les matrices  $A(T)$ ,  $T \in \mathcal{R}$ , sont diagonalisables dans une même base (puisque elles sont diagonalisables et commutent entre elles.)

Pour démontrer que les matrices données sont indépendantes, nous vérifions d'abord que  $e_1 + \dots + e_n$  est un vecteur propre de  $I$  qui est dans le noyau de toutes les matrices  $A(T)$ . Il reste alors à montrer que pour tout élément maximal  $T_1$  d'une sous-famille  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ , il existe un vecteur propre

de  $A(T_1)$  associé à la valeur propre  $n(T_1)$  et qui soit dans le noyau de  $A(T)$  pour  $T \in \mathcal{R}'$ ,  $T \neq T_1$ . Cela résulte aisément du fait suivant : pour tout élément  $S \in \mathcal{R}$ , on peut construire un vecteur  $v_S \in E$  qui soit un vecteur propre de  $A(T)$ ,  $T \in \mathcal{R}$ , associé à la valeur propre  $n(T)$  lorsque  $T \supset S$  et à la valeur propre 0 sinon.

Lorsque  $S \in \mathcal{R}$  est minimal, on constate en effet que tout vecteur non nul de  $F(S)$  convient (et  $F(S) \neq 0$  puisque  $n(S)$  est supérieur ou égal à 2,  $\mathcal{R}$  étant une espèce d'arbre). Lorsque  $S \in \mathcal{R}$  n'est pas minimal, notons  $S_1, \dots, S_\ell$  les minorants stricts maximaux de  $S$  dans  $\mathcal{R}$  et  $R$  le complément dans  $S$  :  $S$  est la réunion disjointe  $S_1 \cup \dots \cup S_\ell \cup R$ . Si  $R$  n'est pas vide<sup>(1)</sup>, nous avons la décomposition

$$F(S) = F(R) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} F(S_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{C} \left( \omega(S_i) - \frac{n(S_i)}{n(S)} \omega(S) \right).$$

Si au contraire  $R$  est vide, nous avons

$$F(S) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} F(S_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell-1} \mathbb{C} \left( \omega(S_i) - \frac{n(S_i)}{n(S)} \omega(S) \right).$$

Dans les deux cas, le vecteur  $v_S = \omega(S_1) - (n(S_1)/n(S))\omega(S)$  convient.  $\square$

PROPOSITION 1.17. — *Soit  $\mathcal{R}$  une espèce d'arbre et*

$$A = \sum_{T \in \mathcal{R}} \lambda(T)A(T)$$

*une matrice de la  $\mathbb{Q}$ -algèbre magique associée. Alors  $A$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et*

$$\sum_{\substack{T \in \mathcal{R} \\ T \supset T_1}} \lambda(T)n(T), \quad T_1 \in \mathcal{R}.$$

Explicitons le cas particulier de la matrice magique associée à un bouquet passant par l'origine (définition 1.1). Dans ce cas,  $T_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  est la bifurcation maximale de l'arbre associé au bouquet ; en particulier, on a  $\gamma(T_0) > 0$  et le noyau de la matrice magique correspondante est  $\mathbb{C}\omega$  avec  $\omega = \omega(T_0) = e_1 + \dots + e_n$ . Nous avons alors  $E = F \oplus \mathbb{C}\omega$  où

$$F = F(T_0) = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i e_i ; \sum_{i=1}^n u_i = 0 \right\}.$$

<sup>(1)</sup> C'est en particulier le cas lorsque  $\ell = 1$ .

COROLLAIRE 1.18. — Soit  $A$  la matrice magique associée à un bouquet de branches (resp. de courbes lisses) passant par l'origine et  $(\mathcal{R}, \gamma)$  l'arbre associé. Alors  $A$  induit un automorphisme de  $F$  dont les valeurs propres sont les rationnels (resp. les entiers) strictement positifs

$$\sum_{\substack{T \in \mathcal{R} \\ T \supset T_1}} \gamma(T)n(T), \quad T_1 \in \mathcal{R}.$$

EXEMPLE 1.19. — Dans le cas du bouquet considéré à l'exemple 1.6, les valeurs propres de la matrice magique associée sont 0, 2, 3, 7.

#### 1.4. La matrice magique généralisée associée à un bouquet de branches avec multiplicités

Nous associons ici à un bouquet de branches avec multiplicités (définition 1.3) une matrice carrée qui généralise la notion de matrice magique d'un bouquet de branches.

DEFINITION 1.20. — La matrice magique généralisée associée au bouquet de branches avec multiplicités défini par le polynôme

$$\prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i} \in \bar{K}[y]$$

est la matrice carrée à  $n$  lignes et  $n$  colonnes  $A_\mu = (\alpha_{i,j})$ , à coefficients rationnels définis par  $\alpha_{i,j} = -\mu_i m_{i,j}$  pour  $i \neq j$ , et  $\alpha_{i,i} = \sum_{k \neq i} \mu_k m_{k,i}$ .

En général, cette matrice n'est bien sûr ni magique, ni symétrique. Toutefois, la somme des coefficients de chacune de ses colonnes est nulle. Nous avons aussi l'identité matricielle

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} \sum_j (\mu_j - \mu_1) m_{1,j} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_j (\mu_j - \mu_n) m_{n,j} \end{pmatrix}$$

où  $A$  est la matrice magique associée au bouquet de  $n$  branches sous-jacent. Cette relation permet d'étendre à la matrice  $A_\mu$  les résultats sur  $A$  obtenus au paragraphe 1.3.

Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  une famille d'entiers naturels non nuls. À une partie  $T$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de cardinal  $n(T)$  au moins égal à deux, nous associons la matrice  $A_\mu(T) = (\alpha_{i,j})$  définie par

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} -\mu_i & \text{si } i \neq j \text{ et } \{i, j\} \subset T, \\ \sum_{k \neq i, k \in T} \mu_k & \text{si } i = j \in T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

PROPOSITION 1.21. — Soient  $A_\mu$  la matrice magique généralisée associée à un bouquet de branches avec multiplicités et  $(\mathcal{R}, \gamma)$  l'arbre associé au bouquet de branches sous-jacent. Alors

$$A_\mu = \sum_{T \in \mathcal{R}} \gamma(T) A_\mu(T).$$

C'est une conséquence directe de la proposition 1.11 et de l'identité matricielle reliant  $A_\mu$  et  $A$ . Constatons que le formulaire 1.14 se généralise aussi.

FORMULAIRE 1.22. — Soit  $T_1$  et  $T_2$  deux parties de  $T_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinal  $n(T_1)$  et  $n(T_2)$  au moins égal à 2. Alors :

- si  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ , on a

$$A_\mu(T_1)A_\mu(T_2) = A_\mu(T_2)A_\mu(T_1) = 0;$$

- si  $T_1 \subset T_2$ , on a

$$A_\mu(T_1)A_\mu(T_2) = A_\mu(T_2)A_\mu(T_1) = \sigma_\mu(T_2)A_\mu(T_1)$$

où  $\sigma_\mu(T)$  désigne la somme  $\sum_{i \in T} \mu_i$ , pour toute partie  $T$  de  $T_0$ .

De plus, avec les notations 1.15, le noyau de  $A_\mu(T)$  est  $E(T^c) \oplus \mathbb{C} \omega_\mu(T)$  avec  $\omega_\mu(T) = \sum_{i \in T} \mu_i e_i$ , et le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\sigma_\mu(T)$  est  $F(T)$ . En particulier,  $A_\mu(T)$  est diagonalisable.

PROPOSITION 1.23. — Soit  $A_\mu$  la matrice magique généralisée associée à un bouquet de branches avec multiplicités passant par l'origine et  $(\mathcal{R}, \gamma)$  l'arbre associé. Alors  $A_\mu$  induit un automorphisme de  $F = F(T_0)$  dont les valeurs propres sont les rationnels strictement positifs

$$\sum_{\substack{T \in \mathcal{R} \\ T \supset T_1}} \gamma(T) \sigma_\mu(T), \quad T_1 \in \mathcal{R}.$$

Ce résultat s'obtient de la même manière que dans le cas réduit ; nous ne recopions pas, ici, sa démonstration détaillée.

### 1.5. Le cas particulier des germes irréductibles

Nous détaillons ici les constructions et résultats précédents dans le cas d'un bouquet de branches associé à une courbe irréductible, transverse à l'axe des  $y$ , et définie par un polynôme (irréductible)  $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$  unitaire de degré  $n \geq 2$  en  $y$ .

D'après le théorème de Newton-Puiseux,  $f$  se factorise dans  $\mathbb{C}[[x^{1/n}]] [y]$  :

$$f = \prod_{i=1}^n (y - \phi(\xi^i x^{1/n}))$$

où  $\phi(t) = \sum_{i \geq n} u_i t^i \in \mathbb{C}[[t]]$  et  $\xi \in \mathbb{C}$  est une racine primitive  $n$ -ième de l'unité ; nous posons alors  $a_i = \phi(\xi^i x^{1/n})$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Les multiplicités d'intersection  $m_{i,j}$  s'expriment alors simplement en fonction des exposants caractéristiques  $(\beta_0, \dots, \beta_g)$  de la courbe définie par  $f$ . Rappelons qu'ils sont définis à partir de  $\phi$  de la façon suivante :  $\beta_0 = n$  et pour  $k \geq 1$ ,

$$\beta_k = \inf \{ i ; u_i \neq 0 \text{ et } \text{pgcd}(i, \beta_0, \dots, \beta_{k-1}) < \text{pgcd}(\beta_0, \dots, \beta_{k-1}) \}.$$

On pose alors

- $\epsilon_k = \text{pgcd}\{\beta_0, \dots, \beta_k\}$ ,  $0 \leq k \leq g$  ;
- $n_k = \epsilon_{k-1} / \epsilon_k$ ,  $1 \leq k \leq g$ .

En particulier, nous avons  $\epsilon_0 = n$ ,  $\epsilon_k = n_{k+1} \cdots n_g$  pour  $0 \leq k < g$ ,  $\epsilon_g = 1$ ,  $n = n_1 \cdots n_g$  et  $\phi(t)$  se décompose en une somme

$$\phi(t) = t^n \phi_0(t^n) + t^{\beta_1} \phi_1(t^{\epsilon_1}) + \cdots + t^{\beta_g} \phi_g(t^{\epsilon_g})$$

où  $\phi_k(t) \in \mathbb{C}[[t]]$  est inversible pour  $1 \leq k \leq g$ . Les multiplicités d'intersection  $m_{i,j}$ ,  $i \neq j$ , sont alors données par

$$m_{i,j} = \begin{cases} \beta_1/n & \text{lorsque } |i-j| \text{ n'est pas un multiple de } n_1, \\ \beta_k/n & \text{lorsque } |i-j| \text{ est un multiple de } n_1 \cdots n_{k-1} \\ & \text{qui n'est pas divisible par } n_1 \cdots n_k. \end{cases}$$

Remarquons alors que la matrice magique  $A = (\alpha_{i,j})$  associée au bouquet vérifie la propriété suivante : les coefficients  $\alpha_{i,j}$  sont constants le long des « petites diagonales »  $i = j \pm \ell$ ,  $1 \leq \ell \leq n - 1$ . De plus, un calcul facile montre que les termes diagonaux  $\alpha_{i,i}$  sont tous égaux à

$$\sum_{k=1}^g (\epsilon_{k-1} - \epsilon_k) \frac{\beta_k}{n}.$$

EXEMPLE 1.24. — Si  $n = 6$  et  $\phi(t) = t^8 + t^9$ , alors  $\beta_0 = 6$ ,  $\beta_1 = 8$ ,  $\beta_2 = 9$ ,  $\epsilon_0 = 6$ ,  $\epsilon_1 = 2$  et  $\epsilon_2 = 1$ . La matrice magique associée au bouquet est alors

$$\begin{pmatrix} \frac{41}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{41}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{41}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{41}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{41}{6} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{41}{6} \end{pmatrix}.$$

Explicitons maintenant l'arbre associé au bouquet. Lorsque  $g = 1$ , l'espace d'arbre  $\mathcal{R}$  est réduit à la partie totale  $T_0$  et  $\gamma(T_0) = \beta_1/n$ . Supposons maintenant que  $g$  soit au moins égal à 2. La famille  $\mathcal{R}$  est alors constituée de  $T_0$  et des parties  $T_{i_1, \dots, i_r}$ ,  $1 \leq r \leq g - 1$ ,  $1 \leq i_1 \leq n_1$  et  $0 \leq i_k \leq n_k - 1$  pour  $2 \leq k \leq r$ , définies par

$$T_{i_1, \dots, i_r} = \left\{ i_1 + \sum_{k=2}^r i_k \times n_1 \cdots n_{k-1} + \ell \times n_1 \cdots n_r ; 0 \leq \ell \leq \epsilon_r - 1 \right\}.$$

En d'autres termes,  $T_{i_1, \dots, i_r}$  est l'ensemble des indices  $i \in T_0$  tels que pour tout  $1 \leq j \leq r$ , le reste de la division euclidienne de  $i$  par  $n_1 \cdots n_j$  soit égal à  $i_1 + \sum_{k=2}^j i_k \times n_1 \cdots n_{j-1}$ . Ainsi  $n(T_{i_1, \dots, i_r}) = \epsilon_r$ ,  $T_0$  est la réunion disjointe des parties  $T_1, \dots, T_{n_1}$ , et pour  $g \geq 3$ ,  $1 \leq r \leq g - 2$ ,  $T_{i_1, \dots, i_r}$  est la réunion disjointe de  $T_{i_1, \dots, i_r, 0}, \dots, T_{i_1, \dots, i_r, n_{r+1}-1}$ .

La fonction  $\gamma$  est définie par  $\gamma(T_0) = \beta_1/n$  et  $\gamma(T_{i_1, \dots, i_r}) = (\beta_{r+1} - \beta_r)/n$  pour  $1 \leq r \leq g - 1$  (indépendamment de la valeur des indices  $i_1, \dots, i_r$ ).

Il résulte alors directement du corollaire 1.18 que l'endomorphisme de  $F$  induit par la matrice magique  $A$  a pour valeurs propres

$$\begin{aligned} &\beta_1, \\ &\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)\epsilon_1/n, \\ &\vdots \\ &\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)\epsilon_1/n + \cdots + (\beta_g - \beta_{g-1})\epsilon_{g-1}/n. \end{aligned}$$

## 2. Division par l'idéal jacobien

### 2.1. Préliminaires

Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \overline{K}[y]$  un bouquet à  $n$  branches passant par l'origine (définition 1.1) ; en particulier, les polynômes  $f'_x$  et  $f'_y$  sont premiers entre eux dans  $\overline{K}[y]$ .

Notons  $\mathcal{E} = K[y]^{(n)}$  et  $\bar{\mathcal{E}} = \bar{K}[y]^{(n)}$  les espaces de polynômes de degré en  $y$  strictement inférieur à  $n$ , à coefficients dans  $K$  et  $\bar{K}$  respectivement,  $\mathcal{F} = K[y]^{(n-1)}$  et  $\bar{\mathcal{F}} = \bar{K}[y]^{(n-1)}$  les sous-espaces de polynômes de degré strictement inférieur à  $n-1$ . Remarquons alors que la famille de polynômes

$$\varepsilon_i = \prod_{j \neq i} (y - a_j), \quad 1 \leq i \leq n,$$

forme une base du  $\bar{K}$ -espace vectoriel  $\bar{\mathcal{E}}$ . En particulier, l'espace  $\bar{\mathcal{F}}$  s'identifie à l'hyperplan de  $\bar{\mathcal{E}}$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i ; u_i \in \bar{K}, \sum_{i=1}^n u_i = 0 \right\},$$

et nous avons les décompositions

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus K\omega, \quad \bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{F}} \oplus \bar{K}\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = f'_y.$$

Comme  $f'_x$  et  $f'_y$  sont premiers entre eux, l'équation

$$u f'_x + v f'_y = w$$

admet une unique solution  $(u, v)$  dans  $\bar{\mathcal{F}} \times \bar{K}[y]$  pour tout  $w \in \bar{K}[y]$ . Lorsque  $w = \tilde{w}f$  avec  $\tilde{w} \in \bar{\mathcal{F}}$ , cette solution est dans  $\bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{E}}$  et elle s'obtient par résolution d'un système de Cramer. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons expliciter cette solution en travaillant dans la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ . À cette fin, introduisons maintenant une filtration naturelle sur les espaces  $\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}}, \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ .

Considérons  $(\bar{K}_r)_{r \in \mathbb{Q}}$  la filtration décroissante du corps  $\bar{K}$  définie par

$$\bar{K}_r = \{a \in \bar{K} ; \nu(a) \geq r\}$$

pour  $r \in \mathbb{Q}$ . Nous munissons alors les espaces  $\bar{\mathcal{E}}$  et  $\bar{\mathcal{F}}$  des filtrations

$$\bar{\mathcal{E}}_r = \bigoplus_{i=1}^n \bar{K}_r \varepsilon_i, \quad \bar{\mathcal{F}}_r = \bar{\mathcal{E}}_r \cap \bar{\mathcal{F}} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \bar{K}_r (\varepsilon_i - \varepsilon_n)$$

définies par le « poids »

$$\text{val} \left( \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i \right) = \inf \{ \nu(u_1), \dots, \nu(u_n) \}.$$

Ces filtrations induisent bien sûr à leur tour des filtrations sur  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  en posant  $\mathcal{E}_r = \bar{\mathcal{E}}_r \cap \mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}_r = \bar{\mathcal{F}}_r \cap \mathcal{F}$ , pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ . Pour  $r \in \mathbb{Q}$ , notons encore  $\bar{\mathcal{E}}_{>r}$  (resp.  $\bar{\mathcal{F}}_{>r}$ ,  $\mathcal{E}_{>r}$ ,  $\mathcal{F}_{>r}$ ) le sous-espace de  $\bar{\mathcal{E}}_r$  (resp.  $\bar{\mathcal{F}}_r$ ,  $\mathcal{E}_r$ ,  $\mathcal{F}_r$ ) formé des éléments de valuation strictement supérieure à  $r$ .

REMARQUE 2.1. — (i) Les polynômes  $\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , interviennent bien sûr dans la formule d'interpolation de Lagrange ; en particulier, si  $u \in \bar{\mathcal{E}}$  alors  $\sum_{i=1}^n (u(x, a_i)/\varepsilon_i(a_i))\varepsilon_i$  est sa décomposition dans la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ .

(ii) Il est aisé de constater que  $\mathcal{E}_0$  est inclu dans  $\mathbb{C}[[x]][y]$  lorsque le bouquet défini par  $f$  passe par l'origine.

(iii) Avec les notations introduites au paragraphe 1.3.2, le terme de degré  $r$  du gradué associé à la filtration  $(\bar{\mathcal{E}}_r)_{r \in \mathbb{Q}}$  de  $\bar{\mathcal{E}}$ ,  $\text{gr}_r \bar{\mathcal{E}}$ , s'identifie à  $x^r E$  pour  $r \in \mathbb{Q}$ ; de même,  $\text{gr}_r \bar{\mathcal{F}}$  s'identifie à  $x^r F$ .

Pour un élément  $u$  de  $\bar{\mathcal{E}}_r$ , nous noterons enfin  $\text{in}_r u \in \text{gr}_r \bar{\mathcal{E}}$  sa partie initiale en degré  $r$ .

### 2.2. La résolution de l'équation $uf'_x + vf'_y = wf$

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'équation

$$(2.1) \quad uf'_x + vf'_y = wf$$

lorsque  $f$  définit un bouquet passant par l'origine, avec ou sans multiplicités.

#### 2.2.1. Le cas d'un bouquet à $n$ branches

La résolution de l'équation (2.1) s'appuie sur le résultat suivant.

LEMME 2.2. — Soit  $f \in \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \bar{K}[y]$  un polynôme réduit de degré  $n \geq 2$ . Soit  $w = \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i$  un élément de  $\bar{\mathcal{F}}$ . Alors toute solution  $(u = \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i, v)$  dans  $\bar{\mathcal{E}} \times \bar{\mathcal{E}}$  de l'équation  $uf'_x + vf'_y = wf$  vérifie

$$v = \sum_{i=1}^n u_i a'_i \varepsilon_i,$$

$$w_i = \left( \sum_{j \neq i} \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} \right) u_i - \sum_{j \neq i} \left( \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} \right) u_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Démonstration. — Posons  $v = \sum_{i=1}^n v_i \varepsilon_i$ . Après division par  $f^2$ , l'équation (2.1) s'écrit

$$\sum_{i,j} \frac{-u_i a'_j + v_i}{(y - a_i)(y - a_j)} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{y - a_i}.$$

Nous en déduisons d'abord  $v_i = u_i a'_i, 1 \leq i \leq n$ . Par ailleurs, nous avons, pour tout  $i \neq j$ , la décomposition

$$(2.2) \quad \frac{1}{(y - a_i)(y - a_j)} = \frac{1}{a_i - a_j} \left[ \frac{1}{y - a_i} - \frac{1}{y - a_j} \right].$$

En substituant dans le système, nous obtenons alors

$$\sum_{i \neq j} \frac{u_i(a'_i - a'_j)}{a_i - a_j} \left[ \frac{1}{y - a_i} - \frac{1}{y - a_j} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{y - a_i}.$$

D'où l'assertion.  $\square$

DEFINITION 2.3. — Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \overline{K}[y]$  un polynôme réduit de degré  $n \geq 2$ . La *matrice magique complète associée au bouquet* défini par  $f$  est la matrice magique  $\mathcal{A}$  de taille  $n \times n$ , symétrique, de somme nulle, à coefficients dans  $\overline{K}$ , de terme général  $-(a'_i - a'_j)/(a_i - a_j)$  pour  $1 \leq i \neq j \leq n$ .

Si  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  sont les matrices colonnes formées respectivement par les coordonnées de  $u$  et  $w$  dans la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\overline{\mathcal{E}}$ , nous avons alors l'identité matricielle

$$\mathcal{W} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{U}.$$

En particulier, on peut expliciter la solution de l'équation (2.1) lorsque ce système linéaire est inversible.

PROPOSITION 2.4. — Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \overline{K}[y]$  un polynôme réduit définissant un bouquet passant par l'origine. La matrice magique complète  $\mathcal{A}$  associée induit un automorphisme de  $\overline{\mathcal{F}}$  noté  $\mathcal{A}_{|\overline{\mathcal{F}}}$ . De plus, le gradué du morphisme inverse  $(\mathcal{A}_{|\overline{\mathcal{F}}})^{-1}$  est de degré  $+1$  et s'identifie à  $x(\mathcal{A}_{|F})^{-1}$  où  $\mathcal{A}_{|F}$  est la restriction à  $F$  de l'endomorphisme de  $E$  induit par la matrice magique  $\mathcal{A}$  associée au bouquet.

Démonstration. — Pour  $i \neq j$ , nous posons  $a_i - a_j = x^{m_{i,j}} c_{i,j}$ , où  $c_{i,j} \in \overline{K}$  est de valuation nulle. Nous avons alors

$$-\frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} = -\frac{m_{i,j}}{x} - \frac{c'_{i,j}}{c_{i,j}}.$$

Par suite, la matrice  $\mathcal{A}$  se décompose en la somme  $\mathcal{A} = (1/x)\mathcal{A} + \mathcal{A}'$ , où  $\mathcal{A}'$  est une matrice magique, symétrique, de somme nulle, à coefficients dans  $\overline{K}$ , de valuation<sup>(2)</sup> strictement supérieure à  $-1$ .

<sup>(2)</sup> Cette valuation est positive ou nulle lorsque nous avons affaire à un bouquet de branches méromorphes.

Comme la restriction de  $A$  à  $F$  est un endomorphisme inversible (corollaire 1.18), la matrice  $\mathcal{A}$  induit donc un automorphisme de  $\bar{\mathcal{F}}$  d'inverse

$$(A_{|\bar{\mathcal{F}}})^{-1} = (I + x(A_{|\bar{\mathcal{F}}})^{-1} \mathcal{A}'_{|\bar{\mathcal{F}}})^{-1} x(A_{|F})^{-1} = x(A_{|F})^{-1} + x\mathcal{S},$$

où  $\mathcal{S}$  désigne un endomorphisme de  $\bar{\mathcal{F}}$  dont la matrice dans la base

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)$$

a ses coefficients de valuation strictement positive. Sous les identifications faites à la remarque 2.1, le gradué associé au morphisme  $(A_{|\bar{\mathcal{F}}})^{-1}$  est bien de degré  $+1$ , et  $\text{gr}(A_{|\bar{\mathcal{F}}})^{-1} = x(A_{|F})^{-1}$ . □

**COROLLAIRE 2.5.** — Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \bar{K}[y]$  un polynôme réduit définissant un bouquet passant par l'origine. Notons  $A$  et  $\mathcal{A}$  les matrices magiques associées. Pour  $w$  appartenant à  $\bar{\mathcal{F}}_r$ , la solution dans  $\bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{E}}$  de l'équation  $u f'_x + v f'_y = w f$  est donnée par

$$u = (A_{|\bar{\mathcal{F}}})^{-1} w \in \bar{\mathcal{F}}_{r+1}, \quad v = \sum_{i=1}^n u_i a'_i \varepsilon_i \in \bar{\mathcal{E}}_{>r}$$

où  $u = \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i$ . En particulier,

$$\bar{\mathcal{F}}_r f \subset \bar{\mathcal{F}}_{r+1} f'_x + \bar{\mathcal{E}}_{>r} f'_y.$$

Plus précisément, si  $\text{in}_r w = x^r W \in x^r E$ , alors  $\text{in}_{r+1} u = x^{r+1} (A_{|F})^{-1} W$ .

**REMARQUE 2.6.** — (i) Lorsque  $w$  est de degré supérieur ou égal à  $n - 1$ , la solution  $(u, v)$  dans  $\bar{\mathcal{F}} \times \bar{K}[y]$  de l'équation (2.1) se déduit bien sûr du résultat précédent, en remplaçant  $w$  par son reste dans la division par  $f'_y$ . En particulier, pour résoudre l'équation  $u f'_x + v f'_y = f^2$ , on appliquera la proposition précédente à  $w = f - (y/n - \sigma/n^2) f'_y = \sum_{i=1}^n (\sigma/n^2 - a_i/n) \varepsilon_i$  avec  $\sigma = \sum_{i=1}^n a_i$ .

(ii) Lorsque tous les éléments  $a_i$  appartiennent au corps intermédiaire  $K' = \mathbb{C}[[x^{1/d}]] [1/x]$  pour un certain entier naturel  $d$ , nous pouvons remplacer dans tous les calculs précédents  $\bar{K}$  par  $K'$ ; les valuations sont alors à valeurs dans  $(1/d)\mathbb{Z}$ . En particulier si  $f$  est un bouquet de courbes lisses passant par l'origine, tout se passe dans le corps  $K = \mathbb{C}((x))$ .

Précisons le corollaire précédent dans le cas d'un polynôme distingué réduit (exemple 1.2).

**COROLLAIRE 2.7.** — Soit  $f \in \mathbb{C}[[x]][y]$  un polynôme distingué, réduit, de degré  $n \geq 2$ . Notons  $d \in \mathbb{N}$  le ppcm des degrés de ses facteurs irréductibles. Alors, pour tout  $r \in (1/d)\mathbb{Z}$ ,

$$\mathcal{F}_r f \subset \mathcal{F}_{r+1} f'_x + \mathcal{E}_{>r} f'_y.$$

*Démonstration.* — En effet, pour tout élément  $w \in \mathcal{F}$ , la solution  $(u, v)$  du système  $K$ -linéaire  $uf'_x + vf'_y = wf$  est bien dans  $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ .  $\square$

Comme exemple d'application, prenons

$$w = f - \left( \frac{y}{n} - \frac{\sigma}{n^2} \right) f'_y = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma}{n^2} - \frac{a_i}{n} \right) \varepsilon_i,$$

qui appartient à  $\mathcal{F}_{>0}$ . Nous obtenons alors

$$wf \in \mathcal{F}_{>1} f'_x + \mathcal{E}_{>0} f'_y.$$

En se servant de la remarque 2.1, nous en déduisons que  $f^2$  appartient à l'idéal jacobien. C'est là l'idée de la première démonstration de cette appartenance dans un manuscrit [2] non publié du premier auteur. Pour généraliser ce résultat à un germe de courbe à singularité isolée, c'est-à-dire lorsque  $f$  est le produit d'un polynôme distingué réduit par une unité, il convient d'itérer le corollaire et d'utiliser le théorème d'annulation de Krull.

### 2.2.2. Le cas d'un bouquet avec multiplicités

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la résolution de l'équation

$$(2.3) \quad u(f_\mu)'_x + v(f_\mu)'_y = wf_\mu$$

lorsque le polynôme  $f_\mu = \prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i} \in \overline{K}[y]$  définit un bouquet de  $n$  branches avec multiplicités, passant par l'origine (définition 1.3). Comme  $(f_\mu)'_x = g \prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i - 1}$  et  $(f_\mu)'_y = h \prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i - 1}$  avec  $g$  et  $h$  premiers entre eux dans  $\overline{K}[y]$ , il y a encore existence et unicité d'un couple solution  $(u, v) \in \overline{\mathcal{F}} \times \overline{\mathcal{E}}$  pour l'équation (2.3) lorsque  $w \in \overline{\mathcal{F}}$ . La résolution de cette équation fait aussi intervenir une matrice carrée à coefficients dans  $\overline{K}$ .

DEFINITION 2.8. — Soit  $f_\mu = \prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i} \in \overline{K}[y]$  un polynôme définissant un bouquet de  $n$ -branches avec multiplicités. Sa *matrice magique complète associée* est la matrice  $\mathcal{A}_\mu$  de taille  $n \times n$  dont la somme des termes de chacune de ses colonnes est nulle, à coefficients dans  $\overline{K}$ , de terme général  $-\mu_i(a'_i - a'_j)/(a_i - a_j)$  pour  $1 \leq i \neq j \leq n$ .

Énonçons le pendant du corollaire 2.5.

PROPOSITION 2.9. — Soit  $f_\mu = \prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i} \in \overline{K}[y]$  un polynôme définissant un bouquet avec multiplicités, passant par l'origine. Soient  $A_\mu$

et  $\mathcal{A}_\mu$  les matrices associées. Pour tout  $w$  appartenant à  $\bar{\mathcal{F}}_r$ , la solution dans  $\bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{E}}$  de l'équation  $u(f_\mu)'_x + v(f_\mu)'_y = wf_\mu$  est donnée par

$$u = (A_{\mu|\bar{\mathcal{F}}})^{-1}w \in \bar{\mathcal{F}}_{r+1}, \quad v = \sum_{i=1}^n u_i a'_i \varepsilon_i \in \bar{\mathcal{E}}_{>r}$$

où  $u = \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i$ . En particulier,

$$\bar{\mathcal{F}}_r f_\mu \subset \bar{\mathcal{F}}_{r+1}(f_\mu)'_x + \bar{\mathcal{E}}_{>r}(f_\mu)'_y.$$

Plus précisément, si  $\text{in}_r w = x^r W \in x^r E$ , alors  $\text{in}_{r+1} u = x^{r+1}(A_{\mu|F})^{-1} W$ .

*Démonstration.* — Nous conservons les notations du paragraphe 2.1 ; en particulier,  $v = \sum_{i=1}^n v_i \varepsilon_i$  et  $w = \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i$  avec  $\sum_{i=1}^n w_i = 0$ . Après division par  $f_\mu \times \prod_{i=1}^n (y - a_i)$ , l'équation (2.3) devient

$$\sum_{i,j} \frac{-u_i \mu_j a'_j + v_i \mu_j}{(y - a_i)(y - a_j)} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{y - a_i}.$$

À nouveau, nous avons  $v_i = u_i a'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  et

$$\sum_{i \neq j} \frac{-u_i \mu_j (a'_i - a'_j)}{a_i - a_j} \left[ \frac{1}{y - a_i} - \frac{1}{y - a_j} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{y - a_i}.$$

Par suite,

$$w_i = \left( \sum_{j \neq i} \mu_j \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} \right) u_i - \sum_{j \neq i} \left( \mu_i \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} \right) u_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Si  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  sont les matrices colonnes des coordonnées de  $u$  et  $w$ , cette identité s'écrit  $\mathcal{W} = \mathcal{A}_\mu \cdot \mathcal{U}$ . De la même manière que lors de la preuve de la proposition 2.4, nous avons la décomposition  $\mathcal{A}_\mu = (1/x)\mathcal{A}_\mu + \mathcal{A}'$ , où  $\mathcal{A}_\mu$  est la matrice magique généralisée associée au bouquet de branches avec multiplicités défini par  $f_\mu$  (définition 1.20), et  $\mathcal{A}'$  est une matrice à coefficients dans  $\bar{K}$  de valuation strictement supérieure à  $-1$ . Comme la restriction de  $\mathcal{A}_\mu$  à  $F$  est inversible (proposition 1.23), la matrice  $\mathcal{A}_\mu$  induit un endomorphisme inversible de  $\bar{\mathcal{F}}$  dont le gradué  $\text{gr}(A_{\mu|\bar{\mathcal{F}}})^{-1}$  s'identifie à  $x(A_{\mu|F})^{-1}$ . □

**COROLLAIRE 2.10.** — Soit  $f \in \mathbb{C}[[x]][[y]]$  un polynôme distingué de degré  $n \geq 2$ . Notons  $d \in \mathbb{N}$  le ppcm des degrés de ses facteurs irréductibles. Pour tout rationnel  $r \in (1/d)\mathbb{Z}$ ,

$$\mathcal{F}_r f \subset \mathcal{F}_{r+1} f'_x + \mathcal{E}_{>r} f'_y.$$

### 2.3. L'opérateur nabla

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'opérateur  $\nabla : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$  que nous allons définir. Son utilité sera patente dans la partie 3.

DEFINITION 2.11. — Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \bar{K}[y]$  un polynôme réduit définissant un bouquet de branches. À tout  $w \in \bar{\mathcal{F}}$ , on associe  $\nabla w \in \bar{\mathcal{F}}$  défini par

$$\nabla w = -u'_x - v'_y$$

où  $(u, v)$  est la solution dans  $\bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{E}}$  de l'équation  $uf'_x + vf'_y = wf$ .

Les résultats obtenus au paragraphe précédent vont bien évidemment nous permettre de préciser  $\text{gr} \nabla$ . Faisons d'abord une remarque préliminaire.

LEMME 2.12. — Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \bar{K}[y]$  un polynôme réduit définissant un bouquet de branches. Soit  $w \in \bar{\mathcal{F}}$  et  $(u, v)$  la solution dans  $\bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{E}}$  de l'équation  $uf'_x + vf'_y = wf$ . Alors

$$\nabla w = -\left[ \sum_{i=1}^n u'_i \varepsilon_i \right] - w$$

où  $\sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i$  est la décomposition de  $u$  dans la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ .

Démonstration. — En utilisant que  $f = (y - a_i)\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , nous obtenons les identités

$$(2.4) \quad \frac{f'_x}{f} = -\frac{a'_i}{y - a_i} + \frac{(\varepsilon_i)'_x}{\varepsilon_i}, \quad \frac{f'_y}{f} = \frac{1}{y - a_i} + \frac{(\varepsilon_i)'_y}{\varepsilon_i}.$$

Par ailleurs, nous avons  $v = \sum_{i=1}^n a'_i u_i \varepsilon_i$  (lemme 2.2). Il vient alors

$$u_i(\varepsilon_i)'_x + v_i(\varepsilon_i)'_y = (u_i f'_x + v_i f'_y)(\varepsilon_i / f)$$

et donc  $\sum_{i=1}^n (u_i(\varepsilon_i)'_x + v_i(\varepsilon_i)'_y) = (uf'_x + vf'_y)/f = w$ . L'assertion en résulte sans peine.  $\square$

PROPOSITION 2.13. — Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i)$  un polynôme définissant un bouquet passant par l'origine et  $A$  la matrice magique associée. Pour tout rationnel  $r \in \mathbb{Q}$ , l'opérateur  $\nabla$  induit un endomorphisme de  $\bar{\mathcal{F}}_r$ . De plus

$$\text{gr}_r \nabla = -I - (1 + r)(A|_F)^{-1}$$

sous l'identification de  $\text{gr}_r \bar{\mathcal{F}}$  avec  $x^r F$ .

*Démonstration.* — Notons  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{U}'$ , et  $\mathcal{W}'$ , les matrices colonnes formées respectivement par les coordonnées de  $u$ , de  $w$  et de leur dérivées partielles en  $x$  dans la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\bar{\mathcal{E}}$ . D'après la preuve de la proposition 2.4 et l'identité  $\mathcal{W} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{U}$  (lemme 2.2), nous avons  $\mathcal{U} = x((A|_F)^{-1} + \mathcal{S}) \cdot \mathcal{W}$  où  $A$  est la matrice magique associée au bouquet et  $\mathcal{S}$  est une matrice à coefficients de valuation strictement positive. En dérivant, il vient

$$\mathcal{U}' = ((A|_F)^{-1} + \mathcal{T}) \cdot \mathcal{W} + x((A|_F)^{-1} + \mathcal{S}) \cdot \mathcal{W}'$$

avec  $\mathcal{T} = \mathcal{S} + x\mathcal{S}'_x$  à coefficients de valuation strictement positive. En particulier, si  $w$  appartient à  $\bar{\mathcal{F}}_r$ , alors  $\nabla w$  y appartient aussi. De plus, si  $U'$  et  $W$  désignent les formes initiales en degré  $r$  des matrices colonnes  $\mathcal{U}'$  et  $\mathcal{W}$ , nous avons alors  $U' = (1+r)(A|_F)^{-1}W$  et, avec le lemme précédent,  $\text{gr} \nabla(W) = -(I + (1+r)(A|_F)^{-1}) \cdot W$ . □

Intéressons-nous maintenant au cas d'un bouquet de branches avec multiplicités passant par l'origine, défini par  $f_\mu = \prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i}$ . D'après ce qui a été expliqué au paragraphe 2.2.2,  $\nabla$  est encore bien défini comme endomorphisme de  $\bar{\mathcal{F}}$ .

Les résultats de la proposition précédente s'étendent sans peine.

PROPOSITION 2.14. — *Soit  $f_\mu = \prod_{i=1}^n (y - a_i)^{\mu_i}$  un polynôme définissant un bouquet de branches avec multiplicités, passant par l'origine. Notons  $A_\mu$  la matrice magique généralisée associée et  $A$  la matrice magique associée au bouquet de  $n$  branches sous jacent. Pour tout rationnel  $r \in \mathbb{Q}$ , l'opérateur  $\nabla$  induit un endomorphisme de  $\bar{\mathcal{F}}_r$ . De plus*

$$\text{gr}_r \nabla = -(A + (1+r)I)(A_{\mu|F})^{-1}$$

sous l'identification de  $\text{gr}_r \bar{\mathcal{F}}$  avec  $x^r F$ .

*Démonstration.* — Nous reprenons les notations utilisées lors de la preuve de la proposition 2.13 ; posons encore

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^n (u_i(\varepsilon_i)'_x + v_i(\varepsilon_i)'_y) \in \bar{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad f = \prod_{i=1}^n (y - a_i).$$

Le calcul mené au lemme 2.12 conduit à  $\bar{w} = (uf'_x + vf'_y)/f$ , puis

$$(2.5) \quad \nabla w = - \left[ \sum_{i=1}^n u'_i \varepsilon_i \right] - \bar{w}.$$

En particulier, la solution  $(u, v) \in \bar{\mathcal{F}} \times \bar{\mathcal{E}}$  de l'équation  $u(f_\mu)'_x + v(f_\mu)'_y = wf_\mu$  est aussi la solution de  $uf'_x + vf'_y = \bar{w}f$ . D'après le lemme 2.2, nous

avons donc  $\overline{W} = (1/x)(A + \mathcal{A}') \cdot \mathcal{U}$ , où  $\overline{W}$  est la matrice colonne des coordonnées de  $\overline{w}$ , et  $\mathcal{A}'$  est une matrice à coefficients dans  $\overline{K}$  de valuation strictement positive. Par ailleurs, d'après la preuve de la proposition 2.9, nous avons aussi  $\mathcal{U} = x((A_{\mu|F})^{-1} + \mathcal{S}) \cdot \mathcal{W}$ , et donc encore

$$\mathcal{U}' = ((A_{\mu|F})^{-1} + \mathcal{T}) \cdot \mathcal{W} + x((A_{\mu|F})^{-1} + \mathcal{S}) \cdot \mathcal{W}'$$

où  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont des matrices à coefficients de valuation strictement positive.

À partir de l'identité (2.5), nous en déduisons alors que le vecteur colonne des coordonnées de  $\nabla w$  est donné par la somme

$$-((A + I)(A_{\mu|F})^{-1} + \mathcal{L}) \cdot \mathcal{W} - x((A_{\mu|F})^{-1} + \mathcal{S}) \cdot \mathcal{W}'$$

où  $\mathcal{L}$  est une matrice à coefficients de valuation strictement positive. En conséquence,  $\nabla w$  appartient bien à  $\overline{\mathcal{F}}_r$  lorsque  $w \in \overline{\mathcal{F}}_r$ , et sa forme initiale en degré  $r$  est  $-(A + (1 + r)I)(A_{\mu|F})^{-1} \cdot W$ , où  $W = \text{in}_r w \in x^r F$ .  $\square$

**2.4. La résolution de l'équation  $uf'_x + vf'_y = w$**

Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \overline{K}[y]$  un polynôme réduit. Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier l'équation

$$(2.6) \quad uf'_x + vf'_y = w$$

pour  $w$  donné dans  $\overline{\mathcal{E}}$ . Nous savons que cette équation admet une unique solution  $(u, v)$  dans  $\overline{\mathcal{F}} \times \overline{\mathcal{F}}$ . Avant de la déterminer précisément dans le cas d'un bouquet passant par l'origine, fixons quelques notations.

NOTATION 2.15. — Étant donné un bouquet à  $n$  branches

$$f = \prod_{i=1}^n (y - a_i)$$

passant par l'origine, nous notons  $\theta = \pi - 1$  et  $\tau = \pi - \delta$  avec

$$\begin{aligned} \pi &= \sup \{m_i + m_{i,j}; 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}, \\ \delta &= \inf \{\nu(a_i); 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.16. — Soit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i) \in \overline{K}[y]$  un polynôme réduit définissant un bouquet passant par l'origine.

(i) Pour tout  $w$  appartenant à  $\overline{\mathcal{E}}$ , la solution dans  $\overline{\mathcal{F}} \times \overline{\mathcal{F}}$  de l'équation  $uf'_x + vf'_y = w$  est donnée par

$$u = (A_{|\overline{\mathcal{F}}})^{-1} \mathcal{B}w, \quad v = \sum_{i=1}^n \left( u_i a'_i + \left( \frac{w_i}{\varepsilon_i(a_i)} \right) \varepsilon_i \right)$$

où  $u = \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i$  et  $\mathcal{B}$  désigne l'endomorphisme de  $\bar{\mathcal{E}}$  induit par la matrice magique de  $\text{Mag}_0(n, \bar{K})$ , symétrique, de terme général

$$\beta_{i,j} = -(\varepsilon_i(a_i) - \varepsilon_j(a_j)) / ((a_i - a_j) \cdot \varepsilon_i(a_i) \cdot \varepsilon_j(a_j)), \quad i \neq j.$$

En particulier, pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,

$$\bar{\mathcal{E}}_r \subset \bar{\mathcal{F}}_{r-\theta} f'_x + \bar{\mathcal{F}}_{r-\tau} f'_y.$$

(ii) Soit  $w = u f'_x + v f'_y$  un élément de  $\bar{\mathcal{E}}_r$  avec  $u \in \bar{\mathcal{F}}_{r-\theta}$  et  $v \in \bar{\mathcal{F}}_{r-\tau}$ . Alors  $u'_x + v'_y$  appartient à  $\bar{\mathcal{F}}_{r-\pi}$ .

*Démonstration.* — Posons  $v = \sum_{i=1}^n v_i \varepsilon_i$  avec  $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ . En divisant l'équation par  $f^2$  puis en utilisant l'identité

$$\frac{1}{f} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_j(a_j)} \cdot \frac{1}{y - a_j},$$

nous obtenons

$$\sum_{i,j} \frac{-u_i a'_j + v_i}{(y - a_i)(y - a_j)} = \frac{1}{f} \left( \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{y - a_i} \right) = \sum_{i,j} \frac{w_i}{\varepsilon_j(a_j)} \cdot \frac{1}{(y - a_i)(y - a_j)}.$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples, l'identification fournit

$$(2.7) \quad \frac{w_i}{\varepsilon_i(a_i)} = v_i - u_i a'_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Après élimination des  $v_i$ , l'équation devient

$$\sum_{i \neq j} \frac{u_i (a'_i - a'_j)}{(y - a_i)(y - a_j)} = \sum_{i \neq j} w_i \left( \frac{1}{\varepsilon_j(a_j)} - \frac{1}{\varepsilon_i(a_i)} \right) \frac{1}{(y - a_i)(y - a_j)}.$$

En utilisant l'identité (2.2), il vient finalement

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq j} \left( \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} \right) u_i \cdot \left[ \frac{1}{y - a_i} - \frac{1}{y - a_j} \right] \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{\varepsilon_i(a_i) - \varepsilon_j(a_j)}{a_i - a_j} \cdot \frac{w_i}{\varepsilon_i(a_i) \varepsilon_j(a_j)} \cdot \left[ \frac{1}{y - a_i} - \frac{1}{y - a_j} \right]. \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  désignent encore les matrices colonnes formées par les coordonnées de  $u$  et  $w$  dans la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\bar{\mathcal{E}}$ , cela se réécrit  $\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{B}\mathcal{W}$ , où  $\mathcal{A}$  est la matrice magique complète associée au bouquet. Par ailleurs, nous remarquons que l'image de  $\mathcal{B}$  est contenue dans  $\mathcal{F}$ . Grâce à la proposition 2.4, nous obtenons alors l'expression de  $(u, v)$  annoncée.

Observons maintenant que  $\beta_{i,j}$  est de valuation supérieure ou égale à  $-\pi$ . Comme la valuation des termes de la matrice de l'endomorphisme  $(A|_{\bar{\mathcal{F}}})^{-1}$  dans la base  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)$  est au moins égale à 1 (proposition 2.4),

nous en déduisons que  $\text{val}(u) \geq \text{val}(w) - \theta$  et  $\text{val}(v) \geq \text{val}(w) - \tau$ ; d'où la seconde assertion.

Montrons maintenant le second point. Compte tenu des identités (2.4) et (2.7), nous avons

$$\sum_{i=1}^n (u_i(\varepsilon_i)'_x + v_i(\varepsilon_i)'_y) = \frac{w}{f} - \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\varepsilon_i(a_i)} \frac{\varepsilon_i}{y - a_i}.$$

Par suite,

$$u'_x + v'_y = \sum_{i=1}^n u'_i \varepsilon_i - \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\varepsilon_i(a_i)} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i(a_i)}{y - a_i}.$$

Remarquons alors que, pour des indices  $i$  et  $j$  distincts, la valuation de

$$\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i(a_i)}{y - a_i}(a_j) = -\frac{\varepsilon_i(a_i)}{a_j - a_i}$$

est égale à  $m_i - m_{i,j}$ ; quant à celle de

$$\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i(a_i)}{y - a_i}(a_i) = (\varepsilon_i)'_y(a_i),$$

elle est supérieure ou égale à  $m_i - \sup_{k \neq i} \{m_{i,k}\}$ . Avec la remarque 2.1, nous en déduisons alors que

$$\text{val}\left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i(a_i)}{y - a_i}\right) \geq \inf\left\{\inf_{j \neq i} \{m_i - m_{i,j} - m_j\}, \inf_{k \neq i} \{-m_{i,k}\}\right\}.$$

D'où  $\text{val}((w_i/\varepsilon_i(a_i))(\varepsilon_i - \varepsilon_i(a_i))/(y - a_i)) \geq \nu(w_i) - \sup_{j \neq i} \{m_{i,j} + m_j\}$ , puis  $\text{val}(u'_x + v'_y) \geq \inf\{\text{val}(u) - 1, \text{val}(w) - \pi\}$ . La partie (ii) s'ensuit.  $\square$

Le corollaire 2.7 a son pendant.

