ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Julien ROQUES

**Classification rationnelle et confluence des systèmes aux différences singuliers réguliers**

Tome 56, nº 6 (2006), p. 1663-1699.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2006__56_6_1663_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**56**, 6 (2006) 1663-1699

# CLASSIFICATION RATIONNELLE ET CONFLUENCE DES SYSTÈMES AUX DIFFÉRENCES SINGULIERS RÉGULIERS

**par Julien ROQUES**

RÉSUMÉ. — En choisissant des “caractères” et des “logarithmes”, méromorphes sur $\mathbb{C}$, construits à l'aide de la fonction Gamma d'Euler, et en utilisant des séries de factorielles convergentes, nous sommes en mesure, dans une première partie, de donner une “forme normale” pour les solutions d'un système aux différences singulier régulier. Nous pouvons alors définir une matrice de connexion d'un tel système. Nous étudions ensuite, suivant une idée de G.D. Birkhoff, le lien de celles-ci avec le problème de la classification rationnelle des systèmes. Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à la confluence des systèmes aux différences fuchsiens vers les systèmes différentiels. Nous montrons en particulier comment, sous certaines hypothèses naturelles, on peut reconstituer les monodromies locales d'un système différentiel limite à partir des matrices méromorphes de connexion des déformations considérées. Le point central, qui distingue en profondeur les systèmes aux différences singuliers réguliers de leurs homonymes différentiels ou aux $q$-différences et qui rend leur étude plus complexe, est la nécessaire utilisation de séries de factorielles (qui peuvent diverger en tant que séries de puissances).

ABSTRACT. — By using meromorphic “characters” and “logarithms” built up from Euler's Gamma function, and by using convergent factorial series, we will give, in a first part, a “normal form” to the solutions of a regular singular difference system. It will enable us to define a connection matrix for a regular singular system. Following one of Birkhoff's idea, we will then study its link with the problem of rational classification of systems. In a second part, we will be interested in the confluence of fuchsian difference systems to differential systems. We will show more particularly how we can get, under some natural hypotheses, the local monodromies of a limit differential system from the connection matrices of the deformation that we consider. The use of factorial series (which can diverge as power series) distinguish regular singular difference systems from their differential and $q$-difference analogues and make their study more difficult.

*Mots-clés :* équations aux différences, matrice de connexion, équations différentielle, monodromie.
*Classification math. :* 39A10, 34M35, 34M40, 65Q05.

## 1. Introduction

Un système aux différences :

$$Y(x-1)=A(x)Y(x),\ A\in Gl_n(\mathbb{C}(x)) \tag{1.1}$$

est dit fuchsien si $A$ est holomorphe à l'$\infty$ et si $A(\infty)=I$. Il est dit singulier régulier s'il peut être transformé en un système fuchsien à l'aide d'une transformation de jauge rationnelle. Rappelons que le système déduit de (1.1) par la transformation de jauge $R$ ($R\in Gl_n(K)$ où $K$ est une extension de corps de $\mathbb{C}(x)$) est celui obtenu en posant $Y=RZ$ :

$$Z(x-1)=\left[R(x-1)^{-1}A(x)R(x)\right]Z(x).$$

Désignant par $\delta_{-1}$ l'opérateur dont l'action sur une fonction $Y$ est définie par la formule :

$$\delta_{-1}Y(x)=(x-1)(Y(x)-Y(x-1)),$$

un système fuchsien peut s'écrire sous la forme :

$$\delta_{-1}Y=AY$$

où $A$ est holomorphe à l'infini.

Un système fuchsien non résonnant (*i.e.*, tel que deux valeurs propres de $A(\infty)$ ne diffèrent pas par un entier relatif non nul) admet une unique solution formelle de la forme :

$$\Big(I+\sum_{s=1}^{+\infty}\widehat{Y}_s x^{-s}\Big)x^K.$$

La série $I+\sum_{s=1}^{+\infty}\widehat{Y}_s x^{-s}$ n'est en général pas convergente ; c'est la différence fondamentale des systèmes aux différences singuliers réguliers avec leurs analogues aux $q$-différences et différentiels. Dans [13], M. Van der Put et M. Singer démontrent qu'il existe deux solutions fondamentales asymptotiques à $\widehat{Y}$ dans un demi-plan gauche pour l'une et droit pour l'autre. Notons que Birkhoff avait déjà prouvé des résultats analogues dans un cas “irrégulier” (voir [2]).

D'autres auteurs ont remarqué l'intérêt, pour l'étude de ce problème, des séries de factorielles (on peut citer N.-E. Nörlund [11] et plus tard Fitzpatrick et Grimm [6], ou encore W.A. Jr. Harris [8]). Rappelons qu'il s'agit de séries de la forme :

$$\sum_{s=0}^{+\infty}A_s x^{-[n]}$$

où :

$$x^{-[n]} = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Rappelons également qu'en faisant le changement $x \leftarrow -x$ dans la définition des séries de factorielles, on obtient la notion de série de rétro-factorielles. On peut démontrer que la série $I + \sum_{s=1}^{+\infty} \widehat{Y}_s x^{-s}$ est développable en série de factorielles (resp. rétro-factorielles) convergente dans un demi-plan droit (resp. gauche) et tangente à $I$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; voir par exemple [8]. Il convient également de remarquer que, d'un point de vue combinatoire, les $x^{-[n]}$ sont des vecteurs propres de l'opérateur $\delta_{-1}$.

Une dernière approche consiste à se ramener, par une transformation de jauge développable en série de factorielles convergente, tangente à $I$ en $+\infty$, à l'équation $Y(x-1) = (I - \frac{A(\infty)}{x-1})Y(x)$. Pour résoudre cette équation, on se ramène à deux familles d'équations de bases : celle des caractères et celle des logarithmes (elles correspondent respectivement à la partie semi-simple et à la partie nilpotente de $A(\infty)$), celles-ci peuvent être résolues par des fonctions (uniformes) méromorphes sur $\mathbb{C}$ construites à l'aide de la fonction Gamma d'Euler (il reste un arbitraire dans le choix de telles solutions). Par exemple, A. Duval utilise cette approche, dans [4], pour étudier la confluence des systèmes aux $q$-différences fuchsiens vers les systèmes aux différences fuchsiens. Nous adoptons aussi cette démarche dans cet article. On peut opérer de manière symétrique en $-\infty$ par le changement de variable $x \leftarrow -x$.

Ainsi dans le cas non résonnant on a deux solutions fondamentales “canoniques” : l'une est attachée à $+\infty$, l'autre à $-\infty$. En revanche dans le cas résonnant ou plus généralement dans le cas singulier régulier, il n'y a pas *a priori* de solution canonique, contrairement au cas différentiel. Se pose donc le problème de donner une “forme normale” aux solutions. Nous en proposons une, inspirée des travaux de J. Sauloy dans [15].

Cela nous permet de définir la matrice de connexion de Birkhoff d'un système aux différences singulier régulier. Celle-ci rend compte des relations linéaires entre les deux systèmes fondamentaux de solutions évoqués ci-dessus. G.D. Birkhoff a étudié son lien avec le problème de la classification rationnelle des systèmes aux différences (voir [2] et [1]). Dans [13] M. van der Put et M.F. Singer étudient la matrice de connexion de manière approfondie dans le cas régulier et donnent quelques énoncés dans le cas singulier régulier sans toujours détailler les preuves. Nous réinterprétons ces énoncés dans notre approche et les prouvons en détail.

La deuxième partie de cet article est consacrée à la confluence des systèmes aux différences fuchsiens vers les systèmes différentiels : nous étudions la confluence des solutions et celle des matrices de connexion. En particulier, nous expliquons comment peuvent être calculées, à partir des matrices de connexion, les monodromies locales d'un système différentiel limite.

L'étude de cette confluence est plus difficile que celle, analogue, des systèmes aux $q$-différences vers les systèmes différentiels effectuée par J. Sauloy dans [15], dont nous nous sommes inspirés, parce qu'on ne peut pas employer des séries de $1/x$ convergentes, et qu'il faut les remplacer par des séries convergentes de ($h$-)factorielles.

Notre approche repose sur une hypothèse naturelle relative à la croissance des coefficients des séries de $h$-factorielles qui définissent la déformation du système différentiel considéré (hypothèses de type $(C, \lambda)$). Notons que ces hypothèses sont vérifiées lorsqu'on est en présence de convergence uniforme au voisinage de l'infini (voir le corollaire 5.21 en 5.5.2), ce qui en fait des hypothèses raisonnables, généralement vérifiées dans la pratique.

Signalons que dans [9] I. Krichever présente une approche différente de l'étude des systèmes aux différences (techniquement, tout repose sur la résolution de problèmes du type Riemann-Hilbert). Il propose en particulier, pour certains systèmes aux différences, une notion de monodromies locales. Il montre que dans certaines situations, ces monodromies locales confluent vers les monodromies locales d'un système différentiel limite. Les hypothèses sont toutefois assez restrictives.

Les problèmes que nous considérons (classification rationnelle et confluence) et la "philosophie" de leurs solutions sont analogues à ceux de J. Sauloy dans [15]. Ici cependant, l'apparition de séries de $h$-factorielles rend les situations rencontrées, et les moyens mis en oeuvre pour les comprendre, plus complexes.

Notre article est également inspiré de travaux récents de A. Duval ; notamment des articles [3] et [4].

Mentionnons enfin que dans l'article en préparation [5] (voir également [14]) nous envisagerons, en collaboration avec A. Duval, une généralisation des différents phénomènes de confluence.

*Remerciements.* Ce travail fait partie d'une thèse ([14]) sous la direction de J.-P. Ramis ; je lui adresse toute ma reconnaissance pour son écoute et son aide si précieuses. Je tiens également à exprimer toute ma gratitude envers J. Sauloy pour ne s'être jamais économisé lors de nos nombreuses $q$-discussions. Enfin, je remercie chaleureusement A. Duval pour son aide et pour l'intérêt qu'elle a porté à ce travail.

## 2. Notations et terminologie

On note $\tau_{-h}$ l'opérateur de translation de pas $-h$ : $\tau_{-h}\, y(x) = y(x-h)$. On définit également deux opérateurs $\Delta_{-h}$ et $\delta_{-h}$ par :

$$\Delta_{-h}\, y(x) = \frac{y(x) - \tau_{-h}\, y(x)}{h} \text{ et } \delta_{-h}\, y(x) = (x-h)\Delta_{-h}\, y(x).$$

Le système (aux différences) de pas $h$ défini par une fonction matricielle $A$ est par définition le système suivant :

$$\delta_{-h} Y = AY.$$

Les anneaux de séries de $h$-factorielles et de séries de $h$-rétro-factorielles sont respectivement notés ${\mathcal{O}_{\text{fact}}}^{(h)}$ et $\mathcal{O}^{(h)}_{\text{rétro-fact}}$ ; les anneaux de séries formelles correspondants seront respectivement notés $\widehat{\mathcal{O}}^{(h)}_{\text{fact}}$ et $\widehat{\mathcal{O}}^{(h)}_{\text{rétro-fact}}$. Les corps des fractions des anneaux précédents seront respectivement notés $\mathcal{M}^{(h)}_{\text{fact}}$, $\mathcal{M}^{(h)}_{\text{rétro-fact}}$, $\widehat{\mathcal{M}}^{(h)}_{\text{fact}}$ et $\widehat{\mathcal{M}}^{(h)}_{\text{rétro-fact}}$. Les sous-corps de $\mathcal{M}^{(h)}_{\text{fact}}$ et de $\mathcal{M}^{(h)}_{\text{rétro-fact}}$ constitués de leurs éléments méromorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier seront respectivement notés $\mathcal{M}^{(h)}_{\text{fact}}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}^{(h)}_{\text{rétro-fact}}(\mathbb{C})$. Nous définissons :

$$x^{-[n]_h} = \frac{1}{x(x+h)\cdots(x+(n-1)h)},\ x^{[n]_h} = \frac{1}{x^{-[n]_h}}$$

et :

$$x^{-\{n\}_h} = \frac{1}{x(x-h)\cdots(x-(n-1)h)},\ x^{\{n\}_h} = \frac{1}{x^{-\{n\}_h}}\ ;$$

ce sont des vecteurs propres de $\delta_{-h}$. Lorsque nous n'envisagerons pas d'étudier des propriétés de confluence, nous nous placerons dans le cas $h=1$ et nous omettrons alors $h$ dans toutes nos notations (par exemple $x^{-[n]} = x^{-[n]_1}$, *etc.* ).

Nous traiterons, en vue de la confluence, de familles de systèmes aux différences indexés par des pas $h>0$. Nous introduisons quelques définitions afin d'alléger les énoncés et de dégager les notions importantes. On se donne $h_0 > 0$.

Définition 2.1. — *Soit* $(C,\lambda) \in \mathbb{R}^{+2}$. *Donnons nous, pour tout* $h \in ]0,h_0[$, *une fonction* $A^{(h)}$ *développable en série de* $h$*-factorielles :*

$$A^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} A^{(h)}_s x^{-[s]_h} \in M_n({\mathcal{O}_{\text{fact}}}^{(h)}).$$

*La famille* $A^{(h)}$, $h \in ]0,h_0[$ *est dite de type* $(C,\lambda)$ *s'il existe* $h_0' \in ]0,h_0[$ *tel que pour tout* $h \in ]0,h_0'[$ *et pour tout* $s \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\|A^{(h)}_s\| \leqslant C\lambda^{[s-1]_h}$$

*et si la famille des* $\|A_0^{(h)}\|$, $h \in ]0, h_0[$ *est bornée.*

Définition 2.2. — *Une famille de systèmes de pas* $h \in ]0, h_0[$ *:*

$$\delta_{-h} Y = A^{(h)} Y \tag{2.1}$$

*sera dite de Fuchs ou fuchsienne* $(C, \lambda)$ *en* $+\infty$ *si :*

– *pour tout* $h \in ]0, h_0[$, $A^{(h)} \in M_n(\mathcal{O}_{\mathrm{fact}}{}^{(h)})$,

– *la famille* $A^{(h)}$, $h \in ]0, h_0[$ *est de type* $(C, \lambda)$.

