ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Alain TROESCH

Une résolution injective des puissances symétriques tordues

Tome 55, nº 5 (2005), p. 1587-1634.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_5_1587_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
55, 5 (2005), 1587–1634

UNE RÉSOLUTION INJECTIVE DES PUISSANCES SYMÉTRIQUES TORDUES

par Alain TROESCH

Introduction.

En 1997, Friedlander et Suslin [3] ont construit, en caractéristique 2, une résolution injective des puissances symétriques tordues $S^{n(j)}$, dans la catégorie $\mathcal{P}$ des foncteurs strictement polynomiaux de la catégorie des espaces vectoriels finis vers la catégorie des espaces vectoriels finis (sur $\mathbb{F}_2$). Leur but était de retrouver de manière élémentaire les expressions de certains groupes d'extensions (plus précisément de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}{}^*(\mathrm{Id}^{(r)}, S^{p^j(r-j)})$) qu'ils avaient calculés en toute caractéristique à l'aide de suites spectrales, et d'essayer d'obtenir certains résultats plus fins : par exemple, ils ont montré que les puissances symétriques tordues sont de dimension projective finie en caractéristique 2, résultat qui a été ensuite généralisé par Totaro [7] à tout foncteur et en toute caractéristique. Un tel résultat a par exemple permis à l'auteur [8, 9] de montrer que les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}{}^*(\mathrm{Id}^{(r)}, F^{(j)})$ présentent une certaine forme de périodicité.

Mots-clés : catégories de foncteurs, résolutions injectives, puissances symétriques, torsion de Frobenius, p-complexes.
Classification math. : 18G05, 18G10, 18G35, 55U05.

La construction de Friedlander et Suslin est basée sur la connaissance d'une résolution injective de $S^{*(1)}$ en caractéristique 2 :

$$S^{n(1)} \hookrightarrow S^{2n} \otimes S^0 \to S^{2n-1} \otimes S^1 \to \cdots \to S^0 \otimes S^{2n}. \tag{1}$$

Cette résolution était déjà bien connue auparavant, et a été utilisée dans plusieurs travaux, par exemple dans les travaux de Franjou, Lannes et Schwartz [2], dont le but était de déterminer, dans une autre catégorie de foncteurs $\mathcal{F}$, les extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$. Dans cet article aussi, l'utilisation de cette résolution servait de méthode alternative à la méthode utilisant des suites spectrales d'hypercohomologie, et valable en toute caractéristique.

Si l'utilisation de résolutions injectives des puissances symétriques tordues n'a servi jusqu'à présent qu'à établir des méthodes alternatives, c'est bien que ces résolutions n'étaient connues qu'en caractéristique 2, et ceci pour la raison essentielle qu'une résolution de $S^{*(1)}$ n'était connue qu'en caractéristique 2 : on ne pouvait espérer obtenir quoi que ce soit par cette méthode *en toute généralité de caractéristique*.

Nous remédions ici à ce problème en construisant le chaînon manquant, à savoir, pour tout nombre premier p, une résolution injective de $S^{*(1)}$ en caractéristique p. Le cas d'une torsion supérieure s'en déduit alors par une construction similaire à celle de Friedlander et Suslin.

En caractéristique 2, la résolution injective de $S^{*(1)}$ décrite par (1) est $S^* \otimes S^*$, avec une différentielle $\delta : S^i \otimes S^j \to S^{i-1} \otimes S^{j+1}$ définie par

$$\delta(x_1 \cdots x_i \otimes y_1 \cdots y_j) = \sum_{k=1}^{i} x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_i \otimes x_k y_1 \cdots y_j.$$

Par analogie, on peut définir, en caractéristique p, un objet gradué $(S^*)^{\otimes p}$, muni cette fois d'une « différentielle » $d = \sum 1 \otimes \cdots \otimes \delta \otimes \cdots \otimes 1$. La présence des guillemets est justifiée par le fait que d n'est pas à proprement parler une différentielle, puisque $d \circ d \neq 0$. Cependant $d^p = 0$: c'est ce qu'on appelle une *p-différentielle*. On dit alors que le foncteur gradué $(S^*)^{\otimes p}$ muni de la p-différentielle d est un *p-complexe*. De manière générale, à un p-complexe, on peut associer, pour tout $s \in \{1, \ldots, p-1\}$, des foncteurs de cohomologie $\mathrm{H}^*_{[s]}$ obtenus en considérant le quotient du noyau de d^s par l'image de d^{p-s}. On dira alors qu'un p-complexe (défini en degrés cohomologiques positifs ou nuls) est une p-résolution d'un foncteur F si pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$, $\mathrm{H}^i_{[s]}$ est nul si $i > 0$, et $\mathrm{H}^0_{[s]}$ vaut F. On notera qu'une p-résolution d'un foncteur F définit $p-1$ résolutions de F au sens usuel, en considérant, pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$, la résolution obtenue de la p-résolution en composant les différentielles entre elles par blocs de s et $p - s$ alternativement.

Nous obtenons :

Théorème 1. — *Le p-complexe $(S^*)^{\otimes p}$ muni de la p-différentielle d définie ci-dessus est une p-résolution injective de $S^{*(1)}$. Le degré cohomologique d'un élément de $S^{m_0} \otimes \cdots \otimes S^{m_{p-1}}$ est $\sum_{k=0}^{k=p-1} k \cdot m_k$, et la p-différentielle d augmente le degré cohomologique de 1. En considérant la partie de degré polynomial pn de $(S^*)^{\otimes p}$, on obtient une p-résolution de $S^{n(1)}$.*

La construction de Friedlander et Suslin s'adapte alors, et permet d'obtenir la généralisation au cas d'une torsion supérieure :

Théorème 2. — *On peut munir $(S^*)^{\otimes p^r}$ d'une p-différentielle d de sorte que l'on obtienne une p-résolution injective de $S^{*(r)}$. En considérant la partie de degré polynomial $p^r n$, on obtient une p-résolution injective de $S^{n(r)}$.*

Dans le contexte du théorème 2, le degré cohomologique d'un élément

$$X \in \bigotimes_{i_0, \dots, i_{r-1} \in \{0, \dots, p-1\}} S^{m_{i_0, \dots, i_{r-1}}}$$

est

$$\deg_{\mathrm{coh}}(X) = \sum_{i_0, \dots, i_{r-1}} (p^{r-1} i_0 + \cdots + p^0 i_{r-1}) \cdot m_{i_0, \dots, i_{r-1}},$$

et la p-différentielle d augmente le degré cohomologique de p^{r-1}.

Les résultats obtenus dans cet article ont été motivés par le calcul des groupes d'extensions $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}{}^*(A^*, B^*)$, dans le cas où A^* et B^* sont des puissances symétriques, extérieures ou divisées tordues. Certains de ces groupes d'extensions ont été déterminés par Franjou, Friedlander, Suslin et Scorichenko [1], à savoir les cas où :

– A^* est une algèbre divisée tordue, B^* est une algèbre divisée, extérieure ou symétrique tordue ;

– A^* est une algèbre extérieure tordue, B^* est une algèbre extérieure ou symétrique tordue ;

– A^* est une algèbre symétrique tordue, B^* est une algèbre symétrique tordue.

Nous espérons pouvoir calculer les autres cas en nous servant de résolutions injectives explicites des différents foncteurs en jeu. Ces résolutions devraient pouvoir se déduire de celle de la puissance symétrique tordue à l'aide de constructions bar.

L'article ci-présent se découpe comme suit.

1. Dans une première partie, nous faisons de très rapides rappels sur la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux ;
2. Nous introduisons ensuite, autour de la notion de p-complexe, tous les résultats homologiques nécessaires dans la suite.
3. La troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème 1.
4. Nous donnons enfin dans une quatrième partie la démonstration du théorème 2.

1. Très brefs rappels sur les foncteurs polynomiaux.

Dans cette section, nous rappelons les définitions élémentaires concernant les foncteurs strictement polynomiaux, et certaines de leurs propriétés essentielles pour ce travail. Cette section est largement inspirée des travaux de Friedlander et Suslin [3].

Dans ce qui suit, p désigne un nombre premier, sauf mention explicite du contraire.

1.1. Définitions.

Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{F}_p$, et soit $\mathcal{E}^f$ sa sous-catégorie pleine constituée des espaces de dimension finie. On note $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^f$ vers $\mathcal{E}$. Cette catégorie joue un rôle important en topologie algébrique, car, comme l'ont montré Henn, Lannes et Schwartz [4], cette catégorie possède une sous-catégorie pleine équivalente à un quotient de la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_p$.

Nous donnons quelques exemples classiques d'objets de cette catégorie $\mathcal{F}$:

- les puissances tensorielles T^n envoyant V sur $T^n(V) = V^{\otimes n}$;
- les puissances symétriques S^n obtenues en quotientant $T^n(V)$ par l'action du groupe symétrique par permutation des facteurs du produit tensoriel : $S^n(V) = (V^{\otimes n})/\mathfrak{S}_n$;
- les puissances divisées Γ^n obtenues en considérant les invariants de l'action précédente : $\Gamma^n(V) = (V^{\otimes n})/\mathfrak{S}_n$;
- les puissance extérieures, définies comme usuellement par $\Lambda^n(V) = T^n(V)/(x \otimes y = -y \otimes x)$ si $p \neq 2$, et $\Lambda^n(V) = S^n(V)/(x^2 = 0)$ si $p = 2$;
- le foncteur identité Id est un cas particulier des quatre séries précédentes, puisque $\mathrm{Id} = T^1 = S^1 = \Lambda^1 = \Gamma^1$.

Les algèbres tensorielle T^*, symétrique S^*, divisée Γ^* et extérieure Λ^* sont les foncteurs obtenus en prenant la somme directe respectivement des foncteurs T^n, S^n, Γ^n et Λ^n, pour $n \geqslant 0$.

On dispose dans la catégorie $\mathcal{F}$ d'une notion de dualisation $DF(V) = F(V^\sharp)^\sharp$, où le signe $\sharp$ désigne la dualisation dans la catégorie des espaces vectoriels. Par exemple, $DS^n = \Gamma^n$, $D\Gamma^n = S^n$ et $D\Lambda^n = \Lambda^n$. En particulier, $D\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$.

Étant donné deux espaces vectoriels V et W, on désigne par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(V, W)$ l'ensemble des morphismes (strictement) polynomiaux de V vers W, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes à plusieurs variables (données par les coordonnées dans une base de V) à valeurs dans l'espace W, invariants suivant le choix de la base. Plus formellement, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(V, W) = S^*(V^\sharp) \otimes W$. De cette écriture, on déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(V, W)$ est aussi l'ensemble des applications linéaires de $\Gamma^*(V)$ vers W, ou encore de $W^\sharp$ vers $S^*(V^\sharp)$.

Un morphisme strictement polynomial de V vers W est dit *homogène* de degré d s'il est dans $S^d(V^\sharp) \otimes W \subset S^*(V^\sharp) \otimes W$.

Une application strictement polynomiale de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(V, W)$ donne lieu, après oubli de la structure strictement polynomiale, à une application polynomiale au sens usuel.

Définition 1.1.1. — *Un foncteur strictement polynomial P est la donnée :*

- *d'une application $V \mapsto P(V)$ des objets de $\mathcal{E}^f$ vers les objets de $\mathcal{E}^f$,*
- *d'une application qui à tout couple (V,W) dans $(\mathcal{E}^f)^2$, associe un morphisme strictement polynomial $P_{V,W}$ de $\mathrm{Hom}(V,W)$ vers $\mathrm{Hom}(P(V),P(W))$, c'est-à-dire un objet de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(\mathrm{Hom}(V,W), \mathrm{Hom}(P(V),P(W)))$,*

telles que les conditions requises pour un foncteur usuel (après oubli de la structure strictement polynomiale sur les flèches) soient satisfaites, à savoir : compatibilité avec l'identité et avec la composition.

Définition 1.1.2. — *On dit qu'un foncteur strictement polynomial est* homogène de degré d *si tous les morphismes strictement polynomiaux $P_{V,W}$ sont homogènes de degré d.*

On désigne par $\mathcal{P}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs strictement polynomiaux, et les morphismes sont les transformations naturelles (dans le sens usuel, après oubli de la structure strictement polynomiale). On note $\mathcal{P}_d$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}$ constituée des foncteurs homogènes de degré d.

On notera que l'oubli de la structure strictement polynomiale induit un foncteur de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{F}$.

Les foncteurs T^n, S^n, Γ^n et Λ^n peuvent également être définis dans la catégorie $\mathcal{P}$. Pour ces différents foncteurs, la définition sur les flèches est intuitive. Les foncteurs T^n, S^n, Γ^n et Λ^n de $\mathcal{P}$ sont homogènes de degré n.

Un autre exemple important est la torsion de Frobenius Tw. Ce foncteur est défini comme étant l'identité sur les objets, et la puissance p-ième formelle sur les flèches, c'est-à-dire le morphisme de Frobenius $\mathrm{Hom}(V,W) \to S^p(\mathrm{Hom}(V,W))$ envoyant X sur X^p. Il s'agit donc d'un foncteur homogène de degré p. Si on oublie la structure strictement polynomiale, Tw est le foncteur identité, mais en tant qu'objets de la catégorie $\mathcal{P}$, Tw et Id sont distincts.

Soit F un objet de $\mathcal{P}$. En le composant à droite par la torsion de Frobenius Tw, on obtient un foncteur $F^{(1)} = F \circ Tw$, appelé *torsion de Frobenius du foncteur F*. En itérant cette construction, on obtient la n-ième torsion de Frobenius $F^{(n)} = F \circ Tw^n$. On notera que dans le contexte présent, $F \circ Tw = Tw \circ F$.

On notera également l'existence d'un produit tensoriel dans $\mathcal{P}$, défini par la formule $(F \otimes G)(V) = F(V) \otimes G(V)$.

La proposition suivante montre que tous les morphismes dans $\mathcal{P}$ sont homogènes. Par cela, on entend qu'il n'existe pas de morphisme non trivial entre deux foncteurs homogènes de degrés différents.

Proposition 1.1.3. (Friedlander, Suslin [3]). — *La catégorie $\mathcal{P}$ est la somme directe de ses sous-catégories pleines $\mathcal{P}_d$, $d \geqslant 0$.*

Cela a pour conséquence, par exemple, de pouvoir scinder un complexe en une somme directe de ses sous-complexes homogènes.

1.2. Injectifs et projectifs.

Voici maintenant une description, due à Friedlander et Suslin, des objets injectifs et projectifs de la catégorie $\mathcal{P}$.

