ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

José BERTIN & Sylvain MAUGEAIS

Déformations équivariantes des courbes semistables

Tome 55, n^{o} 6 (2005), p. 1905-1941.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_6_1905_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
55, 6 (2005), 1905–1941

DÉFORMATIONS ÉQUIVARIANTES DES COURBES SEMI-STABLES

par José BERTIN & Sylvain MAUGEAIS

Introduction.

Les espaces de Hurwitz qui classifient les revêtements entre courbes algébriques de genres fixés, et à ramification fixée, sont des objets géométriques d'une richesse surprenante. Cela est vrai si le corps de base est $\mathbb{C}$, ou plus généralement sur tout corps de base algébriquement clos, la ramification étant modérée. Les travaux de Okounkov-Pandariphande [OP] sur la combinatoire des nombres de Hurwitz en connexion avec les systèmes intégrables de Toda en sont une illustration frappante. Le fait géométrique essentiel qui sous-tend ces relations est l'existence d'une compactification naturelle au moyen des revêtements stables [BR], autorisant des arguments de dégénérescence. Cette construction est rendue possible par la connaissance précise du comportement par déformation des points du bord, les revêtements stables.

Pour une étude plus générale il est souhaitable de comprendre le comportement des espaces(1) de Hurwitz, et de leurs points, par réduction à un corps de coefficients de caractéristique $p > 0$. Si les revêtements acquièrent par réduction de la ramification sauvage, très peu de résultats sont pour le moment accessibles.

(1) La terminologie espace quelque peu imprécise, doit être comprise dans le sens de champ de Hurwitz. Cette confusion n'a pas d'importance pour la suite.

Mots-clés : revêtement, déformation, point double.
Classification math. : 14H10, 14H30, 14B10.

La question qui nous occupe dans ce travail est l'étude des points du bord, particulièrement lorsque la caractéristique du corps de base est positive, et leur comportement par déformation (Théorème 1.21). Par exemple, peut-on donner des critères pour qu'un revêtement sauvagement ramifié entre courbes (semi)stables, puisse être déformé en un revêtement entre courbes lisses ? Quelle est alors la structure locale de l'espace de Hurwitz en ce point, par exemple si G est cyclique d'ordre p (Théorème 1.21). Pour tempérer tout optimisme exagéré, on notera que les problèmes de déformation dans le cas lisse sont déjà notablement compliqués, en particulier fortement obstrués, même pour un groupe cyclique [BM] ; voir cependant le travail de R. Pries [Pr] pour une approche qui néglige les obstructions. On notera que les p-groupes cycliques jouent un rôle particulier dans les problèmes locaux, en tant que groupes d'inertie modérés, ce qui explique que comme dans [BM] l'essentiel de notre travail se limite à de tels groupes. Pour justifier l'apparition de revêtements entre courbes nodales, on notera que faire dégénérer un revêtement galoisien entre courbes lisses amène naturellement à considérer une courbe stable C munie d'une action du groupe de Galois G du revêtement, et à étudier le foncteur des déformations équivariantes de C.

Notre objectif dans ce travail est, de manière plus précise, d'obtenir quelques informations sur l'anneau local complet R_{ver} supportant la déformation universelle. Cet anneau détermine la structure locale de l'espace de Hurwitz au point considéré. Il semble exclu de pouvoir en proposer une description explicite en général. Cet anneau a un quotient classique $R_{\mathrm{ver}}^{\infty}$ qui paramétrise les déformations à type topologique fixé. Il y a une contribution subtile à R_{ver} liée aux épaisseurs $t_{P,\mathrm{ver}}$ des points doubles dans la déformation universelle. Ces épaisseurs définissent les équations locales au point considéré du bord de l'espace de Hurwitz. Une analyse fine des contributions à R_{ver} montre qu'elles sont d'une part locales, localisées aux points de ramification (non singuliers), points doubles avec inertie, jointes éventuellement à des contributions globales exotiques, qui viennent du fait qu'on ne peut exclure qu'un élément non trivial de G soit après réduction l'identité sur une composante de C, le point générique d'une telle composante ayant donc une inertie non triviale.

Dans la partie 1 nous étudions le mécanisme de formation des obstructions locales attachées aux points doubles. On compare ces obstructions avec celles attachées aux origines des deux branches. Comme application on donne un critère assurant que localement l'action du groupe d'inertie d'un point double $xy = 0$ se déforme à l'ordre un, *i.e.* à $xy = \varepsilon,\ \varepsilon^2 = 0$. Si une déformation verselle existe pour ce groupe d'inertie, donc d'équation $xy = t_{\mathrm{ver}}$, la condition dit que $t_{\mathrm{ver}} \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ver}}^2$, en notant $\mathcal{M}_{\mathrm{ver}}$ l'idéal maximal de l'anneau versel R_{ver} (critère d'épaisseur un). En corollaire on donne la dimension de l'espace tangent $\dim \mathcal{M}_{\mathrm{ver}}/\mathcal{M}_{\mathrm{ver}}^2$. Il serait désirable de pouvoir détecter en toute généralité le degré de la forme initiale de t_{ver}.

Dans la partie 2, on examine les problèmes globaux, plus particulièrement les interactions entre les obstructions locales et globales. Contrairement au cas lisse [BM], certaines obstructions ne se réduisent pas à des obstructions locales. Elles sont contrôlées par des champs de vecteurs réguliers sur certaines composantes irréductibles, avec des zéros prescrits en les points doubles strictement relevables (Définition 1.15, Théorème 2.4). Cela nous permet en particulier de décrire dans le cas "générique" l'espace tangent de la déformation universelle, et de contrôler à l'ordre un les épaisseurs des points doubles dans cette déformation.

Il est possible que l'approche par déformation, à l'opposée de l'opération de réduction, aide à comprendre la structure des schémas en groupes de Raynaud, objets naturels dans l'opération de réduction (voir Abramovich [Ab]).

Nous remercions le referee qui par sa lecture minutieuse du texte a permis de nombreuses améliorations et corrections.

0. Déformations équivariantes : généralités.

Nous allons préciser les définitions et résultats qui concernent les déformations équivariantes utilisés dans ce travail. Pour des définitions plus précises, et des preuves, on pourra se reporter à [BM2], [We]. On fixe un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$. Sauf précision supplémentaire, un schéma est un k-schéma.

Soit X un S-schéma de type fini avec $S = \operatorname{Spec} A$, sur lequel agit un groupe fini G, action matérialisée par un morphisme de groupes $G \to \operatorname{Aut}_S(X)$. Ce morphisme implicite ne sera pas spécifié. Notons qu'on ne suppose pas, sauf indication contraire, l'action fidèle. Un morphisme G-équivariant $f : X \to Y$, X, Y des G-schémas, est un morphisme qui commute à l'action de G. Soit $\phi : S \hookrightarrow S'$ un plongement de S comme sous-schéma fermé de $S' = \operatorname{Spec} A'$, d'idéal I de carré nul, $I^2 = 0$. Une déformation équivariante de X à S' est formée par une déformation dans le sens usuel, donc la donnée d'un S'-schéma X' et d'un plongement $\varphi' : X \hookrightarrow X'$, rendant cartésien le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & S' \\ {\scriptstyle \varphi'}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \phi} \\ X & \longrightarrow & S. \end{array}$$

L'équivariance signifiant que l'action de G se relève à X'/S', rendant le morphisme φ' G-équivariant. Deux tels diagrammes avec (X', φ') et (X'', φ'') conduisent à une même classe de déformation s'il existe un G-isomorphisme $\psi : X' \cong X''$ induisant un isomorphisme de diagramme, donc $\psi\varphi' = \varphi''$. Si $G = 1$, on retrouve la situation usuelle.

Soit $\Lambda = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt, ou $\Lambda = k$ (cas équicaractéristique) selon les cas. Soit X un k-schéma de type fini sur lequel G agit. Soit $\widehat{\mathcal{C}}$ (resp. $\mathcal{C}$) la catégorie formée des Λ-algèbre locales noethériennes complètes (resp. artiniennes) A avec $A/\mathcal{M}_A = k$. Comme d'habitude l'ensemble des (classes) de déformation de (X, G) à $A \in \mathcal{C}$ noté $\mathrm{Def}_{(X,G)}(A)$ définit un foncteur covariant $\mathrm{Def}_{(X,G)} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, appelé le foncteur des déformations équivariantes de X. Si $G = 1$, on le notera Def_X. Il se prolonge naturellement à $\widehat{\mathcal{C}}$. Sous certaines conditions (axiomes de Schlessinger [Sc]) ce foncteur est pro-représentable (ou seulement admet une enveloppe verselle); dans les deux cas cela conduit à un anneau $R_{\mathrm{ver}} \in \widehat{\mathcal{C}}$ et à un objet $\xi_{\mathrm{ver}} \in \mathrm{Def}(R_{\mathrm{ver}})$, la déformation universelle ou simplement verselle. Le couple $(R_{\mathrm{ver}}, \xi_{\mathrm{ver}})$ est unique à isomorphisme près (unique dans le cas universel). L'attention se porte d'une part sur l'espace tangent

$$\mathrm{Def}_{(X,G)}(k[\varepsilon]) = \left(\mathcal{M}_{\mathrm{ver}}/\mathcal{M}_{\mathrm{ver}}^2\right)^* \, (\epsilon^2 = 0)$$

et d'autre part sur les obstructions à relever un quelconque $\xi \in \mathrm{Def}_{(X,G)}(A)$ à $\mathrm{Def}_{(X,G)}(A')$, pour une surjection $A' \to A$, donc les obstructions à la lissité du foncteur $\mathrm{Def}_{(X,G)}$. On peut se limiter à des petites surjections $A = A'/tA', t\mathcal{M}_{A'} = 0$. Dans les cas favorables les obstructions forment un k-espace vectoriel (de dimension finie m), conditionnant la description de R_{ver} par générateurs et relations

$$R_{\mathrm{ver}} = \Lambda[[\mathcal{M}_{\mathrm{ver}}/\mathcal{M}_{\mathrm{ver}}^2]]/(F_1, \ldots, F_m).$$

On sait que les axiomes de Schlessinger sont satisfaits, par exemple si X est affine avec des singularités isolées, l'action de G étant fidèle, ou bien si X est projective (voir [BM2] pour plus de détails). D'un point de vue technique, il est important d'identifier la théorie cohomologique qui gouverne le foncteur $\mathrm{Def}_{(X,G)}$. Par utilisation du complexe cotangent équivariant [We], on montre [BM], [BM2], [We] que

$$\mathrm{Def}_{(X,G)}(k[\varepsilon]) \cong \mathrm{Ext}^1_{X,G}(\Omega^1_{X/k}, \mathcal{O}_X)$$

et que les obstructions forment un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^2_{X,G}(\Omega^1_{X/k}, \mathcal{O}_X)$. Les $\mathrm{Ext}^j_{X,G}$ sont les Ext globaux équivariants de ([Gr], §4). On utilisera souvent l'une des suites spectrales de [Gr] qui relie des Ext globaux soit à des Ext locaux, soit à de la cohomologie de G à coefficients dans un espace vectoriel de cohomologie sur X. Ces suites seront rappelées au moment de leur utilisation. Dans la section 1 le contexte ne sera pas vraiment affine, mais local formel ; l'adaptation des remarques qui précèdent ne pose pas de problème.

On peut voir le foncteur $\mathrm{Def}_{(X,G)}$ d'une manière un peu différente. Notons que par oubli de l'action de G on a un morphisme $\mathrm{Def}_{(X,G)} \to \mathrm{Def}_X$. D'autre part le groupe G agit naturellement sur Def_X, l'action sur l'objet $[X_A, \varphi] \in \mathrm{Def}_X(A)$ étant

$$g[X_A, \varphi] = [X_A, \varphi g^{-1}].$$

La présence d'automorphismes infinitésimaux empêche d'identifier $\mathrm{Def}_{(X,G)}$ avec le foncteur des points fixes Def_X^G. Etre un point fixe signifie seulement que les $g \in G$ se relèvent individuellement, mais pas en général l'action. Heureusement si X est une courbe stable [DM], le foncteur Def_X est pro-représentable, donc $\mathrm{Def}_{X,G} = \mathrm{Def}_X^G$. C'est une simplification notable dans le cas global (§2).

Par revêtement on entend revêtement galoisien. Pour l'essentiel un groupe de Galois est un p-groupe. Dans le texte, la partie entière (inférieure) de $x \in \mathbb{R}$ sera notée $\lfloor x \rfloor$, et la partie entière supérieure $\lceil x \rceil$.

1. Déformations équivariantes d'un point double.

Rappelons que k est algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$. Soit

$$R = k[[x, y]]/(xy)$$

l'anneau local d'un point double formel. L'objectif de cette section est de décrire le mécanisme des obstructions au relèvement d'une action d'un groupe fini G sur R (*i.e.* d'un homomorphisme $G \to \mathrm{Aut}_k(R)$) à une déformation R_A de R à un anneau local artinien A de corps résiduel k, soit

$$R_A = A[[x,y]]/(xy-a), a \in \mathcal{M}_A$$

($\mathcal{M}_A$ désignant l'idéal maximal de A). Si on souhaite spécifier l'épaisseur Aa de la déformation, on notera cette déformation $R_{A,a}$ au lieu de R_A. C'est un fait général que le calcul des obstructions se ramène à celles relatives au relèvement de R_A à $R_{A'}$, avec $A' \to A = A'/tA'$ une petite surjection d'anneaux locaux artiniens ($t\mathcal{M}_{A'} = 0$).

Nous souhaitons comprendre en quoi ces obstructions se relient aux obstructions correspondantes à l'action induite de G sur les deux branches $x = 0$ (resp. $y = 0$), obstructions analysées en détail dans [BM]. Comme on ne suppose pas que l'action de G sur l'une ou l'autre des branches est fidèle, il n'y a pas *a priori* de déformation verselle pour le couple (R, G), mais seulement une bonne théorie des déformations dans le sens de Wahl [Wa]. Le cas où une déformation verselle existe, c'est-à-dire si l'action est fidèle sur les deux branches, fera l'objet d'un traitement à part (§1.3).

1.1. Automorphismes.

On commence par rappeler quelques propriétés des k-automorphismes de R, ou A-automorphismes de $R_{A,a}$. Il est commode pour cela d'utiliser des systèmes de coordonnées formelles. Comme indiqué A est un anneau local complet d'idéal maximal $\mathcal{M}_A$ et de corps résiduel k.

Rappelons (*cf.* Jarvis [Ja] Definition 5.1.1, Wewers [We2]) qu'on appelle système de coordonnées (formelles) pour R_A un couple $(\xi, \nu) \in R_A^2$ avec $\xi\nu \in \mathcal{M}_A$, tel que le morphisme

$$\frac{A[[S,T]]}{(ST-b)} \longrightarrow R_A,\ S \mapsto \xi,\ T \mapsto \nu,\ (b \in \mathcal{M}_A) \tag{1.1}$$

est un isomorphisme. Noter que $\xi\nu = b \in \mathcal{M}_A$. Il est connu (loc. cit.) que $\xi \in R_A x$ et $\nu \in R_A y$ ou vice-versa $\xi \in R_A y$, $\nu \in R_A x$; sous la première de ces conditions on a

$$\xi = ux,\ \nu = vy,\ uv = \gamma,\ b = \gamma a \quad (u, v \in R_A^*,\ \gamma \in A^*). \tag{1.2}$$

En particulier les idéaux $R_A\xi$ et $R_A\nu$ sont indépendants (à permutation près) du système de coordonnées (ξ, ν) (on appelle ces idéaux les branches du point double); il en est de même pour l'idéal Aa de A, l'épaisseur du point double. En sens inverse un triplet (u, v, γ) satisfaisant à (1.2) donne lieu à un sytème de coordonnées. On peut vérifier qu'un triplet $(u, v, \gamma = uv)$, avec $\gamma \in \mathcal{M}_A$, tel que $\mathcal{M}_{R_A} = (u, v, \gamma)$ est l'idéal maximal de R_A est un système de coordonnées ([We2], Prop 2.1). Si x, y avec $xy = a$ est un système de coordonnées de $R_{A,a}$, alors tout élément $\varphi \in R_A$ a un (x, y)-développement unique

$$\varphi = \varphi_0 + xP(x) + yQ(y),\ \ (P \in A[[x]], Q \in A[[y]], \varphi_0 \in A).$$

La situation qui nous intéresse principalement est la suivante : soit $C \to S = \mathrm{Spec}(A)$ une courbe semi-stable, A étant supposé local d'idéal maximal $\mathcal{M}$, et soit $q \in C$ un point double de la fibre au-dessus de $s = \mathcal{M}$; alors l'anneau local complété $\widehat{\mathcal{O}}_{C,q}$ possède des systèmes de coordonnées locales. Par le théorème d'algébrisation de M. Artin de tels systèmes existent dans des voisinages étales de q et s (voir [We2]).

Si l'épaisseur Aa est non nulle, seules les branches épointées sont visibles dans R_A (La notation $R_{A,a}$ serait meilleure!). La restriction à la x-branche privée de l'origine correspond au morphisme de spécialisation(2)

$$A[[x, y]]/(xy - a) \longrightarrow A[[x]][\frac{1}{x}] = A((x)),\ x \mapsto x,\ y \mapsto \frac{a}{x}.$$

L'utilisation des systèmes de coordonnées permet de décrire de manière souple les A-automorphismes de R_A. On se limite aux automorphismes ne permutant pas les branches. Si σ est un tel automorphisme, il est clair qu'il est complètement déterminé par le système de coordonnées $\xi = \sigma(x)$, $\nu = \sigma(y)$, dont on notera qu'il satisfait à $\xi\nu = a$. Il y a une correspondance bijective entre les A-automorphismes ne permutant pas les branches et les couples $(u \in R_A^*, \gamma \in A^*)$, avec

$$\xi = ux,\ \nu = \gamma u^{-1} y, \quad (\gamma - 1)a = 0. \tag{1.3}$$

LEMME 1.1. — *Le couple (u, γ) est déterminé de manière unique par σ.*

Preuve. — Supposons avoir un autre couple (v, δ) satisfaisant à (1.3). Alors

$$u^{-1}vx = x, \quad \gamma\delta^{-1}u^{-1}vy = y. \tag{1.4}$$

L'unité $\omega = u^{-1}v$ étant décomposée sous la forme (unique) $\omega = \omega_0 + x\alpha(x) + y\beta(y)$, la première égalité de (1.4) conduit immédiatement à

$$a\beta(y) = 0,\ \ \omega_0 x + x^2\alpha(x) = x.$$

(2) Si A est local complet on doit remplacer $A((x))$ par $A[[x]]\{x\}$ dont les éléments sont les séries $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ avec $\lim_{n\to\infty} a_{-n} = 0$.

Donc $\omega_0 = 1$ et $\alpha(x) = 0$. La seconde égalité de (1.4) donne de la même manière $\beta(y) = 0$ et finalement on a $u = v$ et $\gamma = \delta$. □

Tout automorphisme de R_A qui respecte les branches définit par restriction un automorphisme de chacune des branches épointées, *i.e.* privées de l'origine. Par exemple l'automorphisme

$$\sigma(x) = ux,\ \sigma(y) = \gamma u^{-1} y$$

agit sur la x-branche épointée par $x \mapsto \tilde{u}x$, en notant $\tilde{u}$ la spécialisation en x de u; si le (x, y) développement de u est $u = u_0 + x\alpha(x) + y\beta(y)$, alors $\tilde{u}(x) = u_0 + x\alpha(x) + \frac{a}{x}\beta(\frac{a}{x})$. Si le groupe G agit sur R_A en respectant les branches, il est ainsi possible de parler de l'action induite sur les branches épointées.

Soit $A' \to A$ une surjection entre anneaux locaux artiniens. La réduction de A' à A de l'automorphisme σ de $R_{A'}$ donné par le couple (u, γ), est celui décrit par le couple réduit $(\bar{u}, \bar{\gamma})$. En sens inverse, relever un automorphisme de R_A donné par le couple $(\bar{u}, \bar{\gamma})$ revient à relever $\bar{u}$ en u et $\bar{\gamma}$ en γ, mais bien que le relèvement de $\bar{u}$ soit inconditionnel, celui de $\bar{\gamma}$ doit satisfaire à la contrainte (1.3), donc si $R_{A'} = A'[[x, y]]/(xy - a')$ à

$$\gamma a' = a'. \tag{1.5}$$

Cette contrainte donnera naissance a une obstruction (primaire) dans le cas du relèvement de l'action d'un groupe. On notera que si $A = k$ il n'y a pas d'obstruction à relever un automorphisme stable ($\gamma = 1$) à $R_{A'}$, contrairement à la situation générale.

Avec les mêmes notations, et se concentrant maintenant sur la cas $A = A'/tA'$ avec $t\mathcal{M}_{A'} = 0$ (petit épaississement), on souhaite d'abord décrire le groupe $U_{A'/A}$ des automorphismes infinitésimaux de $R_{A'}$. Ce sont les automorphismes qui, par réduction à A donnent l'identité, en particulier ces automorphismes ne permutent pas les branches. On notera dans la suite $\Theta = \mathrm{Hom}(\Omega_{R/k}, R)$ le R-module des champs de vecteurs (continus) sur $\mathrm{Spf}(R)$; on notera de manière analogue Θ_x (resp. Θ_y) le module des champs de vecteurs sur la x-branche $k[[x]]$ (resp. la y-branche $k[[y]]$). Le résultat suivant est élémentaire :

Proposition 1.2.

(1) $\Theta = x\Theta_x \oplus y\Theta_y$.

(2) $U_{A'/A} \cong \Theta$*; de manière précise tout automorphisme infinitésimal* $\sigma \in U_{A'/A}$ *a une expression unique* $\sigma = e^{t\partial}$ ($e^{t\partial} = 1 + t\partial$) *pour un champ de vecteurs* $\partial = xA(x)\partial_x + yC(y)\partial_y \in \Theta$, *avec un zéro à l'origine des branches.*

Preuve.

1) Un champ de vecteur sur le point double est clairement de la forme

$$\partial = f\partial_x + h\partial_y \quad f, h \in R$$

les coefficients f et h étant soumis à satisfaire l'équation $\partial(xdy + ydx) = 0$, soit $xh + yf = 0$. Il en découle la forme indiquée $f = xA(x)$ et $h = yC(y)$. Donc un champ de vecteur sur le point double revient à se donner un champ de vecteur sur chaque branche avec un zéro à l'orgine.

2) Du fait de la description des automorphismes, un élément de $U_{A'/A}$ est décrit par un couple (u, γ). Le surlignage d'une lettre désignant la réduction modulo t, on a alors $\bar{u} = 1$ et $\bar{\gamma} = 1$. Donc $\gamma = 1 + t\gamma_0$ $(\gamma_0 \in k)$ et $u = 1 + t(u_0 + x\alpha(x) + y\beta(y))$, ce qui donne

$$\sigma(x) = ux = x + t(u_0 x + x^2\alpha(x)), \ \sigma(y) = y + t((\gamma_0 - u_0)y - y^2\beta(y))$$

donc finalement $\sigma = e^{t\partial}$ avec

$$\partial = (u_0 x + x^2\alpha(x))\partial_x + ((\gamma_0 - u_0)y - y^2\beta(y))\partial y$$

comme indiqué. □

Remarque 1.3. — Supposons $a = 0$; il n'est pas difficile de voir en utilisant la description générale des automorphismes, qu'un automorphisme de $R_{A,a}$ qui respecte les branches est de la forme :

$$\sigma(x) = xA(x), \quad \sigma(y) = yC(y) \tag{1.6}$$

donc est un automorphisme qui agit sur chacune des deux branches en fixant l'origine. Il est de la sorte défini par un couple d'automorphismes $x \mapsto xA(x)$, $y \mapsto yC(y)$ indépendants l'un de l'autre. En effet un tel automorphisme est donné par un couple (u, γ), avec $u = \zeta + x\alpha(x) + y\beta(y)$, $(\zeta \in A^*)$. Alors

$$\sigma(x) = ux = \zeta x + x^2\alpha(x) = xA(x), \ \sigma(y) = \frac{\gamma y}{\zeta + y\beta(y)} = yC(y). \tag{1.7}$$

On suppose dorénavant que G est un groupe fini agissant sur R sans permuter les branches. Si $\sigma \in G$, on a donc deux séries formelles $f_\sigma(x) = a_1(\sigma)x + \dots$ et $h_\sigma(y) = b_1(\sigma)y + \dots$ telle que

$$\sigma(x) = f_\sigma(x), \, \sigma(y) = h_\sigma(y). \tag{1.8}$$

On voit que $\sigma \mapsto a_1(\sigma)$ et $\sigma \mapsto b_1(\sigma)$ sont des caractères multiplicatifs de G à valeurs dans k^* (triviaux si G est un p-groupe et que la caractéristique de k est $p > 0$). On s'intéresse aux relèvements de l'action de G

à R_A, plus particulièrement aux obstructions à prolonger un tel relèvement. Revenons à la situation d'un petit épaississement $A' \to A = A'/tA'$. On suppose que l'action de G admet un relèvement à A. Pour relever σ en $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}_{A'}(R_{A'})$, on releve u en $\tilde{u} \in R^*_{A'}$ et γ en $\tilde{\gamma} \in A'^*$, le relèvement $\tilde{\gamma}$ devant vérifier la contrainte 1.5 dans $R_{A'}$

$$(\tilde{\gamma} - 1)a' = 0.$$

Du fait que pour un relèvement arbitraire l'égalité (1.8) est vraie modulo (t), l'expression $(\tilde{\gamma} - 1)a'$ est dans $tA' = k$. Notons $c(\sigma)$ cette expression. Il est clair que $c(\sigma)$ ne dépend pas des relèvements choisis (en particulier de a'), mais que de σ et du petit épaississement $A' \to A$, justifiant la notation. On notera que par définition $c(\sigma) = 0$ si et seulement si σ se relève à A', *i.e.* en un automorphisme de $R_{A'}$. Pour une action du groupe G, on a l'interprétation globale suivante :

Proposition 1.4. — *Sous les conditions précédentes :*

1) *Il y a une classe (obstruction primaire) $c^1 \in H^1(G, k)$ qui mesure l'obstruction à relever individuellement les éléments de G de A à A', donc qui est nulle si et seulement si tout élément de G se relève à une quelconque algèbre $R_{A'}$ qui déforme R_A à A' (le groupe de cohomologie est calculé relativement à l'action de G sur k au moyen du caractère $\sigma \mapsto a_1(\sigma)b_1(\sigma)$).*

2) *Si $c^1 = 0$, et si $R_{A'}$ est une déformation donnée de R_A à A' dépaisseur a', alors il y a une classe $c^2 \in H^2(G, \Theta)$, ou $c^2(a')$ (obstruction secondaire) qui est telle que $c^2 = 0$ si et seulement si l'action de G se relève de R_A à $R_{A'}$.*

Preuve.

1) Supposons $\sigma \in G$ donné par le couple $(u_\sigma, \gamma_\sigma)$ comme précisé ci-dessus. L'obstruction à relever à $R_{A'}$ chaque σ, de manière individuelle, est un scalaire $c(\sigma) \in k$. Vérifions que $\sigma \mapsto c(\sigma)$ definit un 1-cocycle.

Si $\sigma, \tau \in G$ et si $\sigma(x) = u_\sigma x$, $\sigma(y) = \gamma_\sigma u_\sigma^{-1} y$, $\tau(x) = u_\tau x$, $\tau(y) = \gamma_\tau u_\tau^{-1} y$ alors $\tau\sigma(x) = (u_\sigma \circ \tau)u_\tau x$, $\tau\sigma(y) = \gamma_\tau\gamma_\sigma(u_\sigma \circ \tau)^{-1}u_\tau^{-1} y$.

On a donc $u_{\tau\sigma} = (u_\sigma \circ \tau)u_\tau$, $\gamma_{\tau\sigma} = \gamma_\tau\gamma_\sigma$. On peut ainsi supposer que $\tilde{\gamma}_{\tau\sigma} = \tilde{\gamma}_\sigma\tilde{\gamma}_\tau \bmod tA'$. L'égalité suivante

$$\tilde{\gamma}_{\tau\sigma}a' - a' = \tilde{\gamma}_\tau\tilde{\gamma}_\sigma a' - a' = \tilde{\gamma}_\tau(\tilde{\gamma}_\sigma a' - a') + \tilde{\gamma}_\tau a' - a'$$

donne le résultat si on tient compte du fait que l'image de γ_σ dans le corps résiduel k est le produit $a_1(\sigma)b_1(\sigma)$.

2) Supposons avoir $c^1 = 0$. Alors pour tout $\sigma \in G$ il existe un relèvement $\tilde{\sigma}$ à $R_{A'}$, et deux relèvements diffèrent par un automorphisme infinitésimal. La condition de relèvement de l'action par la collection des $\tilde{\sigma}$ s'énonce alors par $\widetilde{\tau\sigma} = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}$. Si on définit $c_{\tau\sigma} \in U_{A'/A} \cong \Theta$ (prop. 1.2) par

$$\widetilde{\tau\sigma} = c_{\tau\sigma}\tilde{\tau}\tilde{\sigma} \tag{1.9}$$

alors $(c_{\tau\sigma})$ est visiblement un 2-cocycle, soit

$$c_{\tau\sigma} = \tau c_\sigma + c_\tau.$$

La classe induite par ce cocycle est la définition de $c^2 \in H^2(G, \Theta)$. Cette classe est l'obstruction (secondaire) à l'organisation des choix des $\tilde{\sigma}$ pour obtenir un relèvement de l'action à $R_{A'}$, une déformation donnée de R_A à A'. On notera que la classe c^2 à la différence de c^1 dépend de la déformation $R_{A'}$, *i.e.* de l'épaisseur, et pas seulement de $A' \to A$. □

Remarque 1.5. — Supposons $A = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ et $R_{t\varepsilon} = A[[x, y]]/(xy - t\varepsilon)$. On sait que l'espace tangent au foncteur des déformations de R (du point double) est $k = \mathrm{Ext}^1_R(\Omega, R)$, l'identification étant $t \mapsto [R_{t\varepsilon}]$. Il a été rappelé (§0) que le groupe $\mathrm{Aut}_k(R)$ agit naturellement sur cet espace vectoriel, plus généralement sur le foncteur des déformations de R. Si $\pi : R_A \to R$ représente une déformation à A, l'action est donnée par $\sigma[R_A, \pi] = [R_A, \sigma\pi]$ $(\sigma \in \mathrm{Aut}_k(R))$. L'action sur l'espace tangent se réduit à observer que si σ est un tel automorphisme, donné par le couple (u, γ), et si $(\tilde{u}, \tilde{\gamma})$ est un relèvement de ce couple, alors l'image de σ dans $\mathrm{GL}(1) = k^*$ est exactement l'image de $\tilde{\gamma}$ modulo ε, c'est-à-dire γ. Donc σ se relève en un automorphisme de R_ε si et seulement si l'image de σ dans $\mathrm{Aut}_k(M_A/M_A^2)$ est de déterminant 1; c'est la condition de stabilité de l'action (*cf.* [Ek], [BR]).

Il est parfois plus simple d'expliciter c^1 de la manière suivante (voir [BM2] pour les détails). Supposons l'action de G sur $R_{A,a}$ mise sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= xA_\sigma(x) + B_\sigma(y),\\ \sigma(y) &= yC_\sigma(y) + D_\sigma(x) \quad (B_\sigma(y), D_\sigma(x) \equiv 0 \pmod{a}). \end{aligned}$$

Soient $\tilde{A}_\sigma(x) = \sum_{i\geqslant 0} a_{\sigma,i}x^i, \dots, \tilde{D}_\sigma(x) = \sum_{i\geqslant 0} d_{\sigma,i}x^i$ des relèvements à A' de $A_\sigma(x), \dots, D_\sigma(x)$. Alors la classe c^1 est représentée par

$$\sigma \mapsto \gamma_\sigma = a'\Big(\sum_{i\geqslant 0} a_{\sigma,i}c_{\sigma,i}{a'}^i\Big) + \sum_{j\geqslant 0} b_{\sigma,j}d_{\sigma,j}{a'}^j - a' \pmod{tA'}.$$

1.2. Obstructions locales.

On conserve les hypothèses des sous-sections précédentes, en supposant de plus que G est un p-groupe qui agit sur $R = k[[x,y]]/(xy)$ en fixant les branches. Avec les notations précédentes, on a $a_1(\sigma) = b_1(\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in G$. Les groupes de cohomologie $H^i(G,k)$ sont donc calculés relativement à l'action triviale de G sur k. On souhaite analyser les obstructions au relèvement infinitésimal de l'action de G. C'est la situation essentielle après l'étude des déformations équivariantes des points lisses [BM]. Une différence importante est que contrairement au cas lisse R n'est plus rigide. Rappelons que d'un point de vue général, les obstructions à relever l'action de G de A à A', c'est-à-dire de $R_{A,a}$ à $R_{A',a'}$ si on souhaite précise l'épaisseur, pour un petit épaississement $A' \to A$, sont dans le groupe $\mathrm{Ext}^2_{R,G}(\Omega,R)$. Or ce groupe se dévisse, via la suite exacte des termes de bas degrés d'une suite spectrale qui calcule les Ext équivariants ([3]) en

$$\mathrm{Ext}^1_R(\Omega,R)^G \xrightarrow{\sharp} H^2(G,\Theta) \xrightarrow{\flat} \mathrm{Ext}^2_{R,G}(\Omega,R) \xrightarrow{\natural} H^1(G,\mathrm{Ext}^1_R(\Omega,R)). \tag{1.10}$$

Comme $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega,R) \cong k$, l'action de G sur ce terme étant triviale (*cf.* remarque 1.5), alors le premier terme de la suite (1.11) est k, et le dernier terme est $\mathrm{Hom}(G,k)$. Noter que la suite (1.10) prolonge la suite

$$0 \to H^1(G,\Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{R,G}(\Omega,R) \to \mathrm{Ext}^1_R(\Omega,R)^G. \tag{1.11}$$

Le lemme suivant est une simple reformulation de la description initiale des classes c^1 et c^2 et conduit à une analyse précise des obstructions locales. Il y a deux niveaux de formation de classes d'obstruction : l'obstruction à relever le couple (R_A,G) à A', c'est à dire à un quelconque relèvement $R_{A'}$, qui est un élément de $\mathrm{Ext}^2_{R,G}(\Omega,R)$ [BM2], et l'obstruction à déformer l'action de G à un relèvement donné $R_{A'}$, ou $R_{A',a'}$ si on veut préciser l'épaisseur. Cette dernière obstruction doit être vue comme un couple formé de l'obstruction primaire, indépendante de l'épaisseur a', et si celle-ci est nulle, de l'obstruction secondaire (Proposition 1.4). Pour la première obstruction, obstruction au relèvement à A', qui réside dans $\mathrm{Ext}^2_{R,G}(\Omega,R)$, le lien avec les deux classes c^1 et c^2 est comme suit :

Lemme 1.6. — *Si $\varphi \in \mathrm{Ext}^2_{R,G}(\Omega,R)$ est la classe d'obstruction au problème de relèvement de A à A', on a $\natural(\varphi) = c^1$, et si $c^1 = 0$,*

([3]) $E_2^{p,q} = H^p(G,\mathrm{Ext}^q_R(\Omega,R)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{R,G}(\Omega,R)$.

alors $\varphi = \flat(c^2)$, *où* $c^2 \in H^2(G,\Theta)$ *est une quelconque classe d'obstruction secondaire (1.9).*

Preuve. — Le premier point est clair car $\natural(\varphi)$ mesure l'obstruction à relever individuellement les éléments de G, obstruction indépendante de a' (Prop. 1.4). Soit une déformation $R_{A'} = A'[[x,y]]/(xy-a')$ de R_A à A' pour un petit épaississement $A' \to A$. Si la classe c^1 est nulle alors, par la suite exacte (1.10), on a $\varphi = \flat(c^2)$ avec $c^2 \in H^2(G,\Theta)$ la classe d'obstruction secondaire au relèvement de l'action à $R_{A',a'}$. Cette classe est celle décrite dans la proposition 1.4, e.g (1.9).

Pour conclure, notons la relation qui précise la dépendance de $c^2 = c^2(a')$ en a', mieux en la classe de déformation $[R_{A',a'}]$:

$$c^2(a'+\zeta) = c^2(a') + \sharp(\zeta) \ (\zeta \in k = \mathrm{Ext}^1_R(\Omega,R)) \tag{1.12}$$

la notation $a'+\zeta$ de 1.12 faisant référence à l'action transitive naturelle du groupe $k = \mathrm{Ext}^1_R(\Omega,R)$ sur l'ensemble des déformations de R_A à A' [BM2]. Rappelons que cette action est un fait général qui découle du seul fait que la théorie des déformations d'un point double est bonne, en fait verselle. On voit bien dès lors que $\varphi = \flat(c^2) = 0$ équivaut à $c^2 \in \mathrm{Im}\,\sharp$ car sous cette condition, on peut modifier a' de sorte que l'action de G se relève à $R_{A',a'}$. □

Supposons l'obstruction primaire c^1 nulle. Comme on a un isomorphisme de G-modules $\Theta = x\Theta_x \oplus y\Theta_y$, la classe c^2 est représentée par un couple

$$c^2 = (c^2_x, c^2_y)\,, \quad c^2_x \in H^2(G, x\Theta_x)\,,\, c^2_y \in H^2(G, y\Theta_y).$$

Soit la suite exacte de G-modules, k désignant le G-module trivial

$$0 \to x\Theta_x \to \Theta_x \xrightarrow{\mathrm{ev}} k \to 0$$

avec $\mathrm{ev}(f(x)\partial_x) = f(0)$, et une suite exacte analogue sur la y-branche. On peut relier les classes c^2_x et c^2_y à des classes d'obstructions au problème de relèvement au niveau des branches, situation étudiée en détail dans [BM]. Le lemme immédiat suivant montre que le groupe des obstructions pour le point double est très proche de la somme directe des groupes correspondants pour les deux branches pointées. Rappelons que G_x (resp. G_y) est l'image de G dans le groupe des automorphismes de la x-branche (resp. y-branche). Il s'agit d'interpréter l'image d'une classe d'obstruction par l'application composée

$$H^2(G,\Theta) \to H^2(G_x,\Theta_x) \oplus H^2(G_y,\Theta_y).$$

Lemme 1.7. — *Supposons $R_{A'} = A'[[x,y]]/(xy - a')$ et que la classe d'obstruction primaire pour le relèvement de A à A' est nulle (i.e. $c^1 = 0$). Alors l'image de c^2_x dans $H^2(G,\Theta_x)$ est la classe d'obstruction pour relever l'action induite sur la x-branche de $R_A/(y) = A/(a)[[x]]$ à $R_{A'}/(y) = A'/(a')[[x]]$; interprétation identique pour c^2_y.*

Preuve. — Soit pour tout $\sigma \in G$, $\tilde\sigma$ un relèvement à $R_{A',a'}$. La classe d'obstruction est représentée par le 2-cocycle $(c_{\sigma,\tau})$, où $\widetilde{\sigma\tau} = c_{\sigma,\tau}\tilde\sigma\tilde\tau$ (1.9). Si on divise par (a), resp.(a'), les automorphismes induits agissent ainsi sur les branches (§1.1). La projection sur chacune des deux branches de l'égalité définissant le cocycle d'obstruction donne le résultat. $\square$

On voit ainsi que, dans le cas considéré ci-dessus, la classe $c^2 = (c^2_x, c^2_y)$ induit les obstructions à relever l'action sur chaque branche. Toutefois, même si ces dernières sont nulles, cela n'assure pas que $c^2 = 0$. Notons en effet la suite exacte pour l'une ou l'autre des deux branches

$$(1.13)\quad 0 \to (x\Theta_x)^G \to \Theta_x^G \xrightarrow{j} k \to H^1(G, x\Theta_x) \xrightarrow{\imath} H^1(G,\Theta_x)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{ev}^1_x} H^1(G,k) \xrightarrow{\delta_x} H^2(G,x\Theta_x) \xrightarrow{\kappa} H^2(G,\Theta_x) \xrightarrow{\mathrm{ev}^2_x} H^2(G,k).$$

Donc, sous les hypothèses indiquées ($\kappa(c^2_x) = 0$) on a simplement la condition $c^2_x \in \operatorname{Im}\delta_x$. Pour aller plus loin, il faut être en mesure de préciser les images respectives de δ_x et ev^1. On travaille pour fixer les idées avec la x-branche, et plus important, avec G cyclique. C'est en effet le seul cas pour lequel on a des d'informations assez précises sur le foncteur des déformations équivariantes d'un point lisse, et son anneau versel [BM], voir cependant [CK] pour d'autres cas.

On notera cependant que la preuve du lemme ci-dessous donne un résultat général. Il devient beaucoup plus explicite si G est cyclique du fait de ([BM], Prop 4.1.1). On notera β_x l'exposant de la différente relative à l'action de l'image G_x de G dans $\mathrm{Aut}_k(k[[x]])$. Si $\{G_j\}_{j\geqslant 0}$ sont les groupes de ramification supérieurs, on sait que [Se]

$$\beta_x = \sum_{j\geqslant 0}(|G_j| - 1).$$

Le lemme suivant est important pour la suite, il permet lorsque G est cyclique d'obtenir des énoncés explicites, inaccessibles pour le moment pour un groupe d'inertie général.

Lemme 1.8. — *Supposons G cyclique d'ordre p^n.*

i) *L'application ev^1_x est surjective (non nulle) si et seulement si soit l'action de G est fidèle sur la branche ($G = G_x$) et l'exposant du conducteur*

β_x satisfait à $2\beta_x + 1 \not\equiv 0 \pmod{p^n}$, soit l'action de G est non fidèle ($G_x \neq G$).

ii) *L'application κ est injective (i.e. $\delta_x = 0$) exactement sous les mêmes conditions donc si et seulement si l'action de G est fidèle et $2\beta_x + 1 \not\equiv 0 \pmod{p^n}$, ou bien $G_x \neq G$.*

Preuve.

1) Supposons d'abord que l'action de G sur la x-branche n'est pas fidèle, *i.e.* $G_x \neq G$. Le morphisme trace $\mathrm{Tr} : \Theta_x \to \Theta_x$ est alors nul et comme $H^1(G, \Theta_x) = \ker \mathrm{Tr} / \mathrm{Im}(\sigma - 1)$ (pour un générateur σ de G) on a immédiatement la surjectivité de ev^1.

On peut donc supposer que l'action de G sur la x-branche est fidèle ($G = G_x$). Le calcul qui pour une action fidèle sur $k[[x]]$ conduit (*cf.* [BM] Proposition 4.1.1) à $\dim H^1(G, \Theta_x) = \left\lfloor \frac{2\beta_x}{p^n} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\beta_x}{p^n} \right\rceil$ donne par un calcul identique

$$\dim H^1(G, x\Theta_x) = \left\lfloor \frac{2\beta_x + 1}{p^n} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\beta_x + 1}{p^n} \right\rceil. \tag{1.14}$$

Du fait que $H^1(G, k) = k$ (car G est cyclique), l'image de $\imath$ est de codimension au plus 1 dans $H^1(G, x\Theta_x)$. On note ensuite que $\dim H^1(G, x\Theta_x) = \dim H^1(G, \Theta_x) + 1$ seulement si $p^n | 2\beta + 1$. Dans ce cas, l'application $\imath$ est forcément surjective et ev^1 est nulle.

Supposons maintenant que $p^n \nmid 2\beta + 1$. Supposons de plus, dans un premier temps, que $p^n | \beta$. On a alors $\dim H^1(G, x\Theta_x) = \dim H^1(G, \Theta_x) - 1$ et donc $\imath$ est nécessairement injective et non surjective, ce qui impose que ev^1 est non nulle.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $p \nmid 2\beta_x + 1$ et $p^n \nmid \beta_x$. On a alors $\dim H^1(G, x\Theta_x) = \dim H^1(G, \Theta_x)$. Pour conclure, et si $z = \mathrm{Nm}(x)$, un calcul élémentaire donne

$$\Theta_x^G = k[[x]] \cap \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1} k[[z]].$$

De sorte que j n'est surjective (*i.e.* $j \neq 0$) que si $\beta_x = v(\frac{dz}{dx}) \equiv 0 \bmod p^n$. Sous nos hypothèses, cela implique que j est nulle et donc l'image de $\imath$ est de codimension 1, donnant encore $\mathrm{ev}^1 \neq 0$.

2) Découle de 1) car κ n'est injective que si ev^1 est une surjection. □

Remarque 1.9. — Si $p = 2$ et $G = \mathbb{Z}/\not{4}\mathbb{Z}$ alors l'application κ est injective dans tous les cas. Cela montre, compte tenu du fait que dans cette situation le groupe des obstructions à la déformation équivariante d'un point lisse est trivial, que le groupe des obstructions est au plus de dimension un et se réduit aux seules obstructions primaires. On verra qu'il est en fait nul dans des cas importants (à savoir lorsque l'action est fidèle sur les deux branches).

On notera m_x (resp. m_y) le conducteur de Hasse relatif au groupe d'inertie G_x (resp. G_y) [Se]. Pour un groupe cyclique d'ordre p, si $m_y = 1$ le conducteur pathologique pour la x-branche est $m = m_x = \frac{p-1}{2}$. Si G est cyclique d'ordre p^n, et si $m_x = m_y = 1$, la formule donnant l'exposant de la différente en fonction des ordres des groupes de ramification supérieurs, jointe au théorème de Hasse-Arf, montre que l'une des deux congruences du lemme 1.8 exige en fait $p = 3$.

Regardons maintenant le premier niveau où les obstructions au relèvement de l'action de G propres au point double sont susceptibles d'apparaître, qui est le relèvement à l'ordre un

$$R_\varepsilon = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)[[x,y]]/(xy-\varepsilon).$$

Rappelons que l'action de G sur $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega, R) = k$ est triviale. De la sorte l'obstruction primaire est nulle, et l'obstruction au relèvement est alors réduite à l'obstruction secondaire c^2. Nous allons expliciter cette classe. Le calcul qui suit donne un résultat plus général. On suppose que l'action de G est relevée à $A[[x,y]]/(xy)$, et on examine la possibilité de l'étendre à $A'[[x,y]]/(xy-\varepsilon)$ pour un épaississement infinitésimal $A' \to A = A'/(\varepsilon)$, $\varepsilon\mathcal{M}_{A'} = 0$. Notons que sous ces conditions $c^1 = 0$.

Pour tout $\sigma \in G$, supposons que l'action de G sur $A[[x,y]]/(xy)$ est

$$\sigma(x) = f_\sigma(x) = x\sum_{i\geqslant 0} u_{\sigma,i}x^i\ ,\ \sigma(y) = g_\sigma(y) = y\sum_{i\geqslant 0} v_{\sigma,i}y^i. \tag{1.15}$$

avec $u_{\sigma,0} = v_{\sigma,0} = 1 \bmod \mathcal{M}_A$ (rappelons que G est un p-groupe, et que d'autre part on sait que l'action est de cette forme (remarque 1.3)).

LEMME 1.10. — *Posons $\zeta_x(\sigma) = u_{\sigma,1} \bmod \mathcal{M}_A$ et $\zeta_y(\sigma) = v_{\sigma,1} \bmod \mathcal{M}_A$, de sorte que $\zeta_x, \zeta_y \in H^1(G,k)$ sont des éléments de* $\mathrm{Hom}(G,k)$. *Si $c^2 = (c^2_x, c^2_y)$ est la classe d'obstruction secondaire relative au relèvement de l'action de G à $R_{A',\varepsilon}$, alors cette classe est donnée par*

$$c^2_x = \delta_x(\zeta_y),\ c^2_y = \delta_y(\zeta_x).$$

Preuve. — Comme l'obstruction primaire est nulle (par hypothèse) la seule obstruction à considérée est l'obstruction secondaire $c^2 \in H^2(G,\Theta)$.

Nous allons la rendre explicite. Pour cela on cherche un relèvement de σ sous la forme

$$\tilde{\sigma}(x) = f_\sigma(x) + \varepsilon S_\sigma(y),\ \tilde{\sigma}(y) = g_\sigma(y) + \varepsilon T_\sigma(x) \tag{1.16}$$

($S_\sigma \in k[[y]]$, $T_\sigma \in k[[x]]$). On peut justifier *a priori* un tel choix. Un calcul élémentaire exprimant la congruence $\tilde{\sigma}(xy-\varepsilon) \equiv 0 \pmod{xy-\varepsilon}$ conduit aux expressions

$$S_\sigma = \frac{y - g_\sigma}{y g_\sigma},\ T_\sigma = \frac{x - f_\sigma}{x f_\sigma}.$$

De la formule $\widetilde{\tau\sigma} = c_{\tau,\sigma}\tilde{\tau}\tilde{\sigma}$ définissant l'automorphisme infinitésimal $c_{\tau,\sigma}$, on tire après un calcul fastidieux mais facile [BM2], que $c_{\tau,\sigma}(x) = x + \varepsilon\phi_{\tau,\sigma}$ et $c_{\tau,\sigma}(y) = y + \varepsilon\psi_{\tau,\sigma}$ avec

$$\phi_{\tau,\sigma} = \frac{\zeta_y(\tau\sigma)}{f'_{\tau\sigma}}\frac{\partial}{\partial x} - \tau\Big(\frac{\zeta_y(\sigma)}{f'_\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\Big) - \frac{\zeta_y(\tau)}{f'_\tau}\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.17}$$

et de manière analogue

$$\psi_{\tau,\sigma} = \frac{\zeta_x(\tau\sigma)}{g'_{\tau\sigma}}\frac{\partial}{\partial y} - \tau\Big(\frac{\zeta_x(\sigma)}{g'_\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\Big) - \frac{\zeta_x(\tau)}{g'_\tau}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Il est clair que le 2-cocycle ϕ est un cobord dans Θ_x et que dans $x\Theta_x$ il est cohomologue à

$$(\tau,\sigma) \mapsto \zeta_y(\tau\sigma)\frac{\partial}{\partial x} - \tau\Big(\zeta_y(\sigma)\frac{\partial}{\partial x}\Big) - \zeta_y(\tau)\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.18}$$

qui est l'image $\delta(\zeta_y)$, même chose pour ψ, prouvant ainsi le résultat. En d'autre terme, $c_x^2 = d[\zeta_y]$ si on note encore par ζ_y la cochaîne $\sigma \mapsto \zeta_y(\sigma)\frac{d}{dx}$. □

Remarque 1.11. — On notera que le 2-cocycle $\phi_{\tau,\sigma}$ relatif à Θ_x fait intervenir les coefficients de l'action sur la y-branche. C'est un fait analogue à la condition de stabilité dans le cas modéré [BR].

On voit ainsi que le comportement à l'ordre un du foncteur local des déformations ne pose un problème que lorsque l'un des conducteurs est un.

THÉORÈME 1.12.

i) *Supposons que les conducteurs le long des branches sont* > 1, *alors l'action de* G *est relevable à* $R_\varepsilon = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)[[x,y]]/(xy-\varepsilon)$ *(i.e. est lissifiable à l'ordre un (i.e. faiblement lissifiable).*

ii) *Supposons* G *cyclique d'ordre* p^n, *et que l'un des deux conducteurs est égal à* 1 *(par exemple* m_y*). Alors l'action est faiblement lissifiable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(1) $G = G_x$, *et* $2\beta_x + 1 \not\equiv 0 \bmod p^n$

(2) $G_x \neq G$.

iii) *Si* $m_x = m_y = 1$, *l'action est faiblement lissifiable si et seulement si la condition ii) est vérifiée simultanément sur les deux branches.*

Plus généralement un critère identique vaut pour le relèvement eventuel de G *de* $A[[x,y]]/(xy)$ *à* $A'[[x,y]]/(xy-\varepsilon)$, $A = A'/(\varepsilon)$.

Preuve. — Sous les conditions de *i)*, il s'agit de prouver que $c^2 = 0$, ce qui est clair car du fait des expressions (1.15), et du lemme 1.10, les classes c_x^2 et c_y^2 sont nulles.

Dans le cas *ii)*, on voit que la condition de relevabilité équivaut à dire que l'image $\delta_x(\zeta_y)$ est nulle; mais cela équivaut à la surjectivité de ev_x^1. Le résultat provient alors du lemme 1.8. □

Notons H_x (resp. H_y) le noyau de $G \to G_x$ (resp. $G \to G_y$). La condition $H_x\,(\text{ ou } H_y) \neq 1$ est la situation pathologique dénoncée en introduction. Si les conditions de relèvement du théorème 1.12 sont réalisées, on peut se demander si l'action de H_x (resp. H_y) reste triviale sur la x-branche épointée de la déformation c'est à dire sur $(R_\varepsilon)_{(x)} \cong k[\varepsilon]((x))$. Le corollaire suivant énoncé avec $A = k$, est encore valable dans la situation $A'[[x,y]]/(xy-\varepsilon) \to A[[x,y]]/(xy)$, $A = A'/(\varepsilon)$.

Corollaire 1.13. — *Supposons l'action de* G *relevable à* R_ε *(lissifiable à l'ordre un). Alors il existe un relèvement de* G *à* R_ε *tel que l'action de* H_x *est triviale sur la* x*-branche épointée si et seulement si* $\zeta_y \in \mathrm{ev}_x^1\, H^1(G_x, \Theta_x)$, *c'est à dire si* ζ_y *est dans l'image du morphisme d'inflation.*

Si G_x *est cyclique et que* $\zeta_y \neq 0$ *(ce qui équivaut à* $m_y = 1$ *d'après le théorème ci-dessus), cette condition équivaut à* $G_x \neq \{1\}$ *et* $2\beta_x + 1 \not\equiv 0 \bmod |G_x|$.

Preuve. — On peut supposer $H_x \neq 1$, sinon il n'y a rien à démontrer. Notons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(G,\Theta_x) & \overset{\mathrm{ev}_x^1}{\to} & H^1(G,k) & \overset{\delta_x}{\to} & H^2(G, x\Theta_x) \\
\mathrm{inf}\uparrow & & =\uparrow & & \uparrow\mathrm{inf} \\
H^1(G_x,\Theta_x) & \overset{\mathrm{ev}_x^1}{\to} & H^1(G_x,k) & \overset{\delta_x}{\to} & H^2(G_x, x\Theta_x)
\end{array}$$

les flêches verticales étant les morphismes (injectifs) d'inflation [Se]. Dire que l'action se relève à R_ε signifie que $\delta_x(\zeta_y) = 0$, ou encore (voir suite exacte 1.13) que $\zeta_y = \mathrm{ev}_x^1(\omega)$ pour une certaine classe $\omega \in H^1(G, \Theta_x)$. Posons

$$\xi(\sigma) = \frac{\zeta_y(\sigma)}{f'_\sigma}\frac{\partial}{\partial x} - \omega(\sigma) \in x\Theta_x,$$

c'est une cochaîne à valeur dans $x\Theta_x$ telle que $d[\xi] = c_x^2$.

On peut donc corriger le relèvement 1.16 terme à terme, c'est à dire corriger un relèvement donné σ par l'automorphisme infinitésimal $e^{\varepsilon\xi(\sigma)}$. Plus explicitement si $\xi(\sigma) = a_\sigma \frac{\partial}{\partial x}$, cela conduit sur la x-branche épointée au relèvement de l'action de G par les automorphismes

$$\tilde{\sigma}(x) = f_\sigma(x) + \varepsilon(f'_\sigma a_\sigma(x) + S_\sigma(y)),\ y = \frac{\varepsilon}{x}. \tag{1.19}$$

Dire que pour un tel relèvement, on a $\tilde{\sigma} = id$ pour $\sigma \in H_x$ signifie que $\xi(\sigma) = \zeta_y(\sigma) = 0 = \omega(\sigma)$. On notera que sur la x-branche le terme $\varepsilon S_\sigma(y)$ a pour contribution $\varepsilon\zeta_y(\sigma)$. Cela prouve bien que ω est dans l'image de l'inflation, donc $\zeta_y \in \mathrm{ev}_x^1(H^1(G_x, \Theta_x))$.

Réciproquement si $\zeta_y \in \mathrm{ev}_x^1(H^1(G_x, \Theta_x))$, alors ω nécessairement provient de $H^1(G_x, \Theta_x)$ par le morphisme d'inflation. Cela signifie que $\omega(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma \in H_x$ et donc que $\xi(\sigma) = \zeta_y(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma \in H_x$. Dans le relèvement 1.16 de l'action de G, on voit que H_x agit trivialement sur la x-branche privée de l'origine. On a ainsi prouvé la première partie du corollaire.