**COROLLAIRE 2.17.** — Soit  $f \in \mathbb{C}[[x]][y]$  un polynôme distingué réduit.

(i) Pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,

$$\mathcal{E}_r \subset \mathcal{F}_{r-\theta} f'_x + \mathcal{F}_{r-\tau} f'_y.$$

En particulier,  $\mathcal{E}_\pi$  est contenu dans l'idéal jacobien  $(f'_x, f'_y)\mathbb{C}[[x]][y]$ .

(ii) Soit  $w = u f'_x + v f'_y$  un élément de  $\mathcal{E}_\pi$  avec  $u \in \mathcal{F}_1$  et  $v \in \mathcal{F}_\delta$ . Alors  $u'_x + v'_y$  appartient à  $\mathcal{F}_0$ .

**REMARQUE 2.18.** — Si l'on souhaite étendre ces résultats au cas d'un polynôme  $g$  de degré supérieur ou égal à  $n$ , il convient d'abord de le décomposer selon les puissances successives de  $f$  :

$$g = w_0 + w_1 f + \dots + w_\ell f^\ell$$

avec  $w_i \in \bar{\mathcal{E}}$ ,  $0 \leq i \leq \ell$ . Il s'agit ensuite de trouver une minoration convenable des poids des  $w_k$ ,  $\text{val}(w_k) = \inf\{\nu(w_k(a_i)/\varepsilon_i(a_i)); 1 \leq i \leq n\}$  en

fonction de la donnée  $g$ , pour  $1 \leq k \leq \ell$ . Par exemple, si  $g$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $2n$ , alors  $g = w_0 + w_1 f$ , et nous pouvons minorer les poids de  $w_0$  et  $w_1$  à l'aide des valuations des  $g(a_i)$  et  $g'_y(a_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et des multiplicités d'intersection des branches du bouquet, en utilisant les identités

$$g(a_i) = w_0(a_i), \quad g'_y(a_i) = (w_0)'_y(a_i) + w_1(a_i) f'_y(a_i).$$

Après calcul, nous trouvons  $\text{val}(w_0) = \inf\{\nu(g(a_i)) - m_i; 1 \leq i \leq n\}$  et le poids  $\text{val}(w_1)$  est supérieur ou égal à

$$\inf\{\nu(g'_y(a_i)) - 2m_i, \nu(g(a_j)) - m_i - m_j - m_{i,k}; 1 \leq i, j, k \leq n, i \neq k\}.$$

On peut alors appliquer la proposition 2.16 à  $w_0$  et le corollaire 2.5 à  $w_1 f$ .

EXEMPLE 2.19. — À partir du corollaire 2.17 et de la remarque précédente, nous sommes en mesure de préciser une puissance de l'idéal maximal contenue dans l'idéal jacobien d'un germe de courbe à singularité isolée  $f$  en fonction des multiplicités des composantes irréductibles et des multiplicités d'intersection des composantes entre elles. Cette puissance ne dépend donc que du type topologique du germe, et elle est meilleure<sup>(3)</sup> que le nombre de Milnor,  $\mu = \sum_{i=1}^n m_i - n + 1$ , qui convient toujours.

### 3. Un multiple de la $b$ -fonction

#### 3.1. Préliminaires

##### 3.1.1. Le polynôme de Bernstein

Notons  $\mathcal{O}$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ ,  $\mathcal{D}$  l'anneau des germes d'opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{D}[s] = \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s]$ .

Étant donné un germe  $f$  de fonction holomorphe, nous considérons le  $\mathcal{O}[1/f, s]$ -module libre de rang un,  $\mathcal{O}[1/f, s]f^s$ , muni de sa structure naturelle de  $\mathcal{D}[s]$ -module. D'après [4], il existe un polynôme non nul  $b(s) \in \mathbb{C}[s]$  et un opérateur  $P \in \mathcal{D}[s]$  réalisant dans  $\mathcal{O}[1/f, s]f^s$  l'équation fonctionnelle

$$b(s)f^s = P \cdot f^{s+1}.$$

Le polynôme unitaire  $b(s)$  de plus petit degré réalisant une telle équation est appelé *polynôme de Bernstein* de  $f$  ou  *$b$ -fonction* de  $f$ . Nous renvoyons le

<sup>(3)</sup> C'est-à-dire plus petite.

lecteur aux travaux de B. Malgrange [5], [1], A.N. Varchenko [7] et T. Yano [8] sur ce sujet.

Nous supposons maintenant que  $f$  s'annule à l'origine et définit un germe de singularité isolée. Son polynôme de Bernstein  $b(s)$  est alors de la forme  $b(s) = (s + 1)\tilde{b}(s)$  où  $\tilde{b}(s)$  est le polynôme minimal de l'action de  $s$  sur le  $\mathcal{D}$ -module de type fini

$$\mathcal{M} = (s + 1) \frac{\mathcal{D}[s]f^s}{\mathcal{D}[s]f^{s+1}} \cong \frac{\mathcal{D}[s]f^s}{\mathcal{D}[s](f, f'_x, f'_y)f^s}$$

ou sur sa cohomologie de de Rham

$$H^2\mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}}{\partial_x\mathcal{M} + \partial_y\mathcal{M}}$$

qui est alors un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $\mu$ , le nombre de Milnor de la singularité (voir [5]).

Nous supposons de plus que  $f$  est un polynôme distingué réduit de  $\mathbb{C}\{x\}[y]$  de degré  $n \geq 2$ . D'après le théorème de Newton-Puiseux, il s'écrit  $f = \prod_{i=1}^n (y - a_i)$  dans  $\mathbb{C}\{x\}[x^{1/d}][y]$  pour l'entier  $d$  égal au ppcm des degrés des facteurs irréductibles de  $f$ . Dans cette partie, nous allons construire un multiple du polynôme de Bernstein de  $f$  qui ne dépend que de  $d$  et de la famille  $\{m_{i,j}; 1 \leq i < j \leq n\}$  des multiplicités d'intersection des branches deux à deux. Lorsque  $n$  est la multiplicité<sup>(4)</sup> de  $f$ , ce multiple ne dépend alors que du type topologique du germe de courbe défini par  $f$ .

Dans cette construction, nous n'utiliserons pas la cohomologie de de Rham invoquée ci-dessus. Par contre, nous verrons que cette cohomologie  $H^2\mathcal{M}$  est engendrée par les classes d'éléments de la forme  $wf^s$  et  $swf^{s-1}$  avec  $w$  dans  $\mathcal{O}$ .

### 3.1.2. La transformation de Tchernhaus

Soit  $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$  un polynôme distingué, réduit, et  $\prod_{i=1}^n (y - a_i)$  sa décomposition dans  $\mathbb{C}\{x\}[x^{1/d}, y]$ . Nous rappelons que  $\sigma$  désigne la somme  $\sum_{i=1}^n a_i$ . Posons

$$\alpha = \inf\{m_{i,j}; 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Nous constatons que le rationnel  $\alpha$  coïncide avec

$$\inf\{\nu(a_i - \sigma/n); 1 \leq i \leq n\}.$$

C'est une conséquence des deux inégalités suivantes :

<sup>(4)</sup> C'est-à-dire lorsque l'axe des  $y$  est transverse à  $f$ .

- pour  $1 \leq i \leq n$ , on a  $\nu(a_i - \sigma/n) \geq \alpha$  puisque

$$a_i - \sigma/n = \sum_{j=1}^n (a_i - a_j)/n;$$

- pour  $1 \leq i \neq j \leq n$ , on a  $\nu(a_i - a_j) \geq \inf\{\nu(a_i - \sigma/n); 1 \leq i \leq n\}$  ayant  $a_i - a_j = (a_i - \sigma/n) - (a_j - \sigma/n)$ .

Nous en déduisons que le polynôme  $h \in \mathcal{F}$  défini par

$$\begin{aligned} h &= f - \left(\frac{y}{n} - \frac{\sigma}{n^2} + \frac{x\sigma'}{n^2\alpha}\right)f'_y - \frac{x}{n\alpha}f'_x \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{-1}{n\alpha} \left[\alpha\left(a_i - \frac{\sigma}{n}\right) - x\left(a'_i - \frac{\sigma'}{n}\right)\right]\varepsilon_i \end{aligned}$$

est de poids  $\text{val}(h)$  strictement supérieur à  $\alpha$ . Nous faisons alors le changement de coordonnées  $x_1 = x$ ,  $y_1 = y - \sigma/n$ . Pour ne pas alourdir les notations, nous appelons toujours  $x$  et  $y$  ces nouvelles coordonnées et nous supposons désormais que  $\sigma$  est nul. En particulier, nous avons alors

$$\alpha = \inf\{m_{i,j}; 1 \leq i < j \leq n\} = \inf\{\nu(a_i); 1 \leq i \leq n\} = \delta,$$

$$h = f - \frac{y}{n}f'_y - \frac{x}{n\delta}f'_x = \frac{1}{n\delta} \sum_{i=1}^n (xa'_i - \delta a_i)\varepsilon_i$$

avec  $\text{val}(h) > \delta$ .