Théorème 1.2.1. (Friedlander, Suslin [3]). — *Les foncteurs $S^{i_1} \otimes \cdots \otimes S^{i_k}$ forment un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{P}$. En se restreignant aux foncteurs de ce système dont le degré total est d, on obtient un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{P}_d$.*

Par dualisation, on obtient de même un système de générateurs projectifs de $\mathcal{P}$, donné par les foncteurs $\Gamma^{i_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{i_k}$.

Par conséquent, tout foncteur $F \in \mathcal{P}$ admet une résolution injective dont tous les termes sont des sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques. On appelle *S-résolution* de F une telle résolution. De plus, si F est homogène de degré d, F admet une résolution injective dont tous les termes sont des sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques de degré total d. La résolution injective de $S^{n(j)}$ du théorème 2 est de cette forme.

2. Rappels sur les p-complexes.

Le but de cette partie est de familiariser le lecteur avec la notion de p-complexe. On y expose les bases de l'algèbre homologique des p-complexes, et on prouve une formule de type « Künneth » dans un cas particulièrement simple. Cette section est largement inspirée d'un exposé de M. Wambst à l'Université Paris 13 en mars 2003. Sur ce sujet, on pourra consulter par exemple les travaux de Kassel et Wambst [6], et de Kapranov [5].

2.1. Définitions – Cohomologies.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et p un entier (non nécessairement premier).

DÉFINITION 2.1.1. — *Un* p-complexe *(de cochaînes)* $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ *dans* $\mathcal{A}$ *est un objet gradué de* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{C}^\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}^n,$$

muni d'un morphisme de degré 1, *(c'est-à-dire d'une famille de morphismes* $d : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^{n+1}$*) tel que* $d^p = 0$*. Un morphisme vérifiant ces propriétés est appelé* p*-différentielle de* $\mathcal{C}^\bullet$*.*

Exemple 2.1.2 . — Un 2-complexe est un complexe au sens usuel.

Exemple 2.1.3. — Si $q \leqslant p-1$, alors une chaîne de q isomorphismes

$$\mathcal{C}^\bullet \ : \ 0 \longrightarrow C^1 \xrightarrow{\cong} C^2 \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} C^{q+1} \longrightarrow 0$$

est un p-complexe.

On définit les notions de *morphisme de* p*-complexes* et de *suite exacte courte de* p*-complexes* de manière similaire au cas des complexes usuels.

Soit $(\mathcal{C}, d)$ un p-complexe. Pour tout entier s strictement compris entre 0 et p, on peut définir des complexes au sens usuel, en considérant comme différentielle une alternance des morphismes d^s et d^{p-s} :

$$\cdots \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^n \xrightarrow{d^s} \mathcal{C}^{n+s} \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^{n+p} \xrightarrow{d^s} \cdots$$

Pour chaque entier s, on obtient de la sorte des complexes $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]}$ (non tous distincts), définis pour tout $i \in \mathbb{Z}$ par :

$$\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]} \ : \ \cdots \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^{kp+i} \xrightarrow{d^s} \mathcal{C}^{kp+i+s} \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^{(k+1)p+i} \xrightarrow{d^s} \cdots$$

Cette famille de complexes vérifie les relations suivantes :

1. $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]} = \mathcal{C}^\bullet_{[s,p+i]}$,

2. $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]} = \mathcal{C}^\bullet_{[p-s,i+s]}$.

En considérant les complexes $\mathcal{C}^\bullet_{[s,-]}$, on peut définir pour tout entier $s \in \{1,\dots,p-1\}$ des groupes de cohomologie pour le p-complexe $\mathcal{C}^\bullet$:

Définition 2.1.4. — *La s-cohomologie de degré i, notée $\mathrm{H}^i_{[s]}$, est la cohomologie de degré i du complexe $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]}$. Autrement dit :*

$$\mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = \frac{\operatorname{Ker}\left(d^s : \mathcal{C}^i \to \mathcal{C}^{i+s}\right)}{\operatorname{Im}\left(d^{p-s} : \mathcal{C}^{i-p+s} \to \mathcal{C}^i\right)}$$

On remarquera que la notation utilisée ici pour désigner la s-cohomologie diffère légèrement de celle employée par Kassel et Wambst [6].

Exemple 2.1.5. — Soit $\mathcal{C}^\bullet \ : \ 0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow 0$ un p-complexe nul partout sauf en degré 0. Alors,

$$\forall\ s \in \{1,\dots,p-1\},\ \mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = \begin{cases} C & \text{si} \quad i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 2.1.6. — Soit $q \in \{1,\dots,p-1\}$, et soit

$$\mathcal{C}^\bullet \ : \ 0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\cong} C^2 \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} C^q \longrightarrow 0$$

une chaîne de q isomorphismes. Alors :

$$\mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = \begin{cases} C^i & \text{si } q-p+s < i < s, 0 \leqslant i \leqslant q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, la cohomologie d'une chaîne de $p-1$ isomorphismes est nulle partout.

La définition de $\mathrm{H}^*_{[s]}$ en termes des complexes $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]}$ est particulièrement utile pour obtenir certaines des propriétés élémentaires sur la cohomologie des p-complexes à partir des propriétés usuelles concernant la cohomologie des complexes usuels. Par exemple, pour toute suite exacte courte de p-complexes $0 \to \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet \to \mathcal{C}^\bullet \to 0$, et tout $s \in \{1, \ldots, p-1\}$, on obtient des suites exactes longues de cohomologie :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{i-p+s}_{[p-s]}(\mathcal{C}^\bullet) \arrow[dll] \\
\mathrm{H}^{i}_{[s]}(\mathcal{A}^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^{i}_{[s]}(\mathcal{B}^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^{i}_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) \arrow[dll] \\
\mathrm{H}^{i+s}_{[p-s]}(\mathcal{A}^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^{i+s}_{[p-s]}(\mathcal{B}^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^{i+s}_{[p-s]}(\mathcal{C}^\bullet) \arrow[dll] \\
\mathrm{H}^{i+p}_{[s]}(\mathcal{A}^\bullet) \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

2.2. Complexes p-acycliques – p-résolutions.

En général, les différents groupes de cohomologie de même degré n'ont pas de raison d'être égaux (considérer l'exemple 2.1.6). Cependant, c'est vrai dans le cas particulier suivant :

Théorème 2.2.1 (Kapranov [5]). — *S'il existe un entier $s \in \{1, \ldots, p-1\}$ tel que $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = 0$, alors $\mathrm{H}^*_{[t]}(\mathcal{C}^\bullet) = 0$ pour tout $t \in \{1, \ldots, p-1\}$.*

Définition 2.2.2. — *Un p-complexe vérifiant les hypothèses du théorème 2.2.1 est dit p-acyclique.*

Un p-complexe $\mathcal{C}^\bullet$ est donc p-acyclique si les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet)$ sont tous nuls, pour au moins un entier $s \in \{1, \ldots, p-1\}$. Dans ce cas, ils sont nuls pour tous les entiers $s \in \{1, \ldots, p-1\}$.

Exemple 2.2.3. — Un 2-complexe 2-acyclique est un complexe acyclique au sens usuel.

Exemple 2.2.4. — Une chaîne de $p-1$ isomorphismes est p-acyclique :

$$0 \longrightarrow C^1 \xrightarrow{\cong} C^2 \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} C^p \longrightarrow 0.$$

Par exemple, si $p = 2$, $0 \to A \xrightarrow{\cong} B \to 0$ est acyclique.

On définit maintenant l'analogue de résolutions dans le cas de p-complexes.

DÉFINITION 2.2.5. — *Une p-résolution d'un objet F est un p-complexe $\mathcal{C}^\bullet$ tel que*

1. $\mathcal{C}^i = 0$ *si* $i < 0$,
2. *pour tout* $s \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$\mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = \begin{cases} F & \text{si} \quad i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une p-résolution est dite injective si pour tout i, $\mathcal{C}^i$ est un objet injectif de la catégorie $\mathcal{A}$.

Exemple 2.2.6. — Le complexe défini dans l'exemple 2.1.5 est une résolution de C^0. C'est une résolution injective si de plus C^0 est injectif.

Remarque 2.2.7. — Contrairement à la p-acyclicité, il est nécessaire de considérer, pour la définition des p-résolutions, la cohomologie relative à *tous* les entiers $s \in \{1, \dots, p-1\}$.

Exemple 2.2.8. — Soit $p = 3$, et soit $\mathcal{C}^\bullet \ : \ 0 \to C^0 \xrightarrow{\cong} C^1 \to 0$. Alors

$$\mathrm{H}^i_{[2]}(\mathcal{C}^\bullet) = \begin{cases} C^0 & \text{si} \quad i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cependant, $\mathcal{C}^\bullet$ n'est pas une p-résolution de C^0. En effet, $\mathrm{H}^0_{[1]}(\mathcal{C}^\bullet) = 0$.

Remarque 2.2.9. — Dans le cas usuel, $\mathcal{C}^\bullet : C^0 \to C^1 \to \cdots$ est une résolution injective de F si et seulement s'il existe une injection $F \hookrightarrow C^0$ telle que $F \hookrightarrow \mathcal{C}^\bullet$ soit un complexe acyclique. Ce n'est pas le cas pour les p-complexes, comme le montre l'exemple 2.2.6. La proposition analogue dans le cas des p-complexes est la suivante :

Proposition 2.2.10. — *Le p-complexe $\mathcal{C}^\bullet : C^0 \to C^1 \to \cdots$ est une p-résolution de F si et seulement s'il existe une injection $i : F \hookrightarrow C^0$ telle que*

$$0 \longrightarrow \underbrace{F \xrightarrow{=} \cdots \xrightarrow{=} F}_{p-1 \text{ termes égaux à } F} \xrightarrow{i} C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \tag{2}$$

est un p-complexe p-acyclique.

Remarque 2.2.11. — Pour que (2) définisse effectivement un p-complexe, il faut et il suffit que la composition $F \hookrightarrow C^0 \to C^1$ soit nulle.

Remarque 2.2.12. — À partir d'une p-résolution $\mathcal{C}^\bullet$ de F, on obtient $p-1$ résolutions de F au sens usuel : pour tout $s \in \{1, \dots p-1\}$,

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^s} C^s \xrightarrow{d^{p-s}} C^p \xrightarrow{d^s} C^{p+s} \xrightarrow{d^{p-s}} C^{2p} \longrightarrow \cdots$$

est une résolution injective de F.

2.3. Théorème de Künneth pour les p-complexes.

Dans ce qui suit, on suppose que p est un nombre premier, et que la catégorie $\mathcal{A}$ est une catégorie $\mathbb{F}_p$-linéaire munie d'un produit tensoriel (par exemple les catégories de foncteurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ définies plus haut). On se donne deux p-complexes $(\mathcal{B}^\bullet, d_\mathcal{B})$ et $(\mathcal{C}^\bullet, d_\mathcal{C})$. On suppose dans ce paragraphe que $\mathcal{B}^\bullet$ et $\mathcal{C}^\bullet$ sont nuls en degrés strictement négatifs (ou au moins en degrés suffisamment petits). Notre but est de définir une structure de p-complexe sur $\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet$, et de déterminer dans des cas simples les cohomologies de ce p-complexe en fonction des cohomologies des p-complexes $\mathcal{B}^\bullet$ et $\mathcal{C}^\bullet$.

Comme dans le cas usuel, $\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet$ est gradué par le degré total :

$$(\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet)^n = \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{B}^i \otimes \mathcal{C}^j.$$

On définit alors sur $\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet$ un morphisme de degré 1 par

$$d = d_\mathcal{B} \otimes 1 + 1 \otimes d_\mathcal{C}.$$

Les morphismes $d_\mathcal{B} \otimes 1$ et $1 \otimes d_\mathcal{C}$ commutent, donc, puisque p est premier,

$$d^p = (d_\mathcal{B} \otimes 1)^p + (1 \otimes d_\mathcal{C})^p = d_\mathcal{B}^p \otimes 1 + 1 \otimes d_\mathcal{C}^p = 0.$$

Ainsi, $(\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet, d)$ est un p-complexe.

Nous donnons un résultat «de type Künneth» dans le cas particulièrement simple où $\mathcal{B}^\bullet$ et $\mathcal{C}^\bullet$ sont des résolutions de deux foncteurs F et G de $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{P}$.

Théorème 2.3.1. — *Soit F et G deux foncteurs dans $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{B}^\bullet$ et $\mathcal{C}^\bullet$ des p-résolutions de F et G respectivement. Alors $\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet$ est une p-résolution de $F \otimes G$.*

Le cas particulier de $F = G = 0$ donne :

Corollaire 2.3.2. — *Soit $\mathcal{B}^\bullet$ et $\mathcal{C}^\bullet$ des p-complexes p-acycliques dans $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet$ est aussi p-acyclique.*

Démonstration du théorème 2.3.1. — Il suffit de montrer que

$$0 \longrightarrow \underbrace{F \otimes G \xrightarrow{=} \cdots \xrightarrow{=} F \otimes G}_{p-1 \text{ termes égaux à } F\otimes G} \longrightarrow \bigoplus_{i+j=0} \mathcal{B}^i \otimes \mathcal{C}^j \longrightarrow \bigoplus_{i+j=1} \mathcal{B}^i \otimes \mathcal{C}^j \longrightarrow \cdots$$

est p-acyclique. Pour cela, d'après le théorème de Kapranov, il suffit de montrer que l'homologie $\mathrm{H}^*_{[p-1]}$ de ce complexe est nulle. Cela est le cas si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\mathrm{H}^i_{[p-1]}(\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{C}^*) = 0$ si $i > 0$;

(ii) $\mathrm{H}^0_{[p-1]}(\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{C}^*) = F \otimes G$;

(iii) la composition $F \otimes G \to \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^0 \to \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{C}^0$ est nulle.

Des conditions similaires sont satisfaites pour chacune des résolutions $\mathcal{B}^\bullet$ de F et $\mathcal{C}^\bullet$ de G. Ainsi, les compositions $F \otimes \mathcal{B}^0 \to \mathcal{B}^1$ et $G \otimes \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1$ sont nulles, et par conséquent, le point (iii) est vérifié.

Nous vérifions maintenant le point (ii). Le point (iii) étant vérifié, il suffit de montrer l'inclusion

$$\operatorname{Ker}\left(\mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d^{p-1}} \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^{p-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}^{p-1} \otimes \mathcal{C}^0\right) \subset F \otimes G.$$

Ceci est une inclusion de foncteurs. Il suffit de la montrer après spécialisation à tout espace vectoriel V. Soit $x \in \mathcal{B}^0(V) \otimes \mathcal{C}^0(V)$ tel que $d^{p-1}(x)=0$. En particulier $(d_{\mathcal{B}}^{p-1} \otimes id)(x) = 0$. On peut écrire x sous la forme $\lambda_{i,j} e_i \otimes f_j$, où (e_i) est une base de $\mathcal{B}^0(V)$, et (f_i) est une base de $\mathcal{C}^0(V)$. Alors

$$0 = d_{\mathcal{B}}^{p-1} \otimes id(x) = \sum_j \sum_i \lambda_{i,j} d_{\mathcal{B}}^{p-1}(e_i) \otimes f_j.$$

Par conséquent, pour tout j, $d_{\mathcal{B}}^{p-1}\left(\sum_i \lambda_{i,j} e_i\right) = 0$, et donc $\sum_i \lambda_{i,j} e_i$ est dans $F(V)$, puisque $\mathrm{H}^0_{[p-1]}(\mathcal{B}^\bullet) = F$. Ainsi, x est dans $F(V) \otimes \mathcal{C}^0(V)$: on peut donc écrire x sous la forme $\mu_{k,j} g_k \otimes f_j$, où (g_k) est une base de $F(V)$. Un raisonnement similaire montre alors que pour tout k, $\sum_j \mu_{k,j} f_k$ est dans $G(V)$, et par conséquent, $x \in F(V) \otimes G(V)$. Cela montre le point (ii).

Il reste à montrer le point (i). Soit donc $n > 0$, et soit

$$x = x_0 + \cdots + x_n \ \in \ \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}^n \otimes \mathcal{C}^0, \text{avec } x_i \in \mathcal{B}^i \otimes \mathcal{C}^{n-i},$$

représentant une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet)$. En particulier, $d^{p-1}(x) = 0$. On va démontrer que la classe de cohomologie représentée par x est forcément nulle. On montre dans un premier temps qu'il existe $y \in \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^n$ représentant la même classe de cohomologie que x dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet)$. Pour cela, on montre par récurrence descendante sur $k \in \{0, \dots, n\}$ qu'il existe

$$z = z_0 + \cdots + z_k \ \in \ \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}^k \otimes \mathcal{C}^{n-k},$$

avec $z_i \in \mathcal{B}^i \otimes \mathcal{C}^{n-i}$, tel que x et z représentent la même classe dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet)$. L'initialisation, pour $k = n$, est la donnée initiale de x, et la conclusion, pour $k = 0$, donne l'existence de y.

Supposons la propriété vérifiée au rang $k > 0$, $k \leqslant n$. Alors, il existe

$$t = t_0 + \cdots + t_k \ \in \ \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}^k \otimes \mathcal{C}^{n-k},$$

avec $t_i \in \mathcal{B}^i \otimes \mathcal{C}^{n-i}$, tel que x et t représentent la même classe dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet)$. Puisque $d^{p-1}(t) = 0$, en particulier, $(d_{\mathcal{B}}^{p-1} \otimes id)(t_k) = 0$. Un argument similaire à celui utilisé pour le point (ii) montre alors que

$$t_k \in \operatorname{Ker}\left(d_{\mathcal{B}}^{p-1} : \mathcal{B}^k \to \mathcal{B}^{k+p-1}\right) \otimes \mathcal{C}^{n-k}.$$

Or, $\mathrm{H}^i_{[p-1]}(\mathcal{B}^\bullet) = 0$ si $i > 0$; donc, puisque $k > 0$,

$$\begin{aligned} t_k &\in \operatorname{Im}\left(d_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}^{k-1} \to \mathcal{B}^{k+p-1}\right) \otimes \mathcal{C}^{n-k} \\ &= \operatorname{Im}\left(d_{\mathcal{B}} \otimes id : \mathcal{B}^{k-1} \otimes \mathcal{C}^{n-k} \to \mathcal{B}^{k+p-1} \otimes \mathcal{C}^{n-k}\right). \end{aligned}$$

Soit $t' \in \mathcal{B}^{k-1} \otimes \mathcal{C}^{n-k}$ tel que $(d_{\mathcal{B}} \otimes id)(t') = t_k$. On définit, pour $i < k$, $z_i \in \mathcal{B}^i \otimes \mathcal{C}^{n-i}$ de la manière suivante :

$$z_i = \begin{cases} t_i & \text{si } 0 \leqslant i < k-1; \\ t_i - (id \otimes d_{\mathcal{C}})(t') & \text{si } i = k-1. \end{cases}$$

Alors $z = z_1 + \cdots + z_{k-1}$ vérifie $t = z + d(t')$. Ainsi, z représente la même classe que t, et donc que x dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{B}^\bullet \otimes \mathcal{C}^\bullet)$. Cela achève la récurrence.

On est donc ramené au cas où $x = y \in \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^n$. Il s'agit de trouver $u \in \mathcal{B}^0 \otimes \mathcal{C}^{n-1}$ tel que $d(u) = y$. Un raisonnement similaire à la démonstration du point (ii) montre que

$$y \in F \otimes \mathrm{Im}\left(\mathcal{C}^{n-1} \to \mathcal{C}^n\right) = \mathrm{Im}\left(id \otimes d_{\mathcal{C}} : F \otimes \mathcal{C}^{n-1} \to F \otimes \mathcal{C}^n\right).$$

Ainsi, $y = (id \otimes d_{\mathcal{C}})(\sum f_i \otimes b_i)$, avec $f_i \in F$, $b_i \in \mathcal{C}^{n-1}$. Soit f'_i l'image de f_i dans $\mathcal{B}^0$, et $u = \sum f'_i \otimes b_i$. Alors, d'après le point (iii) pour le complexe $\mathcal{B}^\bullet$, $d_{\mathcal{B}}(f'_i) = 0$, donc $y = d(u)$, et la classe de cohomologie représentée par y (et donc par x) est nulle. Cela démontre le point (i).

3. Le cas d'une torsion unique.

Le but de cette partie est de construire une S-résolution explicite de la puissance symétrique tordue $S^{n(1)}$ dans la catégorie $\mathcal{P}$, c'est-à-dire une résolution injective de $S^{n(1)}$ dont tous les termes sont des sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques de degré total np.

3.1. Énoncé.

Dans le cas où la caractéristique p du corps de base est 2, on dispose d'une résolution injective bien connue de $S^{n(1)}$ (voir [2, 3]) :

$$S^{n(1)} \hookrightarrow S^{2n} \otimes S^0 \to \cdots \to S^{2n-k} \otimes S^k \xrightarrow{\delta} S^{2n-k-1} \otimes S^{k+1} \to \cdots \to S^0 \otimes S^{2n}.$$

L'inclusion $S^{n(1)} \hookrightarrow S^{2n}$ est le morphisme de Frobenius $x^{(1)} \mapsto x^2$, et la différentielle δ est définie par :

$$(3) \quad \delta(x_1 \cdots x_{2n-k} \otimes y_1 \cdots y_k) = \sum_{i=1}^{2n-k} x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_{2n-k} \otimes x_i y_1 \cdots y_k.$$

En d'autres termes, $(S^* \otimes S^*, \delta)$ est une résolution injective de $S^{*(1)}$. Le degré cohomologique de $x \otimes y \in S^{2n-k} \otimes S^k$ est k.

Nous généralisons cette construction dans le cas où la caractéristique p du corps de base est un nombre premier *quelconque*. On note toujours δ le morphisme défini en caractéristique p par l'équation (3). On peut munir le foncteur $(S^*)^{\otimes p}$ d'un endomorphisme d défini par :

$$d = \sum_{i=0}^{p-2} \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{i\,\text{facteurs}} \otimes \delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{p-2-i\,\text{facteurs}};$$

c'est-à-dire

$$d(X_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-2} X_0 \otimes \cdots \otimes X_{i-1} \otimes \delta(X_i \otimes X_{i+1}) \otimes X_{i+2} \otimes \cdots \otimes X_{p-1}.$$

Définition 3.1.1. — *Soit $X \in S^{i_0} \otimes \cdots \otimes S^{i_{p-1}}$. Le degré total de X est $i_0 + \cdots + i_{p-1} = \sum i_k$. Le degré cohomologique de X est $0 \cdot i_0 + \cdots + (p-1) \cdot i_{p-1} = \sum k \cdot i_k$.*

L'endomorphisme d préserve le degré total, et augmente le degré cohomologique de 1.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que d est une dérivation pour le produit de $(S^*)^{\otimes p}$ défini par

$$(X_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1}) \cdot (Y_0 \otimes \cdots \otimes Y_{p-1}) = X_0 \cdot Y_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1} \cdot Y_{p-1},$$

et est une p-différentielle, ces deux propriétés étant démontrées en toute généralité dans la partie 4 (propositions 4.1.1 et 4.1.5).

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal résultat de cette section et de cet article.

Théorème 3.1.2. — *Le p-complexe $((S^*)^{\otimes p}, d)$ est une p-résolution injective de $S^{*(1)}$; l'injection de $S^{*(1)}$ dans $((S^*)^{\otimes p}, d)$ est donnée par le morphisme de Frobenius $x^{(1)} \mapsto x^p$ sur le premier facteur du produit tensoriel.*

Cette p-résolution se scinde suivant le degré total. Soit $\mathcal{S}_n^\bullet$ le p-complexe défini par

$$\mathcal{S}_n^j = \bigoplus_{\substack{\sum i_k = n \\ \sum k i_k = j}} S^{i_0} \otimes \cdots \otimes S^{i_{p-1}}, \tag{4}$$

la p-différentielle $\mathcal{S}_n^j \to \mathcal{S}_n^{j+1}$ étant la restriction de d. Alors, le théorème 3.1.2 se réécrit :

Théorème 3.1.3. — *Pour tout $n \geqslant 0$ non multiple de p, le p-complexe $(\mathcal{S}_n^\bullet, d)$ est p-acyclique. Par ailleurs, si $n = pk$, pour $k \geqslant 0$, alors $(\mathcal{S}_n^\bullet, d)$ est une p-résolution injective de $S^{k(1)}$.*

La fin de cette section est consacrée à la démonstration de ce théorème.

3.2. Comment se ramener au cas d'un espace de dimension 1.

La première étape consiste à se ramener d'un problème *fonctoriel* à un problème *vectoriel*. Montrer que $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*, d)$ est une résolution de $S^{*(1)}$ revient à montrer que pour tout espace vectoriel de dimension finie V, le p-complexe vectoriel $(S^*(V) \otimes \cdots \otimes S^*(V), d(V))$ est une p-résolution (dans la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$) de $S^{*(1)}(V)$. On montre qu'en fait il n'est pas nécessaire de vérifier cette propriété pour tous les espaces vectoriels de dimension finie V, mais juste pour $\mathbb{F}_p$:

Proposition 3.2.1. — *Si $(S^*(\mathbb{F}_p) \otimes \cdots \otimes S^*(\mathbb{F}_p), d(\mathbb{F}_p))$ est une p-résolution de $S^{*(1)}(\mathbb{F}_p)$, alors $(S^*(V) \otimes \cdots \otimes S^*(V), d(V))$ est une p-résolution de $S^{*(1)}(V)$ pour tout espace vectoriel de dimension finie V, et par conséquent $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*, d)$ est une résolution de $S^{*(1)}$ dans la catégorie $\mathcal{P}$.*

Démonstration. — L'idée de cette réduction est la même que celle utilisée pour le cas classique $p = 2$ (voir par exemple Franjou, Lannes, Schwartz [2]). Soit V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$(S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(V \oplus W) = (S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(V) \otimes (S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(W). \tag{5}$$

Cela provient de l'isomorphisme classique $S^*(V \oplus W) \cong S^*(V) \otimes S^*(W)$.

L'équation (5) est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués *différentiels* (vérification sans difficulté). En appliquant le théorème de Künneth (théorème 3.2.1) à l'équation (5), si $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(V)$ et $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(W)$ sont des p-résolutions respectivement de $S^{*(1)}(V)$ et $S^{*(1)}(W)$, alors $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(V \oplus W)$ est une p-résolution de $S^{*(1)}(V) \otimes S^{*(1)}(W) \cong S^{*(1)}(V \oplus W)$. Ainsi, le cas de $V = \mathbb{F}_p$ fournit le cas de tous les espaces vectoriels de dimension finie. □

3.3. Quelques p-complexes vectoriels.

D'après la proposition 3.2.1, il suffit, pour montrer le théorème 3.1.3 (et donc le théorème 3.1.2), de montrer que pour tout n non multiple de p, $\mathcal{S}_n^\bullet(\mathbb{F}_p)$ est p-acyclique, et que pour $n = kp$, $\mathcal{S}_n^\bullet(\mathbb{F}_p)$ est une p-résolution de $S^{k(1)}(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$.

Pour simplifier, on note $\mathcal{C}_n^\bullet$ le p-complexe vectoriel $\mathcal{S}_n^\bullet(\mathbb{F}_p)$. Le p-complexe $\mathcal{C}_n^\bullet$ admet la description vectorielle suivante :

– Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathcal{C}_n^\ell$ admet une base d'éléments notés $[a_0, \ldots, a_{p-1}]$, pour tout p-uplet $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{N}^p$ tel que $\sum a_k = n$ et $\sum k \cdot a_k = \ell$:

$$\mathcal{C}_n^\ell = \bigoplus_{\substack{\sum a_k = n \\ \sum k a_k = \ell}} \mathbb{F}_p \cdot [a_0, \ldots, a_{p-1}].$$

Plus précisément,

$$\mathbb{F}_p \cdot [a_0, \ldots, a_{p-1}] = S^{a_0}(\mathbb{F}_p) \otimes \cdots \otimes S^{a_{p-1}}(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p.$$

– La p-différentielle $d_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}_n^\bullet$ est décrite sur les éléments de cette base par :

$$d_{\mathcal{C}}([a_1, \ldots, a_{p-1}]) = \sum_{k=0}^{p-2} a_k \cdot [a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1} + 1, a_{k+2}, \ldots, a_{p-1}].$$

On introduit d'autres p-complexes vectoriels $\mathcal{D}_n^\bullet$ définis de la manière suivante :

– L'espace vectoriel $\mathcal{D}_n^\ell$ admet une base formée d'éléments $[[b_1,\dots,b_n]]$ tels que $0\leqslant b_k\leqslant p-1$ et $b_1+\dots+b_n=\ell$.

– La p-différentielle $d_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}_n^\bullet$ est décrite par la formule suivante :

$$d_{\mathcal{D}}([[b_1,\dots,b_n]])=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ b_k<p-1}}[[b_1,\dots,b_{k-1},b_k+1,b_{k+1},\dots,b_n]]$$

Cette expression définit bien une p-différentielle. En effet,

$$d_{\mathcal{D}}^p([[b_1,\dots,b_n]])=\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_k\in\mathbb{N}\\ b_k+\beta_k\leqslant p-1\\ \beta_1+\dots+\beta_k=p}}\binom{p}{\beta_1,\dots,\beta_n}\cdot[[b_1+\beta_1,\dots,b_n+\beta_n]]$$

Le coefficient multinomial provient du choix de l'ordre dans lequel on ajoute 1 à une des coordonnées de $[[b_1,\dots,b_n]]$. Ce coefficient est nul *modulo* p sauf si un des β_k est égal à p, ce qui est impossible du fait de l'inégalité $b_k+\beta_k\leqslant p-1$.

