ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Fabrice ORGOGOZO

Conjecture de Bloch et nombres de Milnor

Tome 53, n^{o} 6 (2003), p. 1739-1754.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_6_1739_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
53, 6 (2003), 1739–1754

CONJECTURE DE BLOCH ET NOMBRES DE MILNOR

par Fabrice ORGOGOZO

Introduction.

0.1. Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$ un trait hensélien à corps résiduel algébriquement clos, de point fermé (resp. générique) s (resp. η), X un S-schéma plat, séparé de type fini, purement de dimension relative $n \in \mathbb{N}$, et lisse en dehors d'un unique point fermé x de la fibre spéciale X_s. On suppose de plus X régulier. Soit

(0.1.a) $$\mu(X/S, x) = \mathrm{long}_{\mathcal{O}_{X,x}} \underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X)_x,$$

le nombre de Milnor de X en x ([SGA 7 XVI 1.2]).

Soient $\overline{\eta}$ un point géométrique localisé en η, et ℓ un nombre premier inversible dans $\mathcal{O}_S$; le complexe des cycles évanescents sur X_s, noté $\Phi(\mathbb{F}_\ell)$, est concentré en x et à cohomologie constructible. Pour tout $\mathbb{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie M, muni d'une action continue de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})$, on note $\mathrm{dim\,tot}\, M$ l'entier $\dim_{\mathbb{F}_\ell}(M) + \mathrm{Swan}(M)$. Dans [SGA 7 XVI 1.9], P. Deligne fait la conjecture suivante :

0.2. Conjecture « Deligne-Milnor ». — *Sous les hypothèses précédentes, on a l'égalité :*

(0.2.a) $$\mu(X/S, x) = (-1)^n \,\mathrm{dim\,tot}\; \Phi(\mathbb{F}_\ell)_x.$$

Cette conjecture est démontrée dans *loc. cit.* dans les trois cas suivants :

Mots-clés : Singularité isolée – Nombre de Milnor – Caractéristique d'Euler – Conducteur de Swan – Compactification – Schéma formel.
Classification math. : 14H10 – 14D06 – 14B07 – 14D15.

– $n = 0$,

– X/S présente une singularité quadratique ordinaire en x,

– S est d'égale caractéristique.

0.3. Plus généralement, cette conjecture a un sens dès que $\kappa(s)$ est parfait. Cependant, on ignore comment définir un second membre sans cette hypothèse. Notons que, d'après [Ill00], $\Phi(\mathbb{F}_\ell)$ est concentré en degré n, de sorte que le second membre de 0.2.a est $\dim_{\mathbb{F}_\ell}(\Phi^n(\mathbb{F}_\ell)_x) + \mathrm{Swan}(\Phi^n(\mathbb{F}_\ell)_x)$.

0.4. Soient S comme précédemment et X un S-schéma régulier, plat, séparé de type fini, purement de dimension relative n, à fibre générique lisse. Soit

$$\mathrm{Art}(X/S) = \dim\mathrm{tot}\ \mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi(\mathbb{F}_\ell)),$$

le conducteur d'Artin. Si X/S est propre, le complexe des cycles proches calcule la cohomologie de la fibre générique géométrique, et l'on a

$$\mathrm{Art}(X/S) = \chi(X_{\overline{\eta}}) - \chi(X_s) + \mathrm{Swan}\ \mathrm{R}\Gamma(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{F}_\ell).$$

Dans [Blo87], S. Bloch définit une classe de Chern localisée

$$c_{n+1}{}^{X}_{X_s}(\Omega^1_{X/S}) \in \mathrm{CH}_0(X_s),$$

et fait la conjecture suivante :

0.5. Conjecture (Bloch). — *Supposons de plus X/S propre, on a*

$$\mathrm{Art}(X/S) = (-1)^n \deg c_{n+1}{}^{X}_{X_s}(\Omega^1_{X/S}). \tag{0.5.a}$$

Cette conjecture est démontrée par S. Bloch dans *loc. cit.* pour $n = 1$, et par K. Kato et T. Saito si l'on suppose que $(X_s)_{\text{réd}}$ est un diviseur à croisement normaux ([KS01]).

0.6. Dans [Ill72], L. Illusie définit les dérivés du foncteur non additif Λ^{n+1}. Si $Z_{X/S} \subset X_s$ désigne le lieu fermé de non lissité de $f : X \to S$, le complexe $\mathrm{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}$ appartient à $\mathrm{D}^b_{Z_{X/S}}(X)_{\text{parf}}$. La structure de schéma (non nécessairement réduit) sur l'espace $Z_{X/S}$ est explicitée dans la section suivante. D'après T. Saito ([Sai88], 2.3 et [Sai00], corrections), on a l'égalité

$$\deg c_{n+1}{}^{X}_{X_s}(\Omega^1_{X/S}) = \chi(X, \mathrm{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}), \tag{0.6.a}$$

où χ désigne le composé $\mathrm{K}_{X_s}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}(X_s) \xrightarrow{f_{s*}} \mathrm{K}(s) = \mathbb{Z}$. Le terme de droite de 0.6.a nous permet de définir le second terme de 0.5.a en supposant seulement que $Z_{X/S}$ est propre sur s et par là même d'émettre la conjecture suivante :

0.7. CONJECTURE. — *Soient S et X comme dans 0.4. Supposons le lieu $Z_{X/S}$ de non lissité de X/S propre sur s. On a :*

$$\mathrm{Art}(X/S) = (-1)^n \chi(X, \mathrm{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}).$$

Nous verrons plus bas que c'est une généralisation commune de 0.2 et 0.5, démontrée pour $n = 1$ dans l'appendice B. Le résultat principal de cette note est le théorème suivant :

0.8. THÉORÈME. — *La conjecture 0.2 se déduit de la conjecture 0.5.*

On en tire le

0.9. COROLLAIRE. — *La formule de Deligne-Milnor est valable en dimension relative* 1.

0.10. Nous vérifierons dans la section suivante que la conjecture 0.2 est équivalente à la conjecture 0.7 dans le cas où $Z_{X/S} = \{x\}$. En particulier, 0.2 est équivalent à 0.5 si X/S est propre et présente une unique singularité dans la fibre spéciale. Il serait intéressant de généraliser l'énoncé 0.8 en une démonstration de l'implication 0.5 $\Rightarrow$ 0.7.