*Elle sera dite algébrique de Fuchs ou fuchsienne* $(C, \lambda)$ *en* $+\infty$ *si, pour tout* $h \in ]0, h_0[$, $A^{(h)} \in M_n(\mathbb{C}(x))$ *et si cette famille est fuchsienne* $(C, \lambda)$ *en* $+\infty$.

*La famille de Fuchs* $(C, \lambda)$ *en* $+\infty$ *(2.1) est dite non résonnante si, pour tout* $h \in ]0, h_0[$, *deux éléments du spectre* $Sp(A^{(h)}(+\infty))$ *ne diffèrent pas par un entier relatif non nul.*

Nous avons des notions et des terminologies analogues en $-\infty$ grâce au changement de variable $x \leftarrow -x$.

Enfin, le système obtenu après la transformation de jauge $F \in Gl_n(K)$ où $K$ est une extension de corps de $\mathbb{C}(x)$, à partir du système $\delta_{-h} Y = AY$, est par définition le système $\delta_{-h} Y = A^F Y$ où $A^F(x) = \frac{I - F(x-h)^{-1}(I - hA(x))F(x)}{h}$ (*i.e.*, celui obtenu après le changement de variable $Y \leftarrow FY$).

## 3. Résolution

Dans cette première partie, on étudie des systèmes algébriques (*i.e.*, à coefficients rationnels) de pas $h = 1$. On dira qu'un tel système, $\delta_{-1} Y = AY$, est fuchsien s'il est défini par un élément $A$ de $M_n(\mathbb{C}(x))$ holomorphe à l'infini. Il sera de plus dit non résonnant si deux éléments de $Sp(A(\infty))$ ne diffèrent pas par un entier relatif non nul. Un système (rationnel) $\tau_{-1} Y = BY$ sera dit singulier régulier s'il peut être transformé en un système fuchsien à l'aide d'une transformation de jauge rationnelle.

### 3.1. Systèmes aux différences fuchsiens non résonnants

#### 3.1.1. Rappels

Rappelons les étapes de la résolution, en $+\infty$, des systèmes fuchsiens non résonnants ; pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [3] et à [4]. Soit :

$$\delta_{-1} Y = AY \tag{3.1}$$

un système (algébrique) fuchsien non résonnant, on note $A_0 = A(\infty)$. On peut montrer qu'il existe une unique transformation de jauge $F \in Gl_n(\mathcal{O}_{\text{fact}})$ tangente à $I$ en $+\infty$ qui ramène au système, à matrice constante, défini par $A_0$ (*i.e.*, $A^F = A_0$).

*Remarque 3.1.* — Notons que $F(x)$ et $F^{-1}(x)$ sont bornées pour $|x|$ assez grand dans tout demi-plan droit.

Il suffit donc de savoir résoudre le système constant défini par $A_0$. Donnons nous, pour tout $c \in \mathbb{C}$, une famille $l_c^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ de fonctions uniformes et méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui satisfont :

$$\delta_{-1} l_c^{(k)} = c l_c^{(k)} + l_c^{(k-1)}.$$

Posons $e_c^+ = l_c^{(0)}$ et $l^{(k)} = l_0^{(k)}$. Ces deux fonctions vérifient :

$$\begin{aligned} \delta_{-1} e_c^+ &= c e_c^+ \qquad &&\text{(équations des caractères)},\\ \delta_{-1} l^{(k)} &= l^{(k-1)} \qquad &&\text{(équations des logarithmes)}.\end{aligned}$$

Nous choisissons :

$$e_c^+(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-c)}, \quad l_c^{(k)}(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial c'^k}_{|c'=c} e_{c'}^+(x).$$

Écrivons une réduction de Jordan de $A_0$ :

$$A_0 = P \operatorname{diag}(c_1 I_{\mu_1} + N_{\mu_1}, ..., c_m I_{\mu_m} + N_{\mu_m}) P^{-1}.$$

Alors, un système fondamental de solutions du système défini par $A_0$ en $+\infty$ est donné par :

$$e_{A_0}^+ := P \operatorname{diag}(e^+_{c_1 I_{\mu_1} + N_{\mu_1}}, .., e^+_{c_m I_{\mu_m} + N_{\mu_m}}) P^{-1}$$

avec :

$$e^+_{cI_\mu + N_\mu} = \begin{pmatrix} l_c^{(0)} & l_c^{(1)} & \dots & l_c^{(\mu-1)} \\ \vdots & l_c^{(0)} & \dots & l_c^{(\mu-2)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & l_c^{(0)} \end{pmatrix}.$$

On montre sans peine que la solution obtenue est indépendante de la réduction de Jordan choisie.

Un système fondamental de solutions (canonique) en $+\infty$ du système fuchsien non résonnant (3.1) est donc donné par le produit d'une transformation de jauge $F \in Gl_n(\mathcal{O}_{\text{fact}})$ tangente à $I$ en $+\infty$ et de $e^+_{A(\infty)}$ ; on le note $e_A^+$.

Les mêmes constructions peuvent être réalisées en $-\infty$ par le changement de variable $x \longleftarrow -x$ ; on note $e_A^-$ la solution canonique ainsi obtenue. Elle s'écrit comme le produit d'une fonction développable en série de rétro-factorielles tangente à $I$ en $-\infty$ et de $e^{+}_{A(\infty)}(-x)$.

### 3.1.2. Comportement asymptotique des solutions canoniques dans le cas non résonnant

Le résultat suivant est classique.

Proposition 3.2. — *Le système (3.1) admet une unique solution formelle de la forme :*

$$\Big(I+\sum_{s=1}^{+\infty}\widehat{Y}_s x^{-s}\Big)x^K$$

*avec $K \in M_n(\mathbb{C})$ et on a $K = A_0 (= A(\infty))$.*

La fonction $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-c)}x^{-c}$ est développable en série de factorielles et est tangente à 1 en $+\infty$ (voir l'appendice) ; nous en déduisons que, pour $k \geqslant 1$, la fonction :

$$l_c^{(k)}(x)x^{-c} - l_c^{(k-1)}(x)\log(x)x^{-c} + ... + l_c^{(0)}(x)(-1)^k\frac{\log(x)^k}{k!}x^{-c}$$

est développable en série de factorielles et est tangente à 0 en $+\infty$. Il en résulte que la fonction $e^{+}_{A_0}x^{-A_0}$ est développable en série de factorielles et est tangente à $I$ en $+\infty$.

La solution canonique, en $+\infty$, du système (3.1) est de la forme $Fe^{+}_{A_0}$ avec $F \in Gl_n(\mathcal{O}_{\text{fact}})$ tangent à $I$ en $+\infty$. On note $\widehat{F}$ la série formelle des $x^{-1}$ correspondant à $F$ et $\widehat{G}$ celle correspondant à $e^{+}_{A_0}x^{-A_0}$. Il est clair que $\widehat{F}\widehat{G}x^{A_0}$ est une solution formelle du système considéré : c'est celle exhibée à la proposition 3.2. De plus, suivant un résultat de B. Malgrange dans [10], une série de factorielles convergente est asymptotique dans un demi-plan droit à son écriture en série formelle[(1)]. Par conséquent $e^{+}_{A} = Fe^{+}_{A_0}$ est asymptotique, dans un certain demi-plan droit $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > M\}$, à la solution formelle de la proposition 3.2. Cela signifie que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\Big\|e^{+}_{A}x^{-A_0} - \sum_{s=0}^{N-1}\widehat{Y}_s x^{-s}\Big\| \leqslant C_N|x|^{-N}$$

si $x \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) > M\}$ est de module suffisamment grand. En utilisant l'équation fonctionnelle de $e^{+}_{A}$, on voit sans difficulté que ce développement est valable sur *tout* demi-plan droit. Nous pouvons ainsi énoncer le

(1) Rappelons que l'anneau des séries de factorielles formelles est isomorphe à celui des séries formelles en $1/x$, par un isomorphisme canonique qui respecte la valuation.

THÉORÈME 3.3. — *La solution $e_A^+$ est holomorphe et non dégénérée dans un demi-plan droit, et asymptotique sur tout demi-plan droit à la solution formelle de la proposition précédente.*

Naturellement, nous avons un énoncé analogue pour $e_A^-(x)$ dont nous laissons la formulation au lecteur.

THÉORÈME 3.4. — *Si une solution $\Psi$ du système (3.1) admet un développement asymptotique dans un demi-plan droit de la forme $\widehat{Z}x^{B_0}$ avec $\widehat{Z} \in Gl_n(\mathbb{C}((x^{-1})))$ et $B_0 \in M_n(\mathbb{C})$ alors, il existe $N \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que $\Psi = e_A^+ N$.*

*Démonstration.* — Le résultat étant indépendant de la norme choisie, on peut la supposer sous-multiplicative. On note $\Phi = e_A^+$ et $\widehat{Y}x^{A_0}$ son développement asymptotique sur un (sur tout) demi-plan droit. Si $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\widehat{Y}_{|n}$ la $n$-ème somme partielle de $\widehat{Y}$ ; notations similaires pour $\widehat{Z}$. Soit $\omega$ la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et 1-périodique définie par $\omega = \Phi^{-1}\Psi$. Donnons nous $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(x) \geqslant 1$, on ait :

$$\max\{\|x^{A_0}\|\|x^{-B_0}\|, \|x^{-A_0}\|\|x^{B_0}\|\} \leqslant |x|^N.$$

Puisque $\Psi$ (resp. $\Phi$) est asymptotique à $\widehat{Z}x^{B_0}$ (resp. $\widehat{Y}x^{A_0}$) dans un demi-plan droit, il existe des constantes $C,\ M > 1$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(x) \geqslant M$, on ait :

$$\|(\Phi x^{-A_0} - \widehat{Y}_{|2N})x^{A_0}\omega x^{-B_0} + \widehat{Y}_{|2N}x^{A_0}\omega x^{-B_0} - \widehat{Z}_{|2N}\| \leqslant C|x|^{-2N-1}$$

et :

$$\|\Phi x^{-A_0} - \widehat{Y}_{|2N}\| \leqslant C|x|^{-2N-1}.$$

Il en résulte que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(x) \geqslant M$, on a :

$$\|\widehat{Y}_{|2N}x^{A_0}\omega x^{-B_0} - \widehat{Z}_{|2N}\| \leqslant C|x|^{-2N-1} + C|x|^{-N-1}\|\omega\|.$$

Soit $S$ un segment compact de $[M, +\infty[$ non réduit à un point, sur lequel $\omega$ n'a pas de pôle ; $\omega$ est donc bornée sur $S + \mathbb{N}$. On en déduit qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $x \in S + \mathbb{N}$, on ait :

$$\|\widehat{Y}_{|2N}x^{A_0}\omega x^{-B_0} - \widehat{Z}_{|2N}\| \leqslant C'|x|^{-N-1}.$$

Par suite, compte tenu du fait que $\widehat{Y}_{|2N}$ est tangente à $I$ en $+\infty$, il existe une constante $C'' > 0$ telle que, pour tout $x \in S + \mathbb{N}$, on ait :

$$\|\omega - x^{-A_0}(\widehat{Y}_{|2N})^{-1}\widehat{Z}_{|2N}x^{B_0}\| \leqslant C''|x|^{-1}.$$

Ceci implique que $\omega$ est constante. $\square$

Corollaire 3.5. — *Soit $\Psi$ une solution du système (3.1) admettant un développement asymptotique dans un demi-plan droit de la forme $\widehat{Z}x^{B_0}$ avec $\widehat{Z} \in Gl_n(\mathbb{C}[[x^{-1}]])$ tangent à $I$ en l'infini et $B_0 \in M_n(\mathbb{C})$. Alors, $B_0 = A_0$ et $\Psi = e_A^+$.*

*Démonstration.* — Nous savons que $\Psi = e_A^+ N$ avec $N \in Gl_n(\mathbb{C})$. Notons $\widehat{Y}x^{A_0}$ le développement asymptotique de $e_A^+$ (qui est aussi l'unique solution formelle de notre système de la forme $\widehat{F}x^K$ avec $\widehat{F} \in Gl_n(\mathbb{C}[[x^{-1}]])$ tangent à $I$ en l'infini et $K \in M_n(\mathbb{C})$) alors, $\widehat{Y}x^{A_0}N = \widehat{Z}x^{B_0}$ donc $\widehat{Z}x^{B_0}$ est solution formelle de notre système de la forme (série formelle des $x^{-1}$ tangente à $I$ en l'infini)·(puissance de $x$) donc égale à $\widehat{Y}x^{A_0}$, *i.e.*, $N = I$. □

## 3.2. "Forme normale" des solutions d'un système singulier régulier

### 3.2.1. "Forme normale"

Donnons-nous un système fuchsien quelconque :

$$\delta_{-1}Y = AY. \tag{3.2}$$

En parfaite analogie avec les théories des équations différentielles et aux $q$-différences, la démarche pour résoudre un système fuchsien général consiste à se ramener au cas non résonnant via une transformation de jauge rationnelle. Le résultat suivant est prouvé dans [7].

Lemme 3.6. — *Soit $A \in M_n(\mathcal{O}_{\mathrm{fact}})$. Soient $c_1, ..., c_n$ les valeurs propres de $A(+\infty) \in M_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice $T$, à coefficients rationnels, de la forme $T = T_0 + T_1x^{-1} \in Gl_n(\mathbb{C}(x))$ avec $T_0,\ T_1 \in M_n(\mathbb{C})$, telle que $A^T$ soit dans $M_n(\mathcal{O}_{\mathrm{fact}})$ et que $A^T(+\infty)$ ait pour valeurs propres $c_1 + 1, ..., c_n$.*

Nous pouvons donc trouver $T \in Gl_n(\mathbb{C}(x))$ tel que $A^T$ soit holomorphe en l'infini et telle que le spectre de $A^T(\infty)$ soit contenu dans $\mathcal{B} = \{0 < \mathrm{Re}(x) \leqslant 1\}$ ($A^T$ est en particulier non résonnant). Il est ainsi possible de trouver un système fondamental de solutions, en $+\infty$, du système fuchsien (3.2), de la forme $M^{(+\infty)}N^{(+\infty)}$ où $M^{(+\infty)} = TF$ avec $F \in Gl_n(\mathcal{O}_{\mathrm{fact}})$ tangente à $I$ en $+\infty$ et $N^{(+\infty)}$ est diagonale par blocs, ces derniers étant de la forme :

$$e^+_{cI_\mu + N_\mu} = \begin{pmatrix} l_c^{(0)} & l_c^{(1)} & \dots & l_c^{(\mu-1)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & l_c^{(0)} & l_c^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & l_c^{(0)} \end{pmatrix},\ c \in \mathcal{B}.$$

On peut en outre faire en sorte que, pour un ordre fixé sur $\mathbb{C}$ (on peut par exemple prendre l'ordre total $\prec$ défini par $x \prec y \iff [\mathrm{Re}(x) < \mathrm{Re}(y)$ ou $(\mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y)$ et $\mathrm{Im}(x) < \mathrm{Im}(y))]$), les exposants soient rangés par taille croissante et que pour chaque exposant $c$ fixé les blocs de Jordan soient également organisés de manière croissante suivant leurs tailles.

*Remarque 3.7.* — Il suit d'une remarque antérieure que $M^{(+\infty)}$ peut être choisi de telle sorte qu'elle soit, ainsi que son inverse, à croissance au plus polynomiale dans tout demi-plan droit.

Les conclusions précédentes subsistent clairement pour les systèmes singuliers réguliers. Cela nous conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 3.8. — *Une solution en $+\infty$ d'un système singulier régulier sera dite sous forme normale si elle s'écrit comme un produit $M^{(+\infty)}N^{(+\infty)}$ avec $M^{(+\infty)} \in Gl_n(\mathcal{M}_{\mathrm{fact}}(\mathbb{C}))$ et $N^{(+\infty)}$ diagonale par blocs, de blocs diagonaux de la forme $e^+_{cI_\mu+N_\mu}$ avec $c \in \mathcal{B}$ et avec les $c$ rangés par ordre croissant (pour l'ordre précédemment introduit par exemple) ainsi que la taille des blocs de Jordan pour chaque $c$ fixé. La matrice $N^{(+\infty)}$ est alors dite "log-car" sous forme normale.*

Les raisonnements ci-dessus montrent qu'il existe toujours une solution sous forme normale. Il n'y a pas d'unicité pour les formes normales.

THÉORÈME 3.9. — *Soient $Y = MN$ et $Y' = M'N'$ deux solutions en $+\infty$ sous forme normale d'un même système singulier régulier. Alors $N' = N$ et il existe $R \in Gl_n(\mathbb{C})$ qui commute avec $N$ telle que $M' = MR$.*

*Démonstration.* — Cette preuve reprend une $q$-analogue ; voir [15]. Soit $R = M^{-1}M' \in Gl_n(\mathcal{M}_{\mathrm{fact}}(\mathbb{C}))$. Il est clair que $N^{-1}RN'$ est 1-périodique, méromorphe sur $\mathbb{C}$. Notons $e^+_{c_i}L_i$ les blocs diagonaux de $N$ ; $L_i$ a ses coefficients dans $\mathbb{C}[\widetilde{l}^{(0)}_{c_i}, \widetilde{l}^{(1)}_{c_i}, \ldots]$ avec $\widetilde{l}^{(k)}_{c_1} = \frac{l^{(k)}_{c_i}}{e^+_{c_i}}$. Notations analogues pour $N'$. On note $R_{i,j}$ les blocs de $R$ compatibles avec les blocs de $N$ et de $N'$. Les blocs de $N^{-1}RN'$ sont les $\frac{e^+_{c'_j}}{e^+_{c_i}} L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$ ; ils sont 1-périodiques. Ainsi, les coefficients de $L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$ sont des solutions de l'équation :

$$\tau^{-1}y = \frac{x-1-c_i}{x-1-c'_j}y$$

à coefficients dans $\mathcal{M}_{\mathrm{fact}}(\mathbb{C})(\{\widetilde{l}^{(k)}_{c_i}\}_{k\geqslant 0}, \{\widetilde{l}^{(k)}_{c'_j}\}_{k\geqslant 0})$. Soit $R_{i,j} = 0$ soit $R_{i,j} \neq 0$. Dans ce dernier cas, si on note que, d'après les résultats de l'appendice, $\widetilde{l}^{(k)}_{c_i}$, $\widetilde{l}^{(k)}_{c'_j} \in \mathcal{M}_{\mathrm{fact}}(\log(x))$, alors on obtient $c_i = c'_j$ $(L_i^{-1}R_{i,j}L'_j \in Gl_n(\mathbb{C}))$.

On note $S_{i,j} = L_i^{-1} R_{i,j} L'_j$ qui est donc à coefficients constants. En développant l'égalité $L_i S_{i,j} = R_{i,j} L'_j$ dans la base (sur le corps $\mathcal{M}_{\text{fact}}(\mathbb{C})$, *cf.* appendice) des $\widetilde{l}_{c'_i}^{(k)}$, on déduit (si on note $L_i = \sum_{k \geqslant 0} \widetilde{l}_{c_i}^{(k)} \xi_{0,m_i}^k$ et $L'_i = \sum_{k \geqslant 0} \widetilde{l}_{c'_i}^{(k)} \xi_{0,m'_i}^k$) que $R_{i,j} = S_{i,j}$ et $\xi_{0,m_i}^k R_{i,j} = R_{i,j} \xi_{0,m'_i}^k$. Ainsi, $R \in Gl_n(\mathbb{C})$ et $R^{-1} K R = K'$ avec $K = (\tau^{-1} N) N^{-1}$ et $K' = (\tau^{-1} N') N'^{-1}$. Les conditions de normalisation impliquent alors $K = K'$. □

Le résultat suivant découle de remarques antérieures.

Proposition 3.10. — *Si $M^{(+\infty)} N^{(+\infty)}$ est une solution canonique sous forme normale alors $M^{(+\infty)}$ est à croissance au plus polynomiale dans tout demi-plan droit. De même pour $(M^{(+\infty)})^{-1}$.*

On a bien sûr des résultats similaires en $-\infty$.

#### 3.2.2. Caractérisation des systèmes singuliers réguliers par la forme des solutions

Lemme 3.11. — *Toute matrice $M \in Gl_n(\mathcal{M}_{\text{fact}})$ peut s'écrire sous la forme $M = CR$ avec $C \in Gl_n(\mathbb{C}(x))$ et $R \in Gl_n(\mathcal{O}_{\text{fact}})$ tangent à $I$ en $+\infty$.*

*Démonstration.* — La preuve est laissée au lecteur. Elle est une adaptation facile de celle du résultat analogue pour les $q$-différences [15]. □

Théorème 3.12. — *Si un système algébrique $\tau_{-1} Y = AY$ admet une solution $MN$ avec $M \in Gl_n(\mathcal{M}_{\text{fact}})$ et $N$ une matrice "log-car" alors il est singulier régulier.*

*Démonstration.* — On écrit $M = CR$ comme dans le lemme précédent et on définit $B = (\tau_{-1} C)^{-1} A C \in M_n(\mathbb{C}(x))$. Le système défini par $A$ est rationnellement équivalent à celui défini par $B$. Mais

$$B = (\tau_{-1} R)(\tau_{-1} N N^{-1}) R^{-1}.$$

Ainsi $B(\infty) = I$ et $B$ défini un système fuchsien. □

## 4. Matrice de connexion de Birkhoff et classification rationnelle

### 4.1. Notations

Soit (en notant $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et 1-périodiques) :

$$\mathcal{A}'_n = Gl_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}/\mathbb{Z})) \times \{\text{matrices "log-car" sous forme normale}\}.$$

On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{A}'_n$ par :

$$(P,N) \sim (P',N')$$
$$\Leftrightarrow$$
$$N = N' \text{ et}$$
$$\exists R_1,\ R_2 \in Gl_n(\mathbb{C}) \text{ t.q. } R_1 P = P' R_2 \text{ et } [R_i, N] = 0,\ i = 1,2\ ;$$

la classe d'un couple $(P,N)$ est notée $\overline{(P,N)}$. On pose :

$$\mathcal{F}'_n = \mathcal{A}'_n / \sim .$$

L'ensemble suivant jouera un rôle fondamental :

$$\mathcal{F}_n = \{\overline{(P,N)} \mid P \in Gl_n(\mathbb{C}(e^{2\pi ix})) \text{ et } P(\pm i\infty) = e^{\pm i\pi N_0}\} \subset \mathcal{F}'_n$$

où l'on note(ra) $N_0 \in M_n(\mathbb{C})$ la réduite de Jordan sous forme normale correspondant à $N$ *i.e.*, la réduite de Jordan $N_0$ telle que $e^+_{N_0} = N$.

Enfin, l'ensemble des classes de systèmes singuliers réguliers modulo la relation d'équivalence rationnelle est noté $\mathcal{E}_n$. On rappelle que deux systèmes singuliers réguliers $\tau_{-1}Y = AY$ et $\tau_{-1}Y = BY$ sont dits rationnellement équivalents s'il existe une transformation de jauge rationnelle qui transforme le premier en le second *i.e.*, s'il existe $R \in Gl_n(\mathbb{C}(x))$ telle que $B(x) = R(x-1)^{-1}A(x)R(x)$ ; c'est clairement une relation d'équivalence.

Notre but est de décrire les classes de systèmes pour l'équivalence rationnelle grâce à la matrice de connexion de Birkhoff. Le principe remonte à G.D. Birkhoff.

## 4.2. Définition et propriétés

Considérons un système singulier régulier. Soient :

$$Y^{(-\infty)} = M^{(-\infty)}N^{(-\infty)} \text{ et } Y^{(+\infty)} = M^{(+\infty)}N^{(+\infty)}$$

des solutions sous forme normale, en $-\infty$ et en $+\infty$ respectivement. Soit :

$$\begin{aligned} P &= (Y^{(+\infty)})^{-1}Y^{(-\infty)} \\ &= (N^{(+\infty)})^{-1}(M^{(+\infty)})^{-1}M^{(-\infty)}N^{(-\infty)} \in Gl_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}/\mathbb{Z})) \end{aligned}$$

la matrice de connexion associée. D'après le théorème 3.9, on définit ainsi une application :

$$Bir\ : \mathcal{E}_n \to \mathcal{F}'_n\ ;$$

elle associe à la classe d'une équation, la classe du couple formé d'une matrice de connexion et de la réduite de Jordan sous forme normale correspondant à $N^{(+\infty)}$.

En outre, d'après la proposition 3.10, $M^{(-\infty)}$ et $(M^{(+\infty)})^{-1}$ sont à croissance au plus polynomiale dans les bandes verticales. Il en va de même pour $N^{(-\infty)}$ et $(N^{(+\infty)})^{-1}$ (d'après des propriétés classiques de la fonction Gamma). Ainsi $(Y^{(+\infty)})^{-1}Y^{(-\infty)}$ est une fonction méromorphe 1-périodique à croissance modérée dans les bandes verticales et donc une fonction trigonométrique.

Enfin, rappelons qu'on peut trouver deux solutions sous forme normale qui s'écrivent :

$$Y^{(-\infty)} = Te_A^- \quad \text{et} \quad Y^{(+\infty)} = Te_A^+$$

où $A$ est holomorphe à l'infini et $A(\infty) = N_0$ est la matrice de Jordan correspondant à la forme normale de notre système et où $T \in Gl_n(\mathbb{C}(x))$ (une transformation de jauge rationnelle qui ramène au cas fuchsien non résonnant). Ainsi, $(Y^{(+\infty)})^{-1}Y^{(-\infty)} = (e_A^+)^{-1}e_A^-$ et les propriétés asymptotiques de $e_A^-$ et de $e_A^+$ données lors de la sous-section 3.1.2 impliquent :

$$(Y^{(+\infty)})^{-1}Y^{(-\infty)}(\pm i\infty) = e^{\pm i\pi N_0}.$$

Finalement, on peut co-restreindre le but de l'application $Bir$ à $\mathcal{F}_n$. On note encore $Bir$ l'application obtenue.

### 4.3. Matrice de Birkhoff et classification rationnelle

Le théorème principal, dont le principe remonte à Birkhoff, peut maintenant être énoncé.

Théorème 4.1. — *L'application $Bir : \mathcal{E}_n \to \mathcal{F}_n$ est une bijection.*

*Démonstration.*
– *Injectivité.*

Soient deux systèmes $\tau_{-1}Y = AY$ et $\tau_{-1}Y = BY$ donnant le même élément de $\mathcal{F}_n$ par $Bir$. On peut donc choisir :

$$Y_{A,B}^{(-\infty)} = M_{A,B}^{(-\infty)}N_{A,B}^{(-\infty)} \quad \text{et} \quad Y_{A,B}^{(+\infty)} = M_{A,B}^{(+\infty)}N_{A,B}^{(+\infty)}$$

des solutions canoniques sous forme normale en $-\infty$ et en $+\infty$ respectivement telles que $(Y_A^{(+\infty)})^{-1}Y_A^{(-\infty)} = (Y_B^{(+\infty)})^{-1}Y_B^{(-\infty)}$. Par suite :

$$Y_A^{(+\infty)}(Y_B^{(+\infty)})^{-1} = Y_A^{(-\infty)}(Y_B^{(-\infty)})^{-1}.$$

Rappelons que $N_A^{(\pm\infty)} = N_B^{(\pm\infty)}$. D'une part, $Y_A^{(+\infty)}(Y_B^{(+\infty)})^{-1}$ est à croissance au plus polynomiale dans tout demi-plan droit (cela résulte de remarques précédentes), d'autre part $Y_A^{(+\infty)}(Y_B^{(+\infty)})^{-1}$ est à croissance au plus polynomiale dans tout demi-plan gauche par l'égalité ci-dessus ; ainsi cette matrice, *a priori* seulement méromorphe sur $\mathbb{C}$, est en réalité rationnelle ; puisqu'elle conjugue nos deux systèmes, cela prouve l'injectivité de $Bir$.