On décrit ci-dessous le lien existant entre les complexes $\mathcal{C}_n^\bullet$ et $\mathcal{D}_n^\bullet$. Les bases, formée des éléments $[a_0,\dots,a_{p-1}]$ d'une part, et formée des éléments $[[b_1,\dots,b_n]]$ d'autre part peuvent toutes deux être décrites en terme de *répartitions de boules*.

On considère n-boules numérotées de 1 à n, disposées dans p cases numérotées de 0 à $p-1$. À une boule k, on associe son *poids*, obtenu en multipliant k par la position de la boule. Le poids total de la répartition est la somme des poids des n boules. À une telle répartition de poids ℓ, on peut associer

– un élément $[a_0,\dots,a_{p-1}]$ de la base de $\mathcal{C}_n^\ell$, en définissant a_k comme le nombre de boule dans la case k ;

– un élément $[[b_1,\dots,b_n]]$ de la base de $\mathcal{D}_n^\ell$, en définissant b_i comme la position de la boule i.

Dans les deux cas, les différentielles $d_{\mathcal{C}}$ et $d_{\mathcal{D}}$ proviennent de la même opération sur les boules, consistant à prendre la combinaison formelle de toutes les répartitions obtenues en avançant une boule de la répartition de départ (on ne peut pas avancer les boules de la case $p-1$).

À ce niveau apparaît bien le lien existant entre les p-complexes $\mathcal{C}_n^\bullet$ et $\mathcal{D}_n^\bullet$ ainsi que la différence fondamentale entre ces deux complexes : contrairement à $\mathcal{D}_n^\bullet$, $\mathcal{C}_n^\bullet$ ne prend pas en compte *l'ordre des boules*.

On formalise la discussion précédente en définissant un morphisme de p-complexes φ entre $\mathcal{D}_n^\bullet$ et $\mathcal{C}_n^\bullet$ par

$$\varphi([[b_1,\dots,b_n]]) = \begin{cases} [a_0,\dots,a_{p-1}] \\ a_k = \mathrm{Card}\{i|b_i = k\}. \end{cases} \tag{6}$$

Exemple 3.3.1. — Pour $p=5$, $n=4$, $\varphi([[2,2,3,0]]) = [1,0,2,1,0]$.

L'équation (6) définit bien un morphisme de p-complexes. En effet, soit $[[b_1,\dots,b_n]]$ un élément de base de $\mathcal{D}_n^\ell$, et $[a_0,\dots,a_{p-1}] = \varphi([[b_1,\dots,b_n]])$ l'élément correspondant de la base de $\mathcal{C}_n^\ell$. Alors, si $b_i < p-1$, l'image de $[[b_1,\dots,b_i+1,\dots,b_n]]$ par φ est $[a_1,\dots,a_{b_i}-1,a_{b_i+1}+1,\dots,a_{p-1}]$. Ainsi, pour tout élément de base $[[b_1,\dots,b_n]]$,

$$\begin{aligned}
\varphi(d_{\mathcal{D}}([[b_1,\dots,b_n]])) &= \sum_{k=0}^{p-2} \sum_{i \text{ tel que } b_i=k} [a_0,\dots,a_k-1,a_{k+1}+1,\dots,a_{p-1}] \\
&= \sum_{k=0}^{p-2} a_k \cdot [a_0,\dots,a_k-1,a_{k+1}+1,\dots,a_{p-1}] \\
&= d_{\mathcal{D}}([a_0,\dots,a_{p-1}]) \\
&= d_{\mathcal{D}}(\varphi([[b_1,\dots,b_n]])).
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.2. — *Le morphisme φ est surjectif.*

Démonstration. — On va en construire un scindement ψ. Ce scindement ψ est défini terme à terme, mais n'est pas un morphisme de p-complexes : il ne commute pas avec les différentielles. On définit ψ sur les éléments de base $[a_0,\dots,a_{p-1}]$ de $\mathcal{C}_n^\ell$ par :

$$\psi([a_0,\dots,a_{p-1}]) = [[\underbrace{0,\dots,0}_{a_0 \text{ termes}}, \underbrace{1,\dots,1}_{a_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{p-1,\dots,p-1}_{a_{p-1} \text{ termes}}]].$$

Alors, $\varphi \circ \psi = id$, ce qui prouve la surjectivité de φ. □

Pour mémoire, on énonce :

Lemme 3.3.3. — *$\varphi \circ \psi = id$.*

Le morphisme d'espaces vectoriels gradués ψ n'est pas un morphisme de p-complexes. En revanche, il vérifie les propriétés suivantes.

Lemme 3.3.4. — *La relation suivante est vérifiée : $\psi\varphi d_{\mathcal{D}}\psi = \psi d_{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. — L'opération $\psi\varphi$ sur un élément $[[b_1,\ldots,b_n]]$ de $\mathcal{D}_n^\ell$ consiste à ordonner les parts de $[[b_1,\ldots,b_n]]$. Par exemple, $\psi\varphi([[3,0,1,1]]) = [[0,1,1,3]]$. Or,

$$d_{\mathcal{D}}\psi([a_0,\ldots,a_{p-1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{a_k}[[\underbrace{0,\ldots,0}_{a_0\text{ termes}},\ldots,\underbrace{k,\ldots,\overbrace{k+1}^{\substack{i-\text{ème terme } k\\ \text{remplacé par } k+1}},\ldots,k}_{a_k\text{ termes}},\ldots,\underbrace{p-1,\ldots,p-1}_{a_{p-1}\text{ termes}}]].$$

Par conséquent,

$$\psi\varphi d\psi([a_0,\ldots,a_{p-1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} a_k\cdot[[\underbrace{0,\ldots,0}_{a_0\text{ termes}},\ldots,\underbrace{k,\ldots,k}_{a_k-1\text{ termes}},\underbrace{k+1,\ldots,k+1}_{a_{k+1}+1\text{ termes}},\ldots,\underbrace{p-1,\ldots,p-1}_{a_{p-1}\text{ termes}}]].$$

Cette expression est clairement égale à $\psi d_{\mathcal{C}}([a_0,\ldots,a_{p-1}])$. □

Lemme 3.3.5. — *La relation suivante est vérifiée : $\varphi d_{\mathcal{D}}\psi\varphi = \varphi d_{\mathcal{D}}$.*

Démonstration. — Soit $[[b_1,\ldots,b_n]]$ un élément de $\mathcal{D}_n^\ell$, et $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ telle que $b_{\sigma(1)}\leqslant\cdots\leqslant b_{\sigma(n)}$. Alors $\psi\varphi([[b_1,\ldots,b_n]]) = [[b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(n)}]]$, et par conséquent,

$$\begin{aligned}d_{\mathcal{D}}\psi\varphi([[b_1,\ldots,b_n]]) &= \sum_{k=1}^{n}[[b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(k)}+1,\ldots b_{\sigma(n)}]]\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}[[b_{\sigma(1)},\ldots,\underbrace{b_\ell+1}_{\text{en position }\sigma^{-1}(\ell)},\ldots b_{\sigma(n)}]].\end{aligned}$$

Or, $[[b_{\sigma(1)},\ldots,b_\ell+1,\ldots b_{\sigma(n)}]]$ et $[[b_1,\ldots,b_\ell+1,\ldots,b_n]]$ ne diffèrent que par l'ordre des éléments ; par conséquent, en appliquant φ à ces deux termes, on obtient le même élément de $\mathcal{C}_n^\ell$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\varphi d_{\mathcal{D}}\psi\varphi([[b_1,\dots,b_n]]) &= \varphi\left(\sum_{\ell=1}^{n}[[b_1,\dots,b_\ell+1,\dots b_n]]\right)\\ &= \varphi d_{\mathcal{D}}([[b_1,\dots,b_n]]).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.6. — *Pour tout $k \geqslant 1$, $\varphi d_{\mathcal{D}}^k\psi = d_{\mathcal{C}}^k$.*

Démonstration. — Cela provient des trois lemmes précédents. En effet

$$d_{\mathcal{C}}^k = (\varphi\psi d_{\mathcal{C}})^k = (\varphi\psi\varphi d_{\mathcal{D}}\psi)^k = (\varphi d_{\mathcal{D}}\psi)^k = \varphi d_{\mathcal{D}}^k\psi$$

Voici quelques explications concernant ces égalités :

- la première et la troisième égalités proviennent du lemme 3.3.3 ;
- la deuxième égalité est une application du lemme 3.3.4 ;
- la quatrième égalité provient d'applications successives du lemme 3.3.5, en partant de la gauche. Ce lemme permet de supprimer les uns après les autres les termes $\psi\varphi$ apparaissant entre les différentielles $d_{\mathcal{D}}$.

□

3.4. Acyclicité de $\mathcal{D}_n^\bullet$.

Lemme 3.4.1. — *Le p-complexe $\mathcal{D}_1^\bullet$ est p-acyclique.*

Démonstration. — Le p-complexe $\mathcal{D}_1^\bullet$ peut être décrit ainsi :

$$\mathcal{D}_1^\bullet : 0 \longrightarrow \mathbb{F}_p\cdot[[0]] \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p\cdot[[1]] \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p\cdot[[p-1]] \longrightarrow 0$$

Il s'agit d'une chaîne de $p-1$ isomorphismes, p-acyclique d'après l'exemple 2.2.4. □

Dans le but de démontrer la p-acyclicité de $\mathcal{D}_n^\bullet$, on décrit ce complexe en termes du complexe $\mathcal{D}_1^\bullet$.

Lemme 3.4.2. — *Le p-complexe $\mathcal{D}_n^\bullet$ est égal à $(\mathcal{D}_1^\bullet)^{\otimes n}$.*

Démonstration. — On définit deux morphismes $\Phi : (\mathcal{D}_1^\bullet)^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{D}_n^\bullet$ et $\Psi : \mathcal{D}_n^\bullet \longrightarrow (\mathcal{D}_1^\bullet)^{\otimes n}$ par :

$$\Phi([[\ell_1]]\otimes\cdots\otimes[[\ell_n]]) = [[\ell_1, \dots, \ell_n]] \quad \text{et} \quad \Psi([[\ell_1, \dots, \ell_n]]) = [[\ell_1]] \otimes \cdots \otimes [[\ell_n]].$$

Ce sont clairement des morphismes de p-complexes (ils commutent avec les différentielles), et ils sont réciproques l'un de l'autre.

Proposition 3.4.3. — *Le p-complexe $\mathcal{D}_n^\bullet$ est p-acyclique.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème de Künneth (corollaire 2.3.2) à $\mathcal{D}_n^\bullet = (\mathcal{D}_1^\bullet)^{\otimes n}$. □

3.5. Acyclicité de $\mathcal{C}_n^\bullet$ pour $n \leqslant p-1$.

On étudie maintenant l'acyclicité de $\mathcal{C}_n^\bullet$ en petits degrés. Cette acyclicité se déduit de celle de $\mathcal{D}_n^\bullet$.

Proposition 3.5.1. — *Pour tout $n \in \{1, \dots, p-1\}$ le complexe $\mathcal{C}_n^\bullet$ est p-acyclique.*

La démonstration de la proposition repose sur plusieurs lemmes, basés sur une opération de *symétrisation* dans le complexe $\mathcal{D}_n^\bullet$. Pour $1 \leqslant n \leqslant p-1$, l'entier $n!$ est inversible *modulo* p, ce qui permet de définir un morphisme de symétrisation $s : \mathcal{D}_n^k \longrightarrow \mathcal{D}_n^k$ par :

$$s([[b_1, \dots, b_n]]) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} [[b_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, b_{\sigma^{-1}(n)}]].$$

Lemme 3.5.2. — *Pour tout $y \in \mathcal{D}_n^k$, $\varphi(y) = \varphi s(y)$.*

Démonstration. — Quelque soit $[[b_1, \dots, b_n]] \in \mathcal{D}_n^k$, et quelque soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varphi([[b_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, b_{\sigma^{-1}(n)}]]) = \varphi([[b_1, \dots, b_n]]).$$

Par conséquent,

$$\varphi s([[b_1, \dots, b_n]]) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varphi([[b_1, \dots, b_n]]) = \varphi([[b_1, \dots, b_n]]),$$

ce qui démontre le lemme. □

Remarque 3.5.3. — On peut définir s en termes d'action de $\mathfrak{S}_n$ sur le complexe $\mathcal{D}_n^\bullet$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathcal{D}_n^k$ par $\sigma \cdot [[b_1, \ldots, b_n]] = [[b_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, b_{\sigma^{-1}(n)}]]$, étendu par linéarité. Alors, $s(y) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot y$.

Lemme 3.5.4. — *Soit $y \in \mathcal{D}_n^k$. Alors $\varphi(y) = 0$ si et seulement si $s(y) = 0$.*

Démonstration. — Soit E_n^k l'ensemble $\{[[b_1, \ldots, b_n]] \mid b_1 + \cdots + b_n = k\}$. On définit une relation d'équivalence sur E_n^k par

$$[[b_1, \ldots, b_n]] \sim [[b'_1, \ldots, b'_n]] \iff \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, [[b'_1, \ldots, b'_n]] = \sigma \cdot [[b_1, \ldots, b_n]].$$

On note $C_1, \ldots, C_t$ les classes d'équivalence de E_n^k sous l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Soit $y \in \mathcal{D}_n^k$. On peut écrire y comme une unique combinaison des éléments de E_n^k à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, en regroupant les termes d'une même classe :

$$y = \sum_{i=1}^{t} \sum_{[[b_1, \ldots, b_n]] \in C_i} \lambda_{[[b_1, \ldots, b_n]]} \cdot [[b_1, \ldots, b_n]].$$

Pour $i \in \{1, \ldots, t\}$, on note

$$\lambda_{C_i} = \sum_{[[b_1, \ldots, b_n]] \in C_i} \lambda_{[[b_1, \ldots, b_n]]}.$$

Comme φ est $\mathfrak{S}_n$-invariante, on peut définir une fonction encore notée φ de $\{C_1, \ldots, C_t\}$ vers $\mathcal{C}_n^k$. Alors,

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_{C_i} \varphi(C_i).$$

Comme $\varphi(C_i) \neq \varphi(C_j)$ si $i \neq j$, $\varphi(y) = 0$ si et seulement si $\lambda_{C_i} = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, t\}$.