0.11. Remerciements. Ils vont en premier lieu à Luc Illusie qui a eu la gentillesse de me faire part de cette question et de sa note [Ill99], dans laquelle on trouve le lien entre puissances extérieures dérivées et nombre de Milnor. Ses commentaires sur les versions précédentes de ce texte en ont grandement amélioré la lisibilité. Je remercie Michel Raynaud à qui je dois la démonstration donnée dans l'appendice A, Ofer Gabber qui a eu l'amabilité de relire ce texte et de me suggérer quelques corrections, et enfin le rapporteur dont les remarques m'ont été bien utiles.

1. Nombre de Milnor et classe de Bloch.

Les hypothèses sont celles du 0.4.

1.1. Description locale du lieu singulier. Localement sur X pour la topologie de Zariski, il existe un S-schéma lisse P de dimension relative $n+1$ et une S-immersion régulière $i : X \hookrightarrow P$ (cf. par exemple [KS01]). Pour simplifier l'écriture, nous notons encore X un tel ouvert. La suite exacte en traits pleins

$$(1.1.a) \qquad 0 \dashrightarrow \mathcal{N}_{X/P} \xrightarrow{d} i^*\Omega^1_{P/S} \to \Omega^1_{X/S} \to 0$$

est aussi exacte à gauche. En effet, le faisceau $\mathcal{N}_{X/P}$ est localement libre (de rang 1) par hypothèse et l'exactitude à gauche est valable en restriction à la fibre générique X_η, supposée lisse sur η. L'image $\mathcal{J}_X$ du morphisme $\mathcal{N}_{X/P} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i^*\Omega^1_{P/S})^\vee \to \mathcal{O}_X$ définit un sous-schéma fermé

$$e : Z \hookrightarrow X.$$

C'est l'idéal jacobien $\mathcal{J}^n_{X/S}$ (cf. [SGA 7 VI §5]) abstraitement défini comme l'idéal de Fitting $\mathrm{Fitt}_n(\Omega^1_{X/S})$. En particulier, il est indépendant du choix de P, ce qui résulte aussi de 1.1.d. De la suite exacte 1.1.a, on déduit la suite exacte :

$$\text{(1.1.b)} \qquad \mathcal{N}_{X/P} \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*\Omega^n_{P/S} \to i^*\Omega^{n+1}_{P/S} \to \Omega^{n+1}_{X/S} \to 0.$$

Par tensorisation avec le faisceau $(i^*\Omega^{n+1}_{P/S})^\vee$, localement libre de rang 1, on en déduit une suite exacte :

$$\text{(1.1.c)} \qquad \mathcal{N}_{X/P} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i^*\Omega^1_{P/S})^\vee \xrightarrow{d^\vee} \mathcal{O}_X \to \Omega^{n+1}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i^*\Omega^{n+1}_{P/S})^\vee \to 0.$$

Ainsi, on a un isomorphisme

$$\text{(1.1.d)} \qquad \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_X \xrightarrow{\sim} \Omega^{n+1}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i^*\Omega^{n+1}_{P/S})^\vee,$$

1.2. Expression locale de $T^1_{X/S} = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X)$. Plaçons-nous dans un ouvert affine convenable de X, comme dans le paragraphe précédent. La résolution localement libre de $\Omega^1_{X/S}$ permet de calculer le faisceau $T^1_{X/S}$. En appliquant le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathcal{O}_X)$ à 1.1.a, on trouve la suite exacte :

$$(i^*\Omega^1_{P/S})^\vee \to \mathcal{N}^\vee_{X/P} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \to 0.$$

Tensorisant 1.1.c avec $\mathcal{N}^\vee_{X/P}$, on obtient un isomorphisme

$$\text{(1.2.a)} \qquad T^1_{X/S} = \Omega^{n+1}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i^*\Omega^{n+1}_{P/S})^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^\vee_{X/P}$$

$$\text{(1.2.b)} \qquad = \mathcal{O}_Z \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^\vee_{X/P}.$$

Ainsi, $T^1_{X/S}$ a pour support Z, donc est de longueur finie sur $\mathcal{O}_{X,x}$ si $Z_{\text{réd}} = \{x\}$. En particulier, si $P = \mathbf{A}^{n+1}_S$, et $0 \in X = V(f)$ est une singularité isolée, on retrouve la définition usuelle du nombre de Milnor donnée dans [SGA 7 XVI §1] :

$$\mu(f) = \mathrm{long}_A\ A[t_1, \ldots, t_{n+1}]_{(t_1,\ldots,t_{n+1})}/\Big(f, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_{n+1}}\Big).$$

1.3. Complexes de Koszul et dérivés des puissances extérieures.

1.3.1. Rappels et notations. Soient R un anneau local régulier, r un entier, et $u = (u_1, \dots, u_r) : R^r \to R$ une application R-linéaire. Notons $e_1, \dots, e_r$ la base canonique de R^r et

$$\mathrm{Kos}^{\llcorner}(u) : [0 \to \Lambda^r R^r \to \cdots \to \Lambda^{k+1} R^r \to \Lambda^k R^r \to \cdots \to R^r \xrightarrow{u} R \to 0],$$

le complexe de Koszul usuel, où R est placé en degré 0 et $\Lambda^{k+1} R^r \to \Lambda^k R^r$ est donné par

$$x = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{k+1}} \mapsto x \llcorner u = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} u(e_{i_j}) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge e_{i_{k+1}}.$$

On a $\mathrm{H}^0\big(\mathrm{Kos}^{\llcorner}(u)\big) = R/u(R^r)$, et le morphisme canonique $\mathrm{Kos}^{\llcorner}(u) \to R/u(R^r)$ est un isomorphisme si, et seulement si, la suite u est régulière (*complètement sécante* dans la terminologie de Bourbaki [Bou80]), c'est-à-dire $\mathrm{long}_R\, \big(R/u(R^r)\big) < +\infty$ si l'on suppose de plus $r = \dim R$.

Dualement, pour tout morphisme $v : R \to R^r$, on a le complexe

$$\mathrm{Kos}^{\wedge}(v) : [0 \to R \xrightarrow{v} R^r \to \cdots \to \Lambda^k R^r \xrightarrow{v\wedge} \Lambda^{k+1} R^r \to \cdots \to \Lambda^r R^r \to 0],$$

où R est à nouveau placé en degré 0.

Rappelons enfin la dualité de Koszul (cf. par exemple [Eis95], 17.15) : $\mathrm{Kos}^{\llcorner}(u)^{\vee} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}^{\wedge}(u^{\vee})$.

1.3.2. Soient R et r comme précédemment, et $\mathcal{C}_v : [R \xrightarrow{v} R^r]$ un objet de $\mathrm{D}^-_{\mathrm{coh}}(R)$ (la catégorie des complexes bornés supérieurement de R-modules dont les groupes de cohomologie sont de type fini), où R est placé en degré -1.