Si on suppose de plus G cyclique, alors la conclusion provient du théorème 1.12. □

Posons la définition suivante :

Définition 1.14. — *Nous dirons que le point double est* strictement relevable le long de la x-branche *s'il existe un relèvement de l'action de G à $k[\varepsilon][[x, y]]/(xy - \varepsilon)$ tel que l'action induite de H_x sur la x-branche épointée $k[\varepsilon]((x))$ soit triviale.*

Nous dirons que le point double est strictement relevable *s'il existe un relèvement de l'action de G à $k[\varepsilon][[x, y]]/(xy - \varepsilon)$ tel que l'action induite de H_x sur la x-branche épointée $k[\varepsilon]((x))$ et l'action de H_y sur la y-branche épointée sont toutes deux triviales.*

Exemple 1.15. — Plaçons nous en caractéristique 2 et considérons l'action de $\mathbb{Z}/\nvDash\mathbb{Z}$ sur $R := k[[x, y]]/(xy)$ donnée par $\sigma(x) = \frac{x}{1+x}$ et $\sigma(y) = y$ (*i.e.* conducteur 1 sur la x-branche et action triviale sur la y-branche).

On peut relever l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à R_ε par $\tilde{\sigma}(x) = \frac{x}{1+x}$ et $\tilde{\sigma}(y) = y+\varepsilon$. en particulier, l'action sur la y-branche épointée $k[\varepsilon]((y))$ est non triviale (le corollaire 1.13 nous disant de plus que le point double n'est pas strictement relevable le long de la y-branche).

Avec les notations qui précèdent, si $\zeta_x = \zeta_y = 0$ (*i.e.* si les conducteurs le long des branches sont strictement plus grand que 1) alors l'action de G est strictement relevable. Si $\zeta_y = 0$ alors elle est relevable strictement le long de la x-branche.

La proposition suivante relie les deux notions de manière forte :

Proposition 1.17. — *On a équivalence entre les deux faits suivants :*

(1) *L'action de G est strictement relevable;*

(2) *L'action de G est strictement relevable le long de chaque branche.*

Preuve. — Une seule implication est non évidente. Supposons donc que l'action est relevable strictement le long des deux branches. Cela signifie que les deux classes d'obstructions $c_x^2 = \delta[\zeta_y]$ et $c_y^2 = \delta[\zeta_x]$ sont nulles et que $\zeta_y = \mathrm{ev}_x^1(\omega)$, $\zeta_x = \mathrm{ev}_y^1(\chi)$ pour deux cocycles induits respectivement de $H^1(G_x, \Theta_x)$ et $H^1(G_y, \Theta_y)$. Posons

$$\xi(\sigma) = \frac{\zeta_y(\sigma)}{f'_\sigma(x)}\frac{\partial}{\partial x} - \omega(\sigma), \quad \eta(\sigma) = \frac{\zeta_x(\sigma)}{g'_\sigma(y)}\frac{\partial}{\partial y} - \chi(\sigma)$$

de sorte que $d[\xi] = c_x^2$ et $d[\eta] = c_y^2$. On corrige alors le relèvement donné par (1.16) par les automorphismes infinitésimaux $\exp(\varepsilon(\xi(\sigma)+\eta(\sigma)))$ pour avoir un relèvement stricte. Plus explicitement, si $\xi(\sigma) = a_\sigma(x)\frac{\partial}{\partial x}$ et $\eta(\sigma) = b_\sigma(y)\frac{\partial}{\partial y}$ $(a_\sigma(0) = b_\sigma(0) = 0)$ cela conduit au relèvement

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}(x) = f_\sigma(x) + \epsilon(f'_\sigma(x)a_\sigma(x) + S_\sigma(y)) \\ \tilde{\sigma}(y) = g_\sigma(y) + \epsilon(g'_\sigma(y)b_\sigma(y) + T_\sigma(y)). \end{cases}$$

Les hypothèses donnent $a_\sigma(x) = 0$ si $\sigma \in H_x$ et $b_\sigma(y) = 0$ si $\sigma \in H_y$. On a donc un relèvement strict.

□

Remarque 1.18. — Lorsque l'action de G est fidèle sur chaque branche, les considérations précédentes donnent la dimension $\dim \mathrm{Ext}^1_{R,G}$ (Ω, R) de l'espace tangent au foncteur des déformations équivariantes. On précise le résultat de [BM2]. Soit la suite exacte

$$0 \to H^1(G,\Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{R,G}(\Omega,R) \to \mathrm{Ext}^1_R(\Omega,R)^G = k$$

qui donne $\dim_k \operatorname{Ext}^1_{R,G}(\Omega, R) = \dim_k H^1(G, \Theta) + \alpha$ avec $\alpha = 1$ si la lissification locale au premier ordre est possible et $\alpha = 0$ sinon (*cf.* théorème 1.12).

Par ailleurs $H^1(G, \Theta) = H^1(G, x\Theta_x) \oplus H^1(G, \Theta_y)$ donc par([BM], proposition 4.1.1) on trouve pour la dimension de l'espace tangent

(1.20)

$$\dim \operatorname{Ext}^1_{R,G}(\Omega, R) = \left\lfloor \frac{2\beta_x + 1}{p^n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\beta_y + 1}{p^n} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\beta_x + 1}{p^n} \right\rceil - \left\lceil \frac{\beta_y + 1}{p^n} \right\rceil + \alpha.$$

Il est possible d'expliciter une obstruction non triviale, en l'occurence c^1. Soit G d'ordre $p > 2$, et supposons $m_x = m_y = 1$. On peut relever l'action de G à R_ε (1.12). Par contre on ne peut relever l'action à $k[t]/(t^3)$ avec épaisseur (t). On va observer que l'obstruction c^1 pour le relèvement de $t \bmod t^2$ à $t \bmod t^3$ est non nulle. On sait que l'action de G sur $k[\varepsilon][[x, y]]/(xy - \varepsilon)$ est de la forme (1.19)

$$\tilde{\sigma}(x) = xU_\sigma(x) + \varepsilon\Big(S_\sigma(y) + xa_\sigma(x)\frac{\partial f_\sigma(x)}{\partial x}\Big)$$
$$\tilde{\sigma}(y) = yV_\sigma(y) + \varepsilon\Big(T_\sigma(x) + yb_\sigma(y)\frac{\partial g_\sigma(y)}{\partial y}\Big).$$

Un calcul immédiat utilisant la remarque 1.5 montre que la classe c^1 est donnée par $\sigma \mapsto 2u_{\sigma,1}v_{\sigma,1}t^2 \pmod{t^3}$ donc non nulle. Noter que dans cet exemple l'épaisseur est de valuation un, l'espace tangent de dimension trois.

1.3. Épaisseur nulle.

Dans cette section l'action de G est supposée fidèle sur les deux branches. Il y a une déformation verselle, soit $R_{G,ver}$ l'anneau correspondant, et t_{ver} l'épaisseur de cette déformation. L'élément $t_{\mathrm{ver}} \in \mathcal{M}_{R_{G,ver}}$ contient des informations importantes sur la déformation. La valuation de t_{ver} dans le gradué associé à R_{ver} est une d'entre elles. Dire que cette valuation est un est une propriété équivalente à la lissification à l'ordre un. Si la valuation est infinie, donc l'épaisseur nulle, la déformation est topologiquement triviale.

Rappelons que l'espace tangent à $D_{R,G}$ s'identifie à $\operatorname{Ext}^1_{R,G}(\Omega_R, R)$, et que par ailleurs les suites exactes (1.10) et (1.11) montrent qu'il est de dimension finie car encadré par deux espaces vectoriels de dimension finie, justifiant l'existence de la déformation verselle. Ces suites montrent aussi que l'écart entre $\mathrm{Ext}^i_{R,G}(\Omega_R, R)$ et $H^i(G,\Theta_R)$ $(i = 1,2)$ est contrôlé par $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega_R, R)^G = k$, et $H^1(G, \mathrm{Ext}^1_R(\Omega_R, R)) = \mathrm{Hom}(G, k)$. Si G est cyclique ce dernier terme est de dimension un.

Géométriquement cela revient à comparer le foncteur des déformations $\mathrm{Def}_{R,G}$ avec le foncteur des déformations $\mathrm{Def}^{\infty}_{R,G}$ classifiant les déformations d'épaisseur nulle (valuation infinie) *i.e.* $a = 0$. Pour interpréter ce foncteur il faut introduire le foncteur des déformations équivariantes d'un point lisse formel, avec origine marquée.

Soit $R_x = k[[x]]$ un point lisse formel avec action fidèle de G (situation de [BM]). On regarde ce germe de courbe comme marqué par l'origine. Soit alors le foncteur Def'_{R_x,G_x} qui classifie les déformations équivariantes de ce germe marqué, c'est à dire du couple $(R_x,\ R_x \to k = R_x/(x))$. Un objet de $\mathrm{Def}'_{R_x,G}(A)$ est une classe d'équivalence d'un couple formé d'une section $A[[x]] \to A$, $x \mapsto a \in \mathcal{M}_A$ et d'un relèvement de G à $A[[x]]$, ce relèvement fixant la section, *i.e.* $\sigma(x - a) = (x - a)$, $\forall\sigma \in G$. Il est immédiat de voir qu'on peut se limiter à $a = 0$, les automorphismes étant alors contraints à fixer le section $x = 0$.

La proposition suivante qui concerne un point lisse formel avec point marqué est une répétition d'arguments bien connus ([BM], §2), la preuve est omise([4]).

Proposition 1.19. — *L'espace tangent au foncteur* $\mathrm{Def}'_{R_x,G}(A)$ *s'identifie canoniquement à* $H^1(G, x\Theta_x)$*, et les obstructions au relèvement sont dans* $H^2(G, x\Theta_x)$*.*

Cela étant, il a été observé (remarque 1.3) que le foncteur $\mathrm{Def}^{\infty}_{R,G}$ est le produit cartésien

$$\mathrm{Def}^{\infty}_{R,G} = \mathrm{Def}'_{R_x,G} \times \mathrm{Def}'_{R_y,G}\,. \tag{1.21}$$

Si G est cyclique d'ordre p^n, il est possible de décrire plus en détail $R^{\infty}_{\mathrm{ver}}$. Soit le morphisme oubli de la section $\mathrm{Def}^{\infty}_{R,G} \to \mathrm{Def}_{R,G}$. Il lui correspond les applications $\imath : H^1(G, x\Theta_x) \to H^1(G,\Theta_x)$ et $\kappa : H^2(G, x\Theta_x) \to$

([4]) Les foncteurs $\mathrm{Def}_{R,G}$ et $\mathrm{Def}'_{R,G}$ sont substantiellement différents. Pour s'en convaincre, soit le cas G d'ordre p, et $m = 1$. On peut supposer que G est engendré par $\sigma : x \mapsto \frac{x}{1+x}$. Alors une déformation verselle sans origine marquée est $\sigma_a(x) = \frac{x+a}{1+x+a}$, et $R_{G,\mathrm{ver}} = W(k)[[a]]/(\psi(a))$ pour un certain polynôme $\psi(a)$ de degré $\frac{p-1}{2}$ (voir [BM]). Par contre si l'origine est marquée la déformation verselle est $\sigma_t(x) = \frac{x}{1+x+t}$, et $R'_{\mathrm{ver}} = W(k)[[t]]/(\varphi(t))$ avec $\varphi(t) = \frac{(1+t)^p-1}{t}$. Le morphisme induit par oubli du marquage $R_{G,\mathrm{ver}} \to R'_{G,\mathrm{ver}}$ est $a \mapsto \frac{t^2}{1+t}$.

$H^2(G,\Theta_x)$ (1.13). Le lemme 1.8 montre qu'il y a essentiellement trois cas (β_x est rappelons-le l'exposant de la différente sur la x-branche) :

(1) $p^n|2\beta_x+1$, alors $\dim H^i(G,x\Theta_x)=\dim H^i(G,\Theta_x)+1$ $(i=1,2)$ et $\star=\imath,\kappa$ est surjective.

(2) $p^n|\beta_x$, alors $\dim H^i(G,x\Theta_x)=\dim H^i(G,\Theta_x)-1$ $(i=1,2)$, et $\star$ est injective.

(3) Si $p^n\nmid\beta_x$ et $p^n\nmid 2\beta_x+1$, alors $\dim H^i(G,x\Theta_x)=\dim H^i(G,\Theta_x)$ $(i=1,2)$, l'application κ est bijective, et $\imath$ a un noyau de dimension un (image de codimension un).

De la suite (1.10) dérive le diagramme de foncteurs

$$\mathrm{Def}^{\infty}_{R,G}=\mathrm{Def}'_{R_x,G}\times\mathrm{Def}'_{R_y,G}\to\mathrm{Def}_{R,G}\to\mathrm{Def}_R$$

et entre les anneaux versels associés, les morphismes $(\Lambda=W(k)[\zeta_{|G|}])$:

$$\Lambda[[t]]\to R_{\mathrm{ver}}\to R^{\infty}_{\mathrm{ver}},\ t\mapsto t_{\mathrm{ver}},\ t_{\mathrm{ver}}\mapsto 0. \tag{1.22}$$

Lemme 1.20. — *Le morphisme $R_{\mathrm{ver}}\to R^{\infty}_{\mathrm{ver}}$ est surjectif, plus précisemment $R^{\infty}_{\mathrm{ver}}=R_{\mathrm{ver}}/(t_{\mathrm{ver}})$.*

Preuve. — Il est clair que l'image de t_{ver} dans $R^{\infty}_{\mathrm{ver}}$ est zéro. L'application entre espaces cotangents est surjective car par dualité l'application entre espaces tangents $H^1(G,\Theta)\to\mathrm{Ext}^1_{R,G}(\Omega_R,R)$ est injective ((1.10) et suite exacte suivante).