D'un autre côté, pour tout $z_1, z_2 \in C_i$, $s(z_1) = s(z_2)$. On note cette valeur commune $s(C_1)$. Ainsi,

$$s(y) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_{C_i} s(C_i).$$

Donc, comme précédemment, $s(y) = 0$ si et seulement si $\lambda_{C_i} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, car les $s(C_i)$, $i \in \{1, \dots, t\}$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{D}_n^\bullet$. □

Le lemme suivant est évident :

Lemme 3.5.5. — *La p-différentielle $d_\mathcal{D}$ commute avec l'action de $\mathfrak{S}_n$, donc avec s.*

Lemme 3.5.6. — *Si $\varphi d_\mathcal{D}(y) = 0$ alors $d_\mathcal{D} s(y) = 0$.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.5.4 appliqué à $d_\mathcal{D}(y)$, l'hypothèse $\varphi d_\mathcal{D}(y) = 0$ implique que $s d_\mathcal{D}(y) = 0$. Le lemme 3.5.5 permet de conclure. □

Lemme 3.5.7. — *Soit $x \in \mathcal{C}_n^k$ tel que $d_\mathcal{C}(x) = 0$. Alors il existe $y \in \mathcal{D}_n^k$ tel que $\varphi(y) = x$ et $d_\mathcal{D}(y) = 0$.*

Démonstration. — On prend $y = s\psi(x)$. Alors :

1. $\varphi(y) = \varphi s \psi(x) = \varphi\psi(x) = x$;
2. $\varphi d_\mathcal{D} \psi(x) = d_\mathcal{C}(x)$ d'après le lemme 3.3.6, donc $\varphi d_\mathcal{D}\psi(x) = 0$;
3. par conséquent, $d_\mathcal{D}(y) = d_\mathcal{D} s\psi(x) = 0$ d'après le lemme 3.5.6 appliqué à $\psi(x)$. □

Démonstration de la proposition 3.5.1. — D'après le théorème de Kapranov, il suffit de montrer que $\mathrm{H}^*_{[1]}(\mathcal{C}_n^\bullet) = 0$. Soit $x \in \mathcal{C}_n^k$ tel que $d_\mathcal{C}(x) = 0$. Il s'agit de montrer que la classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^k_{[1]}(\mathcal{C}_n^\bullet)$ représentée par x est nulle. D'après le lemme 3.5.7, il existe y tel que $\varphi(y) = x$ et $d_\mathcal{D}(y) = 0$. Puisque $\mathcal{D}_n^\bullet$ est p-acyclique, il existe $y' \in \mathcal{D}_n^{k-p-1}$ tel que $d_\mathcal{D}^{p-1}(y') = y$. Soit $x' = \varphi(y')$. Alors

$$d_\mathcal{C}^{p-1}(x') = d_\mathcal{C}^{p-1}\varphi(y') = \varphi d_\mathcal{D}^{p-1}(y') = \varphi(y) = x.$$

Donc x est un bord. □

Remarque 3.5.8. — Cette démonstration n'est valable que pour $n < p$, car pour $n \geqslant p$, $n!$ n'est pas inversible *modulo* p : on ne peut plus employer ce procédé de symétrisation. Pour étudier le cas de $\mathcal{C}_n^\bullet$, $n \geqslant p$, nous introduisons d'autres p-complexes.

3.6. Plus de p-complexes.

Les p-complexes que nous allons introduire maintenant ont une description similaire à celle de $\mathcal{C}_n^\bullet$, à part qu'on change le nombre d'entiers composant un élément de base de $\mathcal{C}_n^\bullet$. Dans l'analogie avec les répartitions de boules, on change le nombre de cases.

Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant p$. On note

$$\mathcal{C}_{n,k}^\ell = \bigoplus_{\substack{a_0+\cdots+a_{k-1}=n \\ 0\cdot a_0+\cdots+(k-1)a_{k-1}=\ell}} \mathbb{F}_p \cdot [a_0, \dots, a_{k-1}].$$

On peut munir $\mathcal{C}_{n,k}^\bullet$ d'une p-différentielle $d_{n,k}$ définie de manière analogue à celle de $\mathcal{C}_n^\bullet$. Plus précisément, la projection de $d_{n,k}([a_0, \dots, a_{k-1}])$ sur l'espace engendré par $[a'_0, \dots, a'_{k-1}]$ est égale à la projection de $d_{\mathcal{C}}([a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \cdots, 0])$ sur $[a'_0, \dots, a'_{k-1}, 0, \cdots, 0]$. Cela montre en particulier que $d_{n,k}$ est bien une p-différentielle. On notera que $\mathcal{C}_{n,p}^\bullet = \mathcal{C}_n^\bullet$.

Toujours pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on définit aussi $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet$:

$$\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\ell = \bigoplus_{\substack{a_0+\cdots+a_{k-1}=n \\ 0\cdot a_0+\cdots+(k-1)a_{k-1}=\ell \\ a_0<p}} \mathbb{F}_p \cdot [a_0, \dots, a_{k-1}].$$

La p-différentielle $\bar{d}_{n,k}$ est définie de manière analogue à précédemment. Le p-complexe $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet$ est un sous-complexe de $\mathcal{C}_{n,k}^\bullet$. Par convention, on définit $\mathcal{C}_{n,0}^\bullet$ et $\bar{\mathcal{C}}_{n,0}^\bullet$ comme étant nuls.

Remarque 3.6.1. —

- Si $n \leqslant p-1$, alors $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet = \mathcal{C}_{n,k}^\bullet$.
- Si $n > p-1$ et $k = 1$, le complexe $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet$ est nul.
- Si $n \geqslant p-1$ et $k \geqslant 2$, le premier facteur non nul de $\bar{\mathcal{C}}_n^\bullet$ est

$$\bar{\mathcal{C}}_n^{n-p+1} = \mathbb{F}_p \cdot [p-1, n-p+1, 0, \dots, 0].$$

Nous donnons maintenant quelques suites exactes courtes reliant les complexes $\mathcal{C}_{n,k}^\bullet$ et $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet$.

Proposition 3.6.2. — *Pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant p$, ($2 \leqslant k \leqslant p$ pour $\bar{\mathcal{C}}$) il existe des suites exactes courtes de p-complexes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\bullet-k+1}_{n-1,k} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{C}^{\bullet}_{n,k} \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{C}^{\bullet}_{n,k-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^{\bullet-k+1}_{n-1,k} \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}_{n,k} \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}_{n,k-1} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — L'essentiel du travail consiste à définir les morphismes φ_1, ψ_1, $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\psi}_1$. On définit $\varphi_1 : \mathcal{C}^{\ell-k+1}_{n-1,k} \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell}_{n,k}$ par :

$$\varphi_1([a_0, \dots, a_{k-1}]) = [a_0, \dots, a_{k-2}, a_{k-1} + 1],$$

et $\psi_1 : \mathcal{C}^{\ell}_{n,k} \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell}_{n,k-1}$ par :

$$\psi_1([a_0, \dots, a_{k-1}]) = \begin{cases} [a_0, \dots, a_{k-2}] & \text{si } a_{k-1} = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que φ_1 et ψ_1 sont des morphismes de p-complexes. L'exactitude est alors immédiate.

On définit de la même façon $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\psi}_1$. Puisque dans ce cas $k \geqslant 2$, à aucun moment on n'augmente la composante en position 0 dans la définition de $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\psi}_1$. Par conséquent, cette composante reste toujours strictement inférieure à p, ce qui assure que $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\psi}_1$ sont bien définis. L'exactitude est immédiate. □

On montre de manière similaire l'existence de deux autres suites exactes courtes (proposition 3.6.3). Ces deux suites exactes n'interviennent pas dans notre argument, mais sont mentionnées pour la curiosité. Nous laissons la démonstration aux soins du lecteur.

Proposition 3.6.3. — *Pour tout $1 \leqslant n < p$ ($1 \leqslant n$ pour $\bar{\mathcal{C}}$), $1 \leqslant k \leqslant p$, il existe des suites exactes courtes de p-complexes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\bullet-n}_{n,k-1} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{C}^{\bullet}_{n,k} \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{C}^{\bullet}_{n-1,k} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^{\bullet-n}_{n,k-1} \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}_{n,k} \xrightarrow{\bar{\psi}_2} \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}_{n-1,k} \longrightarrow 0.$$

Remarque 3.6.4. — Le théorème 3.5.1 affirme que $\mathcal{C}^\bullet_{n,p}$ est p-acyclique pour $0 < n < p$, et que $\mathcal{C}^\bullet_{0,p}$ est une p-résolution de $\mathbb{F}_p$. C'est également le cas pour $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,p}$, puisque pour $n < p$, les complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,p}$ et $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,p}$ sont égaux.

3.7. Cohomologies des complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ et $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$.

On termine maintenant la démonstration du théorème 3.1.2 en déterminant les différentes cohomologies des p-complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ et $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$. On en déduit les cohomologies des complexes $\mathcal{C}^\bullet_n$. Le théorème 3.1.2 en découle.

Proposition 3.7.1. — *Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leqslant p-1$, $k \leqslant p$ et $n+k > p$. Alors, les p-complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ et $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$ sont p-acycliques.*

Démonstration. — On montre la proposition par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence au rang n est donc que les p-complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,p+1-n}, \dots \mathcal{C}^\bullet_{n,p}$ sont p-acycliques. L'initialisation pour $n = 1$ revient à dire que $\mathcal{C}^\bullet_{1,p}$ est p-acyclique, ce qui est vrai en vertu de la proposition 3.5.1.

Supposons donc la propriété vraie pour $n-1$ tel que $1 \leqslant n-1 < p-1$. Le complexe $\mathcal{C}^\bullet_{n,p}$ est p-acyclique d'après la proposition 3.5.1, ce qui initialise une récurrence descendante sur k. De plus, supposons que $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ est p-acylique pour $k > p+1-n$. Considérons la suite exacte de la proposition 3.6.2 :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\bullet-k+1}_{n-1,k} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_{n,k} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_{n,k-1} \longrightarrow 0.$$

Le complexe de gauche est p-acyclique par l'hypothèse de la récurrence sur n (remarquer que $k \geqslant p+1-(n-1)$) et le complexe central est p-acyclique par l'hypothèse de la récurrence descendante sur k. Par conséquent, l'examen des suites exactes longues prouve la p-acyclicité du complexe de droite $\mathcal{C}^\bullet_{n,k-1}$, ce qui termine la récurrence sur k, puis sur n.

Pour $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$, on remarquera que ce complexe est égal à $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ dans les cas étudiés ici, puisqu'on suppose ici que $n < p$. □

Proposition 3.7.2. — *Pour tout $n \geqslant p-1$, $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,2}$ est p-acyclique.*

Démonstration. — Pour $n \geqslant p-1$, le complexe $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,2}$ est explicitement décrit par :

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_p \cdot [p-1, n-p+1] \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p \cdot [p-2, n-p+2] \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p \cdot [0, n] \longrightarrow 0.$$

On obtient une chaîne de $p-1$ isomorphismes, p-acyclique d'après l'exemple 2.2.4. □

PROPOSITION 3.7.3. — *Pour tout $n \geqslant p-1$, et tout k tel que $2 \leqslant k \leqslant p$, $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$ est p-acyclique.*

Démonstration. — On fait une récurrence sur n puis sur k. L'initialisation pour $n = p-1$, provient de la proposition 3.7.1. L'initialisation pour k provient de la proposition 3.7.2.

Soit $N, K \in \mathbb{N}$ tels que $N > p-1$ et $2 < K \leqslant p$. On suppose que $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$ est p-acyclique si $(n,k) < (N,K)$ pour l'ordre lexicographique. Alors la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^{\bullet-K+1}_{N-1,K} \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{N,K} \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{N,K-1} \longrightarrow 0$$

de la proposition 3.6.2 est constituée de deux complexes p-acycliques à gauche et à droite. Le complexe central $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$ est donc aussi p-acyclique. □

PROPOSITION 3.7.4. — *Pour tout $n \geqslant 0$, et tout $k \in \{1, \ldots, p\}$,*

$$\mathcal{C}^\bullet_{n+p,k} = \mathcal{C}^\bullet_{n,k} \oplus \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n+p,k}.$$

Démonstration. — On construit deux morphismes de p-complexes réciproques l'un de l'autre :

– $\Phi : \mathcal{C}^\bullet_{n+p,k} \to \mathcal{C}^\bullet_{p,n} \oplus \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{p+n,k}$ défini sur l'élément de base $[a_0, \ldots, a_{k-1}]$ par :

$$\Phi([a_0, \ldots, a_{k-1}]) = \begin{cases} ([a_0 - p, a_1, \ldots, a_{k-1}]; 0) & \text{si } a_0 \geqslant p, \\ (0; [a_0, \ldots, a_{k-1}]) & \text{si } a_0 < p\,; \end{cases}$$

– $\Psi : \mathcal{C}^\bullet_{p,n} \oplus \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{p+n,k} \to \mathcal{C}^\bullet_{n+p,k}$ défini sur l'élément de base $([a_0, \ldots, a_{k-1}]; [b_0, \ldots, b_{k-1}])$ par :

$$\Psi(([a_0, \ldots, a_{k-1}]; [b_0, \ldots, b_{k-1}]) = [a_0 + p, \ldots, a_{k-1}] + [b_0, \ldots, b_{k-1}].$$

Le lecteur vérifiera sans problème que Φ et Ψ sont des morphismes de p-complexes, et qu'ils sont réciproques l'un de l'autre. □

Proposition 3.7.5. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est un multiple de p, alors $\mathcal{C}_n^\bullet$ est une p-résolution de $\mathbb{F}_p$. Sinon, $\mathcal{C}_n^\bullet$ est p-acyclique.*

Démonstration. — On fait une récurrence sur n avec un pas de longueur p.

L'initialisation se fait pour $n \in \{0, \dots, p-1\}$:

- si $n = 0$, $\mathcal{C}_n^\bullet$ est le complexe $0 \to \mathbb{F}_p \to 0$, qui est trivialement une p-résolution de $\mathbb{F}_p$;
- si $n \in \{1, \dots, p-1\}$, $\mathcal{C}_n^\bullet$ est p-acyclique d'après la proposition 3.5.1.

Soit donc $n > p$, et supposons que la proposition soit vraie pour $n-p$.

- Si $n \equiv 0 \bmod p$, alors $n - p \equiv 0 \bmod p$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{C}_{n-p}^\bullet = \mathcal{C}_{n-p,p}^\bullet$ est une p-résolution de $\mathbb{F}_p$. D'autre part, d'après la proposition 3.7.3, le p-complexe $\bar{\mathcal{C}}_{n,p}^\bullet$ est p-acyclique. Par conséquent, $\mathcal{C}_{n-p,p}^\bullet \oplus \bar{\mathcal{C}}_{n,p}^\bullet$ est une p-résolution de $\mathbb{F}_p$. D'après la proposition 3.7.4, ce complexe est égal à $\mathcal{C}_{n,p}^\bullet = \mathcal{C}_n^\bullet$, qui est par conséquent une résolution de $\mathbb{F}_p$.
- Si $n \not\equiv 0 \bmod p$, le même argument montre que $\mathcal{C}_n^\bullet$ est p-acyclique, puisque cette fois, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{C}_{n-p}^\bullet$ est p-acyclique.