– *Surjectivité.*

Il suffit de reprendre la méthode de G.D. Birkhoff dans [2]. Voici quelques indications, en reprenant ses notations. Soient $(P, N)$ un couple de $\mathcal{F}_n$ et $N_0$ la matrice sous forme normale correspondant à $N$ ; on commence comme Birkhoff (paragraphe 17) : $A_1(x) = TPT^{-1}$ où $T(x) = x^{N_0}$ avec les mêmes choix de branches du logarithme. Alors $A_1$ est asymptotique à $I$ dans tout secteur d'angle $< \pi$ bisecté par le demi-axe des imaginaires purs supérieur ; de même en bisectant par le demi-axe des imaginaires purs inférieur. Nous pouvons maintenant utiliser les mêmes raisonnements que G.D. Birkhoff : les deux mêmes utilisations de son "preliminary theorem" permettent de prouver l'existence de deux fonctions méromorphes $Y^-$ et $Y^+$ telles que $Y^- = Y^+P$ et qui sont asymptotiques dans un demi-plan droit pour l'une, gauche pour l'autre, à une fonction $S$ de la forme $S = Yx^{N_0}$ où $Y \in Gl_n(\mathbb{C}((x^{-1})))$. □

Lemme 4.2. — *Toute matrice $M \in Gl_n(\mathbb{C}((x^{-1})))$ peut s'écrire sous la forme $M = CR$ avec $C \in Gl_n(\mathbb{C}(x))$ et $R \in Gl_n(\mathbb{C}[[x^{-1}]])$ tangent à $I$ en $\infty$.*

*Démonstration.* — C'est essentiellement la même que celle du lemme 3.11.

D'après le lemme, il existe deux fonctions méromorphes $Y^-$ et $Y^+$ telles que $Y^- = Y^+P$ et qui sont asymptotiques, dans un demi-plan droit pour l'une, gauche pour l'autre, à $S$ de la forme $S = Yx^{A_0}$ où $Y \in Gl_n(\mathbb{C}[[x^{-1}]])$ est tangent à $I$ en l'infini. Comme Birkhoff, on en conclut que $Q = Y^-(x)$ $(Y^-(x-1))^{-1} = Y^-(x)(Y^-(x-1))^{-1}$ est rationnelle. Pour terminer remarquons que $Q$ est de la forme $I + A_0/x +$ (termes de degrés plus petits). Ainsi, on a trouvé un système (rationnel) fuchsien, défini par une matrice $A$ telle que $A(\infty) = N_0$ (le système est donc non résonnant) et admettant deux solutions $Y^-$ et $Y^+$ telles que $Y^- = Y^+P$ et qui sont asymptotiques, dans un demi-plan droit pour l'une, gauche pour l'autre, à $S$ de la forme $S = Yx^{A_0}$ où $Y \in Gl_n(\mathbb{C}[[x^{-1}]])$ est tangent à $I$ en l'infini. Le corollaire 3.5 implique que $Y^-$ et $Y^+$ sont deux solutions canoniques. Ceci termine la preuve de la surjectivité de l'application $Bir$. □

## 5. Confluence des systèmes aux différences fuchsiens non résonnants vers les systèmes différentiels

Pour les notations et les terminologies employées, nous renvoyons le lecteur à la section 2.

Nous nous intéressons à partir de maintenant, et jusqu'à la fin de cet article, à la confluence des systèmes aux différences fuchsiens non résonnants vers les systèmes différentiels. Autrement dit, nous étudions les propriétés d'un système différentiel fuchsien en l'infini, en l'occurrence :

$$\delta\widetilde{Y} = \widetilde{A}\widetilde{Y} ;$$

($\delta$ désignant l'opérateur d'Euler $\delta = t\frac{d}{dt}$) que l'on peut (re)trouver en le voyant comme limite quand $h \to 0$ de systèmes aux différences de pas $h > 0$ :

$$\delta_{-h}Y^{(h)} = A^{(h)}Y^{(h)}.$$

Nous considérons des systèmes de pas $h$ plus généraux que les systèmes algébriques : on les supposera définis par des fonctions développables en séries de $h$-factorielles (ou de $h$-rétro-factorielles suivant qu'on s'intéresse à $\pm\infty$).

### 5.1. Résolution des systèmes à matrice constante

On généralise facilement notre résolution des équations des caractères et des logarithmes à des équations de pas $h$ quelconque.

Pout tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $h > 0$ nous nous donnons une famille $l_c^{(k,h)}$, $k \in \mathbb{N}$, de fonctions uniformes et méromorphes sur $\mathbb{C}$ satisfaisant :

$$\delta_{-h}l_c^{(k,h)} = cl_c^{(k,h)} + l_c^{(k-1,h)}.$$

Posons $e_c^{(h)+} = l_c^{(0,h)}$ et $l^{(k,h)} = l_0^{(k,h)}$. Ces fonctions vérifient les équations suivantes :

$$\delta_{-h}e_c^{(h)+} = ce_c^{(h)+} \qquad \text{(équations des caractères)},$$
$$\delta_{-h}l^{(k,h)} = l^{(k-1,h)} \qquad \text{(équations des logarithmes)}.$$

Il faut choisir des solutions qui présentent de bonnes propriétés de confluence. Voici des choix possibles.

*Exemple 5.1.* — Soient :

$$e_c^+(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-c)}, \quad e_c^{(h)+}(x) = h^c e_c^+(\frac{x}{h}), \quad l_c^{(k,h)}(x) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial c'^k}_{|c'=c} e_{c'}^{(h)+}(x).$$

Proposition 5.2. — *Soient $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ et, pour $h \in ]0, h_0[$, $c^{(h)} \in \mathbb{C}$ tels que $c^{(h)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} c \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :*

$$l_{c^{(h)}}^{(k,h)}(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} x^c \frac{\log^k(x)}{k!}.$$

*Démonstration.*

Lemme 5.3. — *Soit $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Alors :*

$$e_c^{(h)+}(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} x^c$$

*uniformément en $c \in D(0,r) = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| < r\}$.*

*Démonstration.* — Résulte facilement de la formule de Stirling. □

Fixons $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ et $r > 0$. On considère la famille (indexée par $h$) de fonctions holomorphes sur $\overline{D}(0,r)$ $f_h \ : c \longmapsto e_c^{(h)+}(x)$. D'après le lemme 5.3, la suite de fonctions $f_h$ converge uniformément vers $f \ : c \longmapsto x^c$ lorsque $h \to 0^+$. Le théorème de Weierstrass implique que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_h^{(k)}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$. Nous en déduisons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_h^{(k)}(c^{(h)}) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f^{(k)}(c)$. Ce qui est le résultat attendu.

*Exemple 5.4.* — Soient :

$$e_c^+(x) = \frac{\Gamma(1+c-x)}{\Gamma(1-x)},\ e_c^{(h)+}(x) = h^c e_c^+(\frac{x}{h}),\ l_c^{(k,h)}(x) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial c'^k}{}_{|c'=c}\, e_{c'}^{(h)+}(x).$$

Comme dans l'exemple précédent, on prouve la

Proposition 5.5. — *Soient $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ et, pour $h \in ]0, h_0[$, $c^{(h)} \in \mathbb{C}$ tels que $c^{(h)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} c \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :*

$$l_{c^{(h)}}^{(k,h)}(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} (-x)^c \frac{\log^k(-x)}{k!}.$$

Pour résoudre un système constant, on procède comme dans le cas du pas $h = 1$. On se donne donc un système :

$$\delta_{-h} Y = A_0^{(h)} Y$$

où $A_0^{(h)} \in M_n(\mathbb{C})$. On réduit $A_0^{(h)}$ sous forme de Jordan :

$$A_0^{(h)} = P^{(h)} \operatorname{diag}\left(c_1 I_{\mu_1} + N_{\mu_1}, \ldots, c_m I_{\mu_m} + N_{\mu_m}\right)\left(P^{(h)}\right)^{-1}$$

suivant la même règle que dans le cas du pas $h = 1$. Alors, un système fondamental de solutions, en $+\infty$, du système de pas $h$ défini par $A_0^{(h)}$ est donné par :

$$e^{(h)+}_{A_0^{(h)}} := P^{(h)} \operatorname{diag}\left(e^{(h)+}_{c_1 I_{\mu_1}+N_{\mu_1}}, \dots, e^{(h)+}_{c_m I_{\mu_m}+N_{\mu_m}}\right)\left(P^{(h)}\right)^{-1}$$

avec :

$$e^{(h)+}_{cI_\mu+N_\mu} = \begin{pmatrix} l_c^{(0,h)} & l_c^{(1,h)} & \dots & l_c^{(\mu-1,h)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & l_c^{(0,h)} & l_c^{(1,h)} \\ 0 & \dots & 0 & l_c^{(0,h)} \end{pmatrix}.$$

La solution obtenue est indépendante de la réduction de Jordan choisie. Nous aurons besoin d'une hypothèse sur les réductions de Jordan (analogue à une hypothèse de [15]).

Définition 5.6. — *Soient $\widetilde{A}_0 \in M_n(\mathbb{C})$ et, pour $h \in ]0, h_0[$, $A_0^{(h)} \in M_n(\mathbb{C})$. On dira qu'une réduction de Jordan de $\widetilde{A}_0$ se déploie en des réductions de Jordan des $A_0^{(h)}$, $h > 0$, s'il existe une réduction de Jordan de $\widetilde{A}_0$ :*

$$\widetilde{A}_0 = \widetilde{P}\widetilde{J}\widetilde{P}^{-1}$$

*et des réductions de Jordan des $A_0^{(h)}$, $h \in ]0, h_0[$ :*

$$A_0^{(h)} = P^{(h)} J^{(h)} \left(P^{(h)}\right)^{-1}$$

*telles que :*

$$P^{(h)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \widetilde{P},\ J^{(h)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \widetilde{J}.$$

Notons que l'hypothèse de déploiement implique que $A_0^{(h)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \widetilde{A}_0$. Compte-tenu des résultats précédents, on a clairement le résultat suivant.

Proposition 5.7. — *Soient $\widetilde{A}_0 \in M_n(\mathbb{C})$ et, pour $h \in ]0, h_0[$, $A_0^{(h)} \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'une réduction de Jordan de $\widetilde{A}_0$ se déploie en des réductions de Jordan des $A_0^{(h)}$, $h \in ]0, h_0[$. Alors, dans le cas de l'exemple 5.1 (resp. 2) on a, $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (resp. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$) :*

$$e^{(h)+}_{A_0^{(h)}}(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} x^{\widetilde{A}_0} \text{ (resp. } (-x)^{\widetilde{A}_0}\text{)}.$$

## 5.2. On se ramène au cas constant

### 5.2.1. La transformation de jauge : énoncé du théorème

Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$. On note $|||\cdot|||$ la norme (sur l'espace vectoriel des endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$) subordonnée à $\|\cdot\|$. Désignons enfin, pour $s \in \mathbb{N}^*$, par $K_{s,A_0^{(h)}}$ l'opérateur linéaire sur $M_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), K_{s,A_0^{(h)}}(M) = A_0^{(h)} M - M A_0^{(h)} - sM.$$

Cette partie est consacrée à la preuve du théorème suivant.

THÉORÈME 5.8. — *Soit $\delta_{-h} Y = A^{(h)} Y$, $h \in ]0,h_0[$ une famille de systèmes de Fuchs $(C,\lambda)$ en $+\infty$, non résonnants (non nécessairement algébriques). On suppose de plus que* $\sup_{s\in\mathbb{N}^*,\ h\in]0,h_0[} |||K^{-1}_{s,A_0^{(h)}}|||$ *est fini. Alors, $\forall h \in ]0,h_0[$, $\exists! F^{(h)} \in Gl_n({\mathcal{O}_{\text{fact}}}^{(h)})$ tel que $F^{(h)}(+\infty) = I$ et $(A^{(h)})^{F^{(h)}} = A_0^{(h)}$. De plus, la famille des $F^{(h)}$, $h \in ]0,h_0[$ est d'un certain type $(C',\lambda')$.*

La preuve que nous donnons de ce théorème est inspirée de techniques utilisées par A. Duval dans [3] et [4].