Il en résulte que $R_{\mathrm{ver}}\to R^{\infty}_{\mathrm{ver}}$ est d'une part quasi-fini, donc fini et alors surjectif. Si on considère la déformation induite par la déformation verselle sur la base $R_{\mathrm{ver}}/(t_{\mathrm{ver}})$, elle définit une section $R^{\infty}_{\mathrm{ver}}\to R_{\mathrm{ver}}/(t_{\mathrm{ver}})$. Du fait que $R_{\mathrm{ver}}/(t_{\mathrm{ver}})\to R^{\infty}_{\mathrm{ver}}$ induit un isomorphisme sur les espaces tangents, c'est un isomorphisme. $\square$

De manière générale on a entre dimensions de Krull

$$\dim(R^{\infty}_{\mathrm{ver}})\leqslant\dim(R_{\mathrm{ver}})\leqslant 1+\dim(R^{\infty}_{\mathrm{ver}})=1+\dim(R'_{\mathrm{ver},x})+\dim(R'_{\mathrm{ver},y}). \tag{1.23}$$

Faute d'informations précises sur la structure de l'anneau versel des déformations d'un point lisse formel pour un groupe G général, il n'est pas aisé de trouver les conditions de validation de l'égalité dans (1.23). On a cependant le résultat partiel suivant :

Théorème 1.21. — *Supposons G cyclique d'ordre p, de conducteurs respectifs sur les deux branches m_x,m_y (action fidèle sur les deux* *branches). On a en omettant l'indice G (cas équicaractéristique)*

$$\begin{aligned}\dim(R_{G,\mathrm{ver}} \otimes_\Lambda k) &= \dim(R^\infty_{G,\mathrm{ver}} \otimes_\Lambda k) + 1\\ &= \dim(R'_{\mathrm{ver},x} \otimes k) + \dim(R'_{\mathrm{ver},y} \otimes k) + 1\\ &= \left\lceil \frac{m_x+1}{p} \right\rceil + \left\lceil \frac{m_y+1}{p} \right\rceil - 1.\end{aligned}$$

Si $p = 2$, $R_{G,\mathrm{ver}}$ est formellement lisse sur $W(k)$, donc une algèbre de séries formelles en $\frac{m_x+m_y}{2}$ variables.

Preuve. — Dans cette situation $G = G_x = G_y$. Le théorème se ramène à calculer $\dim(R'_{ver,x})$, calcul correspondant à un point lisse marqué de conducteur m_x. Le calcul suit les lignes de ([BM], Thm 5.3.3), on omet les détails. Brièvement, on utilise le principe local-global qui conduit à travailler avec un espace de modules de revêtements $C \to \mathbb{P}^1_k$ avec un seul point de branchement $\infty \in \mathbb{P}^1_k$, totalement ramifié au-dessus de ce point, le point de ramification $P \in C$ (resp. branchement) étant vu comme point marqué sur C (resp. $\mathbb{P}^1_k$). La seule différence avec (loc.cit §5.3) est que Θ_C doit être remplacé par $\Theta_C(-P)$, dans les calculs locaux et globaux. Cela donne immédiatement pour résultat (voir la preuve du lemme 1.8), en tenant compte de $\beta_x = (m_x + 1)(p - 1)$

$$\dim(R'_{m_x}) = m_x + 2 - \left\lceil \frac{\beta_x+1}{p} \right\rceil = \left\lceil \frac{m_x+1}{p} \right\rceil. \tag{1.24}$$

Par ailleurs il est prouvé dans (Maugeais [Ma]) que sous ces mêmes hypothèses il existe une déformation équicaractéristique lisse de (R, G) de base une algèbre de séries formelles en une variable, ce qui assure que

$$\begin{aligned}\dim(R_{\mathrm{ver}} \otimes_\Lambda k) &= 1 + \dim(R^\infty_{\mathrm{ver}} \otimes_\Lambda k)\\ &= 1 + \dim(R'_{ver,x} \otimes_\Lambda k) + \dim(R'_{\mathrm{ver},y} \otimes_\Lambda k)\\ &= \left\lceil \frac{m_x+1}{p} \right\rceil + \left\lceil \frac{m_y+1}{p} \right\rceil - 1.\end{aligned}$$

D'où la conclusion du point 1.

Si $p = 2$, il découle de ([BM], Thm 4.3.7) que l'algèbre $R'_{\mathrm{ver},x}$ (resp. $R'_{\mathrm{ver},y}$) est formellement lisse. De la sorte l'algèbre R^∞_{ver} est formellement lisse de dimension

$$N = \left\lceil \frac{m_x+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{m_y+1}{2} \right\rceil = \frac{m_x+m_y}{2} + 1$$

l'espace tangent étant de dimension $\frac{m_x+m_y}{2}$. Soit $R^\infty_{\mathrm{ver}} = \Lambda[[v_1, \cdots, v_{N-1}]]$. Si les $u_i \in \mathcal{M}_{R_{\mathrm{ver}}}$ $(1 \leqslant i \leqslant N - 1)$ relèvent les v_i, alors on a un morphisme

$$\Lambda[[T_{\mathrm{ver}}, U_1, \cdots, U_{N-1}]] \to R_{\mathrm{ver}},\ T_{\mathrm{ver}} \mapsto t_{\mathrm{ver}},\ U_i \mapsto u_i$$

d'une algèbre de séries formelles vers R_{ver}, qui induit visiblement un isomorphisme entre les espaces tangents. C'est donc un isomorphisme. $\square$

Exemple 1.22. — Supposons comme dans l'énoncé qui précède que $p = 2, G = \mathbb{Z}/\not{2}\mathbb{Z}$, l'action étant effective le long des branches. Si les conducteurs respectifs le long des branches sont m_x et m_y, on a vu que l'anneau d'une déformation verselle noté R_{m_x,m_y}, est une algèbre de séries formelles sur Λ en $\frac{m_x+m_y}{2}$ variables. Dans le cas générique *i.e.* $m_x = m_y = 1$ (voir [BM]), et équicaractéristique, il est facile de rendre explicite une déformation verselle de l'action. L'action initiale étant

$$\sigma(x) = \frac{x}{1+x} \quad , \quad \sigma(y) = \frac{y}{1+y}$$

l'automorphisme suivant de $k[[t,x,y]]/(xy-t)$ est une déformation verselle

$$\sigma(x) = \frac{x+t}{x+1} \quad , \quad \sigma(y) = \frac{y+t}{y+1}. \tag{1.25}$$

Il est possible, mais plus compliqué d'expliciter la déformation verselle pour des conducteurs arbitraires.

2. Déformations équivariantes des courbes stables.

2.1. Obstructions globales versus obstructions locales.

Soit une courbe stable C définie sur le corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$, et soit G un p-groupe agissant fidèlement sur C/k. L'objectif de cette section est de décrire les obstructions au relèvement infinitésimal de C et de les relier aux déformations locales de la section 1, mettant en évidence le défaut au principe local-global [BM2]. Rappelons (§0) que l'espace tangent au foncteur des déformations G-équivariantes de C s'identifie naturellement à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k},\mathcal{O}_C)$ et les obstructions aux relèvement infinitésimal des déformations forment un sous-espace de $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k},\mathcal{O}_C)$.

À l'aide de la suite spectrale de terme E_2

$$E_2^{i,j} = H^i(G, \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k},\mathcal{O}_C))$$

qui aboutit à $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k},\mathcal{O}_C)$, et de la nullité de $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k},\mathcal{O}_C)$ provenant de la stabilité de C, on montre que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k},\mathcal{O}_C) = H^0(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k},\mathcal{O}_C)).$$

Cette égalité s'interprète aisément en terme de déformations du fait qu'il n'y a pas d'automorphismes infinitésimaux.

En effet, soit une déformation infinitésimale (*a priori* non équivariante) $\mathcal{C} \to k[\varepsilon]$ et notons $\tau\colon\ C \hookrightarrow \mathcal{C}$ l'inclusion. Rappelons que G agit sur le foncteur des déformations (voir §0), en particulier sur l'espace tangent $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C)$. Dire que la déformation $\mathcal{C}$ est un point fixe de G signifie que tout $\sigma \in G$ s'étend en un automorphisme $\tilde{\sigma}$ de $\mathcal{C}$ tel que $\tilde{\sigma}\tau = \tau\sigma$. Comme ce prolongement est unique, parce qu'il n'y a pas d'automorphismes infinitésimaux, on obtient bien un relèvement de l'action de G à $\mathcal{C}$.

Toujours en utilisant la suite spectrale ci-dessus on montre aussi que [BM2]

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) = H^1(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C))$$

égalité qui s'interprète en terme de déformations. En effet soit $A' \to A$ un petit épaississement entre anneaux locaux artiniens de corps résiduel k, $\mathcal{C} \to \operatorname{Spec} A$ une déformation équivariante de C à A. Choisissons une déformation non équivariante $\mathcal{C}' \to \operatorname{Spec} A'$. Une telle déformation existe car le foncteur des déformations non équivariantes est non obstrué ([DM], Lemma 1.3). Comme précédement on définit, pour tout $\sigma \in G$ une nouvelle déformation ${}^{\sigma}\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ en considérant le couple formé de $\mathcal{C}$ et du composé de σ et de l'immersion $C \hookrightarrow \mathcal{C}'$. L'universalité du foncteur des déformations dans le cas non équivariant dit que l'ensemble des déformations de $\mathcal{C}$ est un espace principal homogène sous $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C)$. Il existe donc un élément unique $\xi_\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C)$ tel que ${}^{\sigma}\mathcal{C}' = \mathcal{C}' + \xi_\sigma$. Il est alors clair que $(\xi_\sigma)_\sigma$ définit un 1-cocycle, et donc une classe dans $H^1(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C))$. La nullité de cette classe équivaut à la possibilité de relever $\mathcal{C}$ à A' de manière G-équivariante.

Une différence importante entre le cas local et le cas global est que, dans le second cas, l'hypothèse de stabilité implique qu'il n'y a pas d'automorphismes infinitésimaux. En d'autres termes, pour relever l'action de G il suffit de relever indépendamment chaque $\sigma \in G$, ce qui n'est pas le cas de la situation locale (voir Prop. 1.4). Dans le cas non équivariant, le principe local-global de Deligne et Mumford (*cf.* [DM], Prop. 1.5) se résume à la suite exacte

$$(2.1)\quad 0 \to H^1(C, \Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\imath} \bigoplus_{P \in \mathrm{db}(C)} \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_P}(\widehat{\Omega}_P, \widehat{\mathcal{O}}_P) \to 0$$

où $\mathrm{db}(C)$ désigne l'ensemble des points doubles de C,

$$\Theta = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C),$$

et $\imath$ le morphisme de localisation autour des points doubles. Cette suite permet d'identifier $H^1(C,\Theta)$ au sous-espace vectoriel formé des déformations de C induisant une déformation topologiquement triviale autour des points doubles.

Si on prend en considération le groupe G, alors la suite exacte (2.1) est une suite exacte de G-modules, elle conduit à une suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned}(2.2)\quad 0 \to\ & H^1(C,\Theta)^G \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C,\mathcal{O}_C)^G \xrightarrow{\imath} \Big(\bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C)} \operatorname{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_P}(\widehat{\Omega}_P,\widehat{\mathcal{O}}_P)\Big)^G \\ & \xrightarrow{\delta} H^1(G,H^1(C,\Theta)) \to H^1(G,\operatorname{Ext}^1(\Omega_C,\mathcal{O}_C)) \\ & \xrightarrow{\nu} H^1(G,\bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C)} \operatorname{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_P}(\widehat{\Omega}_P,\widehat{\mathcal{O}}_P)).\end{aligned}$$

Le morphisme ν a une interprétation claire, il associe à une classe d'obstruction globale les obstructions primaires $c^1 = (c^1_P)_P$ extraites de la localisation de cette classe aux points doubles (voir §1.2). D'autre part le sous-espace $H^1(C,\Theta)^G$ classifie les déformations équivariantes infinitésimales qui sont, après oubli de l'action, triviales en chaque point double. Enfin δ est le morphisme d'obstruction au principe local-global équivariant. Celui-ci s'interprète aisément en terme de déformations. En effet, soit

$$\xi = (\xi_P)_P \in \Big(\bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C)} \operatorname{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_P}(\widehat{\Omega}_P,\widehat{\mathcal{O}}_P)\Big)^G.$$

D'après le principe local-global non équivariant (2.1), il existe un prolongement global $\mathcal{C} \to \operatorname{Spec} k[\varepsilon]$ de ξ. Comme ξ est fixe sous G, G agit sur $\imath^{-1}(\xi)$. Si $\sigma \in G$, on peut écrire ${}^\sigma\mathcal{C} = \mathcal{C} + \eta_\sigma$ avec $\eta_\sigma \in H^1(C,\Theta)$. L'image $\delta(\xi)$ est alors exactement la classe de $\eta = (\eta_\sigma)$ dans $H^1(G,H^1(C,\Theta))$.

L'objectif est de décrire avec le plus de précision possible le noyau de δ. Dans ce but, nous allons comparer le morphisme δ (obstructions globales) au morphisme $\sharp$ (obstructions locales)

$$\sharp : \Big(\bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C)} \operatorname{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_P}(\widehat{\Omega}_P,\widehat{\mathcal{O}}_P)\Big)^G \longrightarrow \bigoplus_{P\in C_{\mathrm{sing}}/G} H^2(G_P,\Theta_P).$$

Construisons tout d'abord le morphisme de localisation des obstructions en un point double P d'isotropie G_P :

$$(2.3)\qquad \mathrm{loc} : H^1(G,H^1(C,\Theta)) \longrightarrow \bigoplus_{P\in C_{\mathrm{sing}}/G} H^2(G_P,\Theta_P).$$

On peut le décrire de la manière suivante. Soit $\eta \in H^1(G, H^1(C,\Theta))$ un 1-cocycle, donc tel que $\eta_{\sigma\tau} = \sigma(\eta_\tau) + \eta_\sigma$, représenté sur un recouvrement par des ouverts affines G-invariants $C = \cup_i U_i$, par des sections locales de Θ

$$\eta_{\sigma,i,j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \Theta)$$

avec les relations qui traduisent la propriété de cocycle
(2.4)
$$\eta_{\sigma\tau,i,j} = \sigma(\eta_{\tau,i,j}) + \eta_{\sigma,i,j} + \omega_{\sigma,\tau,j}{}_{|U_i\cap U_j} - \omega_{\sigma,\tau,i}{}_{|U_i\cap U_j},\ \omega_{\sigma,\tau,i} \in \Gamma(U_i,\Theta).$$

Si P est un point double de C et $P \in U_i$, on pose

$$\mathrm{loc}_P([\eta]) = [(\omega_{\sigma,\tau,i})_P] \in H^2(G_P, \Theta_P) \text{ et } \mathrm{loc} = \oplus_P \mathrm{loc}_P\,. \tag{2.5}$$

Noter que la relation (2.4) montre que cette classe est indépendante de l'ouvert contenant P.