□

Le théorème 3.1.2 est maintenant une conséquence directe de la proposition 3.7.5. En effet, la proposition 3.7.5 se réexprime ainsi : $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*(\mathbb{F}_p), d(\mathbb{F}_p))$ est une p-résolution de $S^{*(1)}(\mathbb{F}_p)$. D'après la proposition 3.2.1, cela suffit pour montrer le théorème 3.1.2.

4. Le cas de $S^{n(j)}$.

Friedlander et Suslin [3] construisent, pour $p = 2$, une résolution injective explicite de $S^{n(j)}$. Cette construction est obtenue comme une *itération* de la résolution de $S^{n(1)}$. Cette construction s'adapte assez bien au cas où $p > 2$, en utilisant la résolution de $S^{n(1)}$ du théorème 3.1.2. La principale difficulté provient de l'absence d'une théorie satisfaisante des suites spectrales pour les p-bicomplexes. L'utilisation des suites spectrales reste assez élémentaire dans la preuve de Friedlander et Suslin, et peut de fait être évitée sans problème majeur.

Imitant la construction de Friedlander et Suslin [3], on commence par construire une famille de p-différentielles sur $(S^*)^{\otimes p}$.

4.1. Des différentielles.

On note $B^{i_0,\dots,i_{p-1}}$ le foncteur $S^{i_0}\otimes\cdots\otimes S^{i_{p-1}}$. Cela définit un foncteur p-gradué

$$B^{*,\dots,*} = \bigoplus_{i_0,\dots,i_{p-1}\in\mathbb{N}} B^{i_0,\dots,i_{p-1}}. \tag{7}$$

Pour simplifier, on notera souvent B au lieu de $B^{*,\dots,*}$.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Sur $B(V)$ on définit deux notions de degré :

- le *degré polynomial* des éléments de $B^{i_0,\dots,i_{p-1}}(V)$ est égal à $i_0 + \cdots + i_{p-1}$;
- le *degré cohomologique* des éléments de $B^{i_0,\dots,i_{p-1}}(V)$ est égal à $0\cdot i_0 + \cdots + (p-1)\cdot i_{p-1}$.

On notera que cette terminologie coïncide avec celle de la section précédente.

Enfin, on note

- B^j la restriction de (7) aux facteurs de degré cohomologique j,
- B_n la restriction de (7) aux facteurs de degré polynomial n,
- B^j_n la restriction de (7) aux facteurs de degré cohomologique j et de degré polynomial n.

On définit maintenant sur le foncteur gradué B une famille de différentielles $(d_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}^*}$. La différentielle d_1 est la différentielle d définie dans la section précédente :

$$d_1 = \sum_{i=0}^{p-2} \underbrace{id\otimes\cdots\otimes id}_{i \text{ facteurs}}\otimes\delta\otimes\underbrace{id\otimes\cdots\otimes id}_{p-2-i \text{ facteurs}}. \tag{8}$$

Cette différentielle est la partie homogène de degré cohomologique 1 de l'endomorphisme D de l'algèbre de Hopf B, défini par le produit de convolution $D = id * \varepsilon$, où ε est la composition suivante :

$$\varepsilon \;:\; B \twoheadrightarrow \bigoplus_{i_0,\dots,i_{p-2}\in\mathbb{N}} B^{i_0,\dots,i_{p-2},0} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i_0,\dots,i_{p-2}\in\mathbb{N}} B^{0,i_0,\dots,i_{p-2}} \hookrightarrow B.$$

Plus généralement, d_ℓ est la partie homogène de degré ℓ de D. En particulier, $d_\ell = 0$ si $\ell < 0$, et $d_0 = id$, ainsi qu'on s'en assurera plus tard.

À des fins calculatoires (qui ne font pas l'objet du présent article), on donne une description explicite des différentielles d_ℓ. On introduit pour cela quelques notations. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$, et soit $x_1,\dots,x_n$ des éléments de V. Soit I un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$.

– On note x_I l'élément de $S^{|I|}(V)$ obtenu en prenant le produit (dans $S^*(V)$) des éléments x_i dont l'indice est contenu dans I :

$$x_I = \prod_{i\in I} x_i.$$

– On note $x_{\widehat{I}}$ l'élément de $S^{n-|I|}(V)$ obtenu en prenant le produit (dans $S^*(V)$) des éléments x_i dont l'indice n'est pas contenu dans I :

$$x_{\widehat{I}} = \prod_{i\in\{1,\dots,n\}-I} x_i.$$

Soit $X^0\otimes\cdots\otimes X^{p-1}$ un élément de $S^{i_0}\otimes\cdots\otimes S^{i_{p-1}}$, avec $X^k = x_1^k\cdots x_{i_k}^k$. Alors :

$$\begin{aligned} &d_\ell(X^0\otimes\cdots\otimes X^{p-1}) \\ &= \sum_{\substack{\alpha_0,\dots,\alpha_{p-2},\\ \alpha_0+\cdots+\alpha_{p-2}=\ell}} \Bigg(\sum_{\substack{I_0\subset\{1,\dots,i_0\},\ |I_0|=\alpha_0,\\ \cdots \\ I_{p-2}\subset\{1,\dots,i_{p-2}\},\ |I_{p-2}|=\alpha_{p-2}}} x^0_{\widehat{I_0}} \otimes x^0_{I_0} x^1_{\widehat{I_1}} \otimes x^1_{I_1} x^2_{\widehat{I_2}} \otimes\cdots. \\ &\qquad\qquad \otimes x^{p-3}_{I_{p-3}} x^{p-2}_{\widehat{I_{p-2}}} \otimes x^{p-2}_{I_{p-2}} X^{p-1} \Bigg). \end{aligned}$$

Le lecteur pourra s'assurer qu'on peut démontrer les résultats qui suivent de manière élémentaire (et concrète), en se servant uniquement de cette description de d_ℓ.

On rappelle que pour tout $x \in V$, on note $x(j)$ l'élément $1 \otimes \cdots \otimes x \otimes \cdots \otimes 1$, où x est placé en position j. Si $j \notin \{0, \ldots, p-1\}$, $x(j)$ est par convention nul. Clairement,

$$D(x(j)) = \begin{cases} x(j) + x(j+1) & \text{si } 0 \leqslant j < p-1 \\ x(j) & \text{si } j = p-1. \end{cases} \tag{9}$$

On en déduit notamment l'expression des endomorphismes d_j sur les générateurs $x(j)$. En effet, le degré cohomologique de $x(j+1)$ est supérieur de un à celui de $x(j)$. Ainsi, $d_0(x(j)) = x(j)$, et comme $d_j = 0$ si $j < 0$, d_0 est un morphisme d'algèbre, donc $d_0 = id$. De plus, pour tout $\ell \geqslant 1$,

$$\begin{cases} d_\ell(x(j)) = 0 & \text{si } \ell > 1 \\ d_1(x(j)) = x(j+1) & \text{si } j < p-1 \\ d_1(x(p-1)) = 0. \end{cases}$$

D'après la convention adoptée, $d_1(x(j)) = x(j+1)$ pour tout $j \geqslant 0$.

La proposition suivante montre que les endomorphismes d_ℓ sont entièrement décrits par ces relations.

Proposition 4.1.1 (Formule de Cartan). — *Soit X et Y dans $B(V)$. Alors,*

$$d_\ell(XY) = \sum_{s=0}^{\ell} d_s(X) d_{\ell-s}(Y).$$

En particulier $d = d_1$ est une dérivation.

Démonstration. — L'endomorphisme ε est clairement un morphisme d'algèbres. Ainsi, $D = id * \varepsilon$ est aussi un morphisme d'algèbres. La proposition en découle. □

Par récurrence sur le nombre d'éléments dans le produit, on obtient :

Corollaire 4.1.2. — *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des éléments de $B(V)$. Alors,*

$$d_\ell(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\substack{s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}^* \\ s_1 + \cdots + s_n = \ell}} d_{s_1}(X_1) \cdots d_{s_n}(X_n).$$

On peut alors appliquer itérativement cette formule :

Corollaire 4.1.3. — *Soit $X_1, \dots, X_n$ des éléments de $B(V)$. Alors,*

$$d_\ell^k(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\substack{s_{1,1},\dots,s_{1,n} \in \mathbb{N}^* \\ s_{1,1}+\cdots+s_{1,n}=\ell}} \cdots \sum_{\substack{s_{k,1},\dots,s_{k,n} \in \mathbb{N}^* \\ s_{k,1}+\cdots+s_{k,n}=\ell}} \left(d_{s_{k,1}} \circ \cdots \circ d_{s_{1,1}}(X_1)\right) \cdots$$

$$\left(d_{s_{k,n}} \circ \cdots \circ d_{s_{1,n}}(X_n)\right). \tag{10}$$

Proposition 4.1.4. — *Pour tout $j, \ell \in \mathbb{N}$, $d_j \circ d_\ell = d_\ell \circ d_j$.*

Démonstration. — Cette propriété de commutation est stable par multiplication dans $B(r)$: si pour tout $j_1, \ell_1 \in \mathbb{N}$, $d_{j_1} \circ d_{\ell_1}(X) = d_{\ell_1} \circ d_{j_1}(X)$ et pour $j_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$, $d_{j_2} \circ d_{\ell_2}(Y) = d_{\ell_2} \circ d_{j_2}(Y)$, alors pour $j, \ell \in \mathbb{N}$, $d_j \circ d_\ell(X \cdot Y) = d_\ell \circ d_j(X \cdot Y)$. En effet, soit X et Y dans $B(r)$ pour lesquels cette propriété de commutation est vérifiée pour tout couple (j, ℓ), et soit $(j, \ell) \in \mathbb{N}^2$. Alors, en utilisant la proposition 4.1.1,

$$d_j \circ d_\ell(X \cdot Y) = \sum_{k=0}^{\ell} d_j \left(d_k X \cdot d_{\ell-k} Y\right) = \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{j} (d_i \circ d_k(X)) \cdot (d_{j-i} \circ d_{\ell-k}(Y)).$$

Dans cette somme, on peut commuter les différentielles, à cause de l'hypothèse vérifiée par X et Y :

$$d_j \circ d_\ell(X \cdot Y) = \sum_{i=0}^{j} \sum_{k=0}^{\ell} (d_k \circ d_i(X)) \cdot (d_{\ell-k} \circ d_{j-i}(Y)) = d_\ell \circ d_j(X \cdot Y).$$

Par conséquent, il suffit de vérifier la commutation sur les générateurs multiplicatifs $x(i)$ de B. Si ℓ ou j est égal à 0, c'est évident (un des deux morphismes est l'identité). Supposons donc $j, \ell > 0$. Or,

$$d_j(x(i)) = \begin{cases} x(i+1) & \text{si } j = 1 \text{ et } i < p-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$d_\ell \circ d_j(x(i)) = \begin{cases} x(i+2) & \text{si } j = \ell = 1 \text{ et } i < p-2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette expression est entièrement symétrique en j et ℓ, et donne donc également l'expression de $d_j \circ d_\ell(x(i))$. □

PROPOSITION 4.1.5. — *Pour tout $\ell > 0$, $d_\ell^p = 0$. Autrement dit, d_ℓ est une p-différentielle.*

Démonstration. — On commence par montrer que $D^p = id$. Comme D est un morphisme d'algèbre sur F^p, $D^p(X \cdot Y) = D^p(X)D^p(Y)$, et il suffit donc de vérifier l'identité $D^p = id$ sur les générateurs $x(j)$. L'expression (9) donne :

$$D^p(x(j)) = \sum_{k=0}^{p-1-j} \binom{p}{k} x(j+k).$$

Comme p divise $\binom{p}{k}$ si $k \in \{1, \dots, p-1\}$, on en déduit que $D^p(x(j)) = x(j)$. Ainsi $D^p = id$.

Or, $D = \sum_{\ell=0}^{+\infty} d_\ell$, et ces morphismes commutent deux à deux. Ainsi,

$$id = D^p = \sum_{\ell=0}^{+\infty} d_\ell^p$$

(après spécialisation à un élément donné de B, cette somme est finie). Comme $d_0 = id$ et que les endomorphismes d_ℓ^p sont tous homogènes de degrés cohomologiques distincts, il en résulte que $d_\ell^p = 0$ pour tout $\ell > 0$. □

On donne maintenant quelques propriétés des p-différentielles d_ℓ.

PROPOSITION 4.1.6. — *Les p-différentielles d_ℓ vérifient les trois propriétés suivantes :*

1. *d_ℓ augmente le degré cohomologique de ℓ et préserve le degré polynomial ;*
2. *pour tout $x \in B(V)$, $d_\ell(x^p) = \begin{cases} d_{\ell/p}(x)^p & \text{si } \ell \equiv 0 \bmod p, \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$*
3. *pour tout $x \in B(V)$, $d_\ell(x^{p^r}) = \begin{cases} d_{\ell/p^r}(x)^{p^r} & \text{si } \ell \equiv 0 \bmod p^r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$*

Démonstration. — La première propriété est évidente d'après la définition de d_ℓ.

La seconde propriété découle de la relation $D(x^p) = D(x)^p$, provenant de la structure de morphisme d'algèbre de D. En effet, B étant commutative, et $\mathbb{F}_p$-linéaire,

$$D(x)^p = \sum_{\ell'=0}^{+\infty} d_{\ell'}(x)^p.$$

Identifions les parties homogènes de degré cohomologique ℓ dans la relation $D((-)^p) = D^p$: $d_\ell((-)^p)$ est égal à la partie homogène de degré cohomologique ℓ du morphisme $D((-)^p)$. Or, pour tout $\ell' \in \mathbb{N}$, $d_{\ell'}^p$ est homogène de degré cohomologique $p\ell'$. Par conséquent, D^p est nul en degré cohomologique non multiple de p, et égal à $d_{\ell'}^p$ en degré cohomologique $\ell = p\ell'$. Cela prouve la relation.

La troisième propriété se déduit de la deuxième par une récurrence immédiate sur r. □

4.2. Le complexe $B(r)^\bullet$.

Le but de cette section est de définir un complexe $B(r)^\bullet$ (ou plus simplement $B(r)$) construit itérativement à partir de B, et généralisant à la caractéristique $p > 2$ le complexe $B(r)^\bullet$ construit par Friedlander et Suslin [3] en caractéristique 2.