*Notations 5.9.* — Si $A^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} A_s^{(h)} x^{-[s]_h} \in M_n({\mathcal{O}_{\text{fact}}}^{(h)})$, on note :

$$\overline{A}^{(h)}(x) = A^{(h)}(hx) = \sum_{s=0}^{+\infty} \overline{A}_s^{(h)} x^{-[s]}$$

avec :

$$\overline{A}_s^{(h)} = \frac{A_s^{(h)}}{h^s}.$$

### 5.2.2. Préparatifs

PROPOSITION 5.10. — *Soit $\delta_{-h} Y = A^{(h)} Y$, $h \in ]0,h_0[$ une famille de systèmes de Fuchs $(C,\lambda)$ en $+\infty$ (non nécessairement algébriques), tels que, pour $h \in ]0,h_0[$, le spectre de $A_0^{(h)} = A^{(h)}(+\infty)$ ne contienne aucun entier strictement négatif. Soient $b = \sup_{s\in\mathbb{N}^*,h\in]0,h_0[} \|(sI + A_0^{(h)})^{-1}\|$ qu'on suppose fini et $0 \neq U_0 \in \mathbb{C}^n$. Alors, pour tout $h \in ]0,h_0[$, l'équation $\delta_{-h} Y = A^{(h)} Y$ admet une solution dans $M_{n,1}(\widehat{\mathcal{O}}^{(h)}_{\text{fact}})$ de terme constant $U_0$ si et seulement si $U_0$ est dans le noyau de $A_0^{(h)}$. Lorsqu'elle existe, une telle solution est unique, converge dans un demi-plan droit, et la famille de ces solutions est de type $(Cb\|U_0\|, Cb + \lambda)$.*

*Démonstration.* — Notons :

$$A^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} A_s^{(h)} x^{-[s]_h} \text{ et } Y^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} Y_s^{(h)} x^{-[s]_h}.$$

Rappelons l'hypothèse, pour $h > 0$ assez petit, on a :

$$\|\overline{A}_s^{(h)}\| \leqslant \frac{C}{h}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^{[s-1]} = \overline{C}^{(h)}\left(\overline{\lambda}^{(h)}\right)^{[s-1]},\ s \in \mathbb{N}^*$$

avec :

$$\overline{C}^{(h)} = \frac{C}{h} \text{ et } \overline{\lambda}^{(h)} = \frac{\lambda}{h}.$$

*Partie formelle.* Tout revient à trouver $Y^{(h)} \in M_{n,1}(\widehat{\mathcal{O}}^{(h)}_{\text{fact}})$ de "terme constant" $U_0$ et telle que $\overline{Y}^{(h)}$ soit solution de $\delta_{-1}\overline{Y}^{(h)}(x) = \overline{A}^{(h)}(x)\overline{Y}^{(h)}(z)$. Nous avons (formule de multiplication de deux séries de factorielles) :

$$\overline{A}^{(h)}(x)\overline{Y}^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} C_s^{(h)} x^{-[s]}$$

avec :

$$C_0^{(h)} = \overline{A}_0^{(h)}\overline{Y}_0^{(h)} \ ; \ C_s^{(h)} = \overline{A}_0^{(h)}\overline{Y}_s^{(h)} + \overline{A}_s^{(h)}\overline{Y}_0^{(h)} + \sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)}\overline{A}_j^{(h)}\overline{Y}_l^{(h)}$$

et :

$$J_s = \{(j,k,l)\backslash j,l \geqslant 1,\ k \geqslant 0,\ j+k+l = s\}$$
$$c_{j,l}^{(k)} = \frac{(j+k-1)!(l+k-1)!}{k!(j-1)!(l-1)!}.$$

D'autre part :

$$\delta_{-1}\overline{Y}^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} -s\overline{Y}_s^{(h)} x^{-[s]}.$$

Ainsi, $\overline{Y}^{(h)}$ est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} \overline{A}_0^{(h)}\overline{Y}_0^{(h)} = 0 \\ -(sI + \overline{A}_0^{(h)})\overline{Y}_s^{(h)} = \overline{A}_s^{(h)} Y_0^{(h)} + \sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)}\overline{A}_j^{(h)}\overline{Y}_l^{(h)},\ s \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Il est donc nécessaire que $\overline{Y}_0^{(h)}$ soit dans $Ker(\overline{A}_0^{(h)})$. Dans ce cas, le système se résout de proche en proche :

$$\overline{Y}_s^{(h)} = -(sI + \overline{A}_0^{(h)})^{-1}\left[\overline{A}_s^{(h)}\overline{Y}_0^{(h)} + \sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)}\overline{A}_j^{(h)}\overline{Y}_l^{(h)}\right].$$

Ceci clôt l'aspect formel de la proposition.

*Partie convergente.* Voyons maintenant ce qu'il en est de la convergence de la solution obtenue.

Notons : $\overline{a}_s^{(h)} = \|\overline{A}_s^{(h)}\|$ et $\overline{y}_s^{(h)} = \|\overline{Y}_s^{(h)}\|$, $\forall s \in \mathbb{N}$.

De la relation de récurrence ci-dessus, on déduit :

$$\overline{y}_s^{(h)} \leqslant b\left[\overline{a}_s^{(h)}\overline{y}_0^{(h)} + \sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)}\overline{a}_j^{(h)}\overline{y}_l^{(h)}\right].$$

Introduisons une série majorante :

$$\begin{cases} \overline{y}_1^{(h)>} = b\overline{a}_1^{(h)}\overline{y}_0^{(h)} \\ \overline{y}_s^{(h)>} = b\left[\overline{a}_s^{(h)}\overline{y}_0^{(h)} + \sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)}\overline{a}_j^{(h)}\overline{y}_l^{(h)>}\right], \ s \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Elle domine la série de terme général $\overline{y}_s^{(h)}$. Notons :

$$\overline{y}^{(h)>}(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \overline{y}_s^{(h)>} x^{-[s]} \in \widehat{\mathcal{O}}_{\text{fact}}$$

et :

$$\overline{a}^{(h)}(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \overline{a}_s^{(h)} x^{-[s]} \in \widehat{\mathcal{O}}_{\text{fact}}.$$

La formule de multiplication de deux séries de factorielles montre que :

$$\overline{y}^{(h)>}(x) = b(\overline{y}_0^{(h)}\overline{a}^{(h)}(x) + \overline{a}^{(h)}(x)\overline{y}^{(h)>}(x)),$$

par conséquent :

$$\overline{y}^{(h)>}(x) = -\overline{y}_0^{(h)}\left(1 - \frac{1}{1 - b\overline{a}^{(h)}(x)}\right).$$

À présent, on utilise les estimations sur les coefficients de l'inverse d'une série de factorielles d'un type $(C, \lambda)$ (voir [3] ou [11]) ; elles donnent $\overline{y}_s^{(h)>} \leqslant \overline{C}^{(h)} b\overline{y}_0^{(h)} \frac{\Gamma(\overline{\lambda}^{(h)} + \overline{C}^{(h)} b + s - 1)}{\Gamma(\overline{\lambda}^{(h)} + \overline{C}^{(h)} b)}$, pour $h > 0$ assez petit. □

### 5.2.3. La transformation de jauge : preuve du théorème

Rappelons l'hypothèse, pour $h > 0$ assez petit, on a :

$$\|\overline{A}_s^{(h)}\| \leqslant \frac{C}{h}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^{[s-1]} = \overline{C}^{(h)}(\overline{\lambda}^{(h)})^{[s-1]}$$

avec :

$$\overline{C}^{(h)} = \frac{C}{h} \text{ et } \overline{\lambda}^{(h)} = \frac{\lambda}{h}.$$

Passons à présent à la preuve du théorème. Notons

$$F^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} F_s^{(h)} x^{-[s]_h}.$$

La matrice $F^{(h)}$ satisfait les conditions de la proposition si et seulement si $A^{(h)}(x)F^{(h)}(x) - \delta_{-h}F^{(h)}(x) = F^{(h)}(x-h)A_0^{(h)}$.

Ainsi, tout revient à trouver $F^{(h)} \in Gl_n({\mathcal{O}_{\text{fact}}}^{(h)})$ (tangente à $I$ en $+\infty$) telle que $\overline{F}^{(h)}$ soit développable en série de factorielles tangente à l'identité en l'infini et telle que $\overline{A}^{(h)}(x)\overline{F}^{(h)}(x) - \delta_{-1}\overline{F}^{(h)}(x) = \overline{F}^{(h)}(x-1)\overline{A}_0^{(h)}$.

Cette dernière équation peut se réécrire comme suit :

$$\delta_{-1}\overline{F}^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} L_s^{(h)}(\overline{F}^{(h)}(x))x^{-[s]}$$

où, pour $s = 0, 1$, $L_s^{(h)}$ est l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} L_0^{(h)}(U) &= \overline{A}_0^{(h)}U - U\overline{A}_0^{(h)}, \\ L_1^{(h)}(U) &= \overline{A}_1^{(h)}(U) + (\overline{A}_0^{(h)}U - U\overline{A}_0^{(h)})\overline{A}_0^{(h)} \end{aligned}$$

et pour $s \geqslant 2$ :

$$L_s^{(h)}(U) = \overline{A}_s^{(h)}(U) + (\overline{A}_0^{(h)}U - U\overline{A}_0^{(h)})B_s^{(h)} + \sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)}\overline{A}_j^{(h)}UB_l^{(h)}$$

avec :

$$B_s^{(h)} = \overline{A}_0^{(h)}(\overline{A}_0^{(h)} + I)\cdots(\overline{A}_0^{(h)} + (s-1)I), \ s \geqslant 1.$$

Puisque $\|\overline{A}_s^{(h)}\| \leqslant \overline{C}^{(h)}(\overline{\lambda}^{(h)})^{[s-1]}$, nous avons l'estimation suivante (où $a_0^{(h)} = \|\overline{A}_0^{(h)}\|$) :

$$\begin{aligned} \|L_s^{(h)}\| \leqslant \overline{C}^{(h)}\frac{\Gamma(\overline{\lambda}^{(h)} + s - 1)}{\Gamma(\overline{\lambda}^{(h)})} + 2a_0^{(h)}\overline{C}^{(h)}\frac{\Gamma(a_0^{(h)} + s)}{\Gamma(a_0^{(h)})} \\ + \overline{C}^{(h)}\sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)}\frac{\Gamma(a_0^{(h)} + j)}{\Gamma(a_0^{(h)})}\frac{\Gamma(\overline{\lambda}^{(h)} + l - 1)}{\Gamma(\overline{\lambda}^{(h)})} \end{aligned}$$

qui s'écrit (voir [3]) :

$$\begin{aligned} &\overline{C}^{(h)}\frac{1 - \overline{\lambda}^{(h)}}{a_0^{(h)} + 1 - \overline{\lambda}^{(h)}}\frac{\Gamma(\overline{\lambda}^{(h)} + s - 1)}{\Gamma(\overline{\lambda}^{(h)})} \\ + \quad &\left(2a_0^{(h)} + \frac{\overline{C}^{(h)}}{a_0^{(h)} + 1 - \overline{\lambda}^{(h)}}\right)\frac{\Gamma(a_0^{(h)} + s)}{\Gamma(a_0^{(h)})} \end{aligned}$$

et qui est majoré par $3\overline{C}^{(h)}(\overline{\lambda}^{(h)})^{[s-1]}$ pour $h$ suffisamment petit, uniformément en $s$. D'autre part, le spectre de l'opérateur $L_0^{(h)}$, qui est égal à $\{\mu - \nu \mid \mu, \nu \in Sp(\overline{A}_0^{(h)})\}$, ne contient aucun entier strictement négatif puisque $\overline{A}_0^{(h)}$ est non résonnante. De plus, $I$ appartient au noyau de $L_0^{(h)}$. Nous sommes donc en mesure d'appliquer la proposition 5.10 ; cela termine la démonstration du théorème.

### 5.3. Bilan : la solution canonique en $+\infty$

Nous sommes à présent en mesure d'associer une solution canonique à une famille de systèmes fuchsiens $(C,\lambda)$ en $+\infty$, non résonnants.

THÉORÈME 5.11. — *Soit $\delta_{-h}Y = A^{(h)}Y$, $h \in ]0,h_0[$ une famille de systèmes fuchsiens $(C,\lambda)$ en $+\infty$, non résonnants. On note $A_0^{(h)}$ la valeur en $+\infty$ de $A^{(h)}$. Nous appelons solutions canoniques, en $+\infty$, de cette famille de systèmes, la famille de (systèmes fondamentaux de) solutions :*

$$e_{A^{(h)}}^{(h)+} := F_{A^{(h)}}^{(h)+} e_{A_0^{(h)}}^{(h)+}$$

*où $e_{A_0}^{(h)+}$ a été définie en 5.1 et $F_{A^{(h)}}^{(h)+}$ est l'unique transformation de jauge de $Gl_n({\mathcal{O}_{\mathrm{fact}}}^{(h)})$, tangente à $I$ en $+\infty$, telle que $(A^{(h)})^{F_{A^{(h)}}^{(h)+}} = A_0^{(h)}$. Si on suppose de plus que :*

$$\sup_{s\in\mathbb{N}^*,\ h\in]0,h_0[} |||K^{-1}_{s,A_0^{(h)}}||| < \infty$$

*alors la famille des $F_{A^{(h)}}^{(h)+}$, $h \in ]0,h_0[$ est de type $(C',\lambda')$ pour certains $C',\lambda'$.*

### 5.4. Convergence des séries de factorielles vers les séries entières à l'infini

Il est naturel de s'intéresser à la convergence des séries de factorielles vers les séries entières à l'infini puisque $x^{-[s]_h} \xrightarrow[h\to 0]{} x^{-s}$.

PROPOSITION 5.12. — *Soit, pour tout $h \in ]0,h_0[$, $Y^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} Y_s^{(h)} x^{-[s]_h}$ un élément de $M_n(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{fact}}^{(h)})$. Soit également, $\widetilde{Y}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \widetilde{Y}_s x^{-s}$ un élément de $M_n(\mathbb{C}[[x^{-1}]])$. Si $Y_s^{(h)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \widetilde{Y}_s$ et si la famille des $Y^{(h)}$, $h \in ]0,h_0[$ est de type $(C,\lambda)$ alors, pour $h>0$ assez petit, la série de $h$-factorielles formelle définissant $Y^{(h)}$ converge pour $\mathrm{Re}(x) > \lambda+1$ ; la série formelle définissant $\widetilde{Y}$ converge absolument pour $|x| > \lambda+1$ et $Y^{(h)}(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \widetilde{Y}(x)$ pour $\mathrm{Re}(x) > \lambda+1$. La convergence est uniforme sur tout domaine de la forme $\mathrm{Re}(x) > \lambda+1+\epsilon$ (pour tout $\epsilon > 0$).*

*Démonstration.* — Commençons par la convergence simple. Soit $\mathrm{Re}(x) > \lambda+1$. On suppose $h>0$ assez petit pour que les estimations de type $(C,\lambda)$ soient valables. Nous avons :

$$|Y_s^{(h)} x^{-[s]_h}| \leqslant C \left| \frac{\lambda^{[s-1]_h}}{x^{[s]_h}} \right| \leqslant C \frac{\lambda^{[s-1]_h}}{\mathrm{Re}(x)^{[s]_h}}.$$

De l'inégalité $\frac{1}{\mathrm{Re}(x)+(s-1)h} \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}(x)}$ et de la croissance de la fonction $h \longmapsto \frac{\lambda+hk}{\mathrm{Re}(x)+hk}$, on déduit :

$$|Y_s^{(h)} x^{-[s]_h}| \leqslant C \left[\prod_{k=0}^{s-2} \left[\frac{\lambda+k}{\mathrm{Re}(x)+k}\right]\right] \frac{1}{\mathrm{Re}(x)}.$$

La formule de Stirling permet de conclure à la convergence de la série de terme général $\prod_{k=0}^{s-2}\left[\frac{\lambda+k}{\mathrm{Re}(x)+k}\right]$. Le théorème de convergence dominée permet de terminer la preuve de la première partie de la proposition.