On peut également définir un morphisme loc'_Q pour chaque point de ramification (non singulier) Q, c'est à dire un point de stabilisateur G_Q distinct du groupe d'inertie de la composante qui le contient. La description est analogue à (2.3). Soit $\mathrm{loc}' = \oplus_Q \mathrm{loc}'_Q$.

Lemme 2.1. — *Avec les notations précédentes on a*

$$\mathrm{loc}\circ\delta = \sharp \quad \textit{et} \quad \mathrm{loc}'\circ\delta = 0. \tag{2.6}$$

Preuve. — Décrivons tout d'abord la classe $\eta = \delta(\xi)$ (les notations sont celles de dessus). Soit $(U_i)_i$ un recouvrement de C par des ouverts affines stables sous l'action de G. Sur U_i, les déformations $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}|_{U_i}$ et ${}^\sigma\mathcal{C}|_{U_i}$ sont isomorphes. Notons $\tilde\sigma_i$ un tel isomorphisme. Alors par définition on a $\eta_{\sigma,j,i} = \tilde\sigma_j\tilde\sigma_i^{-1}$. Pour relier les obstructions locales et globales, notons que si $\tilde\sigma_i\tilde\tau_i = c^i_{\sigma,\tau}\widetilde{\sigma\tau}_i$, alors $\sharp(\xi) = (c^i_{\sigma,\tau})_P$ par définition du morphisme $\sharp$. Par substitution on a

$$\eta_{\sigma\tau,j,i} = (c^j_{\sigma\tau})^{-1}\tilde\sigma_j\tilde\tau_j\tilde\tau_i^{-1}\tilde\sigma_i^{-1}c^i_{\sigma\tau} \ =\ (c^j_{\sigma\tau})^{-1}\Big(\sigma(\eta_{\tau,j,i})\eta_{\sigma,j,i}\Big)c^i_{\sigma\tau}.$$

Le résultat suit.

En ce qui concerne la deuxième assertion, il suffit de noter qu'il n'y a pas d'obstructions locales pour relever en un point régulier l'action d'un stabilisateur G_Q à $k[\varepsilon]$ (bien qu'il y ait des obstructions aux ordres supérieurs). □

Pour aller plus loin, il faut au préalable décrire l'espace $H^1(G, H^1(C,\Theta))$. Pour cela, nous noterons C_α les composantes irréductibles normalisées de C, $\imath_\alpha : C_\alpha \to C$ le morphisme canonique et $\mathrm{db}(C_\alpha)$ l'ensemble des origines des branches situées sur C_α.

LEMME 2.2. — *On a une suite exacte*

$$0 \to \bigoplus_{P \in \mathrm{db}(C)} T_P \to \Omega^1_{C/k} \to \bigoplus_\alpha i_{\alpha *}\Omega_{C_\alpha/k} \to 0$$

où $T_P \cong k$ est le sous-module de torsion de $\Omega^1_{\mathcal{O}_P/k}$. En particulier on a

$$\Theta = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) \cong \bigoplus_\alpha i_{\alpha *}\Bigg(\Theta_\alpha\Big(-\sum_{P \in \mathrm{db}(C_\alpha)} P\Big)\Bigg)$$

avec $\Theta_\alpha = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{C_\alpha}}(\Omega_{C_\alpha/k}, \mathcal{O}_{C_\alpha})$.

Preuve. — Au morphisme $\imath_\alpha$ correspond un morphisme $\Omega_{C/k} \to i_{\alpha *}\Omega_{C_\alpha/k}$, d'où le morphisme de droite dans la suite exacte de l'énoncé. L'exactitude se vérifie alors au voisinage des points doubles. Soit P un tel point et (x,y) un système de coordonné en P. On a alors, pour le morphisme ci-dessus, une identification avec le morphisme

$$\Omega_{C/k,P} = \frac{\mathcal{O}_{C,P}dx \oplus \mathcal{O}_{C,P}dy}{xdy + ydx} \to \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{(y)}dx \oplus \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{(x)}dy,$$

et l'exactitude de la suite exacte en découle aisément. On en déduit alors que

$$\Theta = \bigoplus \mathcal{H}om(\imath_{\alpha *}\Omega_{C_\alpha/k}, \mathcal{O}_C) \cong \bigoplus \imath_{\alpha *}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{C_\alpha}}(\Omega_{C_\alpha}, \imath^!_\alpha(\mathcal{O}_C)))$$

avec $\imath^!_\alpha(\mathcal{O}_C) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{C_\alpha}}(\imath_{\alpha *}\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{C_\alpha})$. La dernière égalité provient de la dualité pour les morphismes finis. On montre finalement que

$$\imath^!_\alpha(\mathcal{O}_C) = \mathcal{O}_{C_\alpha}\Big(-\sum_{P \in \mathrm{db}(C_\alpha)} P\Big).$$

Le résultat suit. □

L'obstruction à relever le couple $(\mathcal{C}, G)$ de A à A' est un élément de

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) = H^1(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C)).$$

Si l'obstruction primaire localisée dans les points doubles $(c^1_P)_P$ est nulle, alors la classe d'obstruction est représentée par un élément de $H^1(G, H^1(C, \Theta))$ (*cf.* suite exacte (2.2)). En utilisant le lemme 2.2, on peut dans ce cas voir la classe d'obstruction comme un élément de

$$H^1\Bigg(G, \bigoplus_\alpha H^1\Big(C_\alpha, \Theta_\alpha\Big(-\sum_{P \in \mathrm{db}(C_\alpha)} P\Big)\Big)\Bigg) = \bigoplus_\gamma H^1\Bigg(G_\gamma, H^1\Big(C_\gamma, \Theta_\gamma\Big(-\sum_{P \in \mathrm{db}(C_\gamma)} P\Big)\Big)\Bigg)$$

où la somme directe du terme de droite est prise sur l'ensemble des classes d'équivalences sous G des composantes irréductibles normalisées de C, C_γ est un représentant de cette classe et G_γ est le stabilisateur de C_γ.

Cela étant, fixons un indice γ. On a un morphisme de localisation qui peut s'interpréter en terme de la suite spectrale locale-globale

$$\text{(2.7)} \qquad \mathrm{loc}_\gamma : H^1\Big(G_\gamma, H^1\Big(C_\gamma, \Theta_\gamma\Big(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P\Big)\Big)\Big) \to \bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} H^2(G_P, \Theta_P(-1))$$

(où $\Theta_P(-1)$ désigne le module $x\Theta_P$ si x est une coordonnée de C_γ en P). De manière analogue, on définit un morphisme loc'_γ

$$\text{(2.8)} \qquad \mathrm{loc}'_\gamma : H^1\Big(G_\gamma, H^1\Big(C_\gamma, \Theta_\gamma\Big(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P\Big)\Big)\Big) \to \bigoplus_{Q\in \mathrm{ram}(C_\gamma)} H^2(G_Q, \Theta_Q)$$

où $\mathrm{ram}(C_\gamma)$ désigne les points de ramification vrais du quotient $C_\gamma \to C_\gamma/G_\gamma$, *i.e.* qui ne sont pas localisés aux origines des branches. On a les morphismes analogues $\widetilde{\mathrm{loc}}_\gamma$ et $\widetilde{\mathrm{loc}'}_\gamma$ avec (si $H_\gamma \neq 1$) G_γ/H_γ à la place de G_γ que nous n'écrirons pas. On a alors le lemme suivant qui précise la nature du morphisme loc, et dont la vérification est immédiate.

Lemme 2.3. — *On a $loc = \bigoplus_\gamma loc_\gamma$.*

Noter que l'application loc n'est pas bijective en général. Toutefois au niveau de chaque composante la suite spectrale locale-globale conduit à un isomorphisme $\widetilde{\mathrm{loc}}_\gamma \oplus \widetilde{\mathrm{loc}'}_\gamma$:

$$\begin{aligned} &H^2_{G_\gamma/H_\gamma}\Big(C_\gamma, \Theta_{C_\gamma}\Big(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P\Big)\Big) \\ &\qquad = H^1\Big(G_\gamma/H_\gamma, H^1\Big(C_\gamma, \Theta_{C_\gamma}\Big(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P\Big)\Big)\Big) \\ &\qquad \xrightarrow{\sim} \Big(\bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)/G} H^2(G_{\gamma,P}/H_\gamma, \Theta_P(-1))\Big) \\ &\qquad\qquad\qquad \bigoplus \Big(\bigoplus_{Q\in \mathrm{ram}(C)/G} H^2(G_{\gamma,Q}/H_\gamma, \Theta_Q)\Big). \end{aligned}$$

On note $G_{\gamma,P} \subset G_\gamma$ le stabilisateur de $P \in C_\gamma$. On est ainsi ramené à une étude sur chaque composante irréductible de C/G. Nous allons utiliser cette décomposition pour étudier plus en profondeur le morphisme δ. L'objectif étant d'analyser la classe d'obstruction globale $\delta(\xi)$ en la comparant aux classes locales. Soit H_γ le noyau du morphisme $G_\gamma \to \mathrm{Aut}(C_\gamma)$. Il est nécessaire de prendre en compte le morphisme d'inflation relatif à $G_\gamma \to G_\gamma/H_\gamma$ si on veut passer de G_γ/H_γ à G_γ.

Notons le diagramme commutatif relatif à C_γ

$$\begin{tikzcd}
H^1(H_\gamma, H^1(C_\gamma, \Theta_\gamma(-\sum P)))^{G_\gamma/H_\gamma} \arrow[r] & \bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} H^2(G_{\gamma,P}, \Theta_{C_\gamma,P}(-1))^{G_P/H_\gamma} \\
H^1(G_\gamma, H^1(C_\gamma, \Theta_\gamma(-\sum P))) \arrow[r, "\nu"] \arrow[u] & \bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} H^2(G_{\gamma,P}, \Theta_{C_\gamma,P}(-1)) \arrow[u] \\
H^1(G_\gamma/H_\gamma, H^1(C_\gamma, \Theta_\gamma(-\sum P))) \arrow[r, "j'"] \arrow[u, "\imath"] & \bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} H^2(G_{\gamma,P}/H_\gamma, \Theta_{C_\gamma,P}(-1)) \arrow[u, "\oplus\imath_P"']
\end{tikzcd}$$

les morphismes verticaux $\imath$ et $\imath_P$ étant les morphismes d'inflation. Noter que le morphisme $\imath$ est injectif car c'est le morphisme d'inflation au niveau du H^1. Le morphisme j' est la première composante de l'isomorphisme $j = (j', j'') = \widetilde{\mathrm{loc}}_\gamma \oplus \widetilde{\mathrm{loc}'}_\gamma$. Cette observation permet de préciser la nullité de la classe d'obstruction au relèvement de ξ.

Cette classe est nulle si et seulement si d'une part pour tout γ la restriction à H_γ de cette classe est nulle, et si d'autre part les obstructions locales images de cette classe sont nulles. Notons V_{sr} le sous-espace

$$V_{sr} \subset \Big(\bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C)} \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_P}(\widehat{\Omega}_P, \widehat{\mathcal{O}}_P)\Big)^G = \bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C)/G} \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_P}(\widehat{\Omega}_P, \widehat{\mathcal{O}}_P)$$

la somme directe limitée au point strictement relevables (Def 1.14). Revenons au diagramme 2.2.

Théorème 2.4. — *Le sous-espace V_{sr} est dans le noyau de δ, donc dans l'image de $\imath$.*

Preuve. — On veut prouver que l'image $\delta(V_{sr})$ est nulle. Il suffit pour cela de prouver que les composantes locales des classes d'obstruction, celles relatives à C_γ étant dans

$$H^1\Big(G_\gamma, H^1\Big(C_\gamma, \Theta_\gamma\Big(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P\Big)\Big)\Big),$$

sont nulles (Lemme 2.3). On sait qu'une telle composante locale ξ est contenue dans l'image du morphisme d'inflation $\imath$, soit $\xi = \imath(\omega)$. L'image $\nu(\xi)$ de cette classe dans

$$\Big(\bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} H^2(G_P,\Theta_P(-1))\Big)\bigoplus\Big(\bigoplus_{Q\in \mathrm{ram}(C_\gamma)} H^2(G_Q,\Theta_Q)\Big)$$

est $(\oplus\imath_P)j'(\omega) = 0$. Or du fait de la stricte relevabilité $j'(\omega) = 0$ (corollaire 1.13). La conclusion $\omega = 0$ vient alors de la remarque $j''(\omega) = 0$ (Lemme 2.1), et du fait que le morphisme $j = (j', j'')$ est un isomorphisme. □

Déviation au principe local-global.

Si pour un indice γ on a $H_\gamma \neq 1$, le théorème 2.4 ne permet pas de donner un critère complet de relevabilité à l'ordre un, *i.e.* si

$$V_{sr} \neq \Big(\bigoplus_{P\in \mathrm{db}(C)} \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_P}(\widehat{\Omega}_P,\widehat{\mathcal{O}}_P)\Big)^G.$$

Il y a des contraintes de nature globale que l'on va partiellement expliciter. Soit un petit épaississement $A' \to A = A'/(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathcal{M}_{A'}$, $\varepsilon^2 = 0$. On suppose avoir une déformation $\mathcal{C}$ de (C, G) à A. Faisons l'hypothèse que $(\mathcal{C}, G)$ se relève à $R_{A'}$ avec l'épaisseur ε. Pour tout point double $P \in C$, $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) définissent des déformations de P. Si $A = k, A' = k[\varepsilon]$, on notera ξ_P cette déformation, et $\xi = (\xi_P)$. Pour toute composante C_γ de C, notons U_γ l'ouvert de C_γ complémentaire des origines des branches, et $\mathcal{U}_\gamma$ (resp. $\mathcal{U}'_\gamma$) les déformations induites de U_γ par $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$). On a $\mathcal{U}_\gamma \cong U_\gamma \times \mathrm{Spec}\, A$, de même pour $\mathcal{U}'_\gamma$. Noter que si $P \in C_\gamma$ est l'origine d'une branche, alors peut spécialiser en le germe de branche épointée en P (§1.1), qui s'explicite par un morphisme (pour $\mathcal{C}'$) :

$$\Gamma(\mathcal{U}'_\gamma,\mathcal{O}) \longrightarrow A'((x))$$

si x est le paramètre de la branche. Soit G_P le groupe d'inertie (stabilisateur) en P. Le groupe G_P agit sur les branches épointées de $\mathcal{C}'$ en P.

On définit aussi D_γ (resp. D^1_γ) le diviseur de $\tilde{C}_\gamma$ (la courbe normalisée) somme des origines des branches (resp. de celles qui sont strictement relevables de A à A').

Théorème 2.5.

1) *Supposons $H_\gamma \neq 1$, alors il existe un champ de vecteur $X_{\gamma,\sigma} \in H^0(C_\gamma, \Theta_\gamma(-D^1_\gamma))^{G_\gamma}$ uniquement déterminé par le fait que l'action de H_γ sur $\mathcal{U}'_\gamma$ est donnée par ($\sigma \in H_\gamma$)*

$$\tilde{\sigma} = \exp(\varepsilon X_{\gamma,\sigma}).$$

Ces champs de vecteurs définissent une classe de cohomologie

$$X_\gamma(\xi) \in H^1(H_\gamma, H^0(C_\gamma, \Theta_\gamma(-D^1_\gamma))^{G_\gamma/H_\gamma} \tag{2.9}$$

qui ne dépend que de $\xi = (\xi_P)$ *et pas du relèvement* $\mathcal{C}'$ *de* $\mathcal{C}$ *choisit.*

2) *Supposons* $A = k$, $A' = k[\varepsilon]$. *L'application* $\xi \mapsto X(\xi) = (X_\gamma(\xi))_\gamma$ *est linéaire et s'insère dans une suite exacte*

$$0 \to V_{sr} \to \operatorname{Im} \imath \xrightarrow{X} \bigoplus_\gamma H^1(H_\gamma, H^0(C_\gamma, \Theta_\gamma(-D^1_\gamma))^{G_\gamma/H_\gamma}. \tag{2.10}$$

Preuve.

1) Chaque élément $\sigma \in H_\gamma$ définit un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{U}_\gamma$ et donc induit un champ de vecteur $X_{\gamma,\sigma} \in H^0(U_\gamma, \Theta_\gamma)$. Il s'agit alors de prouver que ce champ de vecteur est régulier sur C_γ et qu'il possède des zéros en les points du support de D^1_γ. Soit $P \in \mathrm{db}(C_\gamma)$. Comme on a une action de G sur $\mathcal{C}$, en particulier on a une action de H_γ sur $(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}})_{\imath_\gamma(P)} \cong R_{t\varepsilon}$ (pour un t dépendant de ξ). Soit (x, y) un système de coordonné en $\imath_\gamma(P)$ (x correspondant à la composante C_γ) alors on montre (comme dans la preuve du lemme 1.10) que pour tout $\sigma \in H_\gamma$

$$\tilde\sigma(x) = x + \varepsilon t \zeta_y(\sigma) + \varepsilon y A_\sigma(y) + \varepsilon x B_\sigma(x).$$

On a donc tout de suite la régularité en P du champ de vecteur $X_{\gamma,\sigma}$ qui est donné sur $k((x))$ par

$$(t\zeta_y(\sigma) + xB_\sigma(x))\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.11}$$

De plus, on voit que si P est un point dont l'image dans C est strictement relevable (ce qui implique $\zeta_y(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma \in H_\gamma$) alors $X_{\gamma,\sigma}$ a un zéro en P. On a donc bien $X_{\gamma,\sigma} \in H^0(C_\gamma, \Theta_\gamma(-D^1_\gamma))$.

D'autre part, si on choisit un deuxième relèvement équivariant $\mathcal{C}'$ de ξ alors on peut définir un autre champ de vecteur X'_γ pour tout γ. L'expression (2.9) montre que $X_\gamma - X'_\gamma$ à un zéro en tout point de $\mathrm{db}(C_\gamma)$ (car le premier terme du développement ne dépend que de l'épaisseur $t\varepsilon$). Ainsi $X_\gamma - X'_\gamma$ est un champ de vecteur appartenant à $H^0(C_\gamma, \Theta_\gamma(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P))$ qui est nul car C est une courbe stable. Le champ de vecteur X_γ est donc indépendant du relèvement choisit.

Il reste à prouver que X_γ est G_γ-invariant. Or pour tout $\sigma \in G_\gamma$, σX_γ est le champ de vecteur obtenu à partir de la déformation équivariante $\mathcal{C}$ avec l'action tordue $\tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$ (que nous noterons $\mathcal{C}'$). Mais comme ξ est

G-invariant, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ induisent toute deux ξ et comme X_γ ne dépend pas du relèvement on a $X_\gamma = \sigma X_\gamma$.

2) Montrons tout d'abord que l'application X est linéaire. En fait, par construction, X_γ est le quotient d'une application

$$\tilde{X}_\gamma : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) \to H^1(H_\gamma, H^0(C_\gamma, \Theta_\gamma(-D^1_\gamma))^{G_\gamma/H_\gamma}$$

(qui peut être considérée comme une restriction $(\mathcal{C}, G) \mapsto (\mathcal{C}|_{U_\gamma}, H_\gamma)$) qui est clairement linéaire. Cela démontre la linéarité de X.

Passons à l'exactitude de la suite. Tout d'abord, considérons un élément $\xi \in V_{sr}$. Alors on peut trouver une déformation G-équivariante $\mathcal{C}$ de C telle que pour tout γ le groupe H_γ agit trivialement sur la déformation de U_γ induite. Ceci prouve bien que ξ est dans le noyau de X.

Le fait que la suite est exacte est alors une simple conséquence de la définition des points strictement relevables. □

Le théorème 2.5 admet un corollaire intéressant :

Corollaire 2.6. — *Sous les hypothèses du théorème 2.5 (1), si* $2g(C_\gamma) - 2 + \deg(D^1_\gamma) > 0$, *alors* H_γ *agit trivialement sur* $\mathcal{U}'_\gamma$ *et* $D_\gamma = D^1_\gamma$.

Preuve. — Sous les hypothèses indiquées $H^0(\tilde{C}_\gamma, \Theta_\gamma(-D^1_\gamma)) = 0$. L'action de H_γ sur $\mathcal{U}'_\gamma$ est donc triviale, ce qui force les origines des branches situées sur C_γ a être strictement relevables de A à A'. □

Remarque 2.7.

1) Le corollaire 2.6 permet de construire facilement des exemples d'actions non lissifiable au premier ordre, donc avec $\mathrm{Def}_{C,G}(k[\varepsilon]) = \mathrm{Def}^\infty_{C,G}(k[\varepsilon])$, même avec G d'ordre p (voir [Ma]).

2) Le morphisme X n'est pas en général surjectif. On peut toutefois préciser son image dans des cas particuliers, voir pour cela Maugeais [Ma2] où on trouve une construction essentiellement cohomologique du morphisme X (*i.e.* sans passer par l'interprétation en terme de déformation) et qui repose sur le morphisme $\tilde{X}_\gamma$ construit dans la preuve de la proposition et une analyse du morphisme

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) \to \pi_*\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C)$$

(où $\pi : C \to C/G$ désigne le morphisme quotient).

3) Dans beaucoup de cas le théorème 2.4 permet de calculer la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C)$. En effet, supposons

que pour tout γ tel que $H_\gamma \neq \{1\}$ on a $2g(C_\gamma) - 2 + \deg(D^1_\gamma) > 0$; alors le théorème 2.4 nous dit en particulier que

$$\dim_k \operatorname{Im} \imath = \dim_k V_{sr}$$

par suite on a

$$\begin{aligned}\dim_k \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) &= \dim_k V_{sr} + \dim_k H^1(C,\Theta)\\ &= \dim_k V_{sr} + \sum_\gamma \dim_k H^1(C_\gamma, \Theta_\gamma(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P))^{G_\gamma/H_\gamma}.\end{aligned}$$

Le terme $\dim_k V_{sr}$ peut alors être étudié grâce au corollaire 1.13, quand au second terme, on a du fait de la stabilité de C un isomorphisme

$$H^1\Big(C_\gamma, \Theta_\gamma\Big(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P\Big)\Big)^{G_\gamma/H_\gamma} \xrightarrow{\sim} H^1_{G_\gamma/H_\gamma}\Big(C_\gamma, \Theta_\gamma\Big(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P\Big)\Big)$$

et il peut donc être étudié à l'aide de méthodes similaires à celles utilisées dans [BM] §5.3.

Le cas le plus simple qui peut être traité par les techniques précédentes, est le champ $\overline{\mathcal{H}}_g$ dont les objets sont les courbes hyperelliptiques stables. On a donc $p = 2$. Rappelons qu'une courbe hyperelliptique stable de genre $g \geqslant 2$, est une courbe stable de genre g, munie d'une involution τ telle que si $\Sigma = C/\tau$, alors $g(\Sigma) = 0$. On montre [Ma2], appendice, que d'une part τ est unique, et que d'autre part $\overline{\mathcal{H}}_g$ se réalise comme un sous-champ fermé de $\overline{\mathcal{M}}_g$. Par ailleurs le sous-champ ouvert $\mathcal{H}_g$ formé des courbes lisses est partout dense [Ma], en particulier $\dim \overline{\mathcal{H}}_g = 2g-1$. Le théorème 1.21 suggère que $\overline{\mathcal{H}}_g$ est lisse en tout point C pour lequel l'involution hyperelliptique τ agit librement sur un ouvert dense. De manière précise le résultat est :

Théorème 2.8. — *Le lieu de lissité du champ $\overline{\mathcal{H}}_g$ est formé des points pour lequel l'involution hyperelliptique agit librement sur un ouvert dense, c'est à dire les courbes sans "mauvaises" composantes. En particulier $\overline{\mathcal{H}}_g$ est lisse en codimension $\leqslant 2$.*

Preuve. — Que sous les conditions de l'énoncé le champ soit lisse en C, peut se voir soit par le résultat local 1.21 (formule 1.23), joint au principe local-global qui s'applique dans cette situation [BM]. On peut aussi calculer directement la dimension de l'espace tangent de la déformation universelle du point considéré. Les résultats qui précèdent conduisent facilement au résultat, du fait que tout point double est dans ce contexte strictement relevable, on trouve pour cette dimension $2g-1$.

Le même calcul donne la dimension de l'espace tangent en tout point. Il suffit de déterminer pour chaque composante C_α la dimension de $H^1_{G_\gamma/H_\gamma}(C_\gamma, \Theta_\gamma(-\sum_{P\in \mathrm{db}(C_\gamma)} P))$. Les résultats de [BM], §5.3 conduisent à ce résultat. En effectuant avec précaution une sommation sur les composantes, en particulier en distinguant les bonnes composantes des mauvaises, on arrive par des calculs fastidieux mais simples à la dimension de l'espace tangent au point C, qui est

$$2g - 1 + \sum_{\beta=1}^{c_b} \delta_\beta - 2c_b$$

expression dans laquelle c_b est le nombre des mauvaises composantes, et si C_β est l'une d'elles, δ_β représente le nombre des branches dont l'origine est sur C_β. Comme $C_\beta \cong \mathbb{P}^1$, on a $\delta_\beta \geqslant 3$ par stabilité. Donc la dimension de l'espace tangent est strictement supérieure à $2g-1$ dès qu'il y a une mauvaise composante. D'où le résultat.

En codimension un, une courbe hyperelliptique stable a deux composantes (hyperelliptiques) et un seul point double, il ne peut y avoir de mauvaise composante. Noter qu'il est facile de construire une courbe hyperelliptique stable avec une mauvaise composante. Elles n'apparaissent que sur les strates de codimension au plus trois, d'où la remarque finale. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[Ab] D. Abramovich, Raynaud's group-scheme and reduction of coverings, preprint, arXiv math.AG/0304352.

[BM] J. Bertin, A. Mézard, Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés, Inv. Math., 141-1 (2000), 195–238.

[BM2] J. Bertin, A. Mézard, Déformations formelles de revêtements : un principe local-global, to appear Israel math. journal.

[BR] J. Bertin, M. Romagny, Champs de Hurwitz, Prépublication Institut Fourier (2005).

[CK] G. Cornelissen, F. Kato, Equivariant deformation of Mumford curves and of ordinary curves in positive characteristic, Duke Math J., 116-3 (2003), 431–470.

[DM] P. Deligne, D. Mumford, The irreducibilty of the space of curves of a given genus, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 36 (1969), 75–109.

[Ek] T. Ekedahl, Boundary behaviour of Hurwitz schemes in The moduli space of curves (Texel Island, 1994), Progr. Math., 129, (1995), 173–198.

[Gr] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J. (2), 9 (1957), 119–221.

[HM] J. Harris, D. Mumford, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, Invent. Math., 67 (1982), 23–86.

[Ja] T.J. Jarvis, Torsion free sheaves and the moduli space of higher spin curves, Compositio. Math., 110-3 (1998), 291–333.

[Ma] S. Maugeais, Relèvement des revêtements p-cycliques des courbes rationnelles semi-stables, Math. Ann., 327 (2003), 365–393.

[Ma2] S. Maugeais, Déformations équivariantes des courbes stables, Thèse de l'Université de Bordeaux (2003).

[OP] A. Okounkov, R. Pandharipande, Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and Matrix models I, preprint arXiv:math.AG/0101147.

[Pr] R. Pries, Deformation of Wildly ramified Actions on Curves, preprint arXiv: math.AG/0403056.

[Se] J.P. Serre, Corps locaux, Hermann.

[Wa] J. Wahl, Equisingular deformation of plane algebroid curves, Trans. Amer. Math. Soc., 193 (1974), 143–170.

[We] S. Wewers, Formal deformation of curves with group scheme action, preprint arXiv:math.AG/0212145 (2003).

[We2] S. Wewers, Deformation of tame admissible covers of curves, in London Math. Soc, Lecture notes Ser., 256 (1999).

José BERTIN,
Université de Grenoble I
Institut Fourier
BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères (France)
jose.bertin@ujf-grenoble.fr

Sylvain MAUGEAIS,
Geomestrische str. inder mathematik
SFB 478
Hittorfstr. 27
48149 Münster (Allemagne)
maugeais@math.uni-muenster.de