ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Erwan ROUSSEAU

Étude des jets de Demailly-Semple en dimension 3

Tome 56, nº 2 (2006), p. 397-421.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2006__56_2_397_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
56, 2 (2006) 397-421

ÉTUDE DES JETS DE DEMAILLY-SEMPLE EN DIMENSION 3

par Erwan ROUSSEAU

Résumé. — Dans cet article nous faisons l'étude algébrique des jets de Demailly-Semple en dimension 3 en utilisant la théorie des invariants des groupes non réductifs. Cette étude fournit la caractérisation géométrique du fibré des jets d'ordre 3 sur une variété de dimension 3 et permet d'effectuer, par Riemann-Roch, un calcul de caractéristique d'Euler.

Abstract. — In this article, the algebraic characterization of Demailly-Semple jets in dimension 3 is given using the invariant theory of non reductive groups. This work provides the geometric characterization of the 3-jets bundle on a manifold of dimension 3 and, by Riemann-Roch, the computation of the Euler characteristic.

1. Introduction

1.1. Contexte géométrique

Il est bien connu (*cf.* [1], [17]) que l'étude de l'hyperbolicité des variétés algébriques complexes est liée à l'étude des sections globales de certains fibrés vectoriels $E_{k,m}T_X^*$ d'opérateurs différentiels d'ordre k et de degré m agissant sur les germes de courbes holomorphes dans X, variété complexe.

L'étude des jets de Demailly-Semple est motivée par les résultats qu'ils ont fournis sur l'hyperbolicité des variétés complexes, sur des questions liées à la conjecture de Kobayashi qui stipule que le complémentaire d'une hypersurface générique de degré $d \geqslant 2n+1$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est hyperbolique.

Mots-clés : hyperbolicité des variétés complexes, huperbolicité au sens de Kobayashi, fibrés des jets de différentielles, représentations des groupes linéaires, théorie des invariants des groupes non réductifs.
Classification math. : 32Q45, 13A50, 06B15.

Des résultats intéressants ont été obtenus en dimension 2 pour le cas des complémentaires de courbes dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ avec un nombre donné k de composantes irréductibles : citons les résultats de Y.T. Siu et S.K. Yeung [17], ceux de J.P. Demailly et J. El Goul [2] qui ont traité le cas du complémentaire d'une courbe générique lisse dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, ainsi que ceux de G. Dethloff, G. Schumacher et P.M. Wong [4] et [5] concernant le cas de 3 composantes, et plus récemment le cas de 2 composantes a été traité également par les techniques de jets [15].

L'hyperbolicité en dimension 3 est un sujet très peu défriché à l'heure actuelle malgré l'existence de quelques classes d'exemples (Masuda-Noguchi, Siu, Shiffmann et Zaidenberg). L'étude des jets de Demailly-Semple en dimension 3 a été faite dans la perspective d'attaquer le problème de l'hyperbolicité des hypersurfaces projectives génériques de grand degré de dimension 3 pour lequel il n'y a pas encore de résultats.

1.2. Principaux résultats

Si on définit $A_k = \underset{m}{\oplus}(E_{k,m}T^*_X)_x$ l'algèbre des opérateurs différentiels en un point $x \in X$, celle-ci peut-être vue comme une représentation du groupe linéaire Gl_n. On sait alors que l'on a une décomposition de cette représentation en somme directe de représentations irréductibles de Schur. Ainsi Demailly [1] a caractérisé les fibrés de jets d'ordre 2, de degré m :

$$Gr^\bullet E_{2,m}T^*_X = \bigoplus_{\lambda_1+2\lambda_2=m} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,0)}T^*_X,$$

où Γ est le foncteur de Schur.

Le premier résultat de cet article est donné par l'étude algébrique de A_3, par la théorie classique des invariants. On obtient une caractérisation des jets d'ordre 3, en dimension 3 :

Théorème 1.1. — *En dimension 3 :*

$$A_3 = \mathbb{C}[f'_i, w_{ij}, w^k_{ij}, W],\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3, 1 \leqslant k \leqslant 3$$

où $W = \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}$, $w_{ij} = f'_i f''_j - f''_i f'_j$,
$w^k_{ij} = (f'_k)^4 d(\frac{w_{ij}}{(f'_k)^3}) = f'_k(f'_i f'''_j - f'''_i f'_j) - 3f''_k(f'_i f''_j - f''_i f'_j)$.

De plus, $\deg .\mathrm{tr}(\mathbb{C}(f'_i, w_{ij}, w^k_{ij}, W)) = 7$ *(le calcul de l'idéal des relations entre les générateurs est fait dans* [14]*).*

Cette étude algébrique a conduit à des applications géométriques au niveau des fibrés de jets.

Le résultat principal est la caractérisation du gradué du fibré des jets d'ordre 3 en dimension 3 :

THÉORÈME 1.2. — *Soit X une variété complexe de dimension 3, alors :*

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \bigoplus_{0\leqslant\gamma\leqslant\frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geqslant\gamma,\ i<j\}} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^* \right)$$

où Γ *est le foncteur de Schur.*

Un calcul de type Riemann-Roch fournit alors :

PROPOSITION 1.3. — *Soit X une hypersurface lisse de degré d de* $\mathbb{P}^4$*, alors :*

$$\chi(X, E_{3,m}T_X^*) = \frac{m^9}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) + O(m^8).$$

COROLLAIRE 1.4. — *Pour* $d \geqslant 43$, $\chi(X, E_{3,m}T_X^*) \sim \alpha(d)m^9$ *avec* $\alpha(d) > 0$.

2. Préliminaires

Cette section a pour but de rappeler la construction des espaces de jets de Demailly, les bases de la théorie de la représentation du groupe linéaire $Gl_n\mathbb{C}$ et celles de la théorie classique des invariants qui seront utilisées de manière cruciale dans la preuve des théorèmes 1 et 2.

2.1. Espaces des jets

Soit X une variété complexe de dimension n. On définit le fibré $J_k \to X$ des k-jets de germes de courbes dans X, comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des applications holomorphes $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ modulo la relation d'équivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si toutes les dérivées $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ coïncident pour $0 \leqslant j \leqslant k$. L'application projection $J_k \to X$ est simplement $f \to f(0)$. Grâce à la formule de Taylor appliquée à un germe f au voisinage d'un point $x \in X$, on peut identifier $J_{k,x}$ à l'ensemble des $k-$uplets de vecteurs $(f'(0), ..., f^{(k)}(0)) \in \mathbb{C}^{nk}$. Ainsi, J_k est un fibré holomorphe sur X de fibre $\mathbb{C}^{nk}$. On peut voir qu'il ne s'agit pas d'un fibré vectoriel pour $k \geqslant 2$ (pour $k = 1$, c'est simplement le fibré tangent T_X).

Définition 2.1. — *Soit (X,V) une variété dirigée. Le fibré* $J_kV \to X$ *est l'espace des* $k-$ *jets de courbes* $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ *tangentes à V, c'est-à-dire telles que* $f'(t) \in V_{f(t)}$ *pour* t *au voisinage de* 0, *l'application projection sur X étant* $f \to f(0)$.

Nous présentons la construction des espaces de jets introduits par J.-P. Demailly dans [1].

Soit (X, V) une variété dirigée. On définit (X', V') par :

i) $X' = P(V)$

ii) $V' \subset T_{X'}$ est le sous-fibré tel que pour chaque point $(x, [v]) \in X'$ associé à un vecteur $v \in V_x \backslash \{0\}$ on a :

$V'_{(x,[v])} = \{\xi \in T_{X'}; \pi_*\xi \in \mathbb{C}v\}$ où $\pi : X' \to X$ est la projection naturelle et $\pi_* : T_{X'} \to \pi^*T_X$

On a donc $V' = \pi_*^{-1}(O_{X'}(-1))$.

On définit par récurrence le fibré de k-jets projectivisé $P_kV = X_k$ et le sous-fibré associé $V_k \subset T_{X_k}$ par : $(X_0, V_0) = (X, V), (X_k, V_k) = (X'_{k-1}, V'_{k-1})$. On a par construction :

$$\dim X_k = n + k(r-1), \operatorname{rang} V_k = r := \operatorname{rang} V.$$

Soit π_k la projection naturelle $\pi_k : X_k \to X_{k-1}$, on notera $\pi_{j,k} : X_k \to X_j$ la composition $\pi_{j+1} \circ \pi_{j+2} \circ ... \circ \pi_k$, pour $j \leqslant k$.

Par définition, il y a une injection canonique $O_{P_kV}(-1) \hookrightarrow \pi_k^*V_{k-1}$ et on obtient un morphisme de fibrés en droites

$$O_{P_kV}(-1) \to \pi_k^*V_{k-1} \stackrel{(\pi_k)^*(\pi_{k-1})_*}{\to} \pi_k^*O_{P_{k-1}V}(-1)$$

qui admet

$$D_k = P(T_{P_{k-1}V/P_{k-2}V}) \subset P_kV$$

comme diviseur de zéros.

Ainsi, on a :

$$O_{P_kV}(1) = \pi_k^*O_{P_{k-1}V}(1) \otimes O(D_k).$$

Remarque 2.2. — Chaque application non constante $f : \Delta_R \to X$ de (X, V) se relève en $f_{[k]} : \Delta_R \to P_kV$. En effet : si f n'est pas constante, on peut définir la tangente $[f'(t)]$ (aux points stationnaires $f'(t) = (t - t_0)^s u(t), [f'(t_0)] = [u(t_0)]$) et $f_{[1]}(t) = (f(t), [f'(t)])$.

2.2. Opérateurs différentiels sur les jets

D'après [7], on introduit le fibré vectoriel des jets de différentielles, d'ordre k et de degré m, $E^{GG}_{k,m}V^* \to X$ dont les fibres sont les polynômes à valeurs complexes $Q(f', f'', ..., f^{(k)})$ sur les fibres de J_kV, de poids m par rapport à l'action de $\mathbb{C}^*$:

$$Q(\lambda f', \lambda^2 f'', ..., \lambda^k f^{(k)}) = \lambda^m Q(f', f'', ..., f^{(k)})$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(f', f'', ..., f^{(k)}) \in J_kV$.

$E^{GG}_{k,m}V^*$ admet une filtration canonique dont les termes gradués sont

$$Gr^l(E^{GG}_{k,m}V^*) = S^{l_1}V^* \otimes S^{l_2}V^* \otimes ... \otimes S^{l_k}V^*,$$

où $l := (l_1, l_2, ..., l_k) \in \mathbb{N}^k$ vérifie $l_1 + 2l_2 + ... + kl_k = m$. En effet, en considérant l'expression de plus haut degré en les $(f_i^{(k)})$ qui intervient dans l'expression d'un polynôme homogène de poids m, on obtient une filtration intrinsèque :

$$E^{GG}_{k-1,m}V^* = S_0 \subset S_1 \subset ... \subset S_{[\frac{m}{k}]} = E^{GG}_{k,m}V^*$$

où

$$S_i/S_{i-1} \simeq S^iV^* \otimes E^{GG}_{k,m-ki}V^*.$$

Par récurrence, on obtient bien une filtration dont les termes gradués sont ceux annoncés plus haut.

D'après [1], on définit le sous-fibré $E_{k,m}V^* \subset E^{GG}_{k,m}V^*$, appelé le fibré des jets de différentielles invariants d'ordre k et de degré m, *i.e.*, :

$$Q((f \circ \phi)', (f \circ \phi)'', ..., (f \circ \phi)^{(k)}) = \phi'(0)^m Q(f', f'', ..., f^{(k)})$$

pour tout $\phi \in G_k$ le groupe des germes de k-jets de biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$. Pour G'_k le sous-groupe de G_k des germes ϕ tangents à l'identité ($\phi'(0) = 1$) on a $E_{k,m}V^* = (E^{GG}_{k,m}V^*)^{G'_k}$.

La filtration canonique sur $E^{GG}_{k,m}V^*$ induit une filtration naturelle sur $E_{k,m}V^*$ dont les termes gradués sont

$$\left(\bigoplus_{l_1+2l_2+...+kl_k=m} S^{l_1}V^* \otimes S^{l_2}V^* \otimes ... \otimes S^{l_k}V^*\right)^{G'_k}.$$

Le lien entre ces espaces d'opérateurs différentiels et les espaces de jets construits précédemment est donné par :

THÉORÈME 2.3. — [1] *Supposons que V a un rang $r \geqslant 2$.*

Soit $\pi_{0,k} : P_kV \to X$, et J_kV^{reg} le fibré des k-jets réguliers i.e., $f'(0) \neq 0$.

i) *Le quotient J_kV^{reg}/G_k a la structure d'un fibré localement trivial au-dessus de X, et il y a un plongement holomorphe $J_kV^{\mathrm{reg}}/G_k \to P_kV$, qui identifie J_kV^{reg}/G_k avec P_kV^{reg}.*

ii) *Le faisceau image direct $(\pi_{0,k})_* O_{P_kV}(m)$ peut être identifié avec le faisceau des sections holomorphes de $E_{k,m}V^*$.*

iii) *Pour tout* $m > 0$, *le lieu de base du système linéaire* $|O_{P_kV}(m)|$ *est égal à* P_kV^{sing}. *De plus,* $O_{P_kV}(1)$ *est relativement big (i.e., pseudo-ample) au-dessus de* X.

2.3. Théorie classique des invariants

Soit f un polynôme dont les variables sont des vecteurs, *i.e.*, un polynôme en les coordonnées des vecteurs, d'un espace vectoriel fixé V. Pour tous vecteurs s, t on note par $D_s^t f$ le résultat de la différentiation de f par rapport à s dans la direction de t, *i.e.*, :

$$D_s^t f = \sum_i t_i \frac{\partial f}{\partial s_i}$$

où les s_i, t_i sont les coordonnées des vecteurs s et t respectivement.

Les opérateurs de la forme D_s^t sont appelés opérateurs de polarisation. Ils commutent avec l'action du groupe $Gl(V)$ sur l'algèbre des polynômes.

Considérons la somme directe de m copies de V munie de l'action naturelle de $Gl(V)$ et de l'action de Gl_m qui commute avec celle-ci, *i.e.*, pour $A \in Gl_m$, $A.(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_m)A^{-1}$. Ainsi chaque vecteur x_j est remplacé par une combinaison linéaire de vecteurs $x_1, ..., x_m$ avec des coefficients pris dans la j-ème colonne de A^{-1}. Cette action induit une action de Gl_m sur l'algèbre des polynômes en les variables $x_1, ..., x_m$. Explicitement, la matrice $A = (a_{ij})$ agit sur un polynôme f comme suit :

$$(Af)(x_1, ..., x_m) = f\Big(\sum_i a_{i1}x_i, ..., \sum_i a_{im}x_i\Big).$$

Si un polynôme f dont les variables sont des vecteurs a pour degré p en la variable x, alors l'opérateur $P_x = \frac{1}{p!}D_x^{x_1}...D_x^{x_p}$ (où $x_1, ..., x_p$ n'apparaissent pas dans l'expression de f) transforme f en un polynôme qui est symétrique et multi-linéaire en $x_1, ..., x_p$. On peut retrouver f à partir de $P_x f$ en substituant x à la place de $x_1, ..., x_p$. Si f est homogène en toutes ses variables, si l'on répète l'opération précédente avec toutes les variables, on obtient une forme multi-linéaire Pf appelée *la polarisation complète* de f. On retrouve f en y substituant les variables originelles.

Définition 2.4. — (*cf.* [12]) *Soit* F *une forme multi-linéaire en les variables* $u_1, ..., u_l$ *où les* u_i *sont des vecteurs d'un espace vectoriel* V*. Soient* $x_1, ..., x_m$ m *vecteurs de* V*. On définit* $S^{x_1,...,x_m}(F)$*, l'espace vectoriel engendré par tous les polynômes obtenus en substituant les variables* $x_1, ..., x_m$ *aux variables* $u_1, ..., u_l$ *en permettant les répétitions. Cet espace est clairement invariant sous l'action de* Gl_m.

Soit G un groupe linéaire arbitraire agissant sur un espace vectoriel de dimension n. On considère le problème de trouver les $G-$invariants d'un système de vecteurs de V, *i.e.*, les polynômes invariants sous l'action de G dans la somme directe de plusieurs copies de V. Il est clair que l'algèbre de tous les $G-$invariants d'un système de vecteurs est linéairement engendré par les invariants qui sont homogènes en chaque variable. Si f est un tel invariant, sa polarisation complète en est un aussi. Ainsi si l'on est capable de trouver tous les invariants multi-linéaires, alors on obtient tous les invariants homogènes en y substituant de nouvelles variables (en permettant les répétitions).

DÉFINITION 2.5. — *(cf.* [12]*) Un ensemble $\{F_\alpha\}$ de formes multi-linéaires G-invariantes est appelé système complet de G-invariants d'un système de m vecteurs si les espaces de polynômes $S^{x_1,\dots,x_m}(F)$ associés aux formes F_α engendrent l'algèbre de tous les G-invariants du système de vecteurs $x_1, \dots, x_m$.*

THÉORÈME 2.6. — *(*[12]*) Soit V un espace vectoriel de dimension n.*

1) *Tout système complet de G-invariants d'un système de n vecteurs est aussi un système complet pour tout nombre de vecteurs.*

2) *Si $G \subset SL(V)$ alors tout système complet de G-invariants d'un système de $n-1$ vecteurs auquel on ajoute la forme "det" est un système complet de G-invariants pour tout nombre de vecteurs.*

On rappelle qu'un groupe G est dit linéairement réductif si tout G-module V de dimension finie est semi-simple. On a alors le théorème de Hilbert :

THÉORÈME 2.7. — *(cf.* [12]*) Soit $G \subset Gl(V)$ un groupe réductif. Alors il existe un système fini complet de G-invariants.*

Dans le cas des groupes qui ne sont pas réductifs il y a quelques résultats connus et des conjectures à propos du 14$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert sur l'existence d'un système fini de générateurs de l'algèbre des invariants. Le cas général se ramène au cas des groupes unipotents. Nagata (1959) a construit un exemple de groupe unipotent dont l'algèbre des invariants n'a pas de système fini de générateurs. Les résultats positifs découlent du

THÉORÈME 2.8. — *(cf.* [12]*) (Principe de Grosshans) Soit G un groupe algébrique qui agit rationnellement sur une k-algèbre A, et H un sous-groupe fermé de G. Alors :*

$$A^H \cong (k[G]^H \otimes A)^G.$$

Si G est réductif et A de type fini, cela ramène le problème de savoir si A^H est de type fini à celui de savoir si $k[G]^H = k[G/H]$ est de type fini. D'où la définition suivante :

DÉFINITION 2.9. — *(cf.* [12]*) Un sous-groupe H d'un groupe réductif G est appelé sous-groupe de Grosshans s'il vérifie les conditions : H est fermé, G/H est quasi-affine, $k[G/H]$ est de type fini.*

On peut alors substituer au problème de Hilbert le problème suivant proposé par K. Pommerening [11] : *Trouver les sous-groupes de Grosshans de Gl_n ou plus généralement d'un groupe réductif G.*

On a alors la conjecture de Popov-Pommerening [11] :

CONJECTURE 2.10. — *Tout sous-groupe unipotent régulier, i.e., normalisé par un tore maximal, d'un groupe réductif est de Grosshans.*

L. Tan [18] a montré que cette conjecture est vraie pour tous les sous-groupes de $Gl_n(k), Sl_n(k), PSl_n(k)$ (k corps algébriquement clos) pour $n \leqslant 5$.

2.4. Théorie de la représentation

Cette partie rappelle brièvement la théorie de la représentation de $Gl(V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension finie r.

À l'ensemble des r-uplets décroissants $(a_1, ..., a_r) \in \mathbb{Z}^r, a_1 \geqslant a_2 ... \geqslant a_r$, on associe de manière fonctorielle une collection d'espaces vectoriels $\Gamma^{(a_1,\ldots,a_r)}V$ qui fournit la liste de toutes les représentations polynômiales irréductibles du groupe linéaire $Gl(V)$, à isomorphisme près. $\Gamma^\bullet$ est appelé foncteur de Schur. Donnons une description simple de ces foncteurs. Soit $\mathbb{U}_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ le groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures $r \times r$. Si tous les a_j sont positifs, on définit

$$\Gamma^{(a_1,\ldots,a_r)}V \subset S^{a_1}V \otimes ... \otimes S^{a_r}V$$

comme étant l'ensemble des polynômes $P(x_1, ..., x_r)$ sur $(V^*)^r$ qui sont homogènes de degré a_j par rapport à x_j et qui sont invariants sous l'action à droite de $\mathbb{U}_r$ sur $(V^*)^r$ *i.e.,* tels que

$$P(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + x_k, x_{j+1}, ..., x_r) = P(x_1, ..., x_r) \ \ \forall k < j.$$

Si $(a_1, ..., a_r)$ n'est pas décroissant alors on pose $\Gamma^{(a_1,\ldots,a_r)}V = 0$. Comme cas particuliers on retrouve les puissances symétriques et les puissances extérieures :

$$\begin{aligned} S^kV &= \Gamma^{(k,0,\dots,0)}V, \\ \wedge^kV &= \Gamma^{(1,\dots,1,0,\dots,0)}V \text{ (avec } k \text{ indices 1)}, \\ \det V &= \Gamma^{(1,\dots,1)}V. \end{aligned}$$

Les foncteurs de Schur satisfont la formule

$$\Gamma^{(a_1+l,\dots,a_r+l)}V = \Gamma^{(a_1,\dots,a_r)}V \otimes (\det V)^l$$

qui peut être utilisée pour définir $\Gamma^{(a_1,\dots,a_r)}V$ si l'on a des a_i négatifs.

On fixe une base de V et on identifie $G = Gl(V)$ avec $Gl_r(\mathbb{C})$. On note $T = \{(x = \mathrm{diag}(x_1, ..., x_r)\} \subset G$ le sous-groupe des matrices diagonales.

Définition 2.11. — *(cf. [6]) Un vecteur e d'une représentation E est appelé vecteur de poids $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$ (où les α_i sont des entiers) si*

$$x.e = x_1^{\alpha_1}...x_r^{\alpha_r}e \quad \text{pour tout } x \text{ de } T.$$

Proposition 2.12. — *(cf. [6]) Toute représentation E est somme directe de ses espaces de poids :*

$$E = \oplus E_\alpha,\ E_\alpha = \{e \in E : x.e = x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}e\ ,\forall\ x \in\ T\ \}.$$

Définition 2.13. — *(cf. [6]) Soit $B \subset G$ le groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. Un vecteur e d'une représentation E est appelé vecteur de plus haut poids si $B.e = \mathbb{C}^*.e$.*

Proposition 2.14. — *(cf. [6]) Une représentation (de dimension finie, polynômiale) E de $Gl_r(\mathbb{C})$ est irréductible si et seulement si elle a un unique vecteur de plus haut poids, à multiplication par un scalaire près. De plus, deux représentations sont isomorphes si et seulement si leurs vecteurs de plus haut poids ont le même poids.*

Nous utiliserons aussi la semi-simplicité des représentations holomorphes de $Gl_r(\mathbb{C})$:

Proposition 2.15. — *(cf. [6]) Toute représentation holomorphe de $Gl_r(\mathbb{C})$ est somme directe de représentations irréductibles.*

Ainsi pour déterminer complètement une représentation holomorphe de $Gl_r(\mathbb{C})$, il suffit de déterminer ses vecteurs de plus haut poids.

3. Étude algébrique

On définit : $A_k = \bigoplus_m (E_{k,m}T_X^*)_x$ l'algèbre des opérateurs différentiels en un point $x \in X$.

Soit $G_k^{'}$ le groupe des reparamétrisations $\phi(t) = t + b_2t^2 + ... + b_kt^k + O(t^{k+1})$ tangentes à l'identité. $G_k^{'}$ agit sur $(f', f'', ..., f^{(k)})$ par action unipotente. Par exemple pour $k = 3$, on a l'action :

$$(f \circ \phi)' = f'; (f \circ \phi)'' = f'' + 2b_2f'; (f \circ \phi)''' = f''' + 6b_2f'' + 6b_3f'.$$

Donc une représentation :

$$G_3^{'} \hookrightarrow U(3) : \phi \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer A_k revient donc à déterminer $(\mathbb{C}[(f'), (f''), ..., (f^{(k)})])^{G_k^{'}}$.

En dimension 2, on a $G_2^{'} = U(2)$. Les invariants par le groupe unipotent sont bien connus (*cf.* [13]). Ainsi :

(i) $A_1 = \mathbb{C}[f_1', f_2']$,

(ii) $A_2 = \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}]$ où $w_{12} = f_1'f_2'' - f_1''f_2'$.

On a la propriété suivante :

Proposition 3.1.

$$A_n = A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}]$$

Démonstration. — Il suffit de prouver $A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}] \subset A_n$. Soit $F \in A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}]$: $F = \frac{P}{(f_1')^l} = \frac{Q}{(f_2')^m}$. Ainsi : $(f_2')^m P = (f_1')^l Q$ et $(f_1')^l$ divise P, donc $F \in \mathbb{C}[f', f'', f''']$. De plus F est invariant par reparamétrisation donc $F \in A_n$. □

3.1. Étude de la dimension 3 et preuve du théorème 1

Nous étudions maintenant la dimension 3 :

$$G_3^{'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset U(3).$$

Faisons le lien avec la théorie classique des invariants (partie 3 des préliminaires). G_3' agit sur $\begin{pmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{pmatrix}$ par multiplication à gauche. Considérons l'action de GL_3 :

$$A \in GL_3, A. \begin{pmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Cette action induit une action sur les polynômes $P(f', f'', f''')$ qui commute avec celle de G_3'. Ainsi on a une action de GL_3 qui laisse A_3 invariant.

Nous cherchons à déterminer les invariants par G_3' du système de vecteurs (x_1, x_2, x_3) où $x_i = \begin{pmatrix} f_i' \\ f_i'' \\ f_i''' \end{pmatrix}$.

Appliquons le théorème 2.6 des préliminaires à notre situation. On a bien $G_3' \subset SL_3$. Il nous suffit donc de connaître un système complet de G_3'-invariants pour deux vecteurs *i.e.*, en dimension 2. Cela nous est donné par le théorème annoncé par J.P. Demailly dont nous donnons ici une démonstration :

THÉORÈME 3.2. — *(Demailly) En dimension 2 :*

$$A_3 = \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2][w_{12}]$$

où $w_{12}^i = (f_i')^4 d(\frac{w_{12}}{(f_i')^3}) = f_i'(f_1'f_2''' - f_1'''f_2') - 3f_i''(f_1'f_2'' - f_1''f_2')$ *et* $(\mathcal{R})$ *:* $3(w_{12})^2 = f_2'w_{12}^1 - f_1'w_{12}^2$.

La démonstration nécessite deux lemmes :

LEMME 3.3. — w_{12} *est quadratique sur* $\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1]$.

Démonstration. — Par $(\mathcal{R})$, w_{12} est algébrique sur $\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1]$ de degré 2 ou 1.

Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q tels que :

$$P(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1)w_{12} = Q(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1).$$

Par $(\mathcal{R})$ on remplace w_{12}^2 par $\frac{f_2'w_{12}^1 - 3(w_{12})^2}{f_1'}$ dans P et Q.

Ainsi on obtient une égalité, après multiplication par $(f_1')^m$ avec m suffisamment grand, entre deux polynômes en les variables $\{f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1\}$ qui sont algébriquement libres. Mais l'un des polynômes a toutes ses puissances en w_{12} impaires et l'autre, paires ; ce qui implique $P = Q = 0$.

Ainsi le degré de w_{12} est 2. □

Lemme 3.4. — $\{f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1\}$ *sont algébriquement libres.*

Démonstration. — w_{12} est algébrique sur $\mathbb{C}(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1)$ donc

$$\begin{aligned}\deg.\mathrm{tr}(\mathbb{C}(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1)) &= \deg.\mathrm{tr}(\mathbb{C}(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1, w_{12})) \\ &\geqslant \deg.\mathrm{tr}(\mathbb{C}(f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1)) = 4.\end{aligned}$$

□

On peut maintenant passer à la démonstration du théorème 3.2 :

Démonstration. — D'après la proposition 3.1 on est ramené à déterminer $A_3[f_1'^{-1}] \cap A_3[f_2'^{-1}]$. On considère la reparamétrisation $\phi = f_1^{-1}$ sur la carte $(f_1' \neq 0)$. Soit $P \in A_3$. Donc $P(f \circ \phi) = (\phi')^m P(f) \circ \phi$. Remarquons maintenant par le calcul :

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1^{-1})' &= \frac{f_2'}{f_1'} \circ f_1^{-1}, \\ (f_2 \circ f_1^{-1})'' &= \frac{w_{12}}{(f_1')^3} \circ f_1^{-1}, \\ (f_2 \circ f_1^{-1})''' &= \frac{w_{12}^1}{(f_1')^5} \circ f_1^{-1}.\end{aligned}$$

Ainsi $P \in \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}]$ et donc

$$A_3[f_1'^{-1}] = \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}].$$

Par symétrie : $A_3[f_2'^{-1}] = \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}]$. L'inclusion

$$\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1, w_{12}^2] \subset \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}]$$

est immédiate puisque par $(\mathcal{R})$:

$$w_{12}^2 \in \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}] \text{ et } w_{12}^1 \in \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}].$$

Il reste donc à montrer

$$\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}] \subset \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1, w_{12}^2].$$

Soit $F \in \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}]$:

$$F = \frac{P(f_1'; f_2'; w_{12}; w_{12}^1)}{(f_1')^l} = \frac{Q(f_1'; f_2'; w_{12}; w_{12}^2)}{(f_2')^m}.$$

Par $(\mathcal{R})$:

$$\begin{aligned}P(f_1'; f_2'; w_{12}; w_{12}^1) &= P_1(f_1'; f_2'; w_{12}^1; w_{12}^2) w_{12} + P_2(f_1'; f_2'; w_{12}^1; w_{12}^2), \\ Q(f_1'; f_2'; w_{12}; w_{12}^2) &= Q_1(f_1'; f_2'; w_{12}^1; w_{12}^2) w_{12} + Q_2(f_1'; f_2'; w_{12}^1; w_{12}^2)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}((f_2')^m P_1(f_1';f_2';w_{12}^1;w_{12}^2) - (f_1')^l Q_1(f_1';f_2';w_{12}^1;w_{12}^2))w_{12}\\ + ((f_2')^m P_2(f_1';f_2';w_{12}^1;w_{12}^2) - (f_1')^l Q_2(f_1';f_2';w_{12}^1;w_{12}^2)) = 0.\end{aligned}$$

Or w_{12} est quadratique sur $\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1]$ donc :

$$(f_2')^m P_i(f_1';f_2';w_{12}^1;w_{12}^2) - (f_1')^l Q_i(f_1';f_2';w_{12}^1;w_{12}^2) = 0,\ i = 1,2.$$

$\{f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1\}$ sont algébriquement libres donc :

$$P_i(f_1';f_2';w_{12}^1;w_{12}^2) = (f_1')^l R_i(f_1';f_2';w_{12}^1;w_{12}^2).$$

Et le résultat est prouvé. □

On peut maintenant caractériser les opérateurs différentiels d'ordre 3 en dimension 3.

En notant $u_i = \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{pmatrix}$ et en définissant :

$$\begin{aligned}F_1(u_1) &= u_1^1;\\ F_2(u_1,u_2) &= u_1^1u_2^2 - u_1^2u_2^1;\\ F_3(u_1,u_2,u_3) &= u_3^1(u_1^1u_2^3 - u_1^3u_2^1) - 3u_3^2(u_1^1u_2^2 - u_1^2u_2^1).\end{aligned}$$

on obtient que l'ensemble $\{F_1, F_2, F_3\}$ de formes multilinéaires $G_3^{'}$-invariantes est un système complet de $G_3^{'}$-invariants d'un système de 2 vecteurs.

Par application du théorème 2.6 de Popov, on obtient la preuve du théorème 1 et donc, la caractérisation algébrique de l'algèbre A_3 des germes d'opérateurs invariants en dimension 3 :

Démonstration. — Il ne reste qu'à justifier l'assertion sur le degré de transcendance. Mais celle-ci est une conséquence immédiate du théorème 2.3 qui identifie $E_{k,m}T^*_{X,x}$ avec les sections de $O_{P_kV}(m)$ au-dessus de $(\pi_{0,k})^{-1}(x)$. □

Remarque 3.5. — 1) Pour tout k, $G_k^{'} \subset SL_k$, donc par le raisonnement précédent pour déterminer A_k en toute dimension il suffit de déterminer A_k en dimension $k-1$.

2) On a montré que le groupe $G_3^{'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset U(3)$ est un groupe de Grosshans de GL_3 *i.e.*, $\mathbb{C}[GL_3]^{G_3^{'}}$ est une algèbre de type fini. De plus, ce groupe n'est pas régulier *i.e.*, normalisé par un tore maximal

car :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2\lambda_1^{-1}\lambda_2 & 1 & 0 \\ 6b_3\lambda_1^{-1}\lambda_3 & 6b_2\lambda_2^{-1}\lambda_3 & 1 \end{pmatrix} \notin G_3^{'}.$$

On ne peut donc pas appliquer le résultat de L. Tan [18] sur la conjecture 2.10 de Popov-Pommerening cité dans les préliminaires pour montrer que $G_3^{'}$ est un sous-groupe de Grosshans.

3) Sans l'utilisation du théorème de Popov, la détermination par un calcul “à la main” des générateurs de A_3 semble difficile.

4. Applications géométriques et preuve du théorème 2

Il s'agit d'étudier le fibré $E_{3,m}T_X^*$ en dimension 3 pour obtenir sa filtration en représentations irréductibles de Schur qui nous permettra, par un calcul de Riemann-Roch, de calculer sa caractéristique d'Euler. Rappelons (*cf.* introduction) que $E_{3,m}T_X^*$ est muni d'une filtration dont les termes gradués sont

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \Big(\bigoplus_{l_1+2l_2+3l_3=m} S^{l_1}T_X^* \otimes S^{l_2}T_X^* \otimes S^{l_3}T_X^*\Big)^{G_3^{'}}.$$

D'après la théorie de la représentation, ces termes gradués se décomposent en représentations irréductibles de $Gl(T_X^*)$: les représentations de Schur. La caractérisation algébrique précédente va nous permettre de trouver les représentations irréductibles qui interviennent dans cette décomposition.

Pour cela, on a besoin de la filtration des 3-jets en dimension 2 :

Théorème 4.1. — *En dimension 2 on a :*

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \bigoplus_{0\leqslant\gamma\leqslant\frac{m}{5}} \Big(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2=m-\gamma;\ \lambda_1-\lambda_2\geqslant\gamma;\ \lambda_2\geqslant\gamma\}} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2)}T_X^*\Big).$$

Démonstration. — On sait que :

$$A_3 = \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2][w_{12}]$$

où $w_{12}^i = (f_i')^4 d(\frac{w_{12}}{(f_i')^3}) = f_i'(f_1'f_2''' - f_1'''f_2') - 3f_i''(f_1'f_2'' - f_1''f_2')$ et $3(w_{12})^2 = f_2'w_{12}^1 - f_1'w_{12}^2$.

$A_{3,m}$ est une représentation polynômiale de GL_2. La théorie de la représentation (proposition 2.14 et 2.15) nous dit que $A_{3,m}$ est somme directe de représentations irréductibles qui sont déterminées par les vecteurs de plus haut poids.

Rappelons (définition 2.13) qu'un vecteur est vecteur de plus haut poids s'il est invariant sous l'action de $U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ici :

$$V = \{(f_1')^\alpha (w_{12}^1)^\gamma (w_{12})^\beta / \ \alpha + 5\gamma + 3\beta = m\}$$

est clairement un ensemble de vecteurs de plus haut poids, de poids

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, \beta + \gamma).$$

On en déduit que chaque représentation $\Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2)}$ vérifiant

$$\{\lambda_1 + 2\lambda_2 = m - \gamma; \lambda_1 - \lambda_2 \geqslant \gamma; \lambda_2 \geqslant \gamma\}$$

apparaît une et une seule fois dans les représentations déterminées par cet ensemble de vecteurs de plus haut poids. En effet, soit (λ_1, λ_2) un tel couple alors

$$\{\alpha = \lambda_1 - \lambda_2 - \gamma; \beta = \lambda_2 - \gamma\}$$

et (α, β, γ) sont déterminés de manière unique.

On a donc :

$$Gr^\bullet E_{3,m} T_X^* \supset \bigoplus_{0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{m}{5}} \Big(\bigoplus_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 = m - \gamma;\ \lambda_1 - \lambda_2 \geqslant \gamma;\ \lambda_2 \geqslant \gamma\}} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2)} T_X^* \Big).$$

Pour avoir l'égalité, il suffit de montrer que l'ensemble V est l'ensemble de tous les vecteurs de plus haut poids, *i.e.*, :

$$V = (A_{3,m})^{U(2)}.$$

Soit $P \in (A_{3,m})^{U(2)} : P = P_1 + P_2.w_{12}$, avec $P_i \in \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2]$.

Soit $u \in U(2) : u.P = u.P_1 + (u.P_2).w_{12}$ car $u.w_{12} = w_{12}$.

Donc $u.P = P \Leftrightarrow u.P_i = P_i$ (car w_{12} est quadratique par le lemme 3.3).

Donc pour déterminer $(A_{3,m})^{U(2)}$, il nous suffit de déterminer

$$\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2]^{U(2)}.$$

Soit : $u = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(2)$.

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u.f_1' &= f_1'; \\ u.f_2' &= \lambda f_1' + f_2'; \\ u.w_{12}^1 &= w_{12}^1; \\ u.w_{12}^2 &= w_{12}^2 + \lambda w_{12}^1. \end{aligned}$$

Rappelons que $\{f_1',f_2',w_{12}^2,w_{12}^1\}$ sont algébriquement libres par le lemme 3.4, donc déterminer $\mathbb{C}[f_1',f_2',w_{12}^1,w_{12}^2]^{U(2)}$ revient à déterminer les invariants du groupe unipotent $U(2)$ qui sont bien connus en théorie classique des invariants (*cf.* [13] p.87). Donc on a l'égalité :

$$\mathbb{C}[f_1',f_2',w_{12}^1,w_{12}^2]^{U(2)} = \mathbb{C}[f_1',w_{12}^1,f_2'w_{12}^1 - f_1'w_{12}^2] = \mathbb{C}[f_1',w_{12}^1,(w_{12})^2].$$

Finalement on obtient l'inclusion :

$$(A_{3,m})^{U(2)} \subset \mathbb{C}[f_1',w_{12}^1,w_{12}].$$

Par l'unicité de (α,β,γ) vue précédemment on obtient bien :

$$(A_{3,m})^{U(2)} = V.$$

□

On passe maintenant à la preuve du théorème 2 :

Démonstration. — On suit le même schéma que dans la preuve précédente.

Soit :

$$V = \{(f_1')^{\alpha}(w_{12}^1)^{\gamma}(w_{12})^{\beta}W^{\delta}\ /\ \alpha+5\gamma+3\beta+6\delta = m\}.$$

V est un ensemble de vecteurs de plus haut poids de poids

$$(\alpha+\beta+2\gamma+\delta;\beta+\gamma+\delta;\delta).$$

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ vérifiant :

$$(\mathcal{P}) : \{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3 = m-\gamma, 0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{m}{5}; \lambda_i-\lambda_j \geqslant \gamma, i<j\}.$$

Comme précédemment, on obtient que chaque représentation $\Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^*$ où $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ vérifie $(\mathcal{P})$ apparaît une et une seule fois dans les représentations déterminées par cet ensemble de vecteurs de plus haut poids. En effet, soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ vérifiant $(\mathcal{P})$.

Alors :

$$\{\alpha = \lambda_1-\lambda_2-\gamma;\ \beta = \lambda_2-\lambda_3-\gamma;\ \delta = \lambda_3\}$$

et $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ sont déterminés de manière unique.

Donc on a l'inclusion :

$$Gr^{\bullet}E_{3,m}T_X^* \supset \bigoplus_{0\leqslant\gamma\leqslant\frac{m}{5}}\Big(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geqslant\gamma,\ i<j\}}\Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^*\Big).$$

Pour avoir l'égalité, il suffit à nouveau de montrer que V est l'ensemble de tous les vecteurs de plus haut poids de $A_{3,m}$ *i.e.*, : $V = (A_{3,m})^{U(2)}$.

L'idée importante ici est d'utiliser un argument qui apparait dans la preuve du théorème 2.6 de Popov [12] et permet de voir que le résultat obtenu pour la dimension 2 implique le résultat pour la dimension 3.

Si (x_1, x_2, x_3) est un système de vecteurs en position générale tel que

$$\det(x_1, x_2, x_3) = 0$$

alors par l'action de $U(3)$ on se ramène au système $(x_1, x_2, 0)$.

Soit $P \in (A_{3,m})^{U(3)}$, un vecteur de plus haut poids. Montrons que

$$P \in \mathbb{C}[f_1', w_{12}^1, w_{12}, W]$$

par récurrence sur m. Pour $m = 0$, c'est trivial.

Supposons maintenant $(A_{3,p})^{U(3)} \subset \mathbb{C}[f_1', w_{12}^1, w_{12}, W]$ pour $p < m$. Montrons que le résultat est vrai pour m. Considérons P_1 la restriction de P à l'hypersurface $(W = 0)$. Par l'invariance de P_1 sous l'action de $U(3)$ et la remarque précédente montrant que par $U(3)$ on transforme le système (x_1, x_2, x_3), en position générale, en le système $(x_1, x_2, 0)$, on obtient que P_1 ne dépend que des deux premiers vecteurs *i.e.*, P_1 est un vecteur de plus haut poids de dinension 2, donc par le théorème 4.1 $P_1 \in \mathbb{C}[f_1', w_{12}^1, w_{12}]$.

$P - P_1$ est un polynôme qui s'annule sur l'hypersurface $(W = 0)$. Par le Nullstellensatz, on obtient que $(P - P_1) \in \sqrt{(W)}$ donc par l'irréductibilité de W on a :

$$P = P_1 + W.P_2.$$

Il est clair que $P_2 \in (A_{3,m-6})^{U(3)}$ donc par hypothèse de récurrence

$$P_2 \in \mathbb{C}[f_1', w_{12}^1, w_{12}, W]$$

et de même pour P.

On en déduit que $(A_{3,m})^{U(3)} \subset \mathbb{C}[f_1', w_{12}^1, w_{12}, W]$.

Donc $V = (A_{3,m})^{U(3)}$ par l'unicité de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Le théorème est démontré. □

5. Calculs de caractéristiques d'Euler

Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré d. Grâce aux filtrations obtenues dans la section précédente nous allons pouvoir calculer les différentes caractéristiques d'Euler qui nous intéressent. Les calculs ont été faits sur le logiciel Maple et détaillés dans [14].

5.1. Calcul des classes de Chern

Soit $c_i = c_i(T_X)$.

Proposition 5.1.

$$\begin{aligned} c_1^3 &= (5-d)^3 d, \\ c_1 c_2 &= d(5-d)(d^2-5d+10), \\ c_3 &= d(-d^3+5d^2-10d+10). \end{aligned}$$

Démonstration. — On a la suite exacte du fibré normal :

$$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^4|X} \to \mathcal{O}_X(d) \to 0.$$

Donc par définition des classes de Chern :

$$(1+c_1+c_2+c_3)(1+dh) = (1+h)^5$$

où : $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$. Donc, par identification on obtient les identités :

$$\begin{aligned} c_1 &= (5-d)h, \\ c_2 + dc_1 h &= 10h^2, \\ c_3 + dc_2 h &= 10h^3, \\ h^3 &= d, \end{aligned}$$

d'où les relations annoncées :

$$\begin{aligned} c_1^3 &= (5-d)^3 d, \\ c_3 &= 10d - 10d^2 + d^3(5-d), \\ c_1 c_2 &= (5-d)10d - d^2(5-d)^2. \end{aligned}$$

□

5.2. Les 1-jets

L'absence de 1-jets définis globalement est bien connue :

Proposition 5.2. — ([16])

$$H^0(X, S^m T_X^*) = 0 \text{ pour } m \geqslant 1.$$

Donc les 1-jets ne pourront pas être utilisés.

Remarque 5.3. — Un calcul de type Riemann-Roch donne :

$$\begin{aligned} \chi(X, S^m T_X^*) &= \frac{m^5}{120}(-c_1^3 + 2c_1c_2 - c_3) + O(m^4) \\ &= \frac{m^5}{120} 5d(3d-7) + O(m^4). \end{aligned}$$

5.3. Les 2-jets

On a la filtration [1] :

$$Gr^\bullet E_{2,m}T_X^* = \bigoplus_{l_1+2l_2=m} \Gamma^{(l_1,l_2,0)}T_X^*,$$

d'où le calcul :

$$\chi(X, E_{2,m}T_X^*) = \chi(X, Gr^\bullet E_{2,m}T_X^*) = \sum_{l_1+2l_2=m} \chi(X, \Gamma^{(l_1,l_2,0)}T_X^*).$$

Proposition 5.4.

$$\chi(X, E_{2,m}T_X^*) = \frac{-m^7}{1837080}(89c_1^3 - 141c_1c_2 + 52c_3) + O(m^6).$$

Donc :

$$\chi(X, E_{2,m}T_X^*) = \frac{m^7}{1837080}(-5d(37d^2 - 452d + 919)) + O(m^6).$$

On constate donc la négativité de la caractéristique d'Euler pour d suffisamment grand.

Remarque 5.5. — Pour les jets de Green-Griffiths :

$$\chi(X, \mathcal{J}_{2,m}) = \frac{m^8}{2^3 8!}\Big(\frac{-15}{8}c_1^3 + 3c_1c_2 - \frac{9}{8}c_3\Big) + O(m^7).$$

Donc :

$$\chi(X, \mathcal{J}_{2,m}) = \frac{-15m^8}{8^3 7!}(d(51 - 25d + 2d^2) + O(m^7).$$

5.4. Les 3-jets

Grâce à la filtration obtenue précédemment dans le théorème 2, on peut effectuer un calcul de Riemann-Roch :

Proposition 5.6.

$$\begin{aligned}\chi(X, E_{3,m}T_X^*) \quad &= \quad -m^9\Big(\frac{43}{1417500000}c_3 + \frac{29233}{408240000000}c_1^3 \\ &\qquad -\frac{551}{5670000000}c_1c_2\Big) + O(m^8).\end{aligned}$$

Donc :

$$\chi(X, E_{3,m}T_X^*) = \frac{m^9}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) + O(m^8).$$

COROLLAIRE 5.7. — *Pour* $d \geqslant 43$, $\chi(X, E_{3,m}T_X^*) \sim \alpha(d)m^9$ *avec* $\alpha(d) > 0$.

Remarque 5.8. — Pour les jets de Green-Griffiths on a :

$$\begin{aligned}\chi(X, \mathcal{J}_{3,m}) &= \frac{-m^{11}}{6^3.11!}\Big(\frac{575}{216}c_1^3 - \frac{395}{108}c_1c_2 + \frac{251}{216}c_3\Big) + O(m^{10}) \\ &= \frac{m^{11}}{6^3.11!.216}d(36d^3 - 1980d^2 + 17985d - 34885) + O(m^{10}).\end{aligned}$$

Et on a la positivité pour $d \geqslant 45$.

5.5. Le cas logarithmique

Nous pouvons appliquer les résultats obtenus au cas logarithmique. Soit X une variété lisse complexe avec un diviseur à croisements normaux D. En suivant [8], on définit le faisceau cotangent logarithmique

$$\overline{T_X}^* = T_X^*(\log D)$$

comme le faisceau localement libre engendré par T_X^* et les différentielles logarithmiques $\frac{ds_j}{s_j}$, où les $s_j = 0$ sont les équations locales des composantes irréductibles de D.

Son dual, le fibré tangent logarithmique

$$\overline{T_X} = T_X(-\log D)$$

est le faisceau des germes de champs de vecteurs tangents à D.

De la même manière que dans le cas compact, on peut construire les espaces de jets logarithmiques et les fibrés d'opérateurs différentiels associés $E_{k,m}\overline{T_X}^*$ (*cf.* [3]).

Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ une surface lisse et irréductible de degré d. On considère la variété logarithmique $(\mathbb{P}^3, X)$.

5.5.1. Calcul des classes de Chern

On pose :

$$c_i = c_i(T_{\mathbb{P}^3}), \overline{c_i} = c_i(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}).$$

Le calcul des classes de Chern est un peu plus long que dans le cas compact.

Proposition 5.9.

$$\begin{aligned}\overline{c_1}^3 &= (4-d)^3,\\ \overline{c_1c_2} &= (4-d)(d^2-4d+6),\\ \overline{c_3} &= -d^3+4d^2-6d+4.\end{aligned}$$

Démonstration. — Pour la première identité, il suffit de remarquer que :

$$\overline{c_1} = -c_1(\overline{K_{\mathbb{P}^3}}) = -c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-4)).$$

La troisième vient du fait [9] que :

$$\overline{c_3} = e(\mathbb{P}^3\backslash X)$$

où e désigne la caractéristique d'Euler.

On a $e(\mathbb{P}^3\backslash X) = e(\mathbb{P}^3) - e(X)$ et $e(\mathbb{P}^3) = 4$. Calculons $e(X) = c_2(T_X)$. Par la suite exacte :

$$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^3|X} \to \mathcal{O}_X(d) \to 0$$

on obtient :

$$c(T_{\mathbb{P}^3|X}) = c(T_X)c(\mathcal{O}_X(d))$$

donc :

$$(1+h)^4 = (1+c_1(T_X)+c_2(T_X)).(1+dh)$$

où $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ et $h^2 = d$. De plus :

$$c_1(T_X) = -c_1(K_X) = (4-d)h,$$

donc on a l'égalité :

$$1+4h+6h^2 = (1+(4-d)h+c_2(T_X)).(1+dh).$$

On a donc l'identité :

$$e(X) = c_2(T_X) = 6h^2 - (4-d)dh^2 = d(6+d^2-4d),$$

d'où finalement :

$$e(\mathbb{P}^3\backslash X) = 4 - d(6+d^2-4d).$$

Montrons la deuxième. Rappelons que par Riemann-Roch, si E est un fibré vectoriel de rang e sur $\mathbb{P}^3$, avec des classes de Chern notées d_i, alors ([10] p. 508) :

$$\chi(\mathbb{P}^3, E) = \frac{1}{6}(d_1^3 - 3d_1d_2 + 3d_3) + \frac{1}{4}c_1(d_1^2 - 2d_2) + \frac{1}{12}(c_1^2+c_2)d_1 + \frac{e}{24}c_1c_2.$$

Par Riemann-Roch :

$$\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) = \frac{1}{6}(-\overline{c_1}^3 + 3\overline{c_1c_2} - 3\overline{c_3}) + \frac{1}{4}c_1(\overline{c_1}^2 - 2\overline{c_2}) - \frac{1}{12}(c_1^2+c_2)\overline{c_1} + \frac{1}{8}c_1c_2.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}(\overline{c_1c_2}-c_1\overline{c_2}) = \chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*)-(\frac{1}{6}(-\overline{c_1}^3-3\overline{c_3})+\frac{1}{4}c_1\overline{c_1}^2-\frac{1}{12}(c_1^2+c_2)\overline{c_1}+\frac{1}{8}c_1c_2).$$

Pour déterminer $\overline{c_1c_2}$, il suffit donc de déterminer $\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*)$.

On a la suite exacte :

$$0 \to T^*_{\mathbb{P}^3} \to \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \to \mathcal{O}_X \to 0$$

où la flèche $\phi : \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \to \mathcal{O}_X$ est donnée par :
soit $x \in \mathbb{P}^3, w \in (\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*)_x$. Si $x \notin X$: $\phi(w) = 0$. Si $x \in X, w = f_1\frac{dz_1}{z_1} + f_2dz_2 + f_3dz_3$, où $(z_1 = 0)$ est une équation locale de X : $\phi(w) = f_1$.

Donc :

$$\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) = \chi(\mathcal{O}_X) + \chi(T^*_{\mathbb{P}^3}).$$

Calculons $\chi(T^*_{\mathbb{P}^3})$. On a :

$$c_1(T^*_{\mathbb{P}^3}) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) = -4\omega$$

où ω est la classe d'un hyperplan, $c_2(T^*_{\mathbb{P}^3}) = 6\omega^2$, $c_3(T^*_{\mathbb{P}^3}) = -4$.

Par Riemann-Roch :

$$\begin{aligned}\chi(T^*_{\mathbb{P}^3}) &= \frac{1}{6}((-4)^3+3\times 4\times 6-3\times 4)+\frac{1}{4}\times 4\times(4^2-2\times 6)\\ &\quad +\frac{1}{12}(4^2+6)\times(-4)+\frac{1}{8}\times 4\times 6\\ &= -1.\end{aligned}$$

Calculons $\chi(\mathcal{O}_X)$. On a la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}(-X) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

qui nous donne :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) - \chi(\mathcal{O}(-X)),$$

$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = \frac{1}{24}c_1c_2$ et $\chi(\mathcal{O}(-X)) = \frac{-d^3}{6} + d^2 - \frac{22}{12}d + \frac{1}{24}c_1c_2$.