En tant qu'espace vectoriel $B(r) = (S^*)^{\otimes p^r}$. Pour des besoins d'écriture, on indexe ce produit tensoriel comme suit :

$$B(r) = \bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} S^*_{i_0,\dots,i_{r-1}},$$

où, pour tout multi-indice $(i_0, \dots, i_{r-1})$, $S^*_{i_0,\dots,i_{r-1}} = S^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta^n : \mathcal{E}^f \to \mathcal{E}^f$ le foncteur *diagonale* $V \mapsto V^{\oplus n}$. On rappelle que $S^* \circ \Delta^n \cong (S^*)^{\otimes n}$. Ainsi, en tant qu'espace vectoriel, $B(r) = S^* \circ \Delta^{p^r}$, et plus généralement, $B(r) = B(\ell) \circ \Delta^{p^{r-\ell}}$.

Définition 4.2.1. — *On construit dans ce paragraphe r différents isomorphismes*

$$\iota_s(r) : B(1) \circ \Delta^{p^{r-1}} = B \circ \Delta^{p^{r-1}} \xrightarrow{\cong} B(r), \quad s \in \{0, \dots, r-1\}.$$

D'après l'exponentialité de S^*,

$$B \circ \Delta^{p^{r-1}} = B^{\otimes p^{r-1}} = \left(\bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_s=0}^{\widehat{p-1}} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} \right) \underbrace{\left(\bigotimes_{i_s=0}^{p-1} S^* \right)}_{B}$$

L'isomorphisme $\iota_s(r)$ est alors donné par la permutation des facteurs suivante :

$$\iota_s(r) : \bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_s=0}^{\widehat{p-1}} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} \underbrace{\bigotimes_{i_s=0}^{p-1} S^*}_{B} \xrightarrow{\cong} \bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_s=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} S^*$$

Définition 4.2.2. — *On rappelle que B est muni d'un degré (cohomologique), que l'on note* deg. *Alors, la structure de p-complexe de $(B \circ \Delta^{p^{r-1}}, d_\ell \circ \Delta^{p^{r-1}}, \deg)$ induit par tranfert de structure via l'isomorphisme ι_s une structure de p-complexe $(B(r), d_\ell^s, \deg^s)$.*

Le degré $\deg^s$ d'un élément de $B(r)$ ne dépend bien sûr pas de j, puisque $\iota_s(r)$ ne dépend pas de j. Il vérifie :

$$\begin{aligned}
\deg^s &\left(\bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_s=0}^{\widehat{p-1}} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} \bigotimes_{i_s=0}^{p-1} S^{m_{i_0,\ldots,i_{r-1}}} \right) \\
&= \sum_{i_0=0}^{p-1} \cdots \sum_{i_s=0}^{\widehat{p-1}} \cdots \sum_{i_{r-1}=0}^{p-1} \deg \left(\bigotimes_{i_s=0}^{p-1} S^{m_{i_0,\ldots,i_{r-1}}} \right) \\
&= \sum_{(i_0,\ldots,i_{r-1}) \in \{0,p-1\}^r} i_s \cdot m_{i_1,\ldots,i_{r-1}}.
\end{aligned}$$

Le lemme suivant décrit les différents degrés cohomologiques (par rapport à $\deg^s$) des différentielles d_ℓ^t.

Lemme 4.2.3. —

- *La p-différentielle d_j^s augmente* $\deg^s$ *de j.*
- *La p-différentielle d_j^t préserve* $\deg^s$ *si $s \neq t$.*

Démonstration. — L'assertion concernant d_j^s est évidente, par la définition de d_j^s par transfert de structure : en effet, d_j est de degré cohomologique j, et le degré cohomologique est préservé par transfert.

L'assertion concernant d_j^t mérite un peu plus d'attention. Soit x un élément de $\bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} S^{m_{i_0,\dots,i_{r-1}}}$. Alors x s'écrit comme un produit tensoriel $x = \bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \widehat{\bigotimes_{i_t=0}^{p-1}} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} \left(\bigotimes_{i_t=0}^{p-1} x_{i_1,\dots,i_{r-1}} \right)$, et $d_\ell^t(x)$ est donc égal à $d_\ell^t(x) = \bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \widehat{\bigotimes_{i_t=0}^{p-1}} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} d_\ell \left(\bigotimes_{i_t=0}^{p-1} x_{i_1,\dots,i_{r-1}} \right)$.

Or, $d_\ell \left(\bigotimes_{i_t=0}^{p-1} x_{i_1,\dots,i_{r-1}} \right)$ est une somme de certains éléments y appartenant à $\bigotimes_{i_t=0}^{p-1} S^{m'_{i_0,\dots,i_{r-1}}}$ pour certaines valeurs de l'exposant $m'_{i_0,\dots,i_{r-1}}$. Soit y un tel facteur. Montrons que

$$\deg^s \left(\bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \widehat{\bigotimes_{i_t=0}^{p-1}} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} y \right) = \deg^s(x).$$

Les morphismes de la catégorie $\mathcal{P}$ étant homogènes, d_ℓ préserve le degré polynomial. Cela signifie que, à $i_1, \dots, \widehat{i_t}, \dots, i_{r-1}$ fixés, $\sum_{i_t=0}^{r-1} m_{i_0,\dots,i_{r-1}} = \sum_{i_t=0}^{r-1} m_{i_0,\dots,i_{r-1}}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\deg^s \left(\bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \widehat{\bigotimes_{i_t=0}^{p-1}} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} y \right) &= \sum_{(i_0,\dots,i_{r-1}) \in \{0,p-1\}^r} i_s \cdot m'_{i_1,\dots,i_{r-1}} \\
&= \sum_{(i_0,\dots,\widehat{i_t},\dots,i_{r-1}) \in \{0,p-1\}^{r-1}} i_s \cdot \sum_{i_t=0}^{p-1} m'_{i_1,\dots,i_{r-1}}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{(i_0,\ldots,\widehat{i_t},\ldots,i_{r-1})\in\{0,p-1\}^{r-1}} i_s \cdot \sum_{i_t=0}^{p-1} m_{i_1,\ldots,i_{r-1}}$$

$$= \sum_{(i_0,\ldots,i_{r-1})\in\{0,p-1\}^{r}} i_s \cdot m_{i_1,\ldots,i_{r-1}} = \deg^s(x).$$

□

Remarque 4.2.4. — La relation de Cartan (proposition 4.1.1), démontrée pour d_ℓ, passe à d_ℓ^s, par transfert de structure. Ainsi, on décrit entièrement la famille (d_ℓ^s) en la décrivant sur une famille de générateurs multiplicatifs de $B(r)$. On définit une telle famille :

Notation 4.2.5. — Soit $v \in V$, et soit $i_0,\ldots,i_{r-1} \in \{0,\ldots,p-1\}$. On note $v(i_0,\ldots,i_{r-1})$ l'élément de $B(r-1)$ dont tous les facteurs dans le produit tensoriel sont 1, sauf celui indexé par $(i_0,\ldots,i_{r-1})$, égal à v :

$$v(i_0,\ldots,i_{p-1}) = 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes \underset{\substack{|\\ \text{en position } (i_0,\ldots,i_{r-1})}}{v} \otimes 1\otimes\cdots\otimes 1.$$

Par convention, si un des indices i_j est strictement supérieur à $p-1$, $v(i_0,\ldots,i_{r-1}) = 0$.

La famille $(v(i_0,\ldots,i_{r-1}))_{v\in V, i_0,\ldots,i_{r-1}\in\{0,\ldots,p-1\}}$ est une famille de générateurs multiplicatifs de $B(r)(V)$. Ainsi, les p-différentielles (d_ℓ^s) sont déterminées par leur comportement sur cette famille. Or, d'après la description de d_ℓ sur les générateurs $v(i)$ de B,

$$d_\ell^s(v(i_0,\ldots,i_{r-1})) = \begin{cases} v(i_0,\ldots,i_s+1,\ldots,i_{r-1}) & \text{si } \ell = 1 \\ 0 & \text{si } \ell > 1. \end{cases}$$

Remarquez que si $i_s = p-1$, $d_1^s(v(i_0,\ldots,i_{r-1})) = 0$ (convention adoptée).

Proposition 4.2.6. — *Soit $s,t \in \{0,\ldots,p-1\}$. Alors, pour tout $j,\ell \in \mathbb{N}$, $d_j^s \circ d_\ell^t = d_\ell^t \circ d_j^s$.*

Démonstration. — Le principe de la démonstration est le même que pour la proposition 4.1.4. On montre d'abord que la propriété est stable par produit. Il suffit donc de la montrer sur les générateurs $v(i_0,\ldots,i_{r-1})$. Si $j \neq 1$ ou $\ell \neq 1$, les deux expressions appliquées à $v(i_0,\ldots,i_{r-1})$ sont nulles, sinon :

– si $s \neq t$,

$$\begin{aligned} d_1^s \circ d_1^t(v(i_0,\dots,i_{r-1})) &= d_1^s(v(i_0,\dots,i_t+1,\dots,i_{r-1})) \\ &= v(i_0,\dots,i_s+1,\dots,i_t+1,\dots,i_{r-1}) \\ &= d_1^t \circ d_1^s(v(i_0,\dots,i_{r-1})), \end{aligned}$$

– si $s = t$, il n'y a rien à démontrer !

□

Corollaire 4.2.7. — *L'endomorphisme $d = d_1^0 + d_p^1 + \cdots + d_{p^{r-1}}^{r-1}$ est une p-différentielle.*

Démonstration. — Puisque les différents facteurs de la somme $d_1^0 + d_p^1 + \cdots + d_{p^{r-1}}^{r-1}$ commutent deux à deux d'après la proposition 4.2.6,

$$d^p = (d_1^0 + d_p^1 + \cdots + d_{p^{r-1}}^{r-1})^p = (d_1^0)^p + (d_p^1)^p + \cdots + (d_{p^{r-1}}^{r-1})^p.$$

Cette somme est nulle, car chacun des endomorphismes $d_{p^k}^k$ est une p-différentielle. □

On définit maintenant le *degré cohomologique* deg sur $B(r)$ par

$$\deg = \sum_{s=0}^{r-1} p^{r-s-1} \deg^s.$$

Pour $r = 1$, on retrouve le degré cohomologique défini dans la partie précédente.

La proposition suivante découle immédiatement du lemme 4.2.3 :

Proposition 4.2.8. — *La p-différentielle d augmente le degré cohomologique* deg *de p^{r-1}.*

Ainsi, on a muni $B(r)$ d'une structure de p-complexe $(B(r), d, \deg)$, la p-différentielle d étant de degré cohomologique p^{r-1}.

Soit $B^k(r)$ la restriction de $B(r)$ aux facteurs de degré cohomologique k. Alors $(B^\bullet(r), d)$ est un p-complexe dont la p-différentielle est de degré p^{r-1}. Autrement dit, cela définit p^{r-1} p-complexes

$$0 \to B^i(r) \to B^{i+p^{r-1}} \to B^{i+2p^{r-1}} \to \cdots,$$

pour tout $i \in \{0,\dots,p^{r-1}-1\}$. On notera ces complexes en abrégé $(B^{i+p^{r-1}\bullet}(r),d)$. On notera comme précédemment $\mathrm{H}^k_{[s]}(B(r))$ la s-ième cohomologie en degré cohomologique k, c'est-à-dire la cohomologie $\mathrm{H}_{[s]}$ en $B^k(r)$.

4.3. Une résolution injective de $S^{n(j)}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

THÉORÈME 4.3.1. — *Le p-complexe $(B(r),d)$ est une p-résolution injective de $S^{*(r)}$.*

Par cela, on entend que le p-complexe $(B^{p^{r-1}\bullet}(r),d)$ est une p-résolution injective de $S^{*(r)}$, tandis que les p-complexes $(B^{i+p^{r-1}\bullet}(r),d)$ sont p-acycliques pour $i\in\{1,\dots,p^{r-1}-1\}$. En décomposant $(B^{p^{r-1}\bullet}(r),d)$ suivant le degré polynomial, on obtient de manière plus précise :

THÉORÈME 4.3.2. — *Le p-complexe $(B^{p^{r-1}\bullet}_{kp^r}(r),d)$ est une p-résolution injective de $S^{k(r)}$. Si n n'est pas un multiple de p^r, $(B^{p^{r-1}\bullet}_n(r),d)$ est p-acyclique.*

La fin de l'article est consacrée à la démonstration du théorème 4.3.1.

LEMME 4.3.3. — *Il existe une injection $i\ :\ S^{*(r)}\hookrightarrow B^0(r)$ telle que $d\circ i=0$.*

Démonstration. — Le foncteur $B^0(r)$ est égal à $S^*\otimes S^0\otimes\cdots\otimes S^0$, où le seul terme non égal à S^0 est en position $(0,\dots,0)$. Ainsi, $B^0(r)\cong S^*$. Alors, l'injection $i\ :\ S^{*(r)}\hookrightarrow B^0(r)$ est donnée par le morphisme de Frobenius $S^{*(r)}\hookrightarrow S^*$ envoyant $X^{(r)}$ sur X^{p^r}. Pour montrer que $d\circ i=0$, il suffit de montrer que $d(X^{p^r})=0$ pour tout $X\in S^*(V)$. Cela découle du fait que pour tout $s\in\{0,\dots,r-1\}$, $d^s_{p^s}(X^{p^r})$ est nul d'après la proposition 4.1.6. $\square$

Par conséquent, on obtient, pour tout $s\in\{1,\dots,p-1\}$, une injection

$$\begin{tikzcd} S^{*(r)} \arrow[r, hook] \arrow[rr, hook, bend right, "i_s"'] & \mathrm{H}^0_{[s]}(B(r),d) \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d). \end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que i_s est un isomorphisme.

On définit une structure de p-bicomplexe (terminologie évidente) sur $B(r)$ comme suit : on définit deux différentielles d' et d'' par :

$$d' = \sum_{t=0}^{r-2} d^t_{p^t} \quad \text{et} \quad d'' = d^{r-1}_{p^{r-1}}.$$

Alors, d' et d'' sont clairement des p-différentielles (même démonstration que pour d), commutent entre elles d'après la proposition 4.2.6, et $d = d' + d''$. De plus, on définit deux degrés $\deg'$ et $\deg''$ par

$$\deg' = \sum_{t=0}^{r-2} p^{r-s-1} \deg^s \quad \text{et} \quad \deg'' = \deg^{r-1}.$$

Alors :

- d' augmente $\deg'$ de p^{r-1} et préserve $\deg''$;
- d'' augmente $\deg''$ de p^{r-1} et préserve $\deg'$.

Ainsi, en définissant $B^{k,\ell}(r)$ comme la somme des facteurs de $B(r)$ de degré $\deg'$ égal à k et de degré $\deg''$ égal à ℓ, on obtient un p-bicomplexe $(B^{\bullet,\bullet}(r), d', d'')$, avec

$$d' \ : \ B^{\bullet,\bullet}(r) \longrightarrow B^{\bullet+p^{r-1},\bullet}(r) \quad \text{et} \quad d'' \ : \ B^{\bullet,\bullet}(r) \longrightarrow B^{\bullet,\bullet+p^{r-1}}(r).$$

Le complexe total de $(B^{\bullet,\bullet}(r), d', d'')$ est le p-complexe $(B(r), d)$.

Par convention, $\mathrm{H}^*_{[s]}(B^{\bullet,\bullet}(r), d')$ désigne la cohomologie par rapport à d', *gradué selon le degré cohomologique* $\deg'$, et non selon le degré total deg. Chaque $\mathrm{H}^i_{[s]}(B^{\bullet,\bullet}(r), d')$ est aussi gradué selon $\deg''$.

Pour démontrer le théorème 4.3.1, on utilise les trois lemmes ci-dessous.

Lemme 4.3.4. — *En tant que p-complexes,* $(B^\bullet(r), d') \cong (B(r-1) \circ \Delta^p, d \circ \Delta^p)$.

Lemme 4.3.5. — *Supposons que $B(r-1)$ soit une résolution de $S^{*(r-1)}$. Alors, pour tout $s \in \{1, \ldots, p-1\}$*

$$\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d') = B^{(r-1)},$$

concentré en degré cohomologique $\deg'$ *égal à* 0*. De plus, l'image encore notée* d'' *de la différentielle* d'' *dans* $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d')$ *est la différentielle* $d^{(r-1)}$ *de* $B^{(r-1)}$.

Autrement dit, si $B(r-1)$ est une p-résolution de $S^{*(r-1)}$, alors $(\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d'), d'')$ est égal au p-complexe obtenu en tordant $r-1$ fois le complexe (B, d).

Lemme 4.3.6. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d', d'')$ *un* p*-bicomplexe dans le quadrant positif tel que*

(i) *pour tout couple* $(s,t) \in \{1, \ldots, p-1\}^2$, $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d') = \mathrm{H}^*_{[t]}(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d')$ *; on note simplement* $\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d')$ *la valeur commune ;*

(ii) $\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d') = 0$ *pour tout* $i > 0$ *;*

(iii) *pour tout couple* $(s,t) \in \{1, \ldots, p-1\}^2$, $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d'), d'') = \mathrm{H}^*_{[t]}(\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d'), d'')$ *; on note simplement* $\mathrm{H}^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d'), d'')$ *la valeur commune ;*

(iv) $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d'), d'') = 0$ *pour tout* $i > 0$.

Alors, si on note $d = d' + d''$ *la* p*-différentielle totale, pour tout couple* $(s,t) \in \{1, \ldots, p-1\}^2$, $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathrm{Tot}\ \ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d) = \mathrm{H}^*_{[t]}(\mathrm{Tot}\ \ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d)$ *; on note simplement* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Tot}\ \ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d)$ *la valeur commune. De plus,*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Tot}\ \ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d) = \mathrm{H}^0(\mathrm{H}^0(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d'), d''),$$

concentré en degré total 0*. En d'autres termes, le* p*-complexe* $(\mathrm{Tot}\ \ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d)$ *est une* p*-résolution de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{H}^0(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d'), d'')$.

Le lemme 4.3.6 est la transcription au cas d'un p-bicomplexe de la situation simple d'une suite spectrale associée à un bicomplexe, qui dégénèrerait au rang 2 ; plus précisément telle que E^1 serait concentré sur la ligne d'ordonnée 0, et E^2 serait concentré en degré total 0. Dans ce cas, la théorie des suites spectrales permet de conclure immédiatement que le complexe total est une résolution de la cohomologie concentrée en degré 0. C'est cet argument qu'utilisent Friedlander et Suslin lorsque $p = 2$.

Démonstration du lemme 4.3.4. — Dans cette démontration, on note $d^s_\ell(r)$ et $d(r)$ les différentielles associées au complexe $B(r)$, pour les distinguer des différentielles associées au complexe $B(r-1)$.

Le complexe $B(r-1)\circ\Delta^p$ est isomorphe à $\bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} B(r-1)$, et la différentielle $d(r-1)\circ\Delta^p$ est égale à $\bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} d(r-1)$. Or, $d(r-1) = \sum_{s=0}^{r-2} d^s_{p^s}(r-1)$. De plus, l'isomorphisme défini par la permutation des facteurs :

$$I : \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} \underbrace{\bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_{r-2}=0}^{p-1} S^*}_{B(r-1)} \xrightarrow{\cong} \bigotimes_{i_0=0}^{p-1} \cdots \bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} S^* = B(r)$$

envoie clairement le morphisme $\bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} d^s_{p^s}(r-1)$ sur $d^s_{p^s}(r)$. Ainsi, I envoie $\bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} d(r-1)$ sur $d'(r)$, c'est-à-dire $d(r-1)\circ\Delta^p$ sur $d'(r)$. En d'autres termes, I induit un isomorphisme de p-complexes :

$$I : (B^\bullet(r), d'(r)) \xrightarrow{\cong} (B(r-1)\circ\Delta^p, d(r-1)\circ\Delta^p)$$

□

Démonstration du lemme 4.3.5. — Si $B(r-1)$ est une résolution de $S^{*(r-1)}$, alors, pour tout $s\in\{1,\dots,p-1\}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d') &= \mathrm{H}^*_{[s]}(B(r-1)\circ\Delta^p, d\circ\Delta^p)\\ &= S^{*(r-1)}\circ\Delta^p = (S^{*(r-1)})^{\otimes p} = B^{(r-1)}.\end{aligned}$$

Plus précisément, $S^{*(r-1)}\circ\Delta^p$ est concentré en degré cohomologique nul dans $B(r-1)\circ\Delta^p$, et est donc inclus dans $B^0(r-1)\circ\Delta^p$. Cette inclusion est donnée par le lemme 4.3.3 et consiste en une itération $r-1$ fois du morphisme de Frobenius φ sur le facteur indexé par $(0,\dots,0)$:

$$x\in\Delta^p(V) \longmapsto \underbrace{x^{p^{r-1}}}_{\text{position }(0,\dots,0)}\otimes 1\otimes\dots\otimes 1.$$

D'après le lemme 4.3.4 et sa démonstration, l'inclusion correspondante de $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d') = (S^{*(r-1)})^{\otimes p}$ dans $B(r)$ est donnée, sur le facteur $S^{*(r-1)}$ en position i, par le morphisme de Frobenius itéré φ^{r-1} sur le facteur en position $(0,\dots,0,i)$ de $B(r)$. En particulier, $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d')$ est concentré en degré cohomologique partiel $\deg'$ égal à 0.

Les p-différentielles d^{r-1}_ℓ commutent avec d' (proposition 4.2.6), et définissent donc par restriction des p-différentielles $\bar{d}^{r-1}_\ell$ sur $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d')$. On note aussi $\bar{d}_0$ le morphisme identité, restriction de d_0.

Pour terminer la démonstration du lemme 4.3.5, nous utilisons les deux lemmes suivants.

Lemme 4.3.7. — *Pour tout $\ell \in \{1,\dots,p^{r-1}-1\}$, la p-différentielle $\bar{d}^{r-1}_\ell$ est nulle.*

Démonstration. — Un élément de $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d') \subset B(r)$ est de la forme $X^{p^{r-1}}$. Alors, d'après la proposition 4.1.2,

$$\bar{d}^{r-1}_\ell(X^{p^{r-1}}) = \sum_{j_1+\cdots+j_{p^{r-1}}=\ell} d_{j_1}(X)\cdots d_{j_{p^{r-1}}}(X).$$

Deux multi-indices $(j_1,\dots,j_{p^{r-1}})$ et $(j'_1,\dots,j'_{p^{r-1}})$ sont équivalents si l'un est obtenu de l'autre par permutation. Deux multi-indices dans une même classe d'équivalence donnent le même terme dans la somme. Il suffit donc de montrer que le cardinal de toutes les classes d'équivalence est divisible par p. Or le cardinal d'une classe d'équivalence représentée par $(j_1,\dots,j_{p^{r-1}})$ est $\binom{p^{r-1}}{\beta_1,\dots,\beta_k}$, où $\beta_1,\dots,\beta_k$ sont les nombres d'indices égaux entre eux dans $(j_1,\dots,j_{p^{r-1}})$. Ce coefficient multinomial est toujours divisible par p, sauf si un des entiers β_i est égal à p^{r-1}, ce qui signifie que $j_1 = \cdots = j_{p^{r-1}}$. Cela n'est pas possible puisque la somme des indices est ℓ, qui n'est pas divisible par p^{r-1}. □

Lemme 4.3.8. — *La p-différentielle $\bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}}$ est une dérivation.*

Démonstration. — Soit X et Y des éléments de $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d') \subset B(r)$. Alors, d'après le lemme 4.1.1,

$$\bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}}(X\cdot Y) = \sum_{\ell=0}^{p^{r-1}} \bar{d}^{r-1}_\ell(X)\cdot \bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}-\ell}(Y).$$

D'après le lemme 4.3.7, tous les termes de cette somme sont nuls, sauf ceux correspondant aux indices $\ell = 0$ et $\ell = p^{r-1}$, d'où le résultat. □

Fin de la démonstration du lemme 4.3.5.

D'après les lemmes 4.1.1 et 4.3.8, il suffit, pour montrer que $\bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}}$ coïncide avec la p-différentielle $d^{(r-1)}$ de $B^{(r-1)}$, de montrer que ces p-différentielles commutent sur des générateurs multiplicatifs, par exemple sur les générateurs $(v(i))_{v\in V, i\in\{0,\dots,p-1\}}$. Le générateur $v(i)$ est l'image de $v(0,\dots,0,i)^{p^{r-1}}$ dans $B(r)$. Or, d'après la proposition 4.1.2,

$$\begin{aligned} &d^{r-1}_{p^{r-1}}(v(0,\dots,0,i)^{p^{r-1}}) \\ &\qquad = \sum_{j_1+\cdots+j_{p^{r-1}}=p^{r-1}} d^{r-1}_{j_1}(v(0,\dots,0,i))\cdots d^{r-1}_{j_{p^{r-1}}}(v(0,\dots,0,i)). \end{aligned}$$

Or d^{r-1}_j est nul sur le générateur $v(0,\dots,0,i)$, sauf si $j = 0$ ou $j = 1$. Le seul terme de la somme ci-dessus qui soit non nul correspond donc aux indices $j_1 = \cdots = j_{p^{r-1}} = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} d^{r-1}_{p^{r-1}}(v(0,\dots,0,i)^{p^{r-1}}) &= d^{r-1}_1(v(0,\dots,0,i))^{p^{r-1}} \\ &= \begin{cases} v(0,\dots,0,i+1)^{p^{r-1}} & \text{si } i < p-1, \\ 0 & \text{si } i = p-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}}(v(i))$ est égal à $v(i+1)$ si $i < p-1$, et est nul si $i = p-1$. Cela correspond à la description de la différentielle $d^{(r-1)}$ de $B^{(r-1)}$. □

Démonstration du lemme 4.3.6. — La démonstration de ce lemme est strictement identique à celle du théorème 3.2.1. Le théorème 3.2.1 en est d'ailleurs un cas particulier. □

Démonstration du théorème 4.3.1. — L'injectivité découle évidemment de la description des foncteurs injectifs dans la catégorie $\mathcal{P}$ (théorème 1.2.1). L'essentiel du travail consiste donc à montrer qu'il s'agit d'une p-résolution de $S^{*(r)}$.

Pour ce faire, on effectue une récurrence sur l'entier r. L'initialisation est donnée par le cas de $S^{*(1)}$, admettant $B = B(1)$ pour résolution d'après le théorème 3.1.2.

Supposons que le théorème soit vrai jusqu'à $r-1$. Alors, $B(r)$ est muni d'une structure de bicomplexe $(B(r), d', d'')$. Ce bicomplexe vérifie les hypothèses du lemme 4.3.6 :

- Les conditions d'application du lemme 4.3.5 sont remplies, d'après l'hypothèse de récurrence. Alors, $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d')$ est indépendant de s et est nul en degré cohomologique $\deg'$ non nul. Ainsi, les conditions (i) et (ii) sont remplies.

- Toujours d'après le lemme 4.3.5, le p-complexe $(\mathrm{H}^*(B(r), d'), d'')$ est isomorphe au p-complexe $(B^{(r-1)}, d^{(r-1)})$, c'est-à-dire à la torsion itérée $r-1$ fois du p-complexe (B, d). Ainsi, d'après le théorème 3.1.2, $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathrm{H}^*(B(r), d'), d'')$, égal à $\mathrm{H}^*_{[s]}(B^{(r-1)}, d^{(r-1)})$, est indépendant de s (condition (iii)), concentré en degré cohomologique total 0 (condition (iv)), et égal à $(S^{*(1)})^{(r-1)} = S^{*(r)}$.

Par conséquent, les conditions d'application du lemme 4.3.6 sont remplies, et le complexe total $(B(r), d)$ est une p-résolution de $\mathrm{H}^0(\mathrm{H}^*(B(r), d'), d'') = S^{*(r)}$. La propriété de récurrence est donc vérifiée pour r. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Franjou, E. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, General linear and functor cohomology over finite fields, Ann. of Math. 150 (1999), no. 2, 663–728.

[2] V. Franjou, J. Lannes, L. Schwartz, Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis, Invent. Math. 115 (1994), 513–538.

[3] E. Friedlander, A. Suslin, Cohomology of finite group schemes over a field, Invent. Math. 127 (1997), no. 2, 209–270.

[4] H.-W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, Analytic functors, unstable algebras and cohomology of classifying spaces, Alg. Top. Proc. 96 (1989), 197–220, Northwestern University, Cont.

[5] M. M. Kapranov, On the q-analog of homological algebra, Preprint q-alg/9611005 (1996).

[6] C. Kassel, M. Wambst, Algèbre homologique des N-complexes et homologie de Hochschild aux racines de l'unité, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 34 (1998), no. 2, 91–114.

[7] B. Totaro, Projective resolutions of representations of GL(n), J. Reine Angew. Math. 482 (1997), 1–13.

[8] A. Troesch, Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques, Comm. in Algebra 30 (2002), no. 7, 3351–3382.

[9] A. Troesch, Une formule pour les extensions de foncteurs composés, Fund. Math. 177 (2003), 55–82.

Manuscrit reçu le 23 octobre 2003,
accepté le 23 juin 2004.

Alain TROESCH,
Institut de Mathématiques de Jussieu
175 rue du Chevaleret
75013 Paris (France)

troesch@math.jussieu.fr