1.3.3. Lemme. — *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme dans* $\mathrm{D}^-_{\mathrm{coh}}(R)$:

$$\mathrm{L}\Lambda^r(\mathcal{C}_v) = \mathrm{Kos}^{\wedge}(v)[r].$$

Démonstration. — D'après l'isomorphisme de Quillen (cf. [Ill72], I.4.3.2), on a $\mathrm{L}\Lambda^r(\mathcal{C}_v) = \mathrm{L}\Gamma^r(\mathcal{C}_v[-1])[r]$, où Γ désigne le foncteur non additif « algèbre à puissances divisées » (les tenseurs symétriques). Il est démontré dans *loc. cit.*, VIII.2.1.2.1 que si $\mathcal{L} = [R \xrightarrow{a} R^r]$, ses composantes étant placées en degré 0 et 1, on a $\mathrm{L}\Gamma^r(\mathcal{L}) = \mathrm{Kos}^{\wedge}(a)$. Le lemme en découle. □

On trouvera dans *loc. cit.* des résultats plus généraux : cas des complexes à composantes plates, etc.

En particulier, il résulte de la dualité de Koszul que le morphisme canonique $\mathrm{L}\Lambda^r \mathcal{C}_v \to \Lambda^r \mathrm{H}^0(\mathcal{C}_v)$ est un isomorphisme si v est une suite régulière.

1.4. Globalisation.

1.4.1. Sous les hypothèses de 0.4, on a :

1. l'idéal jacobien $\mathcal{J}_X$ est l'annulateur du $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^{n+1}_{X/S}$. Par la suite, nous noterons $e : Z_{X/S} = V(\operatorname{Ann}\Omega^{n+1}_{X/S}) \hookrightarrow X$,
2. le morphisme canonique $L_{X/S} \to \Omega^1_{X/S}$, où $L_{X/S}$ est le complexe cotangent défini dans [Ill72], est un isomorphisme (dans la catégorie dérivée adéquate),
3. on a un isomorphisme canonique

$$T^1_{X/S} = e_*(e^*\Omega^{n+1}_{X/S})^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{dét}\,(\Omega^1_{X/S}), \tag{1.4.a}$$

4. le morphisme canonique

$$\mathrm{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S} \to \Omega^{n+1}_{X/S} \tag{1.4.b}$$

est un isomorphisme si $Z_{X/S}$ est de dimension 0.

Le premier énoncé résulte de 1.1d. Le second est bien connu (cf. [KS01]) et justifie la définition que nous avons prise du faisceau $T^1_{X/S}$ dans le paragraphe précédent. L'isomorphisme 1.4.a est une globalisation de 1.2.a, que nous laissons au lecteur. (Voir [KM76] pour la définition du déterminant d'un complexe parfait.) Rappelons cependant que localement, avec les notations de 1.1.a, on a $\text{dét}\,(\Omega^1_{X/S}) = i^*\Omega^{n+1}_{P/S} \otimes \mathcal{N}^\vee_{X/P}$. Le dernier point résulte, par localisation, des calculs locaux précédents : $\mathrm{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}$ est acyclique hors du degré 0.

Dans le cas complexe, la relation entre nombre de Milnor d'une singularité isolée et les classes de Chern localisées du faisceau des différentielles relatives est bien connue (cf. [Ful98], 14.1.5).

1.4.2. Pour mémoire, signalons le résultat suivant. Soit $\mathcal{L}$ le faisceau $\underline{\mathrm{H}}^{-1} Le^*\Omega^1_{X/S}$ considéré dans [KS01]. Sous les hypothèses de 1.1, le complexe $Le^*\Omega^1_{X/S}$ est (localement) isomorphe au complexe $[e^*\mathcal{N}_{X/P} \xrightarrow{0} (ie)^*\Omega^1_{P/S}]$, si bien que $\mathcal{L}$ est (localement) isomorphe à $e^*\mathcal{N}_{X/P}$. Le faisceau inversible $\mathcal{L}^\vee$, localement isomorphe à $e^*\mathcal{N}_{X/P}^\vee$, est globalement isomorphe à $e^*T^1_{X/S}$.

2. Compactification.

Le résultat principal est le suivant :

2.1. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de 0.2, et si l'on suppose de plus S complet, il existe un S-schéma projectif et plat Y, purement de dimension relative n, lisse en dehors d'un unique point fermé y de la fibre spéciale Y_s, tel que les hensélisés stricts $X_{(x)}$ et $Y_{(y)}$ soient S-isomorphes.*

La démonstration fait l'objet des paragraphes 2.2 à 2.7. Dans le cas de la dimension relative 1, un autre argument, dû à M. Raynaud, est donné dans l'appendice A.

2.2. Comme X est régulier et que toute S-immersion dans un S-schéma lisse est régulière, il existe un entier r tel que (X, x) soit Zariski-localement isomorphe à $(V(\mathbf{f}), 0)$, où $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_r)$ est une suite régulière de $A[T_1, \ldots, T_{n+r}] = A[\mathbf{T}]$ et $\{0\}$ désigne l'origine de $\mathbf{A}_s^{n+r}$. On suppose désormais S complet, $X = V(\mathbf{f})$ et $x = 0$. Notons $\mathfrak{m}$ (resp. $\hat{\mathfrak{m}}$) l'idéal maximal en l'origine de $A[\mathbf{t}]$ (resp. du complété $A[\![\mathbf{t}]\!]$) et $\hat{\mathfrak{m}}_X$ (resp. $\mathfrak{m}_X$) l'image de $\hat{\mathfrak{m}}$ dans $R \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ (resp. l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$). Enfin, supposons $\mu = \mu(X/S, x) > 0$.

2.3. LEMME. — *Sous les hypothèses de 2.2, il existe un entier $\lambda_{X,x}$ tel que pour toute suite $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_r)$ de $A[T_1, \ldots, T_{n+r}]$, satisfaisant les r relations de congruences $g_i - f_i \in \mathfrak{m}^{\lambda_{X,x}}$, les deux schémas strictement locaux $V(\mathbf{g})_{(0)}$ et $X_{(x)}$ soient S-isomorphes.*

La démonstration se coupe en deux : une partie formelle (2.4), et une de descente aux hensélisés.

2.4. LEMME (Suffisance des jets). — *Pour tout r-uplet d'éléments $\mathbf{g} \in A[\![\mathbf{T}]\!]^r$, satisfaisant $\mathbf{f} - \mathbf{g} \in (\hat{\mathfrak{m}}^{3\mu})^r$, il existe $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+r})$ dans $A[\![\mathbf{T}]\!]^{n+r}$, tel que $\mathbf{x} \equiv \mathbf{T} \bmod \hat{\mathfrak{m}}^2$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ dans $A[\![\mathbf{T}]\!]/(\mathbf{f})$. En d'autres termes, il existe un A-isomorphisme tangent à l'identité : $A[\![\mathbf{T}]\!]/(\mathbf{g}) \xrightarrow{\sim} A[\![\mathbf{T}]\!]/(\mathbf{f})$, défini par $t_i \mapsto x_i$.*

Notons $\mathbf{f}'$ l'application linéaire $A[\mathbf{T}]^{n+r} \to A[\mathbf{T}]^r$, définie par les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial T_j}$. Par hypothèse, le nombre de Milnor

$$\mu = \operatorname{long}_R R^r / \operatorname{Im}(\mathbf{f}'_R) \geqslant 1,$$

est fini (cf. 1.2), où $\mathbf{f}'_R$ désigne $\mathbf{f}' \otimes_{A[\mathbf{T}]} R$. (De même, nous noterons $\mathbf{g}_R$ l'image dans R^r d'un $\mathbf{g}$, mais nous noterons $\mathbf{t}$ l'image des variables $\mathbf{T}$ dans R.) Ainsi, $(\hat{\mathfrak{m}}_X^{\mu} R)^r \subset \mathbf{f}'_R R^{n+r}$. On en déduit, pour tout $c \in \mathbb{N}$, l'inclusion de sous-R-modules de R^r :

$$(\hat{\mathfrak{m}}_X^{\mu+c} R)^r \subset \mathbf{f}'_R\big((\hat{\mathfrak{m}}_X^{c} R)^{n+r}\big) \ (\star_c).$$

Remarquons que si $\mathbf{g} \in A[\![\mathbf{T}]\!]^r$ satisfait les congruences $\mathbf{f}_R - \mathbf{g}_R \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{\mu+2})^r$, l'inclusion $(\star_0)$ est encore valable avec $\mathbf{g}'_R$ à la place de $\mathbf{f}'_R$. Considérons $\mathbf{g} \in A[\![\mathbf{T}]\!]^r$ tel que $\mathbf{g} - \mathbf{f} \in (\hat{\mathfrak{m}}^{3\mu})^r$ comme dans l'énoncé et tâchons de vérifier les conclusions de 2.4. Soit $\varepsilon \in R^{n+r}$; la formule de Taylor pour $\mathbf{g}$, vu comme élément de $R[\![\mathbf{T}]\!]$ via le plongement $A \hookrightarrow R$, s'écrit :

$$\mathbf{g}(\mathbf{t} + \varepsilon) = \mathbf{g}(\mathbf{t}) + \mathbf{g}'(\mathbf{t}) \cdot \varepsilon + \big(\text{termes quadratiques en } \varepsilon\big).$$

Il s'agit d'une égalité dans R^r. Remarquons que $\mathbf{g}(\mathbf{t})$ n'est autre que $\mathbf{g}_R$, de même que l'application linéraire $\mathbf{g}'(\mathbf{t})$ correspond à $\mathbf{g}'_R$.

D'après $(\star_{2\mu})$, on peut trouver $\varepsilon_{[0]} \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{2\mu} R)^{n+r}$ tel que $\mathbf{g}'_R \cdot \varepsilon_{[0]} = \mathbf{f}_R - \mathbf{g}_R$. Considérons $\tilde{\varepsilon}_{[0]} \in A[\![\mathbf{T}]\!]^{n+r}$ un relèvement quelconque de $\varepsilon_{[0]} \in R^{n+r}$. Notons $\mathbf{g}_{[0]} \in A[\![\mathbf{T}]\!]$ la série formelle $\mathbf{g}(\mathbf{T} + \tilde{\varepsilon}_{[0]})$.

La formule précédente montre qu'on a alors $\mathbf{g}(\mathbf{t} + \varepsilon_{[0]})(= \mathbf{g}_{[0]}(\mathbf{t})) = \mathbf{g}_R + \alpha_{[1]}$, où $\alpha_{[1]} \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{4\mu} R)^{n+r}$. La nouvelle série $\mathbf{g}_{[0]}$ satisfait donc en particulier les inclusions $(\star_c)$, pour le même μ, car on a $(\mathbf{g} - \mathbf{g}_{[0]})_R \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{3\mu})^r \subset (\hat{\mathfrak{m}}_X^{\mu+2})^r$. Par récurrence, on construit de proche en proche, une suite d'éléments $\varepsilon_{[i]} \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{(2^i+1)\mu} R)^{n+r}$ (et leurs relèvements $\tilde{\varepsilon}_{[i]}$), pour $i \geqslant 0$, telle que

$$\mathbf{g}_{[i]\,R} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{t} + \varepsilon_{[0]} + \cdots + \varepsilon_{[i]})\big(= \mathbf{g}_{[i-1]}(\mathbf{t} + \varepsilon_{[i]})\big) = \mathbf{f}_R + \alpha_{[i+1]},$$

où $\alpha_{[i+1]} \in (\hat{\mathfrak{m}}_X^{(2^{i+1}+2)\mu} R)^r$. L'anneau R étant complet, on peut considérer

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{[i]} \in \hat{\mathfrak{m}}_X^2.$$

On a $\mathbf{g}(\mathbf{t} + \varepsilon) = \mathbf{f}(\mathbf{t}) = 0$. Donc, si $\tilde{\varepsilon} \in (\hat{\mathfrak{m}}^2)^{n+r}$ relève ε, alors $\mathbf{x} = \mathbf{T} + \tilde{\varepsilon}$ vérifie les conditions de 2.4.

Algébrisation. Montrons que l'entier $\lambda_{X,x} = 3\mu$ de 2.4 convient pour 2.3. Soit

$$B = A[T_1, \ldots, T_{n+r}]_{\mathfrak{m}}{}^{hs}/(f_1, \ldots, f_n) = \Gamma(X_{(x)}, \mathcal{O});$$

par hypothèse les équations $g_1 = \cdots = g_n = 0$ ont une solution dans $\widehat{B}$. Comme B est l'hensélisé du localisé d'un schéma de type fini sur un trait complet donc excellent, on peut utiliser le théorème d'approximation de M. Artin. Ainsi, il existe des x_i, $1 \leqslant i \leqslant n+r$, congrus aux T_i modulo $\mathfrak{m}_X^2$ tels que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ dans B. On peut donc définir un A-morphisme $\varphi : A[\mathbf{T}]_{\mathfrak{m}}{}^{hs}/(\mathbf{g}) \to B$, par $T_i \mapsto x_i$. Le morphisme $\widehat{\varphi}$ induit sur les complétés est un isomorphisme; le morphisme φ est donc étale et, finalement, un isomorphisme.

2.5. *Remarque.* — On peut aussi, comme l'a remarqué le rapporteur, utiliser le lemme 2 p. 561 de [Elk73] pour démontrer directement le lemme 2.3.

2.6. Soient X, n, et $\lambda_{X,x} = \lambda$ comme précédemment. Le problème étant local au voisinage de x sur X pour la topologie de Zariski, on peut supposer qu'il existe un entier r et un S-module $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^{n+r}$ tel que X soit isomorphe à un sous-schéma fermé de $\mathbf{V}(\mathcal{E})$, défini par un S-morphisme $\mathbf{f} : \mathcal{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathcal{E})$, satisfaisant les hypothèses de 2.2. D'après 2.3, on peut supposer que $\mathbf{f}$ est à valeur dans

$$\mathbf{S}(\mathcal{E})_{\leqslant\lambda} = \mathcal{O}_S \oplus \cdots \oplus \mathbf{S}^{\lambda}(\mathcal{E}).$$

Remarquons qu'il est important de ne pas choisir immédiatement d'isomorphisme $\Gamma(S, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} A^{n+r}$. Cela simplifie les calculs qui vont suivre; je dois cette remarque à Luc Illusie.

Pour tout morphisme $\mathbf{a} : \mathcal{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathcal{E})$, et pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, notons $\mathbf{a}^{[i]}$ la composante homogène de degré i de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}^{[\leqslant i]} = \mathbf{a}^{[0]} + \cdots + \mathbf{a}^{[i]}$ sa partie de degré inférieur à i. Posons $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_S t_0 \oplus \mathcal{E}$, et $\mathbf{P}_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}(\widetilde{\mathcal{E}})$. Si $\mathbf{a}$ est un morphisme $\mathcal{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathcal{E})_{\leqslant\lambda+2}$, notons $\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{[\lambda+2]} + t_0\mathbf{a}^{[\lambda+1]} + \cdots + t_0^{\lambda+2}\mathbf{a}^{[0]}$. Enfin, notons $Y(\mathbf{a})/S$ le S–schéma projectif $V(\widetilde{\mathbf{a}}) \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{E}}$, et $y = (1, 0_{\mathcal{E}}) \in (\mathbf{P}_{\mathcal{E}})_s$: c'est l'image de x par l'immersion composée $X \hookrightarrow \mathbf{V}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{E}}$. Remarquons qu'en vertu de 2.3, si $\mathbf{a} : \mathcal{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathcal{C}E)_{\leqslant\lambda+2}$ a pour λ–tronqué $\mathbf{f}$, les hensélisés stricts $Y(\mathbf{a})_{(y)}$ et $X_{(x)}$ sont automatiquement S-isomorphes. On cherche $\mathbf{a}$ tel que $Y(\mathbf{a})$ satisfasse les autres conditions de 2.1, c'est-à-dire les hypothèses de lissité et de dimension relative hors de y. Il suffit de les vérifier en les points fermés de la fibre spéciale (privée de y). En effet, si elles sont satisfaites en ces points, le schéma $Y(\mathbf{a})$ sera régulier en tous les points fermés de $Y(\mathbf{a})_s$. Comme le lieu $\mathrm{reg}(Y(\mathbf{a}))$ des points réguliers est ouvert (cf. [Gro69] IV.6.12.6), cet ouvert contient nécessairement toute la fibre spéciale et, par propreté, on a l'égalité $\mathrm{reg}(Y(\mathbf{a})) = Y(\mathbf{a})$. De même, le morphisme $Y(\mathbf{a}) \to S$ est aussi plat car il est plat en tous les points fermés de la fibre spéciale et son lieu de platitude est ouvert (cf. [Gro69] IV.11.1.1). La fibre générique est lisse : tout point y_η de Y_η est générisation d'un point y_s de Y_s. Si y_s est différent de y, la lissité est évidente par hypothèse tandis que si $y_s = y$ cela résulte du fait que l'on a supposé $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) - \{x\}$ essentiellement lisse sur S. Finalement, pour démontrer 2.1, il nous suffit de démontrer la proposition suivante :

2.7. Proposition. — *Il existe un morphisme $\mathbf{a} : \mathcal{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathcal{E})_{\leqslant\lambda+2}$ tel que $\mathbf{a}^{[\leqslant\lambda]} = \mathbf{f}$ et $Y(\mathbf{a}) \to S$ soit lisse de dimension relative n en tous les points fermés de la fibre spéciale différents de y.*

Considérons le S-schéma $T = \mathbf{V}\big(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_S^r, S^{\lambda+1}(\mathcal{E}) \oplus S^{\lambda+2}(\mathcal{E}))^\vee\big)$, paramétrant les morphismes $\mathbf{a} : \mathcal{O}_S^r \to \mathbf{S}(\mathcal{E})_{\leqslant\lambda+2}$ tels que $\mathbf{a}^{[\leqslant\lambda]} = \mathbf{f}$. Au-dessus de T, on a la variété universelle $\mathcal{Y} \to \mathbf{P}_\mathcal{E} \times_S T$. La projection $h : \mathcal{Y} \to T$ admet une section au-dessus de T_s, qui correspond à l'origine y, et que nous noterons donc y. Soit $\mathcal{Z}$ le fermé complémentaire de l'ouvert où h est lisse de dimension relative n, muni par exemple de la structure réduite. Pour conclure, il suffit de démontrer le

2.8. Lemme. — *Soit $z \neq y$ un point fermé de $\mathbf{P}_{\mathcal{E}s}$, qui est dans l'image de la projection $\mathcal{Z} \to \mathbf{P}_\mathcal{E}$. La codimension de $\mathcal{Z} \cap (z \times_S T)$ dans T_s vaut $n + r + 1$.*

En effet, 2.8 entraîne que la codimension de $\mathcal{Z}_s$ dans $(\mathbf{P}_\mathcal{E} \times_S T)_s$ est supérieure à $n + r + 1 = \dim \mathbf{P}_{\mathcal{E}s} + 1$ en tout point qui n'est pas dans $y(T_s)$. Ainsi, les composantes irréductibles de $\mathcal{Z}_s$ qui ne sont pas contenues dans $y(T_s)$ sont de dimension strictement inférieure à $\dim T_s$. L'union des images par h de ces composantes est donc un sous-schéma fermé $\mathcal{I}$ (car h est propre) strict de T_s. Soit $\mathcal{M}$ l'ouvert $\mathcal{Z} - y(T_s)$ de $\mathcal{Z}$. Les deux inclusions $h(\mathcal{M}(k)) \subset \mathcal{I}(k) \subsetneq T(k)$ (on rappelle que $k = \kappa(s)$ est supposé algébriquement clos) entraînent l'inclusion stricte $h(\mathcal{M}(k)) \subsetneq T(k)$. Ainsi, si t est une section de T sur S de réduction dans $T(k) - h(\mathcal{M}(k))$, le schéma $\mathcal{Y}_t \to t \xrightarrow{\sim} S$ est lisse en tout point fermé de $(\mathcal{Y}_t)_s$, excepté y, d'où la proposition 2.7. Insistons sur le fait que cela est a priori plus fort que la lissité de $(\mathcal{Y}_t)_s/s$ (hors y).

Démonstration de 2.8. — Soit z comme dans l'énoncé. On peut choisir un isomorphisme $\widetilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S t_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_S t_{n+r}$ tel que $z \in (\mathbf{P}_\mathcal{E})_s \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_s^{n+r}$ (resp. y) soit de coordonnées $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ (resp. $(1, 0, 0, \ldots, 0)$). Cela résulte du fait que z est supposé différent de y. Le schéma T est S-isomorphe à un espace affine $S[c_{(i,\alpha)}]$, de dimension relative N_T sur S, où

i parcourt l'ensemble $\{1,\dots,r\}$ et α l'ensemble des suites finies dans $\mathbb{N}^{n+r}$ de somme $|\alpha|$ appartenant à $\{\lambda+1,\lambda+2\}$. Le sous-schéma fermé $\mathcal{Y}$ de $\mathbf{P}_{\mathcal{E}} \times_S T$ est défini par l'annulation des r équations :

$$\underbrace{t_0^{\lambda+2}\mathbf{f}_i\Big(\frac{t_1}{t_0},\dots,\frac{t_{n+r}}{t_0}\Big)}_{\mathbf{g}_i(t_0,\dots,t_{n+r})} + \sum_{|\alpha|\in\{\lambda+1,\lambda+2\}} c_{i,\alpha} t_0^{\lambda+2-|\alpha|} t_1^{\alpha_1}\cdots t_{n+r}^{\alpha_{n+r}}.$$

Soit $\tilde{z}=(z,\mathbf{a})$ un point de $\mathcal{Y}$ au-dessus de z ; en son voisinage, $\mathcal{Y}$ est donc T-isomorphe au sous-schéma fermé de $T[t'_0,t'_1,\cdots,t'_{n+r-1}] \cong \mathbf{A}_S^{N_T+n+r}$, d'équations

$$\widetilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{g}_i(t'_0,\dots,t'_{n+r-1},1) + \sum_{\alpha} c_{i,\alpha} \underbrace{t'^{\lambda+2-|\alpha|}_0 t'^{\alpha_1}_1 \cdots t'^{\alpha_{n+r-1}}_{n+r-1}\cdot 1^{\alpha_{n+r}}}_{m_\alpha(\mathbf{t}')}.$$

Il résulte de cette description et du critère jacobien, que $\mathcal{Z}_s$, la fibre spéciale du schéma $\mathcal{Z}$, coïncide avec le lieu où h_s n'est pas lisse de dimension relative n, du moins au-dessus de l'ouvert affine $S[t'_0,t'_1,\cdots,t'_{n+r-1}]$ de $\mathbf{P}_{\mathcal{E}}$ ne contenant pas y. On peut donc faire notre calcul de codimension en travaillant uniquement sur $k=\kappa(s)$ (et dans l'espace affine précédent). Pour chaque $i\in\{1,\dots,r\}$, le seul monôme $m_\alpha(\mathbf{t}')$ qui ne soit pas nul évalué en z est celui pour lequel $\alpha=(0,0,\dots,0,\lambda+2)\overset{\text{déf}}{=}\beta$. Comme le point $\tilde{z}\in\mathbf{A}_S^{N_T+n+r}$ appartient à $\mathcal{Y}$, sa seconde coordonnée $\mathbf{a}$ appartient au sous-espace affine L_z de T_s d'équations $\mathbf{g}_i(0,0,\dots,0,1)+c_{i,\beta}(\mathbf{a})=0$, où i appartient à $\{1,\dots,r\}$. Pour un tel indice i, calculons la dérivée partielle $\frac{\partial\widetilde{\mathbf{a}}_i}{\partial t'_0}$ en z dans ces coordonnées. Elle vaut :

$$\underbrace{\frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial t'_0}\overbrace{(0,\dots,0)}^{n+r\text{ zéros}}}_{\chi_{i,0}} + c_{i,\gamma}(\mathbf{a}),$$

où $\gamma\in\mathbb{N}^{n+r}$ est la suite $(0,\dots,0,\lambda+1)$. En effet, pour que la dérivée partielle par rapport à t'_0 du monôme $t'^{\lambda+2-|\alpha|}_0 t'^{\alpha_1}_1\cdots t'^{\alpha_{n+r-1}}_{n+r-1}$ soit non nulle évaluée en $(0,\dots,0)$, il faut que $\alpha_1=\cdots=\alpha_{n+r-1}=0$ et $|\alpha|=\lambda+1$. Pour $\alpha=\gamma$ cette dérivée partielle vaut 1. Si maintenant j est un indice dans $\{1,\dots,n+r-1\}$, on a de même :

$$\frac{\partial\widetilde{\mathbf{a}}_i}{\partial t'_j}(0,\dots,0) = \underbrace{\frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial t'_j}(0,\dots,0)}_{\chi_{i,j}} + c_{i,\gamma(j)}(\mathbf{a}),$$

où $\gamma(j)\in\mathbb{N}^{n+r}$ est définie par $\gamma(j)_j=1$, $\gamma(j)_u=0$ pour $u\notin\{j,n+r\}$, et $|\gamma(j)|=\lambda+2$. On peut noter qu'avec ces conventions, on a l'égalité

$\chi_{i,j} = 0$ pour tous les couples (i,j) considérés. Cela résulte du fait que $t_0'^2$ divise tous les $\mathbf{g}_i$. La condition $\tilde{z} = (z, \mathbf{a}) \in \mathcal{Z}_z$ est donc définie dans T_s par l'intersection du sous-espace affine L_z, de codimension r, et du sous-schéma fermé d'équations les mineurs $r \times r$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} c_{1,\gamma} & \cdots & c_{r,\gamma} \\ c_{1,\gamma(1)} & \cdots & c_{r,\gamma(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,\gamma(n+r-1)} & \cdots & c_{r,\gamma(n+r-1)} \end{pmatrix}.$$

Comme les suites $\gamma, \gamma(i)$, $i \in \{1, \ldots, n+r-1\}$ sont distinctes, le sous-schéma Min défini par l'annulation de ces mineurs est de codimension $n+1$ dans l'espace affine T_s (cf. par exemple [Art76]). De plus comme ces suites sont différentes de β, l'intersection de Min avec le sous-espace affine L_z est transverse. Ainsi, $\operatorname{codim}_{T_s}(\mathcal{Z}_z) = r + (n+1)$, d'où le résultat. □

3. Démonstration du théorème 0.8.

Commençons par remarquer que pour démontrer la conjecture 0.2, on peut supposer S complet. En effet, d'après [SGA $4\frac{1}{2}$ Th. Finitude 3.7], le terme étale est invariant changement de base $\hat{S} \to S$, où $\hat{S}$ désigne le complété de S le long du point fermé. L'égalité des termes cohérents, $\mu(X/S, x) = \mu(X_{\hat{S}}/\hat{S}, x)$, résulte de l'isomorphisme $\mathcal{O}_{Z_{\hat{S}}} = \mathcal{O}_{Z_S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\hat{S}}$, dans les notations de 1.2.a. Ceci étant, on peut supposer d'après 2.1, que X/S est propre car les deux termes de l'égalité à démontrer ne dépendent que de l'hensélisé (strict) en x. D'un côté on a, inconditionnellement,

$$\chi(X, \mathrm{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}) \overset{\mathbf{1.4}}{=} \chi(X, \Omega^{n+1}_{X/S}) \overset{\mathbf{1.2a}}{=} \mu(X/S, x),$$

tandis que la conjecture de Bloch prédit que

$$\chi(X, \mathrm{L}\Lambda^{n+1}\Omega^1_{X/S}) = (-1)^n \operatorname{Art}(X/S) = (-1)^n \dim\operatorname{tot} \Phi(\mathbb{F}_\ell).$$

Donc 0.5 implique 0.2.

4. Appendice A : compactification en dimension relative 1.

Voici l'argument de M. Raynaud qui permet de démontrer directement 2.1 dans le cas des courbes. Supposons X/S affine (et S complet).

Notons $Y = X_s$ la fibre spéciale. Comme c'est une courbe, il existe une compactification $\overline{Y}$ de Y, projective, et lisse hors de x. Le s-schéma $\overline{Y} - \{x\}$ est affine et lisse donc (cf. [SGA 1 III 6.8]) il existe un S-schéma formel affine et lisse $\mathcal{T}$ dont $\overline{Y} - \{x\}$ est la fibre spéciale. L'affine $Y - \{x\}$ admet un unique relèvement formel $\mathcal{U}$ sur S. Il est naturellement muni d'immersions ouvertes $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}$ et $\mathcal{U} \hookrightarrow \widehat{X}$, où $\widehat{X}$ désigne le complété formel le long de la fibre spéciale. On peut donc recoller $\mathcal{T}$ et $\widehat{X}$ le long de $\mathcal{U}$: le schéma formel $\mathcal{T} \coprod_{\mathcal{U}} \widehat{X}$ est une déformation plate de $\overline{Y}$, donc propre sur S et s'algébrise (cf. [SGA 1 III 7.2]) en un schéma X' sur S propre et lisse hors de x sur S, qui est formellement, donc localement pour la topologie étale (cf. 2.2), isomorphe à X en x.

Ce type d'argument est aussi utilisé dans [Lau81], et repris dans [KSS88] proposition 4.1.

5. Appendice B : démonstration de la conjecture 0.7 en dimension relative 1.

Reprenons les notations de 0.4, en supposant de plus que $n = \dim X/S = 1$. Posons $Z = Z_{X/S_{\text{réd}}}$. Utilisant à nouveau la méthode de l'appendice A, avec Z à la place de $\{x\}$, on voit qu'il existe un schéma X', propre sur S, obtenu par algébrisation d'un schéma formel sur S, tel qu'on ait une immersion ouverte $\widehat{X} \hookrightarrow \widehat{X'}$, induisant un isomorphisme entre les complétés formels $X_{/Z}$ et $X'_{/Z}$ le long de Z, avec l'hypothèse supplémentaire que X' est lisse sur S hors de Z.

5.1. Lemme. — *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\dim\operatorname{tot} \mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi_X(\mathbb{F}_\ell)) = \dim\operatorname{tot} \mathrm{R}\Gamma(X'_s, \Phi_{X'}(\mathbb{F}_\ell)).$$

Démonstration. — En effet, on a $\mathrm{R}\Gamma(X_s, \Phi_X(\mathbb{F}_\ell)) = \mathrm{R}\Gamma(Z, \Phi_X(\mathbb{F}_\ell)_{|Z})$; idem pour X'. Or, d'après [Ber96] Theorem 3.1, les complexes $\Phi_{X'}(\mathbb{F}_\ell)_{|Z}$ et $\Phi_X(\mathbb{F}_\ell)_{|Z}$ sont isomorphes comme complexes de $\mathbb{F}_\ell$–faisceaux sur Z munis d'une action continue de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})$. □

Il nous faut maintenant comparer les termes cohérents.

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de définition de Z dans X. Notons $i : X_{/Z} \to X$ le morphisme d'espaces annelés canonique, et $i_n : Z_n \hookrightarrow X$ l'immersion fermée d'idéal $\mathcal{I}^{n+1}$. Notons $\Omega^1_{X_{/Z}}$ le $\mathcal{O}_{X_{/Z}}$–module limite (projective)

$\lim_n \Omega^1_{(X_{/Z})_n/S}$; dans la suite, on identifiera $(X_{/Z})_n$ et Z_n. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a un morphisme canonique $i_n^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{Z_n/S}$. Par passage à la limite, on en déduit un morphisme $\lim_n i_n^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X_{/Z}}$, que l'on peut composer avec le morphisme canonique $i^*\Omega^1_{X/S} \to \lim_n i_n^*\Omega^1_{X/S}$.

5.2. LEMME. — *Le morphisme $i^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X_{/Z}}$ défini précédemment est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après [Gro69] I 10.8.8. (ii) le morphisme

$$i^*\Omega^1_{X/S} \to \lim_n i_n^*\Omega^1_{X/S}$$

est un isomorphisme car $\Omega^1_{X/S}$ est cohérent. Écrivons la suite exacte associée à l'immersion fermée i_n de S-schémas :

$$\mathcal{I}^{n+1}/(\mathcal{I}^{n+1})^2 \to i_n^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{Z_n/S} \to 0.$$

Le système projectif $\mathcal{I}^n/(\mathcal{I}^n)^2$ est essentiellement nul, donc le morphisme $(i_n^*\Omega^1_{X/S})_n \to (\Omega^1_{Z_n/S})_n$ est un isomorphisme de pro-objets. Le morphisme $\lim_n i_n^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X_{/Z}}$ est donc également un isomorphisme. □

Comparons maintenant les puissances extérieures dérivées.

Par fonctorialité des foncteurs dérivés à gauche, on a un morphisme canonique

$$\mathrm{L}i^*\mathrm{L}\Lambda^2(\Omega^1_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}\Lambda^2\mathrm{L}i^*(\Omega^1_{X/S}) \to \mathrm{L}\Lambda^2 i^*(\Omega^1_{X/S}).$$

Il résulte de la platitude de i que le morphisme de foncteurs $\mathrm{L}i^* \to i^*$ est un isomorphisme si bien que le morphisme précédent se réécrit, compte tenu du lemme précédent, sous la forme :

$$i^*\mathrm{L}\Lambda^2\Omega^1_{X/S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}\Lambda^2\Omega^1_{X_{/Z}}. \tag{5.2.a}$$

5.3. LEMME. — *Pour tout complexe $\mathcal{K} \in \mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(X)$, à support dans Z, le morphisme canonique $\mathrm{R}\Gamma(X,\mathcal{K}) \to \mathrm{R}\Gamma(X_{/Z}, i^*\mathcal{K})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il résulte de [Gro69] III 5.1.2, que le morphisme $\mathrm{R}\Gamma(X,\mathcal{K}) \to \mathrm{R}\Gamma(\widehat{X}, i_X^*\mathcal{K})$ est un isomorphisme, où $i_X : \widehat{X} \to X$ désigne le morphisme canonique. Notons k l'immersion fermée de schémas formels : $X_{/Z} \overset{k}{\hookrightarrow} \widehat{X}$. Comme dans le cas non formel, les foncteurs dérivés $\mathrm{R}^j k_*$ évalués en un faisceau cohérent sont nuls pour $j > 0$: cela résulte de la description du foncteur k_* dans le cas où X, et donc $\widehat{X}$, sont affines (cas auquel on peut se ramener). Le complexe $i_X^*\mathcal{K} =: \widehat{\mathcal{K}}$ étant à support dans $X_{/Z}$, la flèche d'adjonction $\widehat{\mathcal{K}} \to k_*k^*\widehat{\mathcal{K}} = k_*i^*\mathcal{K}$ est un isomorphisme. Le résultat en découle. □

Finalement, on a la chaîne d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
&\chi(X, \mathrm{L}\Lambda^2\Omega^1_{X/S})\\
&\overset{\text{déf}}{=} \sum_i (-1)^i \operatorname{long}_A \mathrm{R}\Gamma(X, \mathrm{L}^i\Lambda^2\Omega^1_{X/S})\\
&\qquad\qquad\qquad (\text{somme finie car } \mathrm{L}\Lambda^2\Omega^1_{X/S} \in \mathrm{D}^{[-2,0]}_{\mathrm{parf}}(X))\\
&= \operatorname{long}_A \mathrm{R}\Gamma(X_{/Z}, i^*\mathrm{L}\Lambda^2\Omega^1_{X/S}) \text{ (d'après 5.3)}\\
&= \operatorname{long}_A \mathrm{R}\Gamma(X_{/Z}, \mathrm{L}\Lambda^2\Omega^1_{X_{/Z}}) \text{ (d'après 5.2.a)}\\
&\overset{\text{déf}}{=} \chi(X_{/Z}, \mathrm{L}\Lambda^2\Omega^1_{X_{/Z}}).
\end{aligned}$$

De même pour X'. Comme, par hypothèse, $X_{/Z} \xrightarrow{\sim} X'_{/Z}$, on a le résultat souhaité grâce au théorème de Bloch (0.5, en dimension 1).

BIBLIOGRAPHIE

[Art76] M. ARTIN, Lectures on deformations of singularities, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976.

[Ber96] V.G. BERKOVICH, Vanishing cycles for formal schemes. II, Invent. Math., 125, n° 2 (1996), 367–390.

[Blo87] S. BLOCH, Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 421–450.

[Bou80] N. BOURBAKI, Éléments de mathématiques, Masson, Paris, 1980, Algèbre, Chapitre 10, Algèbre homologique.

[Eis95] D. EISENBUD, Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Elk73] R. ELKIK, Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 6 (1973), 553–603 (1974).

[Ful98] W. FULTON, Intersection theory, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Gro69] A. GROTHENDIECK, Éléments de géométrie algébrique, 1960–1969.

[Ill72] L. ILLUSIE, Complexe cotangent et déformations, Springer-Verlag, Berlin, 1971–1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239 & 283.

[Ill99] L. ILLUSIE, Sur les conjectures de Milnor, Bloch, etc. et les classes de Chern à supports, note non publiée (1999).

[Ill00] L. Illusie, Perversité et variation, prépublication (2000).

[KM76] F.F. Knudsen et D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on "det" and "Div", Math. Scand., 39, n° 1 (1976), 19–55.

[KS01] K. Kato et T. Saito, Conductor formula of Bloch, prépublication (2001).

[KSS88] K. Kato, S. Saito et T. Saito, Artin characters for algebraic surfaces, Amer. J. Math., 110, n° 1 (1988), 49–75.

[Lau81] G. Laumon, Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne), Astérisque, vol. 83, Soc. Math. France, Paris, 1981, 173–219.

[Sai88] T. Saito, Self-intersection 0-cycles ans coherent sheaves on arithmetic schemes, Duke Math. J., 57, n° 2 (1988), 555–578.

[Sai00] T. Saito, Parity in Bloch's conductor formula, prépublication (2000).

Manuscrit reçu le 4 octobre 2002,
accepté le 20 janvier 2003.

Fabrice ORGOGOZO,
Princeton University
Mathematics Department
Fine Hall
Washington Road
Princeton, NJ 08544–1000 (USA).
Fabrice.Orgogozo@normalesup.org