Donc :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{d^3}{6} - d^2 + \frac{11}{6}d.$$

Finalement :

$$\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) = \frac{d^3}{6} - d^2 + \frac{11}{6}d - 1.$$

$c_1 = 4\omega = \frac{4}{4-d}\overline{c_1}$. Donc :

$$\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{4}{4-d}\Big)\overline{c_1c_2} = \frac{-d}{2(4-d)}\overline{c_1c_2}.$$

Et :

$$\begin{aligned}
\overline{c_1 c_2} &= \frac{2(d-4)}{d}\Big(\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) - \Big(\frac{1}{6}(-\overline{c_1}^3 - 3\overline{c_3}) + \frac{1}{4}c_1\overline{c_1}^2 \\
&\qquad - \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)\overline{c_1} + \frac{1}{8}c_1 c_2\Big)\Big) \\
&= \frac{2(d-4)}{d}\Big(\frac{d^3}{6} - d^2 + \frac{11}{6}d - 1 - \Big(\frac{1}{6}\times\big((d-4)^3 \\
&\qquad -3\times(-d^3 + 4d^2 - 6d + 4)\big) + \frac{1}{4}\times 4\times(4-d)^2 \\
&\qquad -\frac{1}{12}\times 22\times(4-d) + 3\Big)\Big) \\
&= (4-d)(d^2 - 4d + 6).
\end{aligned}$$

□

5.5.2. Calcul des caractérisiques d'Euler

Nous montrons d'abord que les filtrations restent les mêmes que dans le cas compact mis-à-part que le fibré tangent est remplacé par le fibré tangent logarithmique. Comme dans le cas compact (*cf.* [1]), on munit le faisceau $\mathcal{O}(E_{k,m}^{GG}\overline{T_X}^*)$ des différentielles de jets logarithmiques (*i.e.*, le faisceau localement libre engendré par tous les opérateurs polynômiaux en les dérivées d'ordre $1, 2, ...k$ de f, auxquelles on ajoute celles de la fonction $\log(s_j(f))$ le long de la j-ème composante de D) d'une filtration dont les termes gradués sont

$$Gr^\bullet E_{k,m}^{GG}\overline{T_X}^* = S^{l_1}\overline{T_X}^* \otimes ... \otimes S^{l_k}\overline{T_X}^*,$$

$l := (l_1, l_2, ..., l_k) \in \mathbb{N}^k$ vérifie $l_1 + 2l_2 + ... + kl_k = m$. Pour le faisceau des différentielles de jets invariants $\mathcal{O}(E_{k,m}\overline{T_X}^*)$ (*cf.* [3]) on obtient une filtration dont les termes gradués sont :

$$Gr^\bullet E_{k,m}\overline{T_X}^* = \Big(\bigoplus_{l_1+2l_2+...+kl_k=m} S^{l_1}\overline{T_X}^* \otimes ... \otimes S^{l_k}\overline{T_X}^*\Big)^{G'_k}$$

où l'action de G'_k est étendue de $U\backslash D$, où U est un ouvert de X, à U grâce à l'isomorphisme (*cf.* [3]) $\overline{T_X}^*_{|U} \to T^*_{X,p}\times U$, $(p \in U\backslash D)$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\Big(\bigoplus_{l_1+...+kl_k=m} S^{l_1}\overline{T_X}^*\otimes...\otimes S^{l_k}\overline{T_X}^*\Big)^{G'_k}_{|U\backslash D} & \to & \Big(\bigoplus_{l_1+...+kl_k=m} S^{l_1}T^*_{X,p}\otimes...\otimes S^{l_k}T^*_{X,p}\Big)^{G'_k}\times(U\backslash D) \\
\downarrow Gl(\overline{T_X}^*) & & \downarrow Gl_3\times \mathrm{id} \\
\Big(\bigoplus_{l_1+...+kl_k=m} S^{l_1}\overline{T_X}^*\otimes...\otimes S^{l_k}\overline{T_X}^*\Big)^{G'_k}_{|U\backslash D} & \to & \Big(\bigoplus_{l_1+...+kl_k=m} S^{l_1}T^*_{X,p}\otimes...\otimes S^{l_k}T^*_{X,p}\Big)^{G'_k}\times(U\backslash D)
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes qui s'étendent à U. L'action de $Gl_3 \times id$ s'étend clairement à U, donc l'action de $Gl(\overline{T_X}^*)$, à gauche dans le diagramme aussi. Les représentations irréductibles à droite s'identifient donc avec celles de gauche car les vecteurs de plus haut poids et les poids s'identifient par la commutativité du diagramme. Ainsi on a bien la même décomposition en représentations irréductibles dans le cas logarithmique et dans le cas compact *i.e.*,

$$\begin{aligned} Gr^\bullet E_{2,m}\overline{T_X}^* &= \bigoplus_{l_1+2l_2=m} \Gamma^{(l_1,l_2,0)}\overline{T_X}^*, \\ Gr^\bullet E_{3,m}\overline{T_X}^* &= \bigoplus_{0\leqslant\gamma\leqslant\frac{m}{5}} \Big(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geqslant\gamma,\ i<j\}} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}\overline{T_X}^* \Big). \end{aligned}$$

D'après les calculs dans le cas compact, on obtient les résultats suivants (calculs détaillés dans [14]) :

Pour les 1-jets :

$$\chi(S^m\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) = \frac{m^5}{120}(10d-20) + O(m^4).$$

Pour les 2-jets :

$$\chi(E_{2,m}\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) = m^7\Big(\frac{-37}{459270}d^2 + \frac{247}{306180}d - \frac{1}{129}\Big) + O(m^6).$$

On obtient à nouveau la positivité pour les 3-jets :

$$\begin{aligned} \chi(E_{3,m}\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) &= m^9\Big(\frac{389}{81648000000}d^3 - \frac{6913}{34020000000}d^2 \\ &\quad + \frac{6299}{4252500000}d - \frac{1513}{63787500}\Big) + O(m^8). \end{aligned}$$

Corollaire 5.10. — *Pour $d \geqslant 34$, $\chi(X, E_{3,m}\overline{T_{\mathbb{P}^3}}^*) \sim \alpha(d)m^9$ avec $\alpha(d) > 0$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. Demailly, « Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials », in *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 62, Amer. Math.Soc., Providence, RI, 1997, p. 285-360.

[2] J.-P. Demailly & J. El Goul, « Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space », *Amer. J. Math* **122** (2000), p. 515-546.

[3] G. Dethloff & S. Lu, « Logarithmic jet bundles and applications », *Osaka J. of Math.* **38** (2001), p. 185-237.

[4] G. Dethloff, G. Schumacher & P. Wong, « Hyperbolicity of the complement of plane algebraic curves », *Amer.J. Math* **117** (1995), p. 573-599.

[5] ———, « On the hyperbolicity of the complements of curves in algebraic surfaces : the three component case », *Duke. Math. J.* **78** (1995), p. 193-212.

[6] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambrige University Press, 1997.

[7] M. Green & P. Griffiths, « Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings », in *The Chern Symposium 1979*, Proc. Inter. Sympos. Berkeley, CA, Springer-Verlag, New-York, 1980, p. 41-74.

[8] S. Iitaka, « On the logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties », in *Complex Anal. and Alg. Geom.*, Ianami Shoten, 1977, p. 175-189.

[9] ———, « Geometry on complements of lines in $\mathbb{P}^2$ », *Tokyo J. Math.* **1** (1978), p. 1-19.

[10] S. Kobayashi & T. Ochiai, « On complex manifolds with positive tangent bundles », *Journal of the Mathematical Society of Japan* **22** (1970), p. 499-525.

[11] K. Pommerening, « Invariant theory », in *LNM*, vol. 1278, 1987.

[12] V. Popov, *Invariant theory*, algebraic geometry éd., vol. 4, EMS, Springer-Verlag, 1989.

[13] C. Procesi, « Classical invariant theory », in *Brandeis Lect. Notes*, vol. 1, 1982.

[14] E. Rousseau, « Sur la conjecture de Kobayashi et l'hyperbolicité des hypersurfaces projectives en dimension 2 et 3 », Université de Bretagne Occidentale.

[15] ———, « Hyperbolicité du complémentaire d'une courbe : le cas de deux composantes », *CRAS* **Ser. I 336** (2003), p. 635-640.

[16] F. Sakai, « Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties », in *Lect. Notes in Math.*, vol. 732, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1979.

[17] Y.-T. Siu & S. Yeung, « Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane », *Invent. Math.* **124** (1996), p. 573-618.

[18] L. Tan, « On the Popov-Pommerening conjecture for groups of type A_n », in *Proc. AMS*, vol. 106, 1989, p. 611-616.

Manuscrit reçu le 24 janvier 2005,
accepté le 28 juillet 2005.

Erwan ROUSSEAU
Université du Québec à Montréal (UQAM)
Département de mathématiques
C.P. 8888, centre ville
Montréal H3C 3P8 (Canada)
eroussea@math.uqam.ca