Passons à la convergence uniforme. Soient $\nu > \lambda+1$ et $\mathrm{Re}(x) > \nu+\delta$ $(\delta > 0)$. Effectuons la transformation d'Abel suivante :

$$b_s^{(h)} = a_s^{(h)} \nu^{-[s]_h}, \quad c_s^{(h)} = \nu^{[s]_h} x^{-[s]_h}, \quad B_s^{(h)} = \sum_{s=m}^{n} b_k^{(h)},$$

$$\sum_{s=m}^{n} a_s^{(h)} \nu^{-[s]_h} \quad = \quad \sum_{s=m}^{n-1} B_s^{(h)} (c_s^{(h)} - c_{s+1}^{(h)}) + c_n^{(h)}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} c_s^{(h)} - c_{s+1}^{(h)} &= c_s^{(h)} \frac{x-\nu}{x+h(s-1)} \\ &= \underbrace{\frac{\nu(x-\nu)}{x}}_{(1)} \underbrace{\left[\prod_{k=1}^{s-1} \frac{\nu+hk}{x+hk}\right] \frac{1}{x+hs}}_{(2)}. \end{aligned}$$

D'abord : (1) $\leqslant 2|\nu|$, ensuite : (2) $\leqslant \frac{d_s^{(h)}}{\nu+\delta+sh}$ avec :

$$d_s^{(h)} = \prod_{k=1}^{s-1} \frac{\nu+hk}{\nu+\delta+hk} \geqslant 0$$

or $d_s^{(h)} - d_{s+1}^{(h)} = d_s^{(h)} \frac{\delta}{\nu+\delta+hs}$, donc :

$$|c_s^{(h)} - c_{s+1}^{(h)}| \leqslant 2|\nu|\delta^{-1}(d_s^{(h)} - d_{s+1}^{(h)}).$$

Il apparaît d'autre part clairement que, $\epsilon$ étant donné, si $N$ est suffisamment grand, alors pour tout $n > m \geqslant N$, $|B_s^{(h)}| \leqslant \frac{\epsilon}{2|\nu|\delta^{-1}}$. Il s'en suit que, pour $n > m \geqslant N$ :

$$\sum_{s=m}^{n} a_s^{(h)} x^{-[s]_h} \quad \leqslant \quad \epsilon d_s^{(h)} \leqslant \epsilon,$$

ce qui achève la preuve. □

Le résultat suivant (dont l'utilité apparaîtra clairement au corollaire 5.21 de la section 5.5.2) fournit une réciproque partielle à la proposition précédente.

PROPOSITION 5.13. — *Soit $\widetilde{A}$ un élément de $M_n(\mathbb{C}(x))$ qu'on suppose holomorphe en $\infty$. Soit $A^{(h)}$, $h \in ]0, h_0[$ une famille d'éléments de $M_n(\mathbb{C}(x))$ qui convergent uniformément vers $\widetilde{A}$ sur un voisinage de $\infty$, lorsque $h$ tend vers $0^+$ (en particulier les $A^{(h)}$ sont holomorphes en $\infty$ pour $h > 0$ assez petit). Notons :*

$$\widetilde{A}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \widetilde{A}_s x^{-s}$$

*le développement en série entière au voisinage de l'infini de $\widetilde{A}$ et :*

$$A^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} A_s^{(h)} x^{-[s]_h}$$

*le développement en série de factorielles de $A^{(h)}$. Alors la famille de séries de $h$-factorielles $A^{(h)}$, $h \in ]0, h_0[$ est de type $(C, \lambda)$ et on a, pour tout $s \in \mathbb{N}$ :*

$$A_s^{(h)} \xrightarrow[h \to 0^+]{} \widetilde{A}_s.$$

*Démonstration.* — La seconde assertion pourrait être justifiée par un raffinement de la méthode utilisée pour prouver la première (*i.e.*, effectuer les calculs exacts dans le lemme 5.14) mais nous préférons utiliser un résultat de [16] pp. 142–143. On pose :

$$\varphi^{(h)}(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\underline{A}_i^{(h)}}{h^i} \frac{(-\ln(1-x))^i}{i!} \qquad \text{et} \qquad \psi^{(h)}(x) = \varphi^{(h)}(hx).$$

Alors, selon [16], $A_i^{(h)} = h^i \frac{d^i \varphi^{(h)}}{dx^i}(0) = \frac{d^i \psi^{(h)}}{dx^i}(0)$. On constate que, sur un certain voisinage de 0, $\psi^{(h)}(x)$ (qui est holomorphe sur un voisinage fixe de 0) converge uniformément vers $\widetilde{\psi}(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \underline{A}_i^{(h)} \frac{x^i}{i!}$. Il en résulte que $\lim_{h \to 0^+} A_i^{(h)} = \widetilde{A}_i$. Ce qui prouve la seconde assertion.

Prouvons maintenant la première.

LEMME 5.14. — *Les coefficients du développement en série de $h$-factorielles de $\frac{1}{x^n} = \sum_{s=n}^{+\infty} \psi_{n,s}^{(h)} x^{-[s]_h}$ sont tous positifs.*

*Démonstration.* — On commence par le cas $h = 1$. On procède par récurrence sur $n$. Le résultat est trivial pour $n = 0$ (ainsi que pour $n = 1$). Supposons alors que l'hypothèse est vérifiée au rang $n$ :

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{s=n}^{+\infty} \psi_{n,s}^{(1)} x^{-[s]}, \ \psi_{n,s}^{(1)} \geqslant 0.$$

Dérivant les deux côtés de cette égalité, nous obtenons, grâce à la formule de dérivation des séries de factorielles donnée par Norlund dans [11] pp. 220–222 :

$$-\frac{n}{x^{n+1}}=-\sum_{s=n+1}^{+\infty}\left(\frac{\psi_{n,s-1}^{(1)}}{1(s-2)!}+\frac{\psi_{n,s-2}^{(1)}}{2(s-3)!}+...+\frac{\psi_{n,1}^{(1)}}{s-1}\right)(s-1)!x^{-[s]},$$

donc :

$$\psi_{n+1,s}^{(1)}=\left(\frac{\psi_{n,s-1}^{(1)}}{1(s-2)!}+\frac{\psi_{n,s-2}^{(1)}}{2(s-3)!}+...+\frac{\psi_{n,1}^{(1)}}{s-1}\right)(s-1)!/n\geqslant 0$$

et la récurrence est achevée.

Pour le cas $h$ quelconque, il suffit de substituer $x/h$ à $x$ pour obtenir le résultat. □

Lemme 5.15. — *Nous avons :* $\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_{k,s}^{(h)}\alpha^{k-1}=\alpha^{[s-1]_h}$.

*Démonstration.* — Nous avons les développements suivants :

$$\frac{1}{x-\alpha}=\sum_{s=0}^{+\infty}\alpha^{[s-1]_h}x^{-[s]_h}=\sum_{s=0}^{+\infty}\alpha^s x^{-(s+1)}.$$

Par identification, nous en déduisons : $\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_{k,s}^{(h)}\alpha^{k-1}=\alpha^{[s-1]_h}$, ce qui est le résultat cherché. □

Par hypothèse, il existe un voisinage de l'infini $D=\{|x|\geqslant r\}$ sur lequel les $A^{(h)}$ (n'ont pas de pôles et) convergent uniformément vers $\widetilde{A}$. Il résulte alors des estimations de Cauchy, que pour $h>0$ assez petit, il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $i\in\mathbb{N}$ :

$$\|A_i^{(h)}\|\leqslant Cr^i.$$

Avec les notations ci-dessus nous avons :

$$A_i^{(h)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_{k,i}^{(h)}\underline{A}_k^{(h)}$$

et, compte-tenu de ce que $\psi_{k,i}^{(h)}\geqslant 0$ pout tout $k,\ i$, on en déduit que, pour $h>0$ assez petit et pour tout $i\in\mathbb{N}$ :

$$\|A_i^{(h)}\|\leqslant C\sum_{k=0}^{+\infty}\psi_{k,i}^{(h)}r^i=(Cr)r^{[i-1]_h}.$$

Autrement dit, la famille des $A^{(h)}$ est de type $(Cr,r)$. Ceci vient clore la preuve du théorème. □

### 5.5. Confluence de différence vers différentielle

Pour appliquer la méthode de Frobenius à un système différentiel, on emploiera la détermination principale du logarithme. Par souci de simplicité, on opte ici pour les caractères et les logarithmes de l'exemple 5.1. Il n'y a aucune difficulté à adapter les énoncés pour les choix de l'exemple 5.4.

#### 5.5.1. Étude locale au voisinage de $+\infty$

Nous introduisons l'hypothèse suivante :

**(H):** (i) Soit, pour tout $h \in ]0, h_0[$, $A^{(h)} \in M_n(\mathcal{O}_{\text{fact}}{}^{(h)})$. On suppose que la famille $A^{(h)}$, $h \in ]0, h_0[$ est de type $(C, \lambda)$, et que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe $\widetilde{A}_s \in M_n(\mathbb{C})$ avec $A_s^{(h)} \xrightarrow[h \to 0^+]{} \widetilde{A}_s$ (où $A^{(h)}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} A_s^{(h)} x^{-[s]_h}$).

(ii) On suppose qu'une réduction de Jordan de $\widetilde{A}_0$ se déploie en des réductions de Jordan des $A_0^{(h)}$, $h \in ]0, h_0[$ (*cf.* définition 5.6).

(iii) On suppose que $\widetilde{A}_0$ est non résonnante.

On suppose que (H) est satisfaite.

D'après la proposition 5.12 la série formelle $\widetilde{A}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \widetilde{A}_s x^{-s}$ est convergente au voisinage de l'infini. Ainsi le système différentiel :

$$\delta \widetilde{Y} = \widetilde{A} \widetilde{Y}$$

est fuchsien en $\infty$ et non résonnant. On note $e_{\widetilde{A}}$ sa solution canonique, en $\infty$, obtenue par la méthode de Frobenius.

D'autre part, remarquons que les systèmes (aux différences) définis par les $A^{(h)}$ sont non résonnants pour $h > 0$ assez petit : cela résulte immédiatement de l'hypothèse de déploiement des réductions de Jordan et de la non résonnance de $\widetilde{A}_0$.

Théorème 5.16. — *Si (H) est vérifiée alors $e^{(h)+}_{A^{(h)}}$ tend, quand $h$ tend vers $0^+$, sur un certain demi-plan droit, vers $e_{\widetilde{A}}$. La convergence est uniforme sur tout demi-plan droit* $\mathrm{Re}(x) > C$, *pour $C$ assez grand.*

*Démonstration.* — Notons que l'hypothèse $\sup_{s \in \mathbb{N}^*,\ h \in ]0, h'_0[} |||K^{-1}_{s, A_0^{(h)}}||| < \infty$ du théorème 5.11 est ici vérifiée (pour $h'_0 \in ]0, h_0[$ assez petit). En effet, on a :

$$K_{s, A_0^{(h)}}(U) = \underbrace{\left[\widetilde{A}_0 U - U \widetilde{A}_0 - sU\right]}_{=: B_s^{-1}(U)} + \underbrace{\left[(A_0^{(h)} - \widetilde{A}_0)U - U(A_0^{(h)} - \widetilde{A}_0)\right]}_{=: C^{(h)}(U)},$$

($B_s$ et $C^{(h)}$ sont des applications linéaires) ainsi :

$$|||K^{-1}_{s,A_0^{(h)}}||| \leqslant a\sum_{k=0}^{+\infty}(bc^{(h)})^k$$

où $a=\sup_{s\in\mathbb{N}^*,\ h>0}|||B_s^{-1}|||<\infty$, $b=\sup_{s\in\mathbb{N}^*,\ h>0}|||B_s|||<\infty$ et $c^{(h)}=|||C^{(h)}|||$ mais $c^{(h)}$ tend vers 0 avec $h$ (uniformément en $s\in\mathbb{N}^*$) et on a justifié l'assertion.

On a donc la famille de solutions canoniques $e^{(h)+}_{A^{(h)}}:=F^{(h)+}_{A^{(h)}}e^{(h)+}_{A_0^{(h)}}$ ; on abrège $F^{(h)+}_{A^{(h)}}$ en $F^{(h)}$. On traite séparément la partie "log-car" et la partie "transformation de jauge".

La partie "log-car" a déjà été étudiée : c'était l'objet de la proposition 5.7.

Passons à la partie "transformation de jauge". On note $\widetilde{F}$ la transformation de jauge intervenant dans la résolution de $\delta\widetilde{Y}=\widetilde{A}\widetilde{Y}$. D'après le théorème 5.11, la famille $F^{(h)}$, $h\in]0,h_0'[$ est de type $(C,\lambda)$ ; ainsi, si on arrive à prouver que $F_s^{(h)}\to\widetilde{F}_s$, on pourra conclure grâce à la proposition 5.12.

La transformation de jauge $F^{(h)}$ est caractérisée (en reprenant les notations introduites en 5.2.1) par : $\overline{F}^{(h)}$ est une fonction développable en série de factorielles tangente à l'identité en l'infini telle que $\overline{A}^{(h)}(x)\overline{F}^{(h)}(x)-\delta_{-1}\overline{F}^{(h)}(x)=\overline{F}^{(h)}(x-1)\overline{A}_0^{(h)}$.

Or :

$$\delta_{-1}\overline{F}^{(h)}(x)=\sum_{s=0}^{+\infty}-s\overline{F}_s^{(h)}x^{-[s]}$$

et (formule de translation ; voir par exemple [3]) :

$$\overline{F}^{(h)}(x-1)=\overline{F}_0^{(h)}+\sum_{s=1}^{+\infty}\left[\overline{F}_s^{(h)}+(s-1)!\sum_{k=1}^{s-1}\frac{\overline{F}_k^{(h)}}{(k-1)!}\right]x^{-[s]}$$

puis :

$$\overline{A}^{(h)}(x)\overline{F}^{(h)}(x)=\sum_{s=0}^{+\infty}C_sx^{-[s]}$$

avec :

$$C_0=\overline{A}_0^{(h)}\overline{F}_0^{(h)},\ C_s=\overline{A}_0^{(h)}\overline{F}_s^{(h)}+\overline{A}_s^{(h)}\overline{F}_0^{(h)}+\sum_{(j,k,l)\in J_s}c_{j,l}^{(k)}\overline{A}_j^{(h)}\overline{F}_l^{(h)}$$

et :

$$J_s=\{(j,k,l)\backslash j,l\geqslant 1,\ k\geqslant 0,\ j+k+l=s\}$$
$$c_{j,l}^{(k)}=\frac{(j+k-1)!(l+k-1)!}{k!(j-1)!(l-1)!}.$$

On en déduit que $F^{(h)}$ vérifie :

$$\begin{cases} \overline{F}_0^{(h)} = I \\ \phi_{\overline{A}_0^{(h)},s}(\overline{F}_s^{(h)}) = -\overline{A}_s^{(h)} + (s-1)! \left[\sum_{k=1}^{s-1} \frac{\overline{F}_k^{(h)}}{(k-1)!}\right] \overline{A}_0^{(h)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)} \overline{A}_j^{(h)} \overline{F}_l^{(h)} \end{cases} \tag{5.1}$$

où :

$$\begin{aligned} \phi_{\overline{A}_0^{(h)},s} : M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ U &\longmapsto (\overline{A}_0^{(h)} + sI)U - U\overline{A}_0^{(h)}. \end{aligned}$$

Il est bien connu que si $\overline{A}_0^{(h)}$ est non résonnante alors $\phi_{\overline{A}_0^{(h)},s} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ est un isomorphisme pour tout $s \neq 0$. La non résonnance permet donc de résoudre de manière unique les relations de récurrence (5.1) : $F^{(h)}$ est caractérisée par :

$$\begin{cases} \overline{F}_0^{(h)} = I \\ \overline{F}_s^{(h)} = \phi^{-1}_{\overline{A}_0^{(h)},s}(-\overline{A}_s^{(h)} + (s-1)! \left[\sum_{k=1}^{s-1} \frac{\overline{F}_k^{(h)}}{(k-1)!}\right] \overline{A}_0^{(h)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \sum_{(j,k,l)\in J_s} c_{j,l}^{(k)} \overline{A}_j^{(h)} \overline{F}_l^{(h)}), \; s \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Maintenant, par récurrence, on voit que $F_s^{(h)}$ admet une limite pour $h \to 0^+$ qu'on note $\widetilde{F}'_s$. Il est clair que les $\widetilde{F}'_s$ satisfont les relations de récurrence des coefficients de la transformation de jauge du système différentiel limite (non résonnant), qui intervient dans la méthode de Frobenius. Ainsi $\widetilde{F}'_s = \widetilde{F}_s$. □

### 5.5.2. Étude globale

On se place à présent dans le cas algébrique : **les matrices qui définissent les systèmes aux différences et différentiels sont supposées rationnelles**. On va "tirer" le demi-plan droit introduit pour la transformation de jauge précédente vers la gauche. Pour ce faire, on ajoute l'hypothèse suivante :

**(H'):** (i) Soient $\widetilde{A}$ un élément de $M_n(\mathbb{C}(x))$ et $A^{(h)}$, $h \in ]0, h_0[$ une famille d'éléments de $M_n(\mathbb{C}(x))$ qui vérifient (H).

(ii) On suppose que $\widetilde{A}$ est la limite uniforme, lorsque $h$ tend vers $0^+$, des $A^{(h)}$ sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{$pôles de $\widetilde{A}\}$.

Dans le point (ii) de (H'), on sous-entend que, étant donné $x_0$ un nombre complexe qui n'est pas un pôle de $\widetilde{A}$, il existe un voisinage de $x_0$ sur lequel les $A^{(h)}$ n'ont pas de pôle, pour $h > 0$ assez petit.

*Notations 5.17.* — On note $\widetilde{\Omega}^+$ le plan complexe privé des demi-droites horizontales issues de chacun des pôles de $\widetilde{A}$ et de 0 et dirigées vers $-\infty$.

On suppose (H') vérifiée. Rappelons qu'alors le système différentiel $\delta\widetilde{Y} = \widetilde{A}\widetilde{Y}$ est fuchsien en $\infty$ et non résonnant. On note $e_{\widetilde{A}}$ le prolongement à $\widetilde{\Omega}^+$ de sa solution canonique, en $\infty$, obtenue par la méthode de Frobenius.

Rappelons également que les systèmes (aux différences) définis par les $A^{(h)}$ sont non résonnants pour $h > 0$ assez petit.

– **Préliminaires.**

Nous utiliserons les deux résultats suivants. Le premier est issu de [12] alors que le second provient de [15].

Théorème 5.18. — *Soient $\mathcal{A}$ une fonction continue sur un segment réel $]a, b[$ à valeurs matricielles complexes et $t_0 < t_1$ dans $]a, b[$. Soit $p$ un entier non nul et $s_0^{(p)} < \cdots < s_p^{(p)}$ une subdivision de $]t_0, t_1[$ de pas (maximum de la différence de deux éléments successifs de la subdivision) $\epsilon_p$. On suppose que $\epsilon_p$ tend vers 0 quand $p$ tend vers $+\infty$. Alors la résolvante du système $\mathcal{X}' = \mathcal{A}\mathcal{X}$ est donnée par :*

$$R(t_1, t_0) = \lim_{p\to\infty} (I + \mathcal{A}(s_{p-1}^{(p)})\Delta s_{p-1}^{(p)}) \cdots (I + \mathcal{A}(s_0^{(p)})\Delta s_0^{(p)})$$

*avec $\Delta s_i^{(p)} = s_{i+1}^{(p)} - s_i^{(p)}$.*

Proposition 5.19. — *Soient $(A_{p,i})$ et $(B_{p,i})$ deux familles de matrices indexées par les couples d'entiers $(p, i)$ tels que $1 \leqslant i \leqslant p$. On considère les suites de termes généraux $R_p = (I + A_{p,1}) \cdots (I + A_{p,p})$ et $S_p = (I + B_{p,1}) \cdots (I + B_{p,p})$. On suppose que, quand $p \to +\infty$ :*

*– la suite $(\Sigma_{1\leqslant i\leqslant p} \|A_{p,i}\|)$ est bornée ;*

*– la suite $(\Sigma_{1\leqslant i\leqslant p} \|A_{p,i} - B_{p,i}\|)$ tend vers 0.*

*Alors, $\lim_{p\to\infty} \|R_p - S_p\| = 0$.*

– **Étude.**

Notre résultat "global" est le suivant.

Théorème 5.20. — *Supposons (H'). Alors $e^{(h)+}_{A^{(h)}}$ tend, sur $\widetilde{\Omega}^+$, quand $h$ tend vers $0^+$, vers $e_{\widetilde{A}}$.*

*Démonstration.* — Afin d'alléger la présentation, on pose :

$$Y^{(h)} = e^{(h)+}_{A^{(h)}} \text{ et } \widetilde{Y} = e_{\widetilde{A}}.$$

Nous introduisons les notations suivantes où $t,\ \eta \in \mathbb{R}$ :

$$\check{Y}_\eta^{(h)}(t) = Y^{(h)}(-t-i\eta) \text{ et } \check{\widetilde{Y}}_\eta(t) = \widetilde{Y}(-t-i\eta).$$

On a :

$$\check{Y}_\eta^{(h)}(t+h) = (I + \frac{hA^{(h)}(-t-i\eta)}{t+h+i\eta})\check{Y}_\eta^{(h)}(t).$$

Nous savons (étude locale) que, pour $a \ll 0$ :

$$\check{Y}_\eta^{(h)}(t) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \check{\widetilde{Y}}_\eta(t),\ t < a\ ;$$

quitte à choisir $a$ encore plus petit, on peut supposer que les pôles de $\frac{\widetilde{A}(-x)}{x}$ sont dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(x) > a\}$. Soient $t_1 > a > t_0$ tels que $\frac{\widetilde{A}(-t-i\eta)}{t+i\eta}$ n'ait pas de pôle sur $[t_0, t_1]$. On considère la subdivision suivante de $]t_0, t_1]$ :

$$t_0 < \nu h < \nu h + h < \nu + 2h < ... < \nu h + Nh = t_1$$

où $N = E(\frac{t_1 - t_0}{h})$ et $\nu = \frac{t_1-t_0}{h} - N$. La résolvante $R(t_0, t_1)$ du système :

$$\frac{d}{dt}\check{\widetilde{Y}}_\eta(t) = \frac{\widetilde{A}(-t-i\eta)}{t+i\eta}\check{\widetilde{Y}}_\eta(t)$$

est donnée, compte-tenu des préliminaires, par :

$$\begin{aligned} R(t_0,t_1) &= \lim_{h\to 0}(I + h\frac{\widetilde{A}(h-t_1-i\eta)}{t_1-h+i\eta})\cdots \\ &\qquad \cdots(I + h\frac{\widetilde{A}(Nh-t_1-i\eta)}{t_1-Nh+i\eta})(I+\nu h\frac{\widetilde{A}(-t_0-i\eta)}{t_0+i\eta}). \end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{A^{(h)}(-t-i\eta)}{t+h+i\eta}$ converge uniformément vers $\frac{\widetilde{A}(-t-i\eta)}{t+i\eta}$, lorsque $h \to 0^+$, sur $[t_0, t_1]$. Ainsi, d'après les préliminaires, la résolvante s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} R(t_0,t_1) &= \lim_{h\to 0}(I + h\frac{A^{(h)}(h-t_1-i\eta)}{t_1-h+i\eta})\cdots \\ &\qquad \cdots(I + h\frac{A^{(h)}(Nh-t_1-i\eta)}{t_1-Nh+i\eta})(I+\nu h\frac{A^{(h)}(-t_0-i\eta)}{t_0+i\eta}). \end{aligned}$$

Par suite : $\check{Y}_\eta^{(h)}(t_1) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \check{\widetilde{Y}}_\eta(t_1)$. □

Ce théorème admet un corollaire qui n'impose pas *a priori* de vérifier le type $(C, \lambda)$ qui est automatique si on se donne une hypothèse supplémentaire de convergence uniforme au voisinage de $\infty$. On introduit à nouveau une hypothèse.

**(H"):** (i) Soit $\delta\widetilde{Y}=\widetilde{A}\widetilde{Y}$ un système différentiel algébrique fuchsien en $\infty$ et non résonnant.

(ii) Soit $A^{(h)}$, $h\in]0,h_0[$ une famille d'éléments de $M_n(\mathbb{C}(x))$ qui convergent uniformément, lorsque $h$ tend vers $0^+$, vers $\widetilde{A}$, sur tout compact de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\backslash\{$pôles de $\widetilde{A}\}$.

(iii) On suppose enfin qu'une réduction de Jordan de $\widetilde{A}_0=\widetilde{A}(\infty)$ se déploie en des réductions de Jordan des $A_0^{(h)}$ (*cf.* définition 5.6).

Dans le point (ii) de (H"), on sous-entend que, étant donné $x_0\in\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ qui n'est pas un pôle de $\widetilde{A}$, il existe un voisinage de $x_0$ sur lequel les $A^{(h)}$ n'ont pas de pôle, pour $h>0$ assez petit ; en particulier $\infty$ est un point régulier des $A^{(h)}$ pour $h>0$ assez petit.

On note à nouveau $e_{\widetilde{A}}$ le prolongement à $\widetilde{\Omega}^+$ de la solution canonique, en $\infty$, du système algébrique fuchsien en $\infty$ et non résonnant $\delta\widetilde{Y}=\widetilde{A}\widetilde{Y}$, obtenue par la méthode de Frobenius.

Corollaire 5.21. — *Si (H") est vérifiée alors, pour $h_0'\in]0,h_0[$ assez petit, la famille de systèmes $\delta_{-h}Y=A^{(h)}Y$, $h\in]0,h_0'[$ est fuchsienne $(C,\lambda)$ en $+\infty$, non résonnante et $e_{A^{(h)}}^{(h)+}$ tend, sur $\widetilde{\Omega}^+$, quand $h$ tend vers $0^+$, vers $e_{\widetilde{A}}$.*

*Démonstration.* — C'est une application du théorème précédent en vertu de la proposition 5.13. □

On a des résultats analogues en $-\infty$ par le changement de variables $x\leftarrow -x$. Lorsqu'elles existent, les solutions canoniques en $-\infty$ seront notées $e_{A^{(h)}}^{(h)-}$.

## 5.6. Matrice de connexion et confluence

On définit les matrices de connexion de Birkhoff associées à une famille de systèmes algébriques fuchsiens non résonnants :

$$\delta_{-h}Y=A^{(h)}Y$$

par :

$$P_{A^{(h)}}^{(h)}=P^{(h)}=(e_{A^{(h)}}^{(h)+})^{-1}e_{A^{(h)}}^{(h)-}.$$

On introduit une hypothèse :

**(H" '):** (i) Soient $\widetilde{A}$ un élément de $M_n(\mathbb{C}(x))$ et $A^{(h)}$, $h\in]0,h_0[$ une famille d'éléments de $M_n(\mathbb{C}(x))$ qui vérifient (H') (ou (H")) en $+\infty$ et en $-\infty$.

(ii) On suppose que deux pôles distincts de $\widetilde{A}$ n'ont pas la même partie imaginaire et qu'aucun d'entre eux n'est réel.

On suppose maintenant (H" ').

*Notations 5.22.* — On note $\mathcal{P}(\widetilde{A})$ l'ensemble des pôles de $\widetilde{A}$ et on pose $\mathcal{P}(\widetilde{A})\bigcup\{0\} = \cup_{j=1}^{r}\{\widetilde{z}_j\}$ où les $\widetilde{z}_j$ sont deux à deux distincts et rangés selon l'ordre croissant de leurs parties imaginaires.

On définit $\widetilde{\Omega} = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} (\widetilde{z}_j + \mathbb{R})$ ainsi que $\widetilde{\Omega}^+ = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} (\widetilde{z}_j + \mathbb{R}^-)$ et $\widetilde{\Omega}^- = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} (\widetilde{z}_j + \mathbb{R}^+)$. On a donc $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}^+ \bigcap \widetilde{\Omega}^-$.

On note $e^+_{\widetilde{A}}$ (resp. $e^-_{\widetilde{A}}$) la limite de $e^{(h)+}_{A^{(h)}}$ (resp. $e^{(h)-}_{A^{(h)}}$), sur $\widetilde{\Omega}^+$ (resp. $\widetilde{\Omega}^-$), lorsque $h \to 0^+$ (dont l'existence est assurée par les résultats de la section précédente). Alors $P^{(h)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \widetilde{P} = (e^+_{\widetilde{A}})^{-1} e^-_{\widetilde{A}}$ sur $\widetilde{\Omega}$. Puisque $e^+_{\widetilde{A}}$ et $e^-_{\widetilde{A}}$ sont des systèmes fondamentaux de solutions de la même équation différentielle, nous avons $\delta\widetilde{P} = 0$ : $\widetilde{P}$ est constante sur les composantes connexes de $\widetilde{\Omega}$ ; on note $\widetilde{P}_{j+1}$ la valeur de $\widetilde{P}$ sur la composante connexe de $\widetilde{\Omega}$ ayant $\widetilde{z}_j + \mathbb{R}$ comme droite frontière inférieure et $\widetilde{P}_1$ sa valeur sur la composante restante. On a alors le

Théorème 5.23. — *Si (H" ') est vérifiée alors la monodromie du système différentiel algébrique (fuchsien en $\infty$) $\delta\widetilde{Y} = \widetilde{A}\widetilde{Y}$ autour de $\widetilde{z}_j$ dans la base $e^+_{\widetilde{A}}$ est $\widetilde{P}_j\widetilde{P}^{-1}_{j+1}$.*

*Démonstration.* — En effet, un cercle direct $\gamma_j$ (de rayon assez petit) autour de $\widetilde{z}_j$ peut être vu comme un chemin $\gamma_j^+$ dans $\widetilde{\Omega}^+$ suivi d'un chemin $\gamma_j^-$ dans $\widetilde{\Omega}^-$. Le prolongement analytique le long de $\gamma_j^+$ transforme $e^+_{\widetilde{A}}$ en $e^-_{\widetilde{A}}\widetilde{P}^{-1}_{j+1}$ ; celui le long de $\gamma_j^-$ transforme $e^-_{\widetilde{A}}$ en $e^+_{\widetilde{A}}\widetilde{P}_j$ et donc, le long de $\gamma_j$, $e^+_{\widetilde{A}}$ est transformé en $e^-_{\widetilde{A}}\widetilde{P}_j\widetilde{P}^{-1}_{j+1}$. □

Les hypothèses de ce théorème n'excluent pas la présence de singularités irrégulières à distance finie de l'origine.

## 5.7. Exemples

### 5.7.1. $A^{(h)}(x) = A\left(\frac{x}{h}\right)$, $A \in M_n(\mathbb{C}(x))$ holomorphe à l'infini et non résonnante

Il est aisé de vérifier que la famille des systèmes définis par $A^{(h)}(x) = A\left(\frac{x}{h}\right)$ rentre dans le cadre de notre étude et donc que la solution canonique en $+\infty$ tend, quand $h$ tend vers $0^+$, vers $x^{A_0}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

### 5.7.2. $A^{(h)}(x) = A(x)$, $A \in M_n(\mathbb{C}(x))$ holomorphe à l'infini et non résonnante

Puisque $A^{(h)}(x) = A(x)$ converge uniformément vers $A(x)$ sur tout compact de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ privé des pôles de $A$, cet exemple fait partie du champ d'application de nos résultats.

### 5.7.3. Un exemple régulier en dimension 1 : $\delta_{-h}y(x) = \frac{-\mu}{x-h-\lambda}y(x)$

La famille des systèmes $\delta_{-h}y(x) = \frac{-\mu}{x-h-\lambda}y(x)$ avec $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ vérifie les hypothèses du corollaire 5.21. Les solutions canoniques sont données (en $+\infty$ puis en $-\infty$) par :

$$\frac{\Gamma(\frac{x}{h})\Gamma(\frac{x-\lambda}{h})}{\Gamma(\frac{x}{h}-\alpha_1^{(h)})\Gamma(\frac{x}{h}-\alpha_2^{(h)})} \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma(-\frac{x}{h}+1+\alpha_1^{(h)})\Gamma(-\frac{x}{h}+1+\alpha_2^{(h)})}{\Gamma(-\frac{x}{h}+1)\Gamma(-\frac{x}{h}+1+\frac{\lambda}{h})}$$

avec :

$$\alpha_1^{(h)} = \frac{\lambda}{h}\left[1-\sqrt{1-4\frac{\mu}{\lambda^2}h}\right] \quad \text{et} \quad \alpha_2^{(h)} = \frac{\lambda}{h}\left[1+\sqrt{1-4\frac{\mu}{\lambda^2}h}\right] \ ;$$

on a :

$$\alpha_1^{(h)} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{\mu}{\lambda}$$

et :

$$\alpha_2^{(h)} = \frac{\lambda}{h}\left[1-\frac{\mu}{\lambda^2}h+o(h)\right].$$

La formule des compléments permet d'écrire :

$$P^{(h)} = \frac{\sin(\frac{x}{h}-\alpha_1^{(h)})\sin(\frac{x}{h}-\alpha_2^{(h)})}{\sin(\frac{x}{h})\sin(\frac{x-\lambda}{h})}.$$

Par suite :

$$\widetilde{P}_1 = 1, \quad \widetilde{P}_2 = e^{-2\pi i\frac{\mu}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \widetilde{P}_3 = 1.$$

Ainsi, $e^{2\pi i\frac{\mu}{\lambda}}$ est la monodromie autour de 0 et $e^{-2\pi i\frac{\mu}{\lambda}}$ celle autour de $\lambda$ (on peut directement vérifier qu'il s'agit du bon résultat ; en effet, la méthode de Frobenius donne, comme solution canonique du système limite, la fonction $x \longmapsto \left(\frac{x-\lambda}{x}\right)^{-\frac{\mu}{\lambda}}$ qui a bien les monodromies ci-dessus).

# Annexe A. À propos des caractères et logarithmes utilisés

## A.1. Les “caractères” et “logarithmes” comme éléments de $\mathcal{O}_{\text{fact}}[\log(x)]$

D'après [11], la fonction $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-c)}x^{-c}$ est développable en une série de factorielles convergente et tangente à 1 en $+\infty$ ; de là nous déduisons, pour $k \geqslant 1$ :

$$x^{-c}\frac{\partial^k}{\partial c^k}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-c)} = \sum_{i=0}^{k-1}\Omega_i(x)\log^i(x) + \Omega_k(x)\log^k(x)$$

où les $\Omega_i$, $i = 0,...,n-1$ sont dans $\mathcal{O}_{\text{fact}}$ et tangentes à 0 en $+\infty$ et $\Omega_n \in \mathcal{O}_{\text{fact}}$ et est tangente à $I$ en $+\infty$.

## A.2. Applications

À l'aide de A.1, nous pouvons prouver la

Proposition A.1. — *Les logarithmes $l_c^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ sont linéairement indépendants sur $\mathcal{M}_{\text{fact}}$.*

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe une relation linéaire non triviale $\sum_{k=0}^n a_k l_c^{(k)} = 0$ où $a_k \in \mathcal{M}_{\text{fact}}$. Pour tout entier $k$ tel que $a_k \neq 0$, il existe $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{a_k l_c^{(k)}}{x^{\alpha_k+c}\log^k(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} b_k \in \mathbb{C}^*$. On divise alors la relation linéaire par $x^{k+c}\log^k(x)$ où $k$ est le plus grand des entiers $n$ tels que $\alpha_n = \max\{\alpha_j\}_j$. On passe ensuite à la limite pour obtenir une relation de la forme $a = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, ce qui est absurde. □

Proposition A.2. — *L'équation :*

$$\tau^{-1}y = \frac{x-1-c}{x-1-c'}y \tag{A.1}$$

*n'admet pas de solution non nulle dans $\mathcal{M}_{\text{fact}}(\log(x))$ lorsque $d = c-c' \notin \mathbb{Z}$. Si $d = 0$, les seules solutions dans $\mathcal{M}_{\text{fact}}(\log(x))$ sont les constantes.*

*Démonstration.* — Soit :

$$y = \frac{\sum_{i=0}^n \log^i(x)\Omega_i}{\sum_{j=0}^m \log^j(x)\Omega'_j}$$

une éventuelle solution de (A.1) dans $\mathcal{M}_{\text{fact}}(\log(x))$ ($\Omega_i,\ \Omega'_j \in \mathcal{M}_{\text{fact}}$). Rappelons qu'étant donné $\Omega \in \mathcal{O}_{\text{fact}} \setminus \{0\}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\Omega}{x^n} \in \mathcal{O}_{\text{fact}}$

et tende vers une limite non nulle pour $x \to +\infty$. Ainsi, $y$ peut s'écrire sous la forme :

$$y = \frac{\sum_{i=0}^{n} \log^i(x) x^{\alpha_i} \Omega_i}{\sum_{j=0}^{m} \log^j(x) x^{\alpha'_j} \Omega'_j}$$

avec $\Omega_i,\ \Omega'_j \in \mathcal{O}_{\text{fact}}$ telles que $\Omega_i(+\infty)$ et $\Omega'_j(+\infty)$ soient non nulles et $\alpha_i, \alpha'_j \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'il existe $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $x^\alpha \log^\beta(x) y$ tende vers une limite non nulle $a \in \mathbb{C}^*$ pour $x \to +\infty$. D'autre part, l'équation (A.1) admet une solution de la forme $Fe_d^+$, avec $F \in \mathcal{O}_{\text{fact}}$ tangente à $I$ en $+\infty$ (on prend la solution canonique du système fuchsien non résonnant). Posons :

$$\omega = (Fe_d^+)^{-1} y \in Gl_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}/\mathbb{Z})).$$

Ainsi $x^\alpha \log^\beta(x) \omega F e_d^+$ tend vers une limite non nulle $a \in \mathbb{C}^*$ pour $x \to +\infty$. En notant que $\frac{e_d^+}{x^d}$ vérifie la même propriété, on en déduit que $\omega x^d x^\alpha \log^\beta(x)$ admet une limite finie non nulle pour $x \to +\infty$. Lorsque $d \notin -\alpha + i\mathbb{R}$, il est clair que c'est impossible. Dans le cas restant, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = -\alpha + i\lambda$ et $\omega(x) x^{i\lambda}$ admet une limite finie non nulle pour $x \to +\infty$. Cela implique que, étant donné $x_0$ un point réel qui n'est ni un pôle, ni un zéro de $\omega$, la suite $(x_0 + n)^{i\lambda}$ admet une limite pour $n \in \mathbb{N}$ qui tend vers l'infini. C'est évidemment faux. Enfin, si $d = 0$, il est clair que $\omega$ est constante ; $Fe_d^+$ est alors égal à 1. $\square$

## BIBLIOGRAPHIE


[1] G. D. Birkhoff, « General theory of linear difference equations », *Trans. Amer. Math. Soc.* **12** (1911), p. 243-284.

[2] ———, « The generalized Riemann problem for linear differential equations and allied problems for linear difference and $q$-difference equations », *Proc. Amer. Acad.* **49** (1913), p. 521-568.

[3] A. Duval, « Séries de $q$-factorielles, opérateurs aux $q$-différences et confluence », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **XII** (2003), n° 3, p. 335-374.

[4] ———, « Confluence $q$-différence vers différence pour un système fuchsien », *Pacific Journal of Math.* **217** (2004), n° 2, p. 221-245.

[5] A. Duval & J. Roques, « Familles fuchsiennes d'équations aux ($q$-)différences et confluence », en préparation.

[6] W. J. Fitzpatrick & L. J. Grimm, « Convergent factorial series solutions of linear difference equations », *J. Diff. Equations* **29** (1978), p. 345-361.

[7] W. A. Jr Harris, « Linear systems of difference equations », *Contrib. Differential Eq.* **1** (1963), p. 489-518.

[8] W. A. Jr. Harris, « Analytic theory of difference equations in analytic theory of differential equations », in *Lecture Notes in Mathematics* (Berlin) (Springer, éd.), vol. 183, 1971, p. 46-58.

[9] I. Krichever, « Analytic theory of difference equations with rational and elliptic coefficients and the Riemann-Hilbert problem », *Uspekhi Mat. Nauk.* **59** (2004), p. 11-150, transl. Russian Math. Survey 59 (2004) pp. 1117-1154.

[10] B. Malgrange, « Sommation des séries divergentes », *Expo. Math.* **13** (1995), p. 163-222.

[11] N.-E. Nörlund, *Leçons sur les séries d'interpolation*, Gauthier-Villard, Paris, 1926.

[12] G. Pourcin, « Rapport du jury de l'agrégation de mathématiques », Ministère de l'Éducation Nationale, Centre National de la Documentation Pédagogique, 1994.

[13] M. van der Put & M. F. Singer, « Galois theory of difference equations », in *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag (1997), 1666.

[14] J. Roques, « Thèse de Mathématiques Pures », Thèse, Université Paul Sabatier (Toulouse III), en préparation.

[15] J. Sauloy, « Systèmes aux $q$-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie », *Ann. Inst. Fourier* **50** (2000), p. 1021-1071.

[16] E. T. Whittaker & G. N. Watson, *A course of Modern Analysis*, Cambrige University Press, 1927.

Manuscrit reçu le 6 juin 2005,
révisé le 24 avril 2006,
accepté le 4 mai 2006.

Julien ROQUES
Université Paul Sabatier
Laboratoire Émile Picard
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex (France)
roques@picard.ups-tlse.fr