Pour  $1 \leq i \leq n$ , notons  $a_{i,\delta} \in \mathbb{C}$  le coefficient de  $x^\delta$  dans le développement de  $a_i$ ; alors  $\nu(a_i - a_{i,\delta}x^\delta) > \delta$ . Constatons enfin que le premier côté du polygone de Newton de  $f$  a pour équation  $k/n\delta + \ell/n = 1$  dans les coordonnées  $(k, \ell)$ , et que la restriction de  $f$  à ce côté est le polynôme quasi-homogène  $\prod_{i=1}^n (y - a_{i,\delta}x^\delta)$ .

### 3.1.3. La division selon le premier côté du polygone de Newton

Introduisons maintenant la fonction de poids  $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{Q}^+$  associée au premier côté du polygone de Newton de  $f$ . Pour tout  $w = \sum w_{k,\ell}x^k y^\ell \in \mathcal{O}$  non nul, nous posons

$$\rho(w) = \inf\left\{\frac{k}{n\delta} + \frac{\ell}{n}; w_{k,\ell} \neq 0\right\}.$$

La filtration de  $\mathcal{O}$  associée est définie alors en posant, pour tout  $q \in \mathbb{Q}^+$

$$\mathcal{O}_q = \{w \in \mathcal{O}; \rho(w) \geq q\}$$

avec la convention  $\rho(0) = +\infty$ . Notons aussi  $\mathcal{O}_{>q} = \{w \in \mathcal{O}; \rho(w) > q\}$ .

Nous avons bien sûr  $\rho(f) = 1$ . D'autre part, la relation suivante permet de comparer les poids  $\rho$  et  $\text{val}$  d'un élément de  $\mathcal{E} \cap \mathcal{O} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{C}\{x\}y^i$ .

LEMME 3.1. — Pour tout  $w \in \mathcal{E} \cap \mathcal{O}$

$$\text{val}(w) \geq n\delta\rho(w) - \sup\{m_i; 1 \leq i \leq n\}.$$

En particulier,  $\mathcal{E} \cap \mathcal{O}_q \subset \mathcal{E}_0$  dès que  $q \geq \sup\{m_i\}/n\delta$ .

*Démonstration.* — Comme  $\nu(x^k a_i^\ell) = n\delta\rho(x^k y^\ell)$  pour tout indice  $i$  tel que  $\nu(a_i) = \delta$ , nous avons  $\nu(w(x, a_i)) \geq n\delta\rho(w)$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Ayant de plus  $\text{val}(w) = \inf\{\nu(w(x, a_i)) - m_i; 1 \leq i \leq n\}$  (voir la remarque 2.1), le résultat s'ensuit.  $\square$

Pour tout  $w \in \mathcal{O}$ , nous avons l'identité

$$(3.1) \quad \frac{x}{n\delta}w'_x + \frac{y}{n}w'_y = \rho(w)w + w_1, \quad \rho(w_1) > \rho(w).$$

En particulier, pour  $w = f$

$$(3.2) \quad \frac{x}{n\delta}f'_x + \frac{y}{n}f'_y = f - h, \quad \rho(h) > 1.$$

Enfin, le résultat suivant s'obtient très facilement, en suivant pas à pas l'algorithme de la division.

LEMME 3.2. — Soit  $w \in \mathbb{C}\{x\}[y]$  un polynôme non nul. La division euclidienne de  $wh$  par  $f$  fournit

$$(3.3) \quad wh = w_2f + \lambda(x)f'_y + \tilde{w}$$

où  $w_2 \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ ,  $\lambda(x) \in \mathbb{C}\{x\}$  et  $\tilde{w} \in \mathcal{F}$  vérifient  $\nu(\lambda(x)) > n\delta\rho(w) + \delta$ ,  $\rho(w_2) \geq \rho(w) + \rho(h) - 1 > \rho(w)$  et  $\text{val}(\tilde{w}) > n\delta\rho(w) + \delta$ .

### 3.2. La montée des poids

Dans ce paragraphe, nous donnons les lemmes techniques sur lesquels s'appuie la détermination d'un multiple du polynôme de Bernstein de  $f$ . La méthode utilisée – la « montée des poids » – est classique pour traiter ce problème (voir [3] par exemple).

Nous considérons trois classes d'éléments dans  $\mathcal{O}[1/f, s]f^s$  :

- classe A : les éléments de la forme  $wf^s$  avec  $w \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$  et  $\text{val}(w) \geq 0$ ;
- classe B : les éléments de la forme  $wf^s$  avec  $w \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$  et  $\text{val}(w) < 0$ ;
- classe C : les éléments de la forme  $swf^{s-1}$  avec  $w \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$  et  $\text{val}(w) > 0$ .

Comme  $\mathcal{F}_0$  est contenu dans  $\mathcal{O}$  (remarque 2.1), la classe A (resp. C) est l'ensemble  $\mathcal{F}_{\geq 0}f^s$  (resp.  $s\mathcal{F}_{> 0}f^{s-1}$ ). En ce qui concerne un élément  $wf^s$  de la classe B,  $wf$  n'appartient pas – en général – à l'idéal jacobien; pour ces éléments, nous ne pourrions faire que le premier pas de la division par cet idéal, selon le premier côté du polygone de Newton.

3.2.1. Montée des poids en classe A

LEMME 3.3. — Soit  $w \in \mathcal{F}_r$  avec  $r \geq 0$ . Alors :

$$M_r(s)wf^s \in \mathcal{D}[s]\mathcal{F}_{>r}f^s + \mathcal{D}[s]f'_y f^s$$

avec  $M_r(s) = \prod_{\lambda \in \Lambda(r)} (s - \lambda)$  où  $\Lambda(r)$  désigne l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme diagonalisable  $\text{gr}_r \nabla$ .

Démonstration. — D'après le corollaire 2.7, il existe  $u \in \mathcal{F}_{r+1}$  et  $v \in \mathcal{E}_{>r}$  tels que  $wf = uf'_x + vf'_y$ . Par suite,

$$swf^s = u \frac{\partial}{\partial x} f^s + v \frac{\partial}{\partial y} f^s = \nabla(w)f^s + \frac{\partial}{\partial x} uf^s + \frac{\partial}{\partial y} vf^s.$$

Nous pouvons écrire  $v = v_1 + \eta(x)f'_y$  avec  $v_1 \in \mathcal{F}_{>r}$  et  $\eta(x) \in \mathbb{C}\{x\}$  tel que  $\nu(\eta(x)) > r$ . Pour tout nombre complexe  $\lambda$ , nous avons alors

$$(s - \lambda)wf^s = (\nabla - \lambda I)(w)f^s + R$$

avec  $R \in \mathcal{D}[s]\mathcal{F}_{>r}f^s + \mathcal{D}[s]f'_y f^s$ . D'après la proposition 2.13, nous savons que  $\nabla(w)$  appartient à  $\mathcal{F}_r$ . On conclut en itérant la formule précédente lorsque  $\lambda$  parcourt  $\Lambda(r)$ . □

Nous rappelons que, grâce au corollaire 1.18, l'ensemble  $\Lambda(r)$  est complètement déterminé par l'arbre associé au bouquet défini par  $f$ .

3.2.2. Montée des poids en classe B

LEMME 3.4. — Soit  $w \in \mathcal{O}_q \cap \mathcal{F}$  avec  $q \in \mathbb{Q}^+$ . Alors

$$\left(s + \frac{1}{n\delta} + \frac{1}{n} + q\right)wf^s$$

appartient à

$$\mathcal{D}[s](\mathcal{O}_{>q} \cap \mathcal{F})f^s + \mathcal{D}[s]f'_y f^s + \mathcal{D}[s]s\mathcal{F}_{>n\delta q + \delta}f^{s-1}.$$

Démonstration. — Nous avons l'identité

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{n\delta} \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} y\right]wf^s &= \left(s + \frac{1}{n\delta} + \frac{1}{n} + q\right)wf^s \\ &+ sw \left(\frac{x}{n\delta} f'_x + \frac{y}{n} f'_y - f\right)f^{s-1} \\ &+ \left(\frac{x}{n\delta} w'_x + \frac{y}{n} w'_y - qw\right)f^s. \end{aligned}$$

Soit encore  $yw = w_3 + \eta(x)f'_y$  avec  $w_3 \in \mathcal{O}_{>q} \cap \mathcal{F}$ , la décomposition de  $yw$  dans  $\mathcal{F} \oplus \mathbb{C}\{x\}f'_y$ . En utilisant les identités (3.1), (3.2), et (3.3), nous trouvons alors

$$\left(s + \frac{1}{n\delta} + \frac{1}{n} + q\right)wf^s = s\tilde{w}f^{s-1} + \left[\frac{1}{n\delta}\frac{\partial}{\partial x}xw + \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y}(w_3 + \eta(x)f'_y) - w_1 + sw_2 + \frac{\partial}{\partial y}\lambda(x)\right]f^s$$

avec  $\rho(xw) > q$ ,  $\rho(w_1), \rho(w_2), \rho(w_3) > q$ ,  $\rho(\lambda(x)) = (1/n\delta)\nu(\lambda(x)) > q$  et  $\text{val}(\tilde{w}) > n\delta q + \delta$ . D'où le résultat annoncé.  $\square$

### 3.2.3. Montée des poids en classe C

LEMME 3.5. — Soit  $w \in \mathcal{F}_r$  avec  $r \geq 0$ . Alors

$$M_r(s-1)swf^{s-1} \in \mathcal{D}[s]\mathcal{F}_{>r}sf^{s-1} + \mathcal{D}[s](\mathcal{O}_{>r/n\delta} \cap \mathcal{F})f^s$$

où  $M_r(s)$  désigne le polynôme minimal de  $\text{gr}_r\nabla$ .

*Démonstration.* — Nous procédons de la même manière qu'au lemme 3.3, après décalage de  $s$  en  $s - 1$ . D'après le corollaire 2.7, il existe  $u \in \mathcal{F}_{r+1}$  et  $v \in \mathcal{E}_{>r}$  tels que  $wf = uf'_x + vf'_y$ ; par suite

$$(s-1)wf^{s-1} = u\frac{\partial}{\partial x}f^{s-1} + v\frac{\partial}{\partial y}f^{s-1} = \nabla(w)f^{s-1} + \frac{\partial}{\partial x}uf^{s-1} + \frac{\partial}{\partial y}vf^{s-1}.$$

Nous pouvons écrire  $v = v_1 + \eta(x)f'_y$  avec  $v_1 \in \mathcal{F}_{>r}$  et  $\nu(\eta(x)) > r$ . Pour tout nombre complexe  $\lambda$ , nous avons donc

$$(s-1-\lambda)swf^{s-1} = s(\nabla - \lambda I)(w)f^{s-1} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\eta(x)f^s + R$$

avec  $R \in \mathcal{D}[s]\mathcal{F}_{>r}sf^{s-1}$ . Constatons que  $\rho(\eta(x)) = (1/n\delta)\nu(\eta(x)) > r/n\delta$ . L'assertion s'obtient alors en itérant la formule précédente,  $\lambda$  parcourant l'ensemble des valeurs propres de  $\text{gr}_r\nabla$ .  $\square$

## 3.3. Résultat des courses

### 3.3.1. Les polynômes $M_{\text{gros}}^A(s)$ et $M_{\text{fin}}^A(s)$

Un multiple grossier convenant à tous les éléments  $wf^s$  en classe A est le produit  $M_{\text{gros}}^A(s)$  des polynômes  $M_r(s)$  lorsque  $r$  parcourt  $(1/d)\mathbb{N}$  avec  $0 \leq r < \pi$ . Par itération du lemme 3.3 puis application du corollaire 2.17, nous obtenons

$$(3.4) \quad M_{\text{gros}}^A(s)\mathcal{F}_0f^s \subset \mathcal{D}[s](f'_x, f'_y)f^s.$$

Ce multiple ne dépend que de  $d$  et des multiplicités d'intersection  $m_{i,j}$ .

Un multiple plus fin,  $M_{\text{fin}}^A(s)$ , s'obtient en prenant le produit de ces mêmes polynômes  $M_r(s)$  lorsque  $r$  parcourt l'ensemble

$$\Gamma_f^0 = \{ \text{val}(w) ; w \in \mathcal{F}_0 \text{ et } w \notin (f, f'_x, f'_y) \}.$$

En général, ce multiple ne dépend pas que du type topologique du germe de courbe défini par  $f$  (par exemple, penser à  $f$  quasi-homogène et semi-quasi-homogène). Nous avons alors

$$M_{\text{fin}}^A(s) \mathcal{F}_0 f^s \subset \mathcal{D}[s](f, f'_x, f'_y) f^s.$$

### 3.3.2. Les polynômes $M_{\text{gros}}^B(s)$ et $M_{\text{fin}}^B(s)$

Nous rappelons que  $\mathcal{O}_q \cap \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$  pour  $q \geq \sup\{m_i\}/n\delta$  (lemme 3.1). Pour définir un multiple grossier, nous considérerons alors tous les poireaux

$$\rho = k/n\delta + \ell/n$$

avec  $0 \leq \rho < \sup\{m_i\}/n\delta$  et  $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ . Nous notons donc  $M_{\text{gros}}^B(s)$  le produit des facteurs  $(s + (k + 1)/n\delta + (\ell + 1)/n)$  correspondants.

On remarquera que la plus petite valeur propre non nulle de la matrice magique associée à  $f$  est  $\lambda_0 = n\delta = \gamma(T_0)n(T_0)$ , et que d'autre part,  $r = k + (\ell + 1)\delta$  est la valuation du reste de la division par  $f$  du polynôme  $wyf'_y$  avec  $w = x^k y^\ell$ . On peut donc récrire  $M_{\text{gros}}^B(s)$  comme le produit des facteurs  $(s + (1 + r)/\lambda_0)$  lorsque  $r$  parcourt les valuations de ces éléments  $wyf'_y$ .

Pour un multiple plus fin, nous ne considérerons que les poids  $\rho(w)$  avec  $w \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$ , et  $\text{val}(w) < 0$ .

### 3.3.3. Le polynôme $M_{\text{gros}}^C(s)$

Constatons que  $swf^{s-1}$  appartient à  $\mathcal{D}[s]\mathcal{F}_0 f^s$  pour tout  $w \in \mathcal{F}_\pi$ . Cela résulte de la décomposition  $w = uf'_x + vf'_y$  établie au corollaire 2.17, et de l'identité

$$swf^{s-1} = -(u'_x + v'_y)f^s + \frac{\partial}{\partial x}uf^s + \frac{\partial}{\partial y}vf^s.$$

Pour avoir un multiple grossier  $M_{\text{gros}}^C(s)$  en classe C, nous prendrons le produit des polynômes  $M_r(s - 1)$  pour tous les poids  $r$  parcourant  $(1/d)\mathbb{N}$  avec  $\delta < r < \pi$ . Le fait qu'il n'apparaisse en classe C que des éléments de poids strictement supérieur à  $\delta$  est une conséquence du lemme 3.4.

### 3.3.4. Un multiple de la $b$ -fonction

Notons  $\Lambda$  l'ensemble des valeurs propres non nulles de la matrice magique associée à  $f$ . D'après la proposition 2.13, le polynôme minimal de l'action de  $\text{gr } \nabla$  sur  $\text{gr}_r \mathcal{F}$  est alors  $M_r(s) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (s + 1 + (1+r)/\lambda)$ . Nous rappelons encore la définition des multiples grossiers en chaque classe

$$M_{\text{gros}}^A(s) = \prod_{r \in [0, \pi[\cap(1/d)\mathbb{N}} M_r(s), \quad M_{\text{gros}}^C(s) = \prod_{r \in ]\delta, \pi[\cap(1/d)\mathbb{N}} M_r(s - 1),$$

$$M_{\text{gros}}^B(s) = \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n-2 \\ 0 \leq k + \ell \delta < \sup\{m_i\}}} \left( s + \frac{k + 1}{n\delta} + \frac{\ell + 1}{n} \right)$$

où  $d$  est le ppcm des degrés des facteurs irréductibles de  $f$  et  $k, \ell$  sont des entiers naturels.

**THÉORÈME 3.6.** — *Soit  $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$  un polynôme distingué, réduit, de degré et de multiplicité  $n$ . Le polynôme*

$$(s + 1)M_{\text{gros}}^A(s)M_{\text{gros}}^B(s)M_{\text{gros}}^C(s)$$

*est un multiple du polynôme de Bernstein de  $f$  ne dépendant que du type topologique du germe de courbe plane défini par  $f$ .*

*Démonstration.* — À partir de l'élément  $f^s$  de la classe B, nous sommes en mesure de faire monter les poids en utilisant les lemmes 3.4 ou 3.5. Lors de leur utilisation, nous avons besoin de comparer les poids de deux éléments de la forme  $w' f^s$  et  $sw'' f^{s-1}$  ; pour que ça colle, nous devons poser

$$\varrho(w' f^s, sw'' f^{s-1}) = \inf\{n\delta\rho(w'), \text{val}(w'')\}$$

et faire monter le poids  $\varrho$  des termes rencontrés. Nous pouvons remarquer que s'il y a égalité  $r = n\delta\rho(w') = \text{val}(w'')$ , et si le facteur  $(s + \rho(w') + 1/n\delta + 1/n)$  divise  $M_r(s - 1)$ , la multiplication par  $M_r(s - 1)$  suffit pour faire monter le poids des deux éléments. Nous obtenons alors

$$M_{\text{gros}}^C(s)M_{\text{gros}}^B(s)f^s \in \mathcal{D}[s]\mathcal{F}_0 f^s + \mathcal{D}[s]f'_y f^s$$

et on conclut à l'aide de l'identité (3.4). □

**REMARQUE 3.7.** — M. Saito [6] montre que les racines du polynôme de Bernstein d'un germe réduit  $f \in \mathcal{O}$  sont strictement comprises entre  $-2$  et  $0$ . On peut donc tronquer les polynômes donnés pour obtenir un multiple plus petit. Nous n'avons pas réussi, pour le moment, à retrouver explicitement ces inégalités par notre méthode.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. BONY, « Polynômes de Bernstein et monodromie (d'après B. Malgrange) », *Séminaire Bourbaki* **459** (1974/1975), p. 97-110.
- [2] J. BRIANÇON, « À propos d'une question de J. Mather », Université de Nice-Sophia Antipolis, 1973.
- [3] J. BRIANÇON, M. GRANGER, P. MAISONOBE & M. MINICONI, « Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré », *Ann. Inst. Fourier* **39** (1989), p. 553-610.
- [4] M. KASHIWARA, «  $B$ -functions and holonomic systems », *Invent. Math.* **38** (1976), p. 33-53.
- [5] B. MALGRANGE, « Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, p. 98-199 », in *Lecture Notes in Math.*, vol. 459, Springer, Berlin, 1975.
- [6] M. SAITO, « On microlocal  $b$ -function », *Bull. Soc. math. France* **122** (1994), p. 163-184.
- [7] A. N. VARCHENKO, « Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial », *Bull. Sci. Math.* **104** (1980), p. 205-223.
- [8] T. YANO, « On the theory of  $b$ -functions », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **14** (1978), p. 111-202.

Manuscrit reçu le 3 février 2006,  
accepté le 6 juin 2006.

Joël BRIANÇON, Philippe MAISONOBE  
& Tristan TORRELLI  
Université de Nice Sophia-Antipolis  
UMR du CNRS 6621  
Laboratoire J.A. Dieudonné  
Parc Valrose  
06108 Nice Cedex 2 (France)  
briancon@math.unice.fr  
phm@math.unice.fr  
torrelli@math.unice.fr