ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Anne BROISE-ALAMICHEL & Yves GUIVARC'H

Exposants caractéristiques de l'algorithme de Jacobi-Perron et de la transformation associée

Tome 51, nº 3 (2001), p. 565-686.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_3_565_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
51, 3 (2001), 565–686

EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES DE L'ALGORITHME DE JACOBI-PERRON ET DE LA TRANSFORMATION ASSOCIÉE

par A. BROISE-ALAMICHEL et Y. GUIVARC'H

Table des matières.

Mots-clés : Spectre de Lyapunov – Algorithme de Jacobi-Perron – Produit de matrices aléatoires stationnaires – Points périodiques – Opérateurs de transfert.
Classification math. : 11J70 – 37H15.

1. Introduction.

Soit X une variété riemanienne compacte de dimension d, T une application de classe C^1 de X dans X, ν une mesure de probabilité invariante par T et ergodique, $(T^n)'_x$ la différentielle de l'itérée n-ième T^n au point x. Alors le théorème ergodique multiplicatif [Os] donne les exposants caractéristiques de T, relatifs à ν sous la forme :

$$\gamma_1(\nu) = \lim_n \frac{1}{n} \int_X \log\|(T^n)'_x\| \, d\nu(x),$$

$$\gamma_1(\nu) + \cdots + \gamma_p(\nu) = \lim_n \frac{1}{n} \int_X \log\|\Lambda^p(T^n)'_x\| \, d\nu(x), \quad \text{où} \quad 1 \leq p \leq d,$$

$$\gamma_1(\nu) \geq \cdots \geq \gamma_d(\nu).$$

En dehors de situations liées à la géométrie ou à la théorie des groupes, on connaît peu d'exemples où ces exposants ont été calculés ou estimés. Dans une situation donnée, on peut se demander, par exemple, si la simplicité du spectre ($\gamma_1(\nu) > \cdots > \gamma_d(\nu)$) est valide ou non. Cette question apparaît dans l'étude des algorithmes d'approximation simultanée de plusieurs réels par des rationnels comme ceux de Jacobi-Perron ou de Brun [S1] qui seront considérés ici ; en ce cas, certaines inégalités entre exposants peuvent s'interpréter en termes d'approximation, comme cela a été remarqué dans [La1] et [Ko].

On se propose ici d'établir de telles inégalités, de les interpréter dans le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron, et d'en déduire des réponses partielles aux questions de ces auteurs. Un tel algorithme associe à ν-presque tout x de X, une suite infinie de matrices d'ordre $d+1$ notées $A_n(x)$ qui sont de la forme $A_n(x) = A(T^{n-1}x)$. Il permet alors de « coder » le point $x \in X \subset \mathbb{P}^d$ sous la forme suivante. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les applications projectives de $\mathbb{P}^d$ associées à $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on obtient :

$$x = a_1 a_2 \cdots a_n \cdot x_n = \lim_{n \to \infty} a_1 a_2 \cdots a_n \cdot 0,$$

avec 0 et x_n dans X. Les a_k sont les « quotients partiels » de x, et x_n est le « n-ième reste ». Plus précisément, $A(x)$ est une fonction à valeurs matricielles définie sur X, a^x est l'application projective associée et on suppose que $(a^x)^{-1} \cdot x$ reste dans X pour presque tout x de X. Alors T est défini par la relation fondamentale

$$x = a^x \cdot Tx$$

et on a $A_n = A(T^{n-1}x),\ \ T^n x = x_n,\ \ x = a_1 \cdots a_n \cdot T^n x.$

Les $d+1$ points rationnels

$$J_n = a_1 \ldots a_n \cdot 0, \ldots, J_{n+d} = a_1 \cdots a_{n+d} \cdot 0$$

de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{P}^d$ forment un simplexe,

$$\sigma_n(x) = (p_n/q_n, \ldots, p_{n+d}/q_{n+d}),$$

qui contient le point x et qui converge vers x. La forme asymptotique de ce simplexe est donnée presque partout par les exposants $\gamma_1(\nu), \ldots, \gamma_d(\nu)$, lorsque x est distribué selon la mesure ν. Dans les cas considérés ici, T préserve une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue, qui sera notée π. Comme π sera fixée, le symbole π sera omis dans les exposants qui seront donc notés $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_d$.

Soit w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{d+1}$ défini par

$$we_i = e_{i+1} \quad (i \leq d), \quad we_{d+1} = e_1.$$

Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on note τ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{d+1}$ défini par

$$\tau_a e_i = e_i \quad (i \leq d), \quad \tau_a e_{d+1} = e_{d+1} + \sum_{i=1}^{d} a_i e_i.$$

On note $A = w\tau_a$ et on note encore w, τ_a, a les applications projectives de $\mathbb{P}^d$ associées. Dans le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron, on a, avec $X = [0,1]^d$, $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in X$:

$$w \cdot x = \Big(\frac{x^{(2)}}{x^{(1)}}, \dots, \frac{x^{(d)}}{x^{(1)}}, \frac{1}{x^{(1)}}\Big),$$

$$Tx = \{w \cdot x\} = \Big(\Big\{\frac{x^{(2)}}{x^{(1)}}\Big\}, \dots, \Big\{\frac{x^{(d)}}{x^{(1)}}\Big\}, \Big\{\frac{1}{x^{(1)}}\Big\}\Big),$$

$$a(x) = [w \cdot x] = \Big(\Big[\frac{x^{(2)}}{x^{(1)}}\Big], \dots, \Big[\frac{x^{(d)}}{x^{(1)}}\Big], \Big[\frac{1}{x^{(1)}}\Big]\Big)$$

et $x = w \cdot (\tau_a \cdot Tx) = a \cdot Tx$. Notant $A_n = A(T^n x)$, on est amené à considérer le produit de matrices

$$S_n(x) = A_1 \cdots A_n$$

et les exposants caractéristiques de $S_n(x)$, si x est distribué selon π, seront notés $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{d+1}$ (ils vérifient $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{d+1} = 0$ car les matrices sont unimodulaires). On a alors $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_{d+1}, \dots, \gamma_d = \lambda_1 - \lambda_2$.

Avec ces notations, nos principaux résultats peuvent se résumer ainsi :

THÉORÈME 1.1. — *Pour l'algorithme de Jacobi-Perron, on a les inégalités :*

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{d+1} \quad \textit{et} \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_d > 0.$$

THÉORÈME 1.2. — *Pour l'algorithme de Jacobi-Perron, on a :*

$$\lambda_1 + \lambda_{d+1} > 0.$$

En particulier, si $d = 2$, on a $\lambda_2 < 0$.

Le théorème 1.1 exprime que le simplexe $\sigma_n(x)$ converge exponentiellement vers un drapeau $\xi(x)$, d'origine x. Le d-volume de $\sigma_n(x)$ est égal à $(d!\, q_n \cdots q_{n+d})^{-1}$ et on a :

$$\lambda_1 = \lim_n \frac{1}{n} \log q_n = \frac{h}{d+1},$$

où h est l'entropie de T. Cette situation est tout à fait analogue à celle de l'algorithme classique des fractions continues pour $d = 1$.

L'inégalité $\lambda_1 + \lambda_{d+1} > 0$ exprime que le $(d-1)$-volume du bord de $\sigma_n(x)$ tend vers 0 plus vite que $q_n^{-(d-1)-\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$ est assez petit. Pour $d = 2$, ceci entraîne la «convergence exponentielle» de l'algorithme conjecturée en [La1] et [Ko]. Cette convergence exponentielle est prouvée dans [IKO], pour l'algorithme de Brun et $d = 2$, grâce à la formule explicite de la densité de la mesure invariante (voir aussi [S3] et [Me] pour une démonstration plus simple de ce dernier résultat). Afin de préciser, notons :

$$\{q_n x\} = q_n x - p_n \in \mathbb{R}^d,$$

et observons que la taille du vecteur $\{q_n x\}$ exprime la qualité relative de l'approximation de x par un rationnel de dénominateur q_n [La1]. On a alors

$$\lambda_2 = \lim_n \frac{1}{n} \log \big\| \{q_n x\} \big\|$$

et la condition $\lambda_2 < 0$ exprime la convergence exponentielle de $\{q_n x\}$ vers zéro, pour presque tout x. Puisque si $d = 2$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, le théorème 2 donne donc $\lambda_2 < 0$.

Par ailleurs, le principe des tiroirs de Dirichlet montre que, pour tout $x \in I^d$, il existe une suite $p'_n/q'_n \in \mathbb{Q}^d$ telle que $(q'_n)^{1/d}\{q'_n x\}$ soit bornée et on peut se demander s'il est possible de construire une telle suite par un algorithme du type précédent. Pour $d = 1$, l'algorithme classique répond à cette question et donne $p'_n/q'_n = p_n/q_n$.

D'après les relations précédentes, on a presque partout :

$$\lim_n \frac{1}{n} \log\big[q_n^{1/d} \cdot \|\{q_n x\}\|\big] = \frac{\lambda_1}{d} + \lambda_2 = \frac{1}{d}\big[(\lambda_2 - \lambda_3) + \cdots + (\lambda_2 - \lambda_{d+1})\big].$$

La propriété précédente ne peut donc être satisfaite, pour presque tout x, que si $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{d+1} = -\lambda_1/d$.

Le théorème 1.1 montre que l'algorithme de Jacobi-Perron ne possède pas cette propriété si $d \geq 2$. Il en est de même pour l'algorithme de Brun, comme on le montre en appendice. Cependant pour des classes particulières de points x, en particulier pour une large classe d'irrationnels cubiques, on peut voir que

$$\lim_n q_n^{1/2}\{q_n x\} = 0.$$

(Ce qui montre, pour ce cas, la validité de la conjecture de Littlewood, voir [S1], p. 48.) D'autre part, un algorithme « géodésique » basé sur la réduction des réseaux de $\mathbb{R}^{d+1}$ vérifiant la condition $q_n^{1/d}\{q_n x\}$ bornée pour tout x a été décrit en [La2].

En fait l'algorithme de Jacobi-Perron possède des propriétés de nature différente, qui généralisent aussi celles de l'algorithme unidimensionnel, mais qui ne conduisent pas à des approximations simultanées optimales, presque partout relativement à la mesure de Lebesgue, d'après ce qui précède.

Par définition de l'algorithme, la somme des d-volumes des simplexes de sommets x, ayant une face commune avec $\sigma_n(x)$, est égale au d-volume de $\sigma_n(x)$. Notant

$$Q_n^k(x) = \big\|\{q_n x\} \wedge \ldots \wedge \{q_{n+k-1}x\} \wedge \{q_{n+k+1}x\} \wedge \ldots \wedge \{q_{n+d}x\}\big\|$$

pour $0 \leq k \leq d$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{d} q_{n+k} Q_n^k(x) = 1.$$

Cette relation est fondamentale en dimension 1, car alors $Q_n^1(x) = \{q_n x\}$, $Q_n^2(x) = \{q_{n+1}x\}$ (*cf.* [Ca], p. 3 et suivantes).

Cette relation implique

$$\big\|S_n^{-1}(x,1)\big\| \leq \frac{c}{\|S_n\|}$$

où $S_n = A_1 \cdots A_n$ et c est une constante. En particulier, si x n'est pas situé dans un hyperplan rationnel, l'algorithme de Jacobi-Perron fournit une suite $S_n \in \mathrm{Sl}(d+1, \mathbb{Z}^+)$ telle que $S_n^{-1}(x,1)$ converge vers zéro rapidement, plus précisément $Q_n^k(x) \leq 1/q_n$. Cette relation entraîne immédiatement (*cf.* [CGu]) la propriété de densité de l'orbite de $(x,1)$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$ sous $\mathrm{Sl}(d+1, \mathbb{Z})$ (*cf.* [D], p. 70). La relation entre ce type de propriétés et la minimalité du flot horocyclique a été étudié par L. Greenberg [Gr]. Une relation différente entre algorithme de fractions continues et flot horocyclique a aussi été étudiée, dans le cas de la dimension 2, par A. Nogueira [N]. On peut donc voir aussi l'algorithme (homogène) de Jacobi-Perron, comme la construction d'une suite de matrices $S_n(x)$ vérifiant $\|S_n^{-1}(x)(x,1)\| \leq c/\|S_n\|$, plutôt que comme un algorithme d'approximation simultanée.

Pour $d = 1$, cette propriété définit la suite des meilleures approximations d'un réel par des rationnels. Pour $d > 1$, elle implique aussi la convergence de $a_1 \cdots a_n \cdot 0 \in I^d$ vers x, mais la formulation quantitative considérée plus haut fait intervenir les d-volumes associés à x, ou les coordonnées barycentriques de x dans le simplexe $\sigma_n(x)$, plutôt que les longueurs $\|\{q_n x\}\|$ qui jouent en quelque sorte un rôle dual. Ceci explique la non-optimalité de l'algorithme de Jacobi-Perron du point de vue des approximations simultanées, pour presque tout x. La remarque précédente, pour $d = 2$, montre cependant que ces approximations sont optimales pour de larges classes de points irrationnels. On peut d'autre part obtenir des résultats plus précis sur la vitesse de convergence de $\sigma_n(x)$ vers x en utilisant des inégalités du type Paley-Ursell [PU].

En particulier, le théorème 1.2 repose sur une inégalité généralisant un résultat remarquable de Paley et Ursell [PU], qui exprime que si $d = 2$, pour tout x, la suite $\{q_n x\}$ est bornée. On peut montrer, par des exemples analogues à ceux considérés au paragaphe 16, qu'une telle propriété n'est plus valide pour $d \geq 3$. On ignore si cette propriété reste valide pour presque tout x, ce qui fournirait la convergence forte de l'algorithme conjecturée par [Ko] et [HK1].

La généralisation de l'inégalité de Paley-Ursell, qui est donnée ici, exprime que la suite des $(d-1)$-multivecteurs $\{q_n x\} \wedge \{q_{n+1} x\} \wedge \ldots \wedge \{q_{n+d-2} x\}$ est bornée. L'étude de certaines équations cohomologiques, en utilisant les points périodiques de T, qui sont denses dans X, permettent alors de déduire le théorème 1.2 du théorème 1.1.

Afin de donner quelques indications sur les preuves des théorèmes 1.1 et 1.2, considérons l'ensemble Δ des drapeaux ξ de $\mathbb{P}^d$ dont l'origine x appartient à X. On peut identifier Δ à $X \times \mathbb{P}^{d-1}$. On note aussi $\widetilde{T}$ l'extension de T à Δ au moyen de la différentielle, $\widetilde{m}$ la mesure de Lebesgue sur Δ. On note P l'opérateur markovien sur X adjoint de T par rapport à la mesure π, $\widetilde{P}$ l'extension de P aux drapeaux appartenant à Δ. On a alors le :

THÉORÈME 1.3. — *Il existe une application mesurable de X dans Δ notée $x \mapsto \xi(x)$, où $\xi(x)$ est un drapeau d'origine x, telle que l'on ait :*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{P}^n \widetilde{m} = \widetilde{\pi} = \int \delta_{\xi(x)}\, \mathrm{d}\pi(x).$$

La suite $\widetilde{T}^n \widetilde{m}$ converge aussi vers une mesure $\widetilde{\pi}^-$. Il existe une mesure de probabilité λ sur $\mathbb{P}^{d-1}$, ne chargeant pas de sous-variété algébrique, telle que $\widetilde{\pi}^-$ soit absolument continue par rapport à $\pi \times \lambda$.

La démonstration du théorème 1.1 découle de l'étude des convergences précédentes et des mesures limites. On est amené à montrer que l'adhérence de Zariski du semi-groupe engendré par certaines matrices génériques $A(x)$ contient $\mathrm{Sl}(d+1, \mathbb{Z})$ et on utilise alors le caractère « fortement stochastique » de T par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le théorème 1.1 permet de montrer le théorème suivant sur lequel est basé le théorème 1.2.

THÉORÈME 1.4. — *Soit $H_\varepsilon(\Delta)$ l'espace des fonctions höldériennes sur Δ, d'exposant $\varepsilon > 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'opérateur $\widetilde{P}$, sur $H_\varepsilon(\Delta)$, admette* 1 *comme valeur spectrale (dominante) isolée. Toute solution mesurable g de l'équation*

$$f = g - g \circ \widetilde{T}$$

où f appartient à $H_\varepsilon(\Delta)$ est égale, $\widetilde{\pi}$-presque partout, à un élément de $H_\varepsilon(\Delta)$.

À partir du fait que la suite $\|\{q_n x\} \wedge \ldots \wedge \{q_{n+d-2}x\}\|$ est bornée, ce théorème permet de montrer la convergence exponentielle vers zéro de cette suite, pour presque tout x.

Pour $d = 2$, le théorème 1.2 peut être obtenu sans utiliser le théorème 1.1. On a ici mis à profit cette circonstance en I et en II, ce qui permet d'introduire plusieurs notions et arguments utilisés dans une plus grande généralité ensuite (en III et IV), notamment les propriétés de quasi-compacité des opérateurs $\widetilde{P}$, qui permettent l'étude des équations cohomologiques intervenant dans la preuve du théorème 1.2.

Les arguments développés ici dans le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron restent valides pour d'autres algorithmes, comme on le montre pour celui de Brun (en annexe). Pour des algorithmes de fractions continues, associés aux échanges d'intervalles, des résultats analogues à ceux établis ici ont été conjecturés par A. Zorich [Z] et semblent susceptibles d'être prouvés par les mêmes méthodes.

Par ailleurs, l'étude de l'algorithme homogène [AN] peut être regardée comme celle d'un produit croisé au-dessus de (X, T). Les propriétés d'ergodicité, en mesure infinie, d'un tel système peuvent alors être étudiées suivant les méthodes de [Gu1] et [GuR2] en se basant sur la quasi-compacité des opérateurs $\widetilde{P}$ considérés en II et IV.

Les auteurs sont reconnaissants à J.-P. Conze, Y. Derriennic, K. Khanin et G.A. Margulis pour d'utiles remarques et références.

I. Rappels

2. Généralités sur l'algorithme et la transformation de Jacobi-Perron.

La construction qui suit est une généralisation d'une construction géométrique des approximations rationnelles d'un réel par l'algorithme des fractions continues donnée par H. Poincaré [Po].

2.1. Une construction de Poincaré.

Elle a été reprise par A. Nogueira [N], elle repose sur l'idée suivante : approcher un point x de $[0,1]$ par des rationnels p/q revient à approcher la droite de direction $(x,1)$ par des points (p,q) de $\mathbb{Z}^2$. On part de la base canonique du réseau $\mathbb{Z}^2$, (e_{-1},e_0), on trace la droite D d'équation $u_0 = xv_0$. On note M_1 l'intersection de D avec la droite Δ_1 d'équation $u_0 = 1$. Dans (e_{-1},e_0), M_1 a pour coordonnées

$$\left(1,\frac{1}{x}\right) = (1,a_1) + (0,x_1) \quad \text{où} \quad a_1 = \left[\frac{1}{x}\right],\ x_1 = \left\{\frac{1}{x}\right\} = Tx,$$

T est la transformation « fraction continue » de [0,1].

Remarque. — Comme x est dans $[0,1]$, le point M_1 est sur la demi-droite $u_0 = 1$ et $v_0 \geq 1$; donc a_1 est un entier strictement positif.

On pose $e_1 = e_{-1} + a_1 e_0$. On se place maintenant dans la base (e_0,e_1) du réseau $\mathbb{Z}^2$, l'équation de D devient $u_1 = x_1 v_1$. Si x_1 n'est pas nul, on peut recommencer. On construit alors une suite de points $(e_n)_{n>0}$ du réseau $\mathbb{Z}^2$ par récurrence (voir la figure 1),

$$e_{n+1} = e_{n-1} + a_{n+1}e_n, \quad a_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right], \quad x_n = T^n x.$$

Si x est rationnel, la suite $(e_n)_{n>0}$ est finie, sinon on obtient une suite infinie. Dans la base (e_{-1},e_0), les coordonnées de e_n sont données par la dernière colonne de la matrice

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}.$$

Comme pour tout $n > 0$, $\det S_n = (-1)^n$, on en déduit que le couple (e_{n-1},e_n) forme une base du réseau $\mathbb{Z}^2$ qui est directe si n est pair, indirecte sinon. Ainsi le développement en fraction continue de x correspond à la donnée d'une suite de bases $((e_{n-1},e_n))_{n>0}$ du réseau $\mathbb{Z}^2$, dont les vecteurs

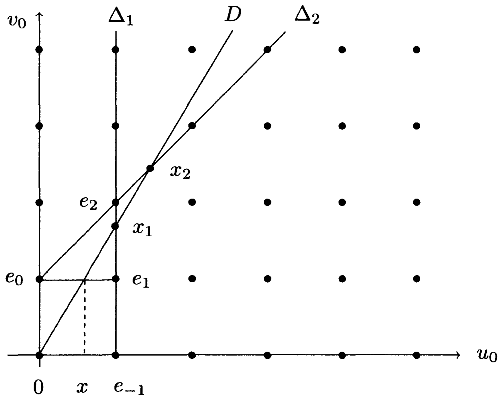

Figure 1

de base sont de part et d'autre de D. En effet, e_{n+1} est le dernier point de la forme $e_{n+1} = e_{n-1} + be_n$, b entier, tel que e_{n-1} et e_{n+1} soient du même côté de D. Les points e_n tendent en direction vers la direction $(x, 1)$.

On projette maintenant coniquement toutes ces bases sur la droite $v_0 = 1$, on obtient une suite d'intervalles $(\sigma_n(x))_{n>0}$ qui contiennent tous le point x et qui sont emboîtés, ils convergent vers le point x.

2.2. Généralisation de cette construction.

2.2.1. *Cas de la dimension* 2. — Afin de décrire géométriquement l'algorithme en dimension 2, on adopte provisoirement des notations simplifiées.

On note $(i, j, k) = (i_0, j_0, k_0)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Tout ce qui suit repose sur l'idée qu'approcher un point $x = (\alpha, \beta)$ de $[0,1] \times [0,1]$ par un couple $(p/q, p'/q)$ de rationnels revient à approcher la droite D de vecteur directeur $\overrightarrow{OM} = u = \alpha i + \beta j + k$ par des points entiers (p, p', q). On observe que M est défini comme le point d'intersection de D avec le réseau R_0 des parallélogrammes semi-ouverts de sommets $k + mi + nj$, $(m, n \in \mathbb{Z})$. Le point M appartient à un et seul de ces parallélogrammes, noté P_0 de sommets A_0, B_0, C_0, D_0 avec $\overrightarrow{OA_0} = k$, $\overrightarrow{OB_0} = k + i$, $\overrightarrow{OD_0} = k + j$ et $\overrightarrow{OC_0} = k + i + j$. Pour obtenir le nouveau parallélogramme P_1, on note R_1 le réseau des parallélogrammes de sommets $i + mj + nk$, $(m, n \in \mathbb{Z})$, et on note M_1 le point d'intersection de D avec le réseau R_1. Si α n'est pas nul, M_1 est bien défini car D n'est pas parallèle à R_1. Alors M_1 appartient à un unique parallélogramme P_1 de sommets A_1, B_1, C_1, D_1. La relation entre

(D, M_1, P_1) est la même que celle entre (D, M_0, P_0) et on peut donc réitérer la construction précédente. On obtient ainsi une suite, finie ou infinie, de parallélogrammes P_n de sommets A_n, B_n, C_n, D_n coupant D en M_n, tels que les cônes correspondants de sommets O soient emboîtés et convergent vers D.

À chacun de ces parallélogrammes est associée une base (i_n, j_n, k_n), avec $k_n = \overrightarrow{OA_n}$, $i_n = \overrightarrow{A_nB_n}$, $j_n = \overrightarrow{A_nD_n}$. Les projections coniques des triangles $A_{n-2}A_{n-1}A_n$ dans P_0 forment une suite de triangles rationnels emboîtés contenant le point M et convergeant vers M (voir la figure 3).

Afin d'expliciter l'algorithme, on écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OM_1} = \alpha\Big[i + \frac{\beta}{\alpha}j + \frac{1}{\alpha}k\Big] = \alpha\big[\alpha_1 i_1 + \beta_1 j_1 + k_1\big]$$

avec $k_1 = i + [\beta\alpha^{-1}]j + [\alpha^{-1}]k$, $i_1 = j$, $j_1 = k$, $\alpha_1 = \{\beta/\alpha\}$ et $\beta_1 = \{\alpha^{-1}\}$. L'algorithme d'Euclide, utilisé dans le cas classique pour $d = 1$, est donc remplacé ici par la décomposition :

$$\Big(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\Big) = \Big(\Big[\frac{\beta}{\alpha}\Big], \Big[\frac{1}{\alpha}\Big]\Big) + \Big(\Big\{\frac{\beta}{\alpha}\Big\}, \Big\{\frac{1}{\alpha}\Big\}\Big) = (a, b) + (\alpha_1, \beta_1),$$

avec a et b des entiers. Dans P_1, le point M_1 a pour coordonnées (α_1, β_1) avec $(\alpha_1, \beta_1) = T(\alpha, \beta)$. La relation $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OM_1}$ s'écrit alors :

$$\alpha = \frac{1}{\beta_1 + b}, \quad \beta = \frac{\alpha_1 + a}{\beta_1 + b}.$$

La n-ième base (i_n, j_n, k_n) associée à P_n se déduit de (i, j, k) par le produit de matrices $S_n(x)$ considéré dans l'introduction. La suite de ces bases est emboîtée et converge en direction vers D. L'algorithme décrit ici permet donc de coder un point par une suite de couples d'entiers. En fait cet algorithme construit une suite de matrices entières d'ordre 3 qui convergent après normalisation vers une matrice de rang 1 et dont le sous-espace image est la direction de x. Le comportement asymptotique de l'algorithme est alors décrit par celui du produit de matrices obtenu.

À partir de maintenant, on reprend des notations plus générales, en particulier comme $i_n = j_{n-1} = k_{n-2}$, on notera la n-ième base (e_{n-2}, e_{n-1}, e_n).

Comme dans le cas unidimensionnel, la suite obtenue vérifie des conditions d'admissibilité :

PROPOSITION 2.1. — *La suite* $(a_n) = ((a_n^{(1)}, a_n^{(2)}))_{n>0}$ *associée à un point* x *de* I^2 *par l'algorithme de Jacobi-Perron vérifie la condition* (C) *suivante* :

$$\text{(C)} \qquad \textit{pour tout } n > 0, \quad \begin{cases} 0 \le a_n^{(1)} \le a_n^{(2)} \;\; \textit{et} \;\; a_n^{(2)} \ge 1, \\ \textit{si} \;\; a_n^{(1)} = a_n^{(2)} \;\; \textit{alors} \;\; a_{n+1}^{(1)} \ge 1. \end{cases}$$

Démonstration. — La construction géométrique que l'on vient de faire permet de vérifier beaucoup plus naturellement la condition (C) que dans [Br2] ou dans [S1].

Il suffit de le voir au rang 1. Comme x est dans I^2, le point M_1 appartient à la partie $\mathcal{P}_0$ du plan Π_0 délimitée inférieurement par les demi-droites suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ v_0 = 0, \\ w_0 \ge 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1, \\ w_0 = 1, \\ 0 \le v_0 \le 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1, \\ v_0 = w_0, \\ w_0 \ge 1. \end{cases}$$

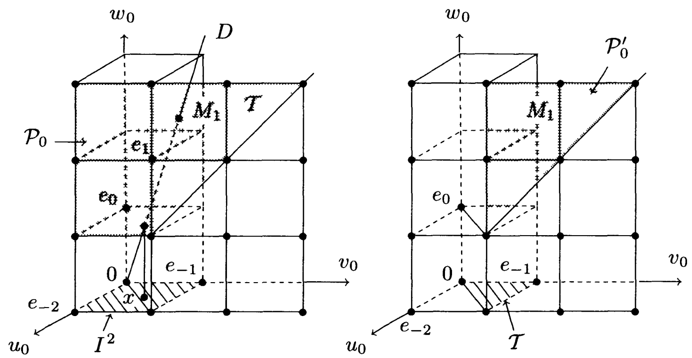

Figure 2

Le point $e_1 = e_{-2} + a_1^{(1)} e_{-1} + a_1^{(2)} e_0$ est dans $\mathcal{P}_0 \cap \mathbb{Z}^3$; il vérifie donc

$$0 \le a_1^{(1)} \le a_1^{(2)} \quad \text{et} \quad a_1^{(2)} \ge 1.$$

On appelle $\mathcal{A}_2$ l'ensemble des couples $a = (a^{(1)}, a^{(2)})$ de $\mathbb{N}^2$ qui vérifient cette condition.

Si $a_1^{(1)} \ne a_1^{(2)}$, alors Tx peut prendre n'importe quelle valeur de I^2 ; on en déduit donc que $e_2 = e_{-1} + a_2^{(1)} e_0 + a_2^{(2)} e_1$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathcal{P}_0 \cap \mathbb{Z}^3$. Par contre, si $a_1^{(1)} = a_1^{(2)}$, alors Tx décrit le triangle

$$\mathcal{T} = \{0 \leq x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq 1\}.$$

De plus si x est dans $\mathcal{T}$, le point M_1 appartient à la partie $\mathcal{P}_0'$ du plan Π_0 délimitée inférieurement par les demi-droites suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ v_0 = 1, \\ w_0 \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1, \\ v_0 = w_0, \\ w_0 \geq 1. \end{cases}$$

Alors les points du réseau qui appartiennent à $\mathcal{P}_0'$ sont de la forme $e_1 = e_{-2} + a^{(1)}e_{-1} + a^{(2)}e_0$ avec $1 \leq a^{(1)} \leq a^{(2)}$. Donc si $a_1^{(1)} = a_1^{(2)}$ alors $a_2^{(1)} \geq 1$. □

Ainsi, à tout point x de I^2, on peut associer une suite de points $(e_n)_{n>0}$ du réseau $\mathbb{Z}^3$. Cette suite est définie par récurrence :

$$e_{n+1} = e_{n-2} + a_{n+1}^{(1)} e_{n-1} + a_{n+1}^{(2)} e_n,$$
$$\left(a_{n+1}^{(1)}, a_{n+1}^{(2)}\right) = \left(\left[\frac{x_n^{(2)}}{x_n^{(1)}}\right], \left[\frac{1}{x_n^{(1)}}\right]\right), \quad x_n = T^n x.$$

Si x n'appartient pas à certaines droites rationnelles de $\mathbb{R}^2$, la suite $(e_n)_{n>0}$ est infinie ; sinon on obtient une suite finie. Les coordonnées de e_n dans la base canonique sont données par la dernière colonne de la matrice

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_i^{(1)} \\ 0 & 1 & a_i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_1^{(2)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_n^{(1)} \\ 0 & 1 & a_n^{(2)} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} & p_n \\ p'_{n-2} & p'_{n-1} & p'_n \\ q_{n-2} & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}.$$

Comme $\det S_n = 1$ pour tout $n > 0$, on en déduit que les triplets (e_{n-2}, e_{n-1}, e_n) forment une base directe du réseau $\mathbb{Z}^3$. Par construction, la droite D est à l'intérieur du cône positif engendré par les directions e_{n-2}, e_{n-1} et e_n ; car, pour tout n, le vecteur e_{n+1} est le vecteur du réseau $\mathbb{Z}^3$ appartenant au plan Π_n d'équation $u_n = 1$, qui est le plus proche du point d'intersection de D avec Π_n. Si on note J_n la projection conique de e_n sur le plan d'équation $w_0 = 1$, J_n a pour coordonnées $(p_n/q_n, p'_n/q_n)$ et $\lim_{n\to\infty} \|x - J_n\| = 0$.

En effet, on note $a \cdot x$ l'action projective de la matrice $A_a = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ I & a \end{smallmatrix}\right]$ sur le point x ; donc

$$a \cdot x = \left(\frac{1}{x^{(2)} + a^{(2)}}, \frac{x^{(1)} + a^{(1)}}{x^{(2)} + a^{(2)}} \right)$$

alors on a $J_n = a_1 \cdots a_n \cdot 0$ et $x = a_1 \cdots a_n \cdot x_n$.

Mais dans [Br2], § 2.1, on montre qu'il existe une distance δ sur I^2 qui est équivalente à la distance euclidienne, et qui est contractée par toutes les transformations $x \mapsto a \cdot x$, a dans $\mathcal{A}_2$ (avec un coefficient de contraction ρ commun). Cette distance se déduit de la distance de Hilbert relative à un convexe contenant I^2. Donc,

$$\begin{aligned} \|x - J_n\| &\leq C\delta(a_1 \cdots a_n \cdot 0, a_1 \cdots a_n \cdot x_n) \\ &\leq C\rho^n \delta(x_n, 0) \leq C'\rho^n \quad \text{avec } 0 < \rho < 1, \end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 et donc e_n converge en direction vers $(1, x)$.

On projette cette suite de bases $((e_{n-2}, e_{n-1}, e_n))_{n>0}$ sur le plan Π d'équation $v_0 = 1$; on obtient alors une suite de triangles $\sigma_{n-2}(x) = (J_{n-2} J_{n-1} J_n)$, qui sont emboîtés, qui contiennent tous x et qui convergent vers x, quand n tend vers $+\infty$.

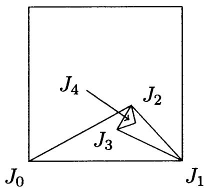

Figure 3. Schéma des premiers triangles pour un point dont le développement par l'algorithme de Jacobi-Perron commence par $(0,1), (1,2), (1,1), (1,2)$.

2.2.2. *Cas de la dimension* $d \geq 3$. — On note $(e_{-d}, e_{-d+1}, \ldots, e_0)$ la base canonique du réseau $\mathbb{Z}^{d+1}$. On fixe un point $x = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(d)})$ de I^d. On trace la droite D d'équation

$$u_0^{(1)} = x_0^{(1)} w_0, \ldots, u_0^{(d)} = x_0^{(d)} w_0.$$

Soit Π_0 l'hyperplan d'équation $u_0^{(1)} = 1$. On définit M_1 le point d'intersection de D avec Π_0 ; M_1 est le point de coordonnées

$$\left(1, \frac{x_0^{(2)}}{x_0^{(1)}}, \ldots, \frac{x_0^{(d)}}{x_0^{(1)}}, \frac{1}{x_0^{(1)}}\right) = (1, a_1) + (0, x_1)$$

où

$$\begin{cases} a_1 = \left(\left[\frac{x_0^{(2)}}{x_0^{(1)}}\right], \dots, \left[\frac{x_0^{(d)}}{x_0^{(1)}}\right], \left[\frac{1}{x_0^{(1)}}\right]\right) = (a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(d)}), \\ x_1 = \left(\left\{\frac{x_0^{(2)}}{x_0^{(1)}}\right\}, \dots, \left\{\frac{x_0^{(d)}}{x_0^{(1)}}\right\}, \left\{\frac{1}{x_0^{(1)}}\right\}\right) = Tx = \left(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(d)}\right), \end{cases}$$

T est la transformation de I^d associée à l'algorithme de Jacobi-Perron. On pose alors :

$$e_1 = e_{-d} + a_1^{(1)} e_{-d+1} + \dots + a_1^{(d)} e_0.$$

Dans le repère $(O, e_{-d+1}, \dots, e_0, e_1)$, l'équation de la droite D s'écrit

$$u_1^{(1)} = x_1^{(1)} w_1, \dots, u_1^{(d)} = x_1^{(d)} w_1.$$

Si $x_1^{(1)}$ n'est pas nul, on peut recommencer. L'algorithme permet alors de coder un point par une suite de d-uplets d'entiers. On obtient ainsi une suite de bases « emboîtées » qui définissent une suite de matrices $S_n(x)$ (*cf.* plus bas). La suite $(a_n)_n$ obtenue n'est pas quelconque, elle vérifie les conditions d'admissibilité suivantes, dues à O. Perron (voir [Pe], [S1] et [Br2]) :

PROPOSITION 2.2. — *On appelle E l'ensemble*

$$\bigcap_{k \geq 0} T^{-k}\{x \in I^d : x^{(1)} \neq 0\}.$$

À tout point x de E, l'algorithme de Jacobi-Perron associe une suite infinie $(a_n)_{n>0}$ de points de $\mathbb{N}^d$ qui vérifie la condition (C) *suivante : pour tout $n > 0$,*

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} \text{pour } i \neq d, \text{ on a } \ 0 \leq a_n^{(i)} \leq a_n^{(d)} \ \text{ et } \ a_n^{(d)} \geq 1\,; \\ \text{si pour } 1 \leq t \leq i, \text{ on a de plus :} \\ \qquad a_n^{(i)} = a_n^{(d)},\ a_{n+1}^{(i-1)} = a_{n+1}^{(d-1)},\ \dots\ ,\ a_{n+t}^{(i-t)} = a_{n+t}^{(d-t)}, \\ \text{alors} \\ \quad \text{si } \ t = i-1,\ a_{n+t+1}^{(d-t-1)} \geq 1, \\ \quad \text{si } \ t < i-1,\ a_{n+t+1}^{(i-t-1)} \leq a_{n+t+1}^{(d-t-1)}. \end{cases}$$

On appelle suite admissible toute suite $(a_n)_{n>0}$ de points de $\mathbb{N}^d$ vérifiant la condition (C). *Réciproquement, à toute suite admissible correspond un unique point de E.*

Démonstration. — Il suffit de le voir au rang 1. Comme x est dans I^d, le point M_1 appartient à la partie $\mathcal{P}_0$ de l'hyperplan Π_0 suivante :

$$\mathcal{P}_0 = F_2 \cap \ldots \cap F_d$$

où F_i est le domaine limité inférieurement par les ensembles suivants :

$$\begin{cases} u_0^{(i)} = 0, \\ u_0^{(1)} = 1, \\ u_0^{(d+1)} \geq 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0^{(d+1)} = 1, \\ u_0^{(1)} = 1, \\ 0 \leq u_0^{(i)} \leq 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0^{(i)} = u_0^{(d+1)}, \\ u_0^{(1)} = 1, \\ u_0^{(d+1)} \geq 1. \end{cases}$$

On en déduit alors que le point a_1 est dans

$$\mathcal{A}_d = \left\{ a = (a^{(1)}, \ldots, a^{(d)}) : 0 \leq a^{(i)} \leq a^{(d)} \text{ si } i \neq d \text{ et } a^{(d)} \geq 1 \right\}.$$

On remarque que, si pour tout $1 \leq i < d$, $a^{(i)} \neq a^{(d)}$, alors Tx peut prendre n'importe quelle valeur de I^d ; on en déduit donc qu'il n'y a pas de condition sur a_2.

On remarque que si $a^{(i)} = a^{(d)}$ $(i \neq d)$, alors Tx est dans

$$\mathcal{T}_{i,d} = \left\{ x \in I^d : \ 0 \leq x^{(i)} \leq x^{(d)} \leq 1 \right\}$$

et que si $a^{(i)} = a^{(j)}$ $(1 \leq i \neq j < d)$ et si $x^{(i+1)} \leq x^{(j+1)}$, alors Tx est dans

$$\mathcal{T}_{i,j} = \left\{ x \in I^d : \ 0 \leq x^{(i)} \leq x^{(j)} \leq 1 \right\}.$$

On fixe maintenant (i,j) tel que $1 \leq i < j \leq d$. On choisit x dans $\mathcal{T}_{i,j}$; alors le point M_1 est dans la partie $\mathcal{P}_{i,j}$ de Π_0 suivante :

$$\mathcal{P}_{i,j} = \begin{cases} \mathcal{P}_0 \cap \{u_0^{(i)} \leq u_0^{(j)}\} & \text{si } i \neq 1, \\ \mathcal{P}_0 \cap \{u_0^{(j)} \geq 1\} & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Donc $a \in \mathcal{A}_d$ vérifie donc de plus les relations suivantes :

$$a^{(i-1)} \leq a^{(j-1)} \quad \text{si} \quad i \neq 1, \quad a^{(j-1)} \geq 1 \quad \text{si} \quad i = 1.$$

On peut alors démontrer le reste de la condition (C). On suppose que $a_1^{(i)} = a_1^{(d)}$; alors Tx est dans $\mathcal{T}_{i,d}$ et on a donc

$$a_2^{(i-1)} \leq a_1^{(d-1)} \quad \text{si} \quad i \neq 1, \quad a_2^{(d-1)} \geq 1 \quad \text{si} \quad i = 1.$$

Si on suppose de plus que $a_2^{(i-1)} = a_2^{(d-1)}$, alors comme Tx est dans $\mathcal{T}_{i,d}$, on en déduit que T^2x est dans $\mathcal{T}_{i-1,d-1}$; on a alors

$$a_3^{(i-2)} \leq a_3^{(d-2)} \quad \text{si} \quad i \neq 2, \quad a_3^{(d-2)} \geq 1 \quad \text{si} \quad i = 2.$$

On peut continuer ainsi jusqu'au rang $i-1$, ou bien jusqu'à ce que l'on obtienne une inégalité stricte. On retrouve la condition (C) annoncée. La réciproque est justifiée dans [Br2], prop. 2.7. $\square$

Ainsi, à tout point x de I^d, on peut associer une suite de points $(e_n)_{n>0}$ du réseau $\mathbb{Z}^{d+1}$. Cette suite est définie par récurrence : pour tout $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_{n-d} + a_{n+1}^{(1)} e_{n-d+1} + \cdots + a_{n+1}^{(d)} e_n, \\ a_{n+1} &= \Big(\Big[\frac{x_n^{(2)}}{x_n^{(1)}} \Big], \ldots, \Big[\frac{x_n^{(d)}}{x_n^{(1)}} \Big], \Big[\frac{1}{x_n^{(1)}} \Big] \Big), \\ x_n &= T^n x. \end{aligned}$$

Cette suite est infinie si x n'appartient pas à certains hyperplans rationnels de $\mathbb{R}^d$ (d'équation $m_1 x_1 + \cdots + m_d x_d + m_{d+1} = 0$, m_i entiers) ; sinon on obtient une suite finie. Les coordonnées de e_n dans la base $(e_{-d}, \ldots, e_{-1}, e_0)$ sont données par la dernière colonne de la matrice

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_d & a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_d & a_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_d & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-d}^{(1)} & \cdots & p_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-d}^{(d)} & \cdots & p_n^{(d)} \\ q_{n-d} & \cdots & q_n \end{bmatrix}.$$

Comme pour tout $n > 0$, on a

$$\det S_n = (-1)^{nd},$$

on en déduit que les $(d+1)$-uplets $(e_{n-d}, \ldots, e_n)$ forment une base du réseau $\mathbb{Z}^{d+1}$. Par construction, la droite D est à l'intérieur du cône positif engendré par cette base. On projette ces bases sur l'hyperplan Π d'équation $u_0^{(d+1)} = 1$ et on obtient une suite de simplexes $\sigma_{n-d}(x) = (J_{n-d} \ldots J_n)$ qui sont emboîtés et qui contiennent tous le point x. On a, en notant $a \cdot x$ l'action de la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ I_d & a \end{smallmatrix}\right]$ sur le point x,

$$J_n = a_1 \cdots a_n \cdot 0 \quad \text{et} \quad x = a_1 \cdots a_n \cdot x_n.$$

Ainsi,

$$\|x - J_n\| \leq C\delta(a_1 \cdots a_n \cdot 0, a_1 \cdots a_n \cdot x_n) \leq C\rho^n \delta(x_n, 0) \leq C'\rho^n.$$

La distance δ est déduite de la distance de Hilbert mentionnée plus haut. Cette distance est équivalente à la distance euclidienne sur I^d et est contractée par toutes les transformations $a : x \mapsto a \cdot x$, avec a dans $\mathcal{A}_d$ (voir [Br2]). Comme $0 < \rho < 1$, on a donc :

$$\lim_{n \to \infty} \|x - J_n\| = 0.$$

On en déduit que les points e_n convergent, en direction, vers la direction $(x, 1)$.

2.3. Quelques résultats sur l'algorithme de Jacobi-Perron.

On rappelle les notations et les résultats de [Br2] qui vont servir ici. Pour σ une permutation de $\mathfrak{S}_d$, on note W_σ le simplexe

$$\{x : 0 \le x^{(\sigma(1))} \le \cdots \le x^{(\sigma(d))} \le 1\}.$$

Le premier résultat utile ici est l'existence d'une mesure invariante pour T, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :

THÉORÈME 2.3. — *Il existe une unique mesure de probabilité invariante par T qui est équivalente à la mesure de Lebesgue sur I^d. Sa densité h est une fonction analytique strictement positive sur chacun des simplexes W_σ, avec σ dans $\mathfrak{S}_d$.*

Pour montrer ce résultat on utilise Φ l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T, et on cherche une solution de $\Phi(h) = h$. L'opérateur Φ vaut, si f est dans $L^1_m(I^d)$:

$$\Phi f(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}_d} \frac{f(a \cdot x)}{(x^{(d)} + a^{(d)})^{d+1}} 1_{TK_a}(x),$$

où $K_a = I^d \cap a \cdot I^d$ (c'est l'ensemble des points de I^d dont le développement de Jacobi-Perron commence par a) et Φ s'identifie à l'adjoint de T dans $L^2_m(I^d)$. Comme la partition du cube I^d : $X = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} W_\sigma$ est préservée par toutes les transformations $x \mapsto a \cdot x$, on peut voir Φf comme le vecteur $((\Phi f)_\sigma)_\sigma$ de ses restrictions aux simplexes W_σ. Ce que l'on écrira sous la forme, si σ est dans $\mathfrak{S}_d$, si x est dans W_σ :

$$(\Phi f)_\sigma(x) = \sum_a f(a \cdot x)\varphi(x, a, \sigma) \text{ où } \varphi(x, a, \sigma) = \frac{1}{(x^{(d)} + a^{(d)})^{d+1}} 1_{TK_a}(x).$$

Dans cette écriture, on fait la somme sur tous les a de $\mathcal{A}_d$ que l'on peut faire agir sur un x de W_σ (x dans $a^{-1}I^d \cap I^d$), donc $\varphi(x, a, \sigma)$ est soit strictement positif sur W_σ, soit identiquement nul sur W_σ. On remarque alors que l'opérateur ainsi défini préserve les fonctions f qui sont continues, höldériennes, analytiques sur chacun des simplexes W_σ (voir aussi [Ma]). Dans toute la suite, on partitionne le cube I^d par les « diagonales » et on le remplace par $X = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} W_\sigma$, où le signe $\cup$ signifie réunion disjointe. On dira qu'une fonction est continue, höldérienne, analytique,... sur X si elle est continue, höldérienne, analytique,... sur chacun des simplexes W_σ. Un autre résultat important, montré en [Go] (voir aussi [Br2]) est :

PROPOSITION 2.4. — *Le système dynamique* $(X, \mathcal{B}, T, \pi)$ *est mélangeant. Ici* $\mathcal{B}$ *est la tribu des boréliens de* X *et* π *désigne la mesure* hm. *Le mélange est exponentiel sur les fonctions analytiques.*

2.4. Définition d'un opérateur markovien associé à T.

Comme h ne s'annule pas sur X, on peut alors normaliser Φ de façon à ce qu'il devienne markovien ($P1 = 1$). On pose pour tout f de $L^1_m(X)$:

$$Pf = \frac{\Phi(fh)}{h},$$

alors P s'identifie à l'adjoint de T dans $L^2_\pi(X)$. On écrit, pour x dans W_σ et σ dans $\mathfrak{S}_d$:

$$(Pf)_\sigma(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}_d} f(a \cdot x) p(x, a, \sigma) \quad \text{avec} \quad p(x, a, \sigma) = \frac{\varphi(x, a, \sigma) h(a \cdot x)}{h(x)}.$$

On peut voir $p(x, a, \sigma)$ comme la probabilité de faire agir a sur x qui est dans W_σ. Comme l'ensemble $TK_a \cap W_\sigma$ est vide ou W_σ tout entier, on en déduit que les fonctions $p(\,\cdot\,, a, \sigma)$ sont nulles ou strictement positives et analytiques sur W_σ. On verra plus loin que cet opérateur est associé à l'extension naturelle de T.

On doit préciser encore quelques notations et définitions. On note

$$\operatorname{Dom} a = a^{-1} X \cap X$$

et on observe que, d'après [Br2], $\operatorname{Dom} a$ est une réunion finie de simplexes W_σ, tandis que l'image par a de chacun de ces simplexes W_σ est contenue dans l'intérieur d'un seul simplexe $W_{\tau(a,\sigma)}$. On pose aussi :

$$\operatorname{Dom} a_1 \cdots a_n = X \cap a_n^{-1} X \cap a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} X \cap \ldots \cap a_n^{-1} \cdots a_1^{-1} X.$$

On voit que $\operatorname{Dom} a_1 \cdots a_{n+1} \subset \operatorname{Dom} a_1 \cdots a_n$.

DÉFINITION 2.5. — *On dit que la suite finie* $\omega_n = (a_1, \ldots, a_n)$ *est* x*-admissible* (x *dans* X), *si* x *est dans* $\operatorname{Dom} a_1 \cdots a_n$.

La suite ω_n *est dite admissible si* $\operatorname{Dom} a_1 \cdots a_n$ *n'est pas vide.*

Enfin la suite infinie $\omega = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de points de* $\mathcal{A}_d$ *est admissible si tous ses blocs finis sont admissibles.*

Remarque. — Si $\omega = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est admissible, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{Dom}\, a_1 \cdots a_n = X_n,$$

où X_n est une réunion finie de simplexes. La relation

$$\mathrm{Dom}\, a_1 \cdots a_{n+1} \subset \mathrm{Dom}\, a_1 \cdots a_n$$

implique que l'intersection X_∞ des X_n est aussi une réunion finie non vide de simplexes. On a aussi, d'après [Br2],

$$\bigcap_n (a_1 \cdots a_n X_\infty) = \{x\} \quad \text{où } x \text{ est dans } X.$$

La proposition 2.2 implique alors que ω vérifie la condition (C). La réciproque est justifiée dans [Br2]. L'admissibilité d'une suite infinie se lit donc sur ses blocs de longueur d et coïncide bien avec la notion considérée plus haut.

Par la suite, on aura besoin des puissances de l'opérateur P ; on pose pour x dans W_σ, avec σ dans $\mathfrak{S}_d$, pour $n > 0$:

$$(P^n f)_\sigma(x) = \sum_{a_1\ldots a_n \in \mathcal{A}_d^n} f(a_1 \ldots a_n \cdot x)\, p(x, a_1, \ldots, a_n, \sigma),$$

où

$$p(x, a_1, \ldots, a_n, \sigma) = p(a_2 \ldots a_n \cdot x, a_1, \tau_{a_2\ldots a_n,\sigma}) \cdots p(x, a_n, \sigma),$$

$\tau_{a_i\ldots a_n,\sigma}$ est une permutation de $\mathfrak{S}_d$ qui est entièrement déterminée par $a_i \ldots a_n \cdot x \in W_{\tau_{a_i\ldots a_n\sigma}}$ si $a_i \ldots a_n$ est admissible ; sinon $p(x, a_1 \ldots, a_n, \sigma)$ est nul et on prend pour $\tau_{a_i\ldots a_n,\sigma}$ n'importe quelle permutation de $\mathfrak{S}_d$ (par exemple l'identité). Comme $p(x, a_1, \ldots, a_n, \sigma)$ est nul si $a_1, \ldots, a_n$ n'est pas x-admissible, on écrira souvent

$$(P^n f)_\sigma(x) = \sum_{\omega_n} f(\omega_n \cdot x)\, p(x, \omega_n, \sigma),$$

où on fait la somme sur tous les $\omega_n = (a_1, \ldots, a_n)$ qui sont x-admissibles. On peut voir $p(x, \omega_n, \sigma)$ comme la probabilité de faire agir ω_n sur le point x qui est dans W_σ ; dans cette écriture, on suppose que les poids $p(\,\cdot\,, \omega_n, \sigma)$ sont strictement positifs et analytiques sur W_σ.

On remarque tout de suite que si x et y sont dans W_σ, alors le rapport $p(x, \omega_n, \sigma)/p(y, \omega_n, \sigma)$ est uniformément majoré par une constante.

En effet, si on note $(q_{n-d}, \dots, q_{n-1}, q_n)$ la dernière ligne de la matrice qui correspond à ω_n, alors

$$p(x, \omega_n, \sigma) = \frac{h(\omega_n \cdot x)}{h(x)} \frac{1}{(q_{n-d}x^{(1)} + \dots + q_{n-1}x^{(d)} + q_n)^{d+1}}.$$

On a donc, si x et y sont dans W_σ :

$$\begin{aligned} \frac{p(x, \omega_n, \sigma)}{p(y, \omega_n, \sigma)} &\geq c\Big(\frac{q_n}{q_n + q_{n-1} + \dots + q_{n-d}}\Big)^{d+1} \\ &\geq \frac{c}{(d+1)^{d+1}}, \quad \text{où} \quad c = \Big(\frac{\inf_{x \in I^d} h(x)}{\sup_{x \in I^d} h(x)}\Big)^2. \end{aligned}$$

Comme X est la réunion disjointe des W_σ, en règle générale, on omettra l'indice σ qui indique dans quel simplexe de X le point x se trouve et on écrira

$$P^n f(x) = \sum_{\omega_n} f(\omega_n \cdot x)\, p(x, \omega_n),$$

où l'on fait la somme sur tous les $\omega_n = (a_1, \dots, a_n)$ x-admissibles.

On a plus précisément la proposition suivante :

PROPOSITION 2.6. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que si ω_n est admissible et si x et y sont dans W_σ, avec $p(x, \omega_n)p(y, \omega_n) > 0$, on ait :*

$$\Big|\frac{p(x, \omega_n)}{p(y, \omega_n)} - 1\Big| \leq c\,\delta(x, y).$$

Démonstration. — Considérons la fonction

$$\varphi_a(x) = \varphi(x, a) = \frac{1}{(x^{(d)} + a^{(d)})^{d+1}}.$$

Alors, comme $a^{(d)} \geq 1$ et $x^{(d)} \geq 0$,

$$\frac{\|\mathrm{grad}\, \varphi_a\|}{\varphi_a} = \frac{d+1}{x^{(d)} + a^{(d)}} \leq d + 1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\big|\log p(x,\omega_n) - \log p(y,\omega_n)\big| \\
&\qquad \le \big|\log h(x) - \log h(y)\big| + \big|\log h(\omega_n\cdot x) - \log h(\omega_n\cdot y)\big| \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=2}^{n} |\log\varphi(a_k\cdots a_n\cdot x, a_{k-1}) - \log\varphi(a_k\cdots a_n\cdot y, a_{k-1})| \\
&\qquad \le c_1\delta(x,y) + c_1\delta(\omega_n\cdot x,\omega_n\cdot y) \\
&\qquad\qquad + c_2(d+1)\sum_{k=2}^{n}\delta(a_k\cdots a_n\cdot x, a_k\cdots a_n\cdot y) \\
&\qquad \le c'\delta(x,y)\sum_{k=0}^{n}\rho^k \le \frac{c'}{1-\rho}\delta(x,y),
\end{aligned}$$

avec $c' = \sup\{2c_1, c_2\}$, les c_i dépendent de h et de la comparaison de $\|\overrightarrow{xy}\|$ et de $\delta(x,y)$. Si $u<0$ est borné, il existe une constante $c''>0$ telle que $|u-1| \le c''|\log u|$. Prenant $u = p(x,\omega_n)/p(y,\omega_n)$, on a vu ci-dessus que u était borné ; on en conclut

$$\left|\frac{p(x,\omega_n)}{p(y,\omega_n)} - 1\right| \le c''\left|\log\frac{p(x,\omega_n)}{p(y,\omega_n)}\right| \le \frac{c''c'}{1-\rho}\delta(x,y).$$

D'où l'énoncé avec $c = c''c'/(1-\rho)$. □

On énonce maintenant un résultat utile pour la construction de la mesure $\widetilde{\pi}$:

PROPOSITION 2.7. — *On fixe a dans $\mathcal{A}_d$. Il existe une constante $\varepsilon(a)$ telle que si ω_n est admissible telle que (ω_n, a) est encore admissible alors on a :*

$$\pi^a_{\omega_n} = \frac{\int_X p(x,(\omega_n,a))\,\mathrm{d}\pi(x)}{\int_X p(x,\omega_n)\,\mathrm{d}\pi(x)} \ge \varepsilon(a) > 0.$$

Démonstration. — Comme h est une fonction strictement positive et analytique sur X, il existe deux constantes réelles positives c et C telles que si on note $(q_{n-d},\dots,q_n)$ la dernière ligne de la matrice $M_{\omega_n} = M_{a_1}M_{a_2}\dots M_{a_n}$ et si $p(\,\cdot\,,\omega_n)$ ne s'annule pas, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{(q_{n-d}x^{(1)} + \cdots + q_{n-1}x^{(d)} + q_n)^{d+1}} \\
&\qquad\qquad \le p(x,\omega_n)h(x) \le \frac{C}{(q_{n-d}x^{(1)} + \cdots + q_{n-1}x^{(d)} + q_n)^{d+1}}.
\end{aligned}$$

De même, si $p(x, (\omega_n, a))$ ne s'annule pas, on a :

$$\begin{aligned}\frac{c}{(q_{n-d+1}x^{(1)} + \cdots + q_n x^{(d)} + q_{n+1})^{d+1}} &\leq p\big(x, (\omega_n, a)\big)h(x) \\ &\leq \frac{C}{(q_{n-d+1}x^{(1)} + \cdots + q_n x^{(d)} + q_{n+1})^{d+1}},\end{aligned}$$

avec $q_{n+1} = q_{n-d} + a^{(1)}q_{n-d-1} + \cdots + a^{(d)}q_n$. Comme (ω_n, a) est admissible, il existe au moins un simplexe W_τ de X sur lequel $p(\,\cdot\,, (\omega_n, a))$ ne s'annule pas. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_X p\big(x, (\omega_n, a)\big)\,\mathrm{d}\pi(x) &\geq \int_{W_\tau} p\big(x, (\omega_n, a)\big)\,\mathrm{d}\pi(x) \\ &\geq c\int_{W_\tau} \frac{\mathrm{d}x^{(1)}\cdots\mathrm{d}x^{(d)}}{(q_{n-d-1}x^{(1)} + \cdots + q_n x^{(d)} + q_{n+1})^{d+1}}.\end{aligned}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(q_{n-d+1}x^{(1)} + \cdots + q_n x^{(d)} + q_{n+1})^{d+1}} \\ &\qquad\geq \frac{1}{[(q_{n-d}x^{(1)} + \cdots + q_{n-1}x^{(d)} + q_n)(1 + q_{n+1}/q_n)]^{d+1}} \\ &\qquad\geq \frac{1}{(q_{n-d} + \cdots + q_n)^{d+1}}\,\frac{1}{(2 + a^{(1)} + \cdots + a^{(d)})^{d+1}}.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_X p\big(x, (\omega_n, a)\big)\,\mathrm{d}\pi(x) \geq \frac{c}{[q_n(d+1)]^{d+1}}\,\frac{1}{(2 + a^{(1)} + \cdots + a^{(d)})^{d+1}}\,\frac{1}{d!}.$$

On a aussi :

$$\int_X p(x, \omega_n)\,\mathrm{d}\pi(x) \leq C\int_X \frac{\mathrm{d}x^{(1)}\cdots\mathrm{d}x^{(d)}}{(q_{n-d}x^{(1)} + \cdots + q_{n-1}x^{(d)} + q_n)} \leq \frac{C}{(q_n)^{d+1}}.$$

On obtient alors :

$$\pi^a_{\omega_n} \geq \frac{c}{C}\,\frac{1}{(d+1)^{d+1}}\,\frac{1}{d!}\,\frac{1}{(2 + a^{(1)} + \cdots + a^{(d)})^{d+1}} = \varepsilon(a) > 0. \qquad \square$$

Remarques. — 1) Les minorations que l'on vient de faire sont très grossières. L'essentiel ici est qu'on ait une domination $\pi^a_{\omega_n} \geq \varepsilon(a) > 0$ dès que (ω_n, a) est admissible.

2) La même démonstration permet de montrer que si $\gamma = (b_0 \cdots b_k)$ est admissible, alors il existe une constante $\varepsilon(\gamma)$ telle que pour tout ω_n admissible vérifiant $(\omega_n\gamma)$ admissible, on ait :

$$\pi^\gamma_{\omega_n} = \frac{\int_X p(x, (\omega_n, \gamma))\,\mathrm{d}\pi(x)}{\int_X p(x, \omega_n)\,\mathrm{d}\pi(x)} \geq \varepsilon(\gamma) > 0.$$

3. Définitions des exposants de l'algorithme.

3.1. Rappels sur les exposants de Lyapunov.

On rappelle ici quelques définitions et propriétés des exposants de Lyapunov d'une suite stationnaire de matrices réelles d'ordre d. On fixe un système ergodique probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, T, \pi)$ et une application mesurable A de Ω vers l'ensemble des matrices d'ordre d. On suppose que la fonction $\log^+ \|A\|$ est intégrable. Pour tout entier $n > 0$, on note

$$C_n(\omega) = A(T^{n-1}\omega) \cdots A(T\omega)A(\omega)\,;$$

pour tout entier $1 \le p \le d$, on note $\Lambda^p A$ l'application linéaire de $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ définie pour tout p-uplet $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le d$ par

$$\Lambda^p A(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = Ae_{i_1} \wedge \ldots \wedge Ae_{i_p}.$$

Alors pour tout $1 \le p \le d$, la limite de la suite $n^{-1} \int_\Omega \log \|\Lambda^p C_n\| \,\mathrm{d}\pi$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; on la note $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p$. Si on suppose de plus que $\log |\det A|$ est intégrable, alors tous les λ_p sont finis. (Ces limites ne dépendent pas des normes choisies sur les espaces de matrices.) Dans le cas où A est unimodulaire, on a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_d = 0$ car $|\det A| = \|\Lambda^d A\| = 1$.

On peut aussi définir directement les (λ_p), en utilisant la décomposition polaire de la matrice C_n,

$$C_n = K_n D_n K_n',$$

K_n, K_n' orthogonales, D_n est diagonale avec $\delta_1(C_n) \ge \cdots \ge \delta_d(C_n) > 0$. On a alors $\lambda_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_\Omega \log \delta_p(C_n) \,\mathrm{d}\pi$ et donc $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_d$.

Comme le système $(\Omega, \mathcal{F}, T, \pi)$ est ergodique, le théorème ergodique sous-additif de Kingman permet d'écrire que pour π-presque tout ω de Ω, pour tout $1 \le p \le d$, on a :

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = \frac{1}{n} \log \big\|\Lambda^p C_n(\omega)\big\| \quad \text{et} \quad \lambda_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \delta_p\big(C_n(\omega)\big).$$

Les exposants de Lyapunov associés au produit de matrices $\{A_n = A \circ T^n, n > 0\}$ sont les nombres $(\lambda_p)_{1 \le p \le d}$ que l'on vient de définir. Il faut remarquer que

1) Les résultats précédents restent valables pour le produit de matrices suivant : $B(\omega)B(T\omega) \cdots B(T^{n-1}\omega) = \Sigma_n(\omega)$ où B est une matrice unimodulaire d'ordre d. Car si on remplace B par $A = {}^tB$, les parties diagonales des décompositions polaires de C_n et de Σ_n sont les mêmes.

2) Si A est inversible, comme $\delta_p(A^{-1}) = [\delta_{d+1-p}(A)]^{-1}$, les exposants du produit $A^{-1}(x) \cdots A^{-1}(T^n x)$ sont $-\lambda_d, \ldots, -\lambda_1$.

3.2. Définition des exposants de l'algorithme de Jacobi-Perron.

3.2.1. *Définition des* λ_i. — On applique les résultats que l'on vient de rappeler au système ergodique $(X, \mathcal{B}, T, \pi)$. Pour tout x de $X_0 = \{x \in I^d : x^{(1)} \neq 0\}$, on définit la matrice unimodulaire suivante :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_d & a \end{bmatrix} \text{ avec } a = (a^{(1)}, \dots, a^{(d)}) = \left(\left[\frac{x^{(2)}}{x^{(1)}} \right], \dots, \left[\frac{x^{(d)}}{x^{(1)}} \right], \left[\frac{1}{x^{(1)}} \right] \right).$$

Si x est dans $E = \bigcap_{k \geq 0} T^{-k} X_0$, son développement par l'algorithme de Jacobi-Perron est infini et on peut donc définir pour tout $n > 0$ la matrice produit :

$$S_n(x) = A(x) \dots A(T^{n-1}x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_d & a_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_d & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-d}^{(1)} & \cdots & p_n^{(1)} \\ \cdots & & \\ p_{n-d}^{(d)} & \cdots & p_n^{(d)} \\ q_{n-d} & \cdots & q_n \end{bmatrix}.$$

On remarque que

Lemme 3.1. — *Pour tout* x *de* $\bigcap_{k \geq 0} T^{-k} X_0$,

$$\|S_n(x)\| = \sup_{i,j} |(S_n(x))_{i,j}| = q_n(x) = q_n.$$

De plus on a :

$$q_{n+1} = a_{n+1}^{(d)} q_n + \cdots + a_{n+1}^{(1)} q_{n-d+1} + q_{n-d}.$$

Démonstration. — La relation

$$q_{n+1} = a_{n+1}^{(d)} q_n + \cdots + a_{n+1}^{(1)} q_{n-d+1} + q_{n-d}$$

découle de $S_{n+1}(x) = S_n(x) A(T^n x)$. Comme a vaut au moins $(0, \dots, 0, 1)$, on a donc $q_{n+1} \geq q_n$. Les mêmes relations sont vraies pour les $p_n^{(i)}$. Pour i dans $\{-d, \dots, 0, 1\}$, on a $p_i^{(j)} \leq q_i$, alors par récurrence, pour tout $n > 0$, on a $p_n^{(j)} \leq q_n$. □

On désigne par $\Delta_n^{(p)}(x)$ la plus grande des valeurs absolues des mineurs d'ordre p de $S_n(x)$. Alors, comme

$$\int_X \log^+ \|A\| \, \mathrm{d}\pi \leq \mathrm{C^{te}} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\log b}{b(b+1)}$$

est fini, il existe $d+1$ réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ vérifiant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{d+1}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{d+1} = 0$ tels que

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_p = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_X \log \Delta_n^{(p)} \, \mathrm{d}\pi,$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_p = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \Delta_n^{(p)}(x) \quad m\text{-p.p.}$$

En particulier, on a $\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \log q_n(x)$ m-p.p. On les appelle *exposants de Lyapunov* de T. On a aussi :

PROPOSITION 3.2. — *On a $\lambda_1 \geq \log \beta_d > 0$, $\lambda_{d+1} < 0$, où β_d est la plus grande racine réelle (en module) du polynôme $x^{d+1} - x^d - 1$.*

Démonstration. — C'est un corollaire du lemme 3.1, pour tout x de $\bigcap_{k \geq 0} T^{-k} X_0$, les a_n valent au moins $(0, \dots, 0, 1)$, donc $q_{n+1} \geq q_n + q_{n-d}$. Les q_n sont des entiers positifs, donc $q_n \geq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \beta_d^n$, où β_d est la plus grande racine réelle (en module) du polynôme $x^{d+1} - x^d - 1$; elle appartient à $](2d+1)/2d, 2[$. Ainsi $\lambda_1 \geq \log \beta_d > 0$. Comme $\lambda_1 + \dots + \lambda_{d+1} = 0$, alors $\lambda_{d+1} < 0$. □

3.2.2. *Définition des γ_i.* — Dans la suite on utilisera aussi les exposants associés à la matrice jacobienne de T :

$$T'_x = \begin{bmatrix} -\frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2} & \frac{1}{x^{(1)}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{x^{(3)}}{(x^{(1)})^2} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 \\ -\frac{x^{(d)}}{(x^{(1)})^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x^{(1)}} \\ -\frac{1}{(x^{(1)})^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x^{(1)})^2} \begin{bmatrix} -x^{(2)} & x^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -x^{(3)} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 \\ -x^{(d)} & 0 & 0 & \dots & x^{(1)} \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors $(T^n)'_x = T'_{T^{n-1}x} T'_{T^{n-2}x} \cdots T'_x$. On définit alors les *exposants de Lyapunov* de ce produit de matrices, en posant pour $1 \leq p \leq d$:

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X \log \left| \Lambda^p (T^n)' \right| \mathrm{d}\pi$$

$$\text{ou} \quad \gamma_1 + \dots + \gamma_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| \Lambda^p (T^n)'_x \right| \quad m\text{-p.p.}$$

PROPOSITION 3.3. — *On a les relations suivantes pour* $1 \leq p \leq d$:

$$\gamma_p = \lambda_1 - \lambda_{d+2-p}.$$

Démonstration. — Pour montrer ces relations, il est plus facile d'utiliser les transformations $x \mapsto a \cdot x$. On fixe un x qui a pour développement $(a_i)_{i>0}$ et alors, pour tout n, on a $a_1 \cdots a_n \cdot T^n x = x$. Donc,

$$\begin{aligned} I &= (a_1')_{a_2 \cdots a_n \cdot T^n x}(a_2')_{a_3 \cdots a_n \cdot T^n x} \cdots (a_n')_{T^n x}(T^n)_x' \\ &= (a_1')_{Tx}(a_2')_{T^2 x} \cdots (a_n')_{T^n x}(T^n)_x' \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (T^n)_x' &= \left[(a_1')_{Tx}(a_2')_{T^2 x} \cdots (a_n')_{T^n x}\right]^{-1} \\ &= \left[B(x) \cdots B(T^{n-1}x)\right]^{-1} = \left[\Sigma_n(x)\right]^{-1} \end{aligned}$$

où $B(x)$ est la matrice $(a^x)_{Tx}'$ qui est d'ordre d. On rappelle que $a^x(y) = a_1 \cdot y$, si a_1 est le premier terme du développement de x. Les exposants de Lyapunov de Σ_n sont les opposés de ceux de $(T^n)'$, on a donc pour m-presque tout x :

$$\begin{aligned} -\gamma_d - \cdots - \gamma_{d-p+1} &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left\| \Lambda^p \Sigma_n(x) \right\| \\ &= \lambda_1 + \cdots + \lambda_{p+1} - (p+1)\lambda_1 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) + \cdots + (\lambda_{p+1} - \lambda_1). \end{aligned}$$

En effet, si on note $f(x) = S_n \cdot x$, on a $f_x' = \Sigma_n(x)$ et comme $|\det S_n| = 1$, alors $\|\Lambda^p \Sigma_n(x)\|$ est, à une constante multiplicative près, de l'ordre de $\|\Lambda^{p+1} S_n(x)\| / \|S_n(x)\|^{p+1}$. On a donc $\gamma_p = \lambda_1 - \lambda_{d+2-p}$. □

4. Rappels sur les sommes de Birkhoff.

On rappelle dans cette partie quelques résultats de théorie ergodique utiles par la suite.

LEMME 4.1. — *Soit* Y *un espace métrique compact, soit* Q *un opérateur markovien qui préserve les fonctions continues sur* Y *et qui laisse invariante une unique mesure de probabilité* ν. *Alors pour toute fonction continue* f *sur* Y, *la moyenne* $n^{-1} \sum_{0 \leq k \leq n-1} Q^k f$ *converge uniformément sur* Y *vers* $\nu(f)$.

C'est un résultat classique, la démonstration est donnée dans [F].

On suppose maintenant que $(\Delta, \mathcal{B}, T)$ est un système dynamique et que $\widetilde{\pi}$ est une mesure de probabilité invariante par T.

LEMME 4.2. — *Soit f une fonction de $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$ à valeurs réelles telle que*

1) $\widetilde{\pi}(f) = 0$,

2) *il existe une constante c telle que pour $\widetilde{\pi}$-presque tout ξ de Δ, pour tout entier $n > 0$, on ait $\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(\xi) \leq c$.*

Alors il existe une fonction g de $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$ à valeurs réelles telle que

$$f = g - g \circ T \quad \widetilde{\pi}\text{-presque partout.}$$

De plus si on impose que $\widetilde{\pi}(g)$ soit nul, alors cette solution est unique.

Démonstration. — Si g et h sont deux solutions de $f = g - g \circ T$ $\widetilde{\pi}$-presque partout et si $\widetilde{\pi}(g) = \widetilde{\pi}(h) = 0$, alors on a :

$$(g - h) \circ T = g - h.$$

Comme le système $(\Delta, \mathcal{B}, T, \widetilde{\pi})$ est ergodique, $g - h$ est constante et donc nulle $\widetilde{\pi}$-presque partout.

Pour tout ξ de Δ, tout entier $n > 0$, on pose :

$$g_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(\xi).$$

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(\xi) \leq c$, la fonction

$$g(\xi) = \sup\{g_n(\xi),\ n > 0\}$$

est finie et est mesurable de Δ vers $\mathbb{R}$. La fonction g est dans $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$ car $f \leq g \leq c$. L'égalité

$$g_n(T\xi) = g_{n+1}(\xi) - f(\xi)$$

entraîne que tout ξ :

$$g(T\xi) \leq g(\xi) - f(\xi)$$

Alors, la fonction $f - (g - g \circ T)$ est négative et d'intégrale nulle; donc on a :

$$f(\xi) = (g - g \circ T)(\xi) \quad \widetilde{\pi}\text{-presque partout.} \qquad \square$$

On utilisera aussi le résultat suivant :

LEMME 4.3. — *Soit $(X, \mathcal{B}, T, \pi)$ un système dynamique, soit f une fonction de $L^1_\pi(X)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *pour π-presque tout x de X, on a $\lim_{n\to\infty} |\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x)| = \infty$;*

2) *$\pi(f)$ n'est pas nul.*

En particulier, si pour π-presque tout x de X :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) = -\infty,$$

alors, $\pi(f)$ est strictement négatif.

La démonstration suit [At], [Ke] et [GuR1].

II. Cas de la dimension 2

Dans toute cette partie, on se place dans le cas de la dimension 2. Dans un premier temps on va montrer que λ_2 est négatif ou nul.

5. λ_2 est négatif ou nul.

Ce premier renseignement est donné par une inégalité entre $\|\Lambda^2 S_n(x)\|$ et $\|S_n(x)\|$.

5.1. Une inégalité entre $\|\Lambda^2 S_n(x)\|$ et $\|S_n(x)\|$.

Elle est donnée par :

THÉORÈME 5.1. — *Pour tout x de E, on a :*

$$\big\|\Lambda^2 S_n(x)\big\| \leq 2\big\|S_n(x)\big\|,$$

où

$$\|\Lambda^2 A\| = \sup_{1\leq i,j\leq 3} |\beta_{i,j}| \quad si \quad \Lambda^2 A = (\beta_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3},$$

$$\|A\| = \sup_{1\leq i\leq 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{i,j}| \quad si \quad A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}.$$

Dans toute la suite, on note :

$$s_n = p_n^{(1)} + p_n^{(2)} + q_n \quad \text{et} \quad \Delta_n(x) = \big\|\Lambda^2 S_n(x)\big\|.$$

La quantité s_n représente la somme des coefficients de la dernière colonne de la matrice S_n ; elle est égale à $\|S_n\|$. L'inégalité précédente s'écrit alors

$$\Delta_n(x) \leq 2s_n(x).$$

Avant de donner la démonstration, on énonce un corollaire de cette inégalité.

THÉORÈME 5.2. — *En dimension* 2, *les exposants de Lyapunov de l'algorithme de Jacobi-Perron vérifient*

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3, \quad \lambda_3 < 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Démonstration. — λ_2 est défini comme la limite de $n^{-1} \int_X \log \delta_2(S_n)\, d\pi$. On a $\delta_2(S_n) = \Delta_n/q_n \leq 3\Delta_n/s_n \leq 6$. Ainsi $\lambda_2 \leq \lim_{n\to\infty} \log 6/n = 0$. □

Démonstration du théorème 5.1. — Dans [PU], Paley et Ursell montrent que $\Delta_n \leq s_n$; la version donnée ici se démontre beaucoup plus simplement, par récurrence. On donne d'abord des relations entre les coefficents des matrices $\Lambda^2 S_n$. On se place dans la base $(e_1^*, e_2^*, e_3^*) = (e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2)$

LEMME 5.3. — *Pour tout $n > 0$, pour tout x de*

$$E = \bigcap_{k\geq 0} T^{-k}\{x \in I^d : x^{(1)} \neq 0\},$$

on note $\beta_n^{(1)}, \beta_n^{(2)}, \beta_n^{(3)}$ les colonnes de la matrice $\Lambda^2 S_n$. On a alors :

$$\beta_{n+1}^{(1)} = -a_{n+1}^{(1)}\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}, \quad \beta_{n+1}^{(2)} = -a_{n+1}^{(2)}\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(3)}, \quad \beta_{n+1}^{(3)} = \beta_n^{(1)}.$$

Démonstration. — Comme $S_n = A_1 \cdots A_n$, on a $\Lambda^2 S_n = \Lambda^2 A_1 \cdots \Lambda^2 A_n$, il reste donc à calculer $\Lambda^2 A$. On a $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = e_3$ et $Ae_3 = e_1 + a^{(1)}e_2 + a^{(2)}e_3$, donc $\Lambda^2 Ae_1^* = e_2^* - a^{(1)}e_1^*$, $\Lambda^2 Ae_2^* = e_3^* - a^{(2)}e_1^*$ et $\Lambda^2 Ae_3^* = e_1^*$. Ainsi dans $(e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*)$, on a :

$$\Lambda^2 S_n = \begin{bmatrix} -a_1^{(1)} & -a_1^{(2)} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} -a_n^{(1)} & -a_n^{(2)} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce qui prouve les relations annoncées. □

On peut alors montrer le théorème 5.1 par récurrence; il suffit de montrer que pour $1 \leq i,j \leq 3$, les coefficients $\beta_n(i,j)$ de la matrice $\Lambda^2 S_n$ vérifient $|\beta_n(i,j)| \leq 2s_n$ ou si on oublie l'indice j des colonnes $|\beta_n^{(i)}| \leq 2s_n$ si $1 \leq i \leq 3$. On remarque alors qu'il suffit de montrer que : $|\beta_n^{(1)}| \leq s_n$; les relations du lemme 5.3 entraînent alors que

$$|\beta_{n+1}^{(3)}| \leq s_n \leq 2s_{n+1}, \quad |\beta_{n+1}^{(2)}| \leq s_{n-1} + a_{n+1}^{(2)} s_n \leq s_{n+1} + s_{n-1} \leq 2s_{n+1}.$$

Maintenant, on montre par récurrence que $|\beta_n^{(1)}| \leq s_n$. Si on suppose que c'est vrai jusqu'au rang n, alors,

$$|\beta_{n+1}^{(1)}| = |-a_{n+1}^{(1)}\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}| \leq (a_{n+1}^{(1)} + 1)s_n + s_{n-2}.$$

D'autre part, $s_{n+1} = a_{n+1}^{(2)} s_n + a_{n+1}^{(1)} s_{n-1} + s_{n-2}$. Donc, $|\beta_{n+1}^{(1)}| \leq s_{n+1}$ sauf éventuellement si $a_{n+1}^{(1)} = a_{n+1}^{(2)}$. Dans ce cas, on écrit

$$\begin{cases} \beta_{n+1}^{(1)} = -(a_{n+1}^{(2)} - 1)\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)} - \beta_n^{(1)} \\ s_{n+1} = (a_{n+1}^{(2)} - 1)s_n + a_{n+1}^{(2)} s_{n-1} + s_{n-2} + s_n. \end{cases}$$

On itère les relations de récurrence pour les derniers termes des égalités et on trouve

$$\begin{cases} \beta_{n+1}^{(1)} = -(a_{n+1}^{(2)} - 1)\beta_n^{(1)} - (a_n^{(2)} - a_n^{(1)})\beta_{n-1}^{(1)} + \beta_{n-1}^{(3)} - \beta_{n-1}^{(2)} \\ s_{n+1} = (a_{n+1}^{(2)} - 1)s_n + (a_{n+1}^{(2)} + a_n^{(2)})s_{n-1} + (a_n^{(1)} + 1)s_{n-2} + s_{n-3}. \end{cases}$$

On a alors :

$$|\beta_{n+1}^{(1)}| \leq (a_{n+1}^{(2)} - 1)s_n + (a_n^{(2)} - a_n^{(1)} + 1)s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3}.$$

Comme $a_{n+1}^{(2)} + a_n^{(2)} \geq a_n^{(2)} - a_n^{(1)} + 1$, on a donc $|\beta_{n+1}^{(1)}| \leq s_{n+1}$.

Pour terminer la démonstration il suffit de montrer que l'inégalité est aussi vraie pour les quatre premiers rangs; on remarque que l'on a

$$S_n = w^3 S_n, \quad \text{où } w \text{ est la matrice } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En posant $A_{-2} = A_{-1} = A_0 = w$, on a alors $\Lambda^2 A_{-2} = \Lambda^2 A_{-1} = \Lambda^2 A_0 = w$; on peut donc écrire $S_n = \prod_{i=-2}^n A_i$ et $\Lambda^2 S_n = \prod_{i=-2}^n \Lambda^2 A_i$. Les relations de récurrence restent valables. L'inégalité est vérifiée pour $n = 0, -1, -2$ et $\sup_{1\leq i,j\leq 3} |\beta_1(i,j)| = a_1^{(2)}$, $s_1 = 1 + a_1^{(1)} + a_1^{(2)}$, ce qui achève la démonstration. □

5.2. Applications aux approximations de deux réels obtenues par l'algorithme de Jacobi-Perron.

On fixe un point x de X ; il a un développement fini ou infini par l'algorithme de Jacobi-Perron. On peut donc construire une suite finie ou infinie de triangles $\mathcal{T}_n = (J_{n-2}J_{n-1}J_n)$ qui sont emboîtés et qui convergent vers le point x. On a alors :

THÉORÈME 5.4. — *On pose $\delta = -\lambda_2/\lambda_1 \geq 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour m-presque tout x de X, pour n assez grand, on a :*

$$\|x - J_n\| \leq \frac{1}{q_n^{1+\delta-\varepsilon}}.$$

Démonstration. — Le point x est à l'intérieur du triangle $\mathcal{T}_n$, on a donc :

$$\begin{aligned}\|x - J_n\| &\leq \max\{\|J_{n-1} - J_n\|, \|J_{n-2} - J_n\|, \|J_{n-1} - J_{n-2}\|\}\\ &\leq \frac{\sqrt{2}\,\Delta_n(x)}{q_{n-2}^2(x)}.\end{aligned}$$

On choisit maintenant un point x de E, tel que $\lambda_1 = \lim \frac{1}{n}\log q_n(x)$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = \lim \frac{1}{n}\log \Delta_n(x)$. On sait que l'ensemble de ces points est de mesure 1. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, on a :

$$\Delta_n(x) \leq \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2+\varepsilon)n} \quad \text{et} \quad q_{n-2}^2(x) \geq \mathrm{e}^{(\lambda_1-\varepsilon)(2n-4)}.$$

Ainsi on a $\|x - J_n\| \leq \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\lambda_1}\,\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1+3\varepsilon)n}$. D'autre part, on a aussi $\mathrm{e}^n \leq (q_n e^{n\varepsilon})^{\frac{1}{\lambda_1}}$. Ainsi,

$$\|x - J_n\| \leq \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\lambda_1-\varepsilon}(\,\mathrm{e}^{n\varepsilon}q_n)\,\mathrm{e}^{(3\varepsilon+\lambda_2-\lambda_1)/\lambda_1} \leq \frac{1}{q_n^{1+\delta-\varepsilon'}},$$

si n est assez grand, car $\lambda_2 - \lambda_1 + 3\varepsilon$ est strictement négatif si ε est assez petit. □

Pour répondre à la question posée par Lagarias [La1], savoir si $\lim_{n\to\infty} q_n\|x - J_n\| = \lim_{n\to\infty}\|\{q_n x\}\| = 0$, il reste à démontrer que λ_2 est strictement négatif et on aura en fait pour $\varepsilon > 0$ bien choisi $\lim_{n\to\infty} q_n^{1+\varepsilon}\|x - J_n\| = 0$. Pour faire cela on va étendre de façon naturelle la transformation T aux drapeaux.

À partir de maintenant, on suppose que λ_2 est nul et on va obtenir une contradiction.

6. Extension de l'algorithme aux drapeaux.

6.1. Définitions des extensions.

On étend maintenant la transformation aux drapeaux; cela revient à préciser à quelle droite chaque point x de $X \subset \mathbb{P}^2$ appartient. Une telle droite $D_x \subset \mathbb{P}^2$ est entièrement déterminée par un vecteur directeur u_1. Un point y de $\mathbb{R}^2$ est sur D_x si $\overrightarrow{xy} = \alpha_1 u_1$, avec α_1 dans $\mathbb{R}$.

On appelle *drapeau* de $\mathbb{P}^2$ la donnée d'un point x de X et d'une droite D_x issue de x. On note $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{P}^2$ et $\Delta \subset \mathcal{F}_2$, l'ensemble des drapeaux d'origine x dans X.

On remarque que pour tout réel λ non nul, les drapeaux (x, u) et $(x, \lambda u)$ sont les mêmes, on peut donc identifier Δ avec $X \times \mathbb{P}^1$ où $\mathbb{P}^1$ est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ où on a identifié les points u et $-u$. On note $\xi = (x, u)$ un point de Δ. Des sous-variétés spéciales de $\mathcal{F}_2$ s'introduisent par la suite : pour une droite D de $\mathbb{P}^2$ (respectivement un point p de $\mathbb{P}^2$), on note $\widetilde{D}$ (respectivement $\tilde{p}$) l'ensemble des drapeaux dont l'origine appartient à D (respectivement dont la droite passe par p). On a encore une décomposition de Δ en simplexes. On définit maintenant la distance d sur Δ utilisée dans la suite.

DÉFINITION 6.1. — *Pour* $\xi = (x, u)$, $\xi' = (x', u')$ *dans* Δ, *on pose* :

$$d(\xi, \xi') = \delta(x, x') + \partial(u, u').$$

δ *est la distance sur* X *précédente, elle est contractée par toutes les transformations* $a \mapsto a \cdot x$, *avec* a *dans* $\mathcal{A}_2$. *Ici,* $\partial(u, u')$ *désigne la valeur absolue du sinus de l'angle entre les vecteurs* u *et* u'.

PROPOSITION 6.2. — d *est une distance sur* Δ.

Démonstration. — Il suffit de montrer l'inégalité triangulaire pour ∂. En dimension 2, c'est élémentaire. □

Si on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire habituel $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$, alors pour calculer la distance ∂ on peut utiliser les formules suivantes :

- $\partial(u, u') = \left[1 - \langle u, u' \rangle^2\right]^{1/2} = \|u \wedge u'\|$ si u et u' sont dans $\mathbb{P}^1$,
- $\partial(u, u') = \left(1 - \dfrac{\langle u, u' \rangle^2}{\|u\|^2 \|u'\|^2}\right)^{1/2} = \dfrac{\|u \wedge u'\|}{\|u\| \cdot \|u'\|}$ si u et u' sont dans $\mathbb{R}^2$.

Comme T est localement projective, on étend naturellement T à Δ en regardant comment T transforme la droite ; on note $\widetilde{T}$ cette extension. Soit $\xi = (x, u)$. Le vecteur u est transformé par T en $T'_x u$ où T'_x désigne la matrice jacobienne de T au point x. On a de plus :

$$T'_x = \begin{bmatrix} -\frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2} & \frac{1}{x^{(1)}} \\ -\frac{1}{(x^{(1)})^2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(x^{(1)})^2} \begin{bmatrix} -x^{(2)} & x^{(1)} \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

donc par exemple dans $X \times (\mathbb{R}^2)^*$, on a :

$$\widetilde{T}\xi = \Big(\Big\{\frac{x^{(2)}}{x^{(1)}}\Big\}, \Big\{\frac{1}{x^{(1)}}\Big\}\,;\; u^{(1)}x^{(2)} - x^{(1)}u^{(2)}, u^{(1)}\Big).$$

On étend exactement de la même façon les transformations $x \mapsto a \cdot x$ de X à Δ. En utilisant les notations précédentes, on trouve par exemple, avec $\xi \in \Delta$:

$$\begin{aligned} a \cdot \xi &= (a \cdot x, a'_x u) \\ &= \Big(\frac{1}{x^{(2)} + a^{(2)}}, \frac{x^{(1)} + a^{(1)}}{x^{(2)} + a^{(2)}}\,;\; u^{(2)}, u^{(1)}(x^{(2)} + a^{(2)}) - u^{(2)}(x^{(1)} + a^{(1)})\Big). \end{aligned}$$

Si $\omega_n = (a_1, \ldots, a_n)$ est admissible, on note $\omega_n \cdot \xi$ le drapeau défini par récurrence par : $\omega_n \cdot \xi = \omega_{n-1} \cdot (a_n \cdot \xi)$.

On étend aussi l'opérateur markovien P à Δ. Pour une fonction f de Δ vers $\mathbb{C}$, on définit si $\xi = (x, u)$,

$$\widetilde{P}f(\xi) = \sum_{a \in \mathcal{A}_2} f(a \cdot \xi)\, p(x, a).$$

Remarque. — $\widetilde{P}$ préserve les fonctions analytiques sur Δ, continues sur Δ, *etc.* (*cf.* 2.3).

6.2. Construction de la mesure $\widetilde{\pi}$.

On suppose maintenant que λ_2 est nul. Alors, si x admet $(a_n)_{n \geq 1}$ pour développement par l'algorithme de Jacobi-Perron, le produit de matrice

$$S_n(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I & a_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I & a_n \end{bmatrix}$$

admet donc trois exposants distincts. Il en est de même pour le produit des matrices inverses

$$\begin{aligned} S_n^{-1}(x) &= \begin{bmatrix} -a_n & I \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{n-1} & I \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} -a_1 & I \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= B(T^n x) B(T^{n-1}x) \cdots B(x) \end{aligned}$$

où $B(x)$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} -a_1^{(1)} & 1 & 0 \\ -a_1^{(2)} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque que $S_n^{-1}(x) \cdot x = T^n x$.

On note $(\widehat{X}, \widehat{T}, \widehat{\pi})$ l'extension naturelle du système (X, T, π). Un point de $\widehat{X}$ de projection x dans X sera noté $\hat{x}$. On peut voir $\widehat{X}$ comme l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{A}_2$ qui vérifient pour tout k de $\mathbb{Z}$, $(a_n)_{n>k}$ est admissible. $\widehat{T}$ peut alors être vu comme le décalage à gauche des suites bilatères.

Le théorème ergodique multiplicatif [Os], [Ra] assure alors l'existence d'un ensemble $\widehat{B}$ de $\widehat{\mathcal{B}}$, $\widehat{\pi}(\widehat{B}) = 1$, $\widehat{T}^{-1}\widehat{B} = \widehat{B}$, sur lequel on a :

PROPOSITION 6.3. — *Pour tout $\hat{x}$ de $\widehat{B}$, il existe trois vecteurs linéairement indépendants $e_1^{\hat{x}}$, $e_2^{\hat{x}}$ et $e_3^{\hat{x}}$ tels que*

1) *les fonctions $\hat{x} \mapsto e_j^{\hat{x}}$, $1 \leq j \leq 3$, sont mesurables de $\widehat{X}$ vers $\mathbb{R}^3$;*

2) $B(\hat{x})\mathbb{R}e_i^{\hat{x}} = \mathbb{R}e_i^{\widehat{T}\hat{x}}$ $(i = 1, 2, 3)$;

3) *si $v = ae_1^{\hat{x}} + be_2^{\hat{x}} + ce_3^{\hat{x}}$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \big\| S_n^{-1}(\hat{x})v \big\| = \begin{cases} \lambda_1 & si \ \ c \neq 0, \\ 0 & si \ \ c = 0,\, b \neq 0, \\ -\lambda_1 & si \ \ c = b = 0,\, a \neq 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 6.4. — *On appelle drapeau contractant du cocycle $S_n^{-1}(\hat{x})$ le drapeau $\xi(x) = (e_1^{\hat{x}}, e_1^{\hat{x}} \wedge e_2^{\hat{x}})$ de $\mathbb{P}^2$ qui est associé pour π- presque tout x aux deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:*

$$V_1(x) = \Big\{ v \in \mathbb{R}^3 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|S_n^{-1}(\hat{x})v\| \leq -\lambda_1 \Big\} = \mathbb{R}e_1^{\hat{x}},$$

$$V_2(x) = \Big\{ v \in \mathbb{R}^3 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|S_n^{-1}(\hat{x})v\| \leq 0 \Big\} = \mathbb{R}e_1^{\hat{x}} \oplus \mathbb{R}e_2^{\hat{x}},$$

où $e_1^{\hat{x}}$ et $e_2^{\hat{x}}$ sont définis par la proposition 6.3.

PROPOSITION 6.5. — *Considérons le drapeau contractant ξ_x de $S_n^{-1}(\hat{x})$. Alors $\xi_x = \xi(x)$ est d'origine x. Soit μ une probabilité sur Δ, non concentrée sur un ensemble de la forme $\tilde{p} \cup \widetilde{D} \subset \Delta$ où p est un point de $\mathbb{P}^2$ et D une droite de $\mathbb{P}^2$. Alors pour π-presque tout x, ξ_x est un atome de chaque valeur d'adhérence de la suite de mesures $S_n(x) \cdot \mu$.*

Remarque. — Dans la proposition 6.5, l'énoncé le plus naturel est le suivant : *si μ ne charge pas de sous-ensemble de la forme $\tilde{p} \cup \widetilde{D} \subset \Delta$, alors $S_n(x) \cdot \mu$ converge vers δ_{ξ_x}.* Cet énoncé est plus simple à montrer mais ne suffirait pas ici.

Démonstration. — La condition 2) de la proposition 6.3 permet d'écrire $B(x) \cdot \xi_x = \xi_{Tx}$ et donc $\xi_{Tx} = \widetilde{T}\xi_x$. La définition de ξ_x et la proposition 6.3 montrent que ξ_x ne dépend de $\hat{x}$ que par l'intermédiaire de x, ce qui justifie la notation. Si $z(x)$ désigne l'origine de ξ_x, on a donc $z(x) = a_1 \cdot z(Tx)$, ceci implique $z(x) = x$. Donc ξ_x est d'origine x.

Si $S_n^{-1}(x) = K_n D_n K_n'$ est la décomposition de Cartan de la matrice $S_n^{-1}(x)$, on sait alors que

$$\left([S_n^{-1}(x)]^t S_n^{-1}(x)\right)^{1/2n} = K_n'^{\,-1} D_n^{1/2n} K_n'$$

converge π-presque partout vers une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\mathrm{e}^{\lambda_1}, 1, \mathrm{e}^{-\lambda_1}$. De plus $\lim_n K_n'^{\,-1} D_n^{1/2n} K_n' = K'^{-1} D K'$. La matrice D est diagonale, $D =$ diag $(\mathrm{e}^{\lambda_1}, 1, \mathrm{e}^{-\lambda_1})$, et la base $K'^{-1} e_i$ est la base orthonormée associée à la base $e_i^{\hat{x}}$.

En particulier, pour tout drapeau ξ de Δ, la suite $K_n'^{\,-1} \cdot \xi$ converge vers $K'^{-1} \cdot \xi$. On note $X_1 \subset X$, l'ensemble des points de X qui vérifient ces convergences. On fixe x dans X_1 et n_i une suite d'entiers strictement croissante telle que $K_{n_i}^{-1}$ converge vers K^{-1}. Soit p le point de $\mathbb{P}^2$ défini par Ke_1 et D la droite définie par (Ke_1, Ke_2). Puisque $S_n = K_n'^{\,-1} D_n^{-1} K_n^{-1}$, les convergences précédentes montrent que si $\xi \notin \tilde{p} \cup \widetilde{D}$, on a :

$$\lim_{i \to \infty} S_{n_i} \cdot \xi = \xi_x.$$

Soit maintenant une mesure non concentrée sur un ensemble de la forme $\tilde{p}' \cup \widetilde{D}'$. On appelle $\mu_{p,D}$ la restriction de μ au complémentaire de $\tilde{p} \cup \widetilde{D}$ et ε la masse de $\mu_{p,D}$ ($\varepsilon > 0$). Le lemme de la convergence dominée entraîne donc que $\lim_{i \to \infty} S_{n_i} \cdot \mu_{p,D} = \varepsilon \delta_{\xi_x}$. On en déduit donc que toute valeur d'adhérence de $S_n \cdot \mu$ est supérieure à $\varepsilon \delta_{\xi_x}$ où $\varepsilon > 0$ est une constante qui dépend de μ et de la sous-suite choisie. Ainsi ξ_x est un atome de chaque valeur d'adhérence de $S_n \cdot \mu$. $\square$

Sur Δ, on définit alors la mesure de probabilité $\widetilde{\pi}$ par

$$\widetilde{\pi}(f) = \int_X f(\xi_x)\,\mathrm{d}\pi(x).$$

On a alors :

PROPOSITION 6.6. — *La mesure $\widetilde{\pi}$ est invariante par $\widetilde{T}$. L'opérateur $\widetilde{P}$ est l'adjoint de $\widetilde{T}$ sur Δ relativement à la mesure $\widetilde{\pi}$. Le système dynamique $(\Delta, \mathcal{B}_\Delta, \widetilde{T}, \widetilde{\pi})$ est mélangeant.*

Démonstration. — On remarque que si f est dans $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$, alors la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(\xi_x)$ est dans $L^1_\pi(X)$. On a alors $\widetilde{\pi}(f) = \pi(\varphi)$. La proposition découle donc des faits suivants : $\widetilde{T}\xi_x = \xi_{Tx}$ et π est invariante par T, P est l'adjoint de T sur X relativement à π et le système $(X, \mathcal{B}, T, \pi)$ est mélangeant. □

En fait, on va montrer beaucoup plus :

THÉORÈME 6.7. — *La mesure $\widetilde{\pi}$ est l'unique mesure de probabilité sur Δ qui se projette sur la mesure π sur X et qui est invariante par $\widetilde{P}$.*

La démonstration du théorème 6.7 va se faire en plusieurs étapes.

Soit x fixé dans X ; on définit les suites $(a_i)_{i\geq 1}$ et $(x_i)_{i\geq 0}$ par

$$\begin{aligned}
x_0 &= x\\
x_0 &= a_1 \cdot x_1\\
x_1 &= a_2 \cdot x_2 \quad \text{ou} \quad x = a_1 a_2 \cdot x_2\\
&\ \vdots\\
x_{n-1} &= a_n \cdot x_n \quad \text{ou} \quad x = a_1 a_2 \dots a_n \cdot x_n.
\end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant :

LEMME 6.8. — *Soit $\omega_n = (a_1 \dots a_n)$ admissible. Alors la loi η_{ω_n} de x_n sachant ω_n a pour densité (par rapport à π) :*

$$\frac{\mathrm{d}\eta_{\omega_n}}{\mathrm{d}\pi}(x) = \frac{p(x, \omega_n)}{\int_X p(x, \omega_n)\,\mathrm{d}\pi(x)}.$$

Remarque. — Comme ω_n est admissible, la fonction $p(\,\cdot\,, \omega_n)$ est strictement positive sur au moins l'un des deux triangles W_e ou W_τ.

Démonstration. — Soit A un ensemble mesurable de $\mathcal{B}$, quitte à le découper en deux, on peut toujours supposer que A est entièrement contenu dans l'un des triangles W_σ, on a alors :

$$\pi\big[x_n \in A \mid \omega_n\big] = \frac{\pi[a_1 \dots a_n \cdot A]}{\pi[a_1 \dots a_n \cdot X]} = \frac{\pi[\omega_n \cdot A]}{\pi[\omega_n \cdot X]},$$

où $\omega_n \cdot A$ désigne l'image de A par la transformation $x \mapsto \omega_n \cdot x$. Pour calculer $\pi[\omega_n \cdot A]$, on va utiliser le fait que pour tout $n \geq 0$, P^n laisse la mesure π invariante. On écrit

$$P^n f(x) = \sum_{\theta_n} f(\theta_n \cdot x)\, p(x, \theta_n)$$

(on fait ici la somme sur tous les θ_n qui sont x-admissibles $\theta_n = (b_1 \dots b_n)$). On a donc :

$$\pi(\omega_n \cdot A) = \pi(1_{\omega_n \cdot A}) = \pi(P^n 1_{\omega_n \cdot A}) = \int_X \sum_{\theta_n} 1_{\omega_n \cdot A}(\theta_n \cdot x) p(x, \theta_n)\, \mathrm{d}\pi(x).$$

Comme l'image par θ_n de la partie de X sur laquelle on peut le faire agir est $K_{\theta_n} = K_{b_1} \cap T^{-1} K_{b_2} \cap \dots \cap T^{-(n-1)} K_{b_n}$ et comme $(K_{\theta_n})_{\theta_n}$ forme une partition de X, on a donc :

$$1_{\omega_n \cdot A}(\theta_n \cdot x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ \theta_n \neq \omega_n, \\ 1_A(x) & \text{si } \ \theta_n = \omega_n. \end{cases}$$

Donc on a $\pi[\omega_n \cdot A] = \int_X 1_A(x) p(x, \omega_n)\, \mathrm{d}\pi(x)$. De même on trouve que $\pi[\omega_n \cdot X] = \int_X p(x, \omega_n)\, \mathrm{d}\pi(x)$. Ce qui montre bien le résultat annoncé. □

On appelle $\mathcal{S}_{(f)}$ l'ensemble des suites admissibles de longueur finie. On note M l'adhérence de l'ensemble des mesures η_ω quand ω parcourt $\mathcal{S}_{(f)}$.

LEMME 6.9. — *Si η est dans M ; alors η admet une densité par rapport à π qui est une fonction analytique sur X. M est relativement compact pour la norme des variations des mesures.*

Démonstration. — Soit η une mesure de M, alors il existe une suite $\omega^{(n)}$ de points de $\mathcal{S}_{(f)}$ telle que pour toute fonction continue sur X, bornée, on ait $\eta(f) = \lim_{n \to \infty} \eta_{\omega^{(n)}}(f)$. La mesure $\eta_{\omega^{(n)}}$ a pour densité $\mathrm{C}^{\mathrm{te}} p(\,\cdot\,, \omega^{(n)})$ par rapport à π. Sur chacun des triangles W_e et W_τ, cette fonction est analytique bornée. Le théorème de Montel [Mo] montre donc l'existence d'une sous-suite de $\mathrm{d}\eta_{\omega^{(n)}} / \mathrm{d}\pi$ qui converge vers une fonction analytique bornée sur X et donc η admet bien une densité par rapport à π et cette densité est analytique sur X.

Si maintenant on prend une suite de points de M, cela revient à se donner une suite de fonctions analytiques bornées sur X. On peut encore appliquer le théorème de Montel et on en déduit l'existence d'une sous-suite convergente dans M et donc M est relativement compacte pour la norme des variations des mesures. □

On aura aussi besoin d'un autre résultat pour montrer le théorème 6.7.

On note $a^x = a_1$ et $a \cdot \pi$ la mesure image de π par la transformation $a : x \mapsto a \cdot x$, avec a dans $\mathcal{A}_2$. On a donc :

$$a \cdot \pi(f) = \int_X f(a \cdot x)\, \mathrm{d}\pi(x)\,;$$

éventuellement, si $a^{(1)} = a^{(2)}$, on intègre sur le triangle W_e.

LEMME 6.10. — *Soit a dans $\mathcal{A}_2$; pour π-presque tout x de X, si $p(x,a)$ n'est pas nul, on a :*

$$p(Tx,a)\frac{\mathrm{d}a \cdot \pi}{\mathrm{d}\pi}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } a \neq a^x, \\ 1 & \textit{si } a = a^x. \end{cases}$$

Démonstration. — Pour montrer ce résultat, on utilise le fait que π est une mesure invariante par P. Fixant une fonction f dans $L^1_\pi(X)$, on a :

$$\pi(f) = \pi(Pf) = \int_X \sum_a f(a \cdot x)\, p(x,a)\, \mathrm{d}\pi(x).$$

Mais pour tout x de X tel que $p(x,a)$ n'est pas nul, on a $Ta \cdot x = x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \pi(f) &= \int_X \sum_a f(a \cdot x)\, p(Ta \cdot x, a)\, \mathrm{d}\pi(x) \\ &= \sum_a \int_X f(a \cdot x)\, p(Ta \cdot x, a)\, \mathrm{d}\pi(x) \end{aligned}$$

éventuellement en prolongeant les fonctions $p(\,\cdot\,, a)$ par zéro là où elles ne sont pas définies. Dans chaque intégrale, on fait alors le changement de variable $x' = a \cdot x$. L'ensemble X est transformé en K_a. Donc,

$$\pi(f) = \sum_a \int_{K_a} f(x)\, p(Tx, a)\, \mathrm{d}(a \cdot \pi)(x).$$

Mais si x est dans K_a, alors $a^x = a$, donc

$$\begin{aligned}\pi(f) &= \sum_a \int_{K_a} f(x)\, p(Tx, a) \frac{\mathrm{d}a \cdot \pi}{\mathrm{d}\pi}(x)\, \mathrm{d}\pi(x) \\ &= \int_X f(x)\, p(Tx, a^x) \frac{\mathrm{d}a^x \cdot \pi}{\mathrm{d}\pi}(x)\, \mathrm{d}\pi(x),\end{aligned}$$

car $\bigcup_{a\in\mathcal{A}_2} K_a = X$. Ainsi, π-presque partout, on a :

$$p(Tx, a^x) \frac{\mathrm{d}a^x \cdot \pi}{\mathrm{d}\pi}(x) = 1.$$

Si maintenant, on fixe x et a de $\mathcal{A}_2$ tels que $a \neq a^x$, alors comme la mesure $a \cdot \pi$ a pour support K_a, qui est disjoint de K_{a^x}, on a :

$$\frac{\mathrm{d}a \cdot \pi}{\mathrm{d}\pi}(x) = 0,$$

ce qui montre le résultat annoncé. □

On passe maintenant aux drapeaux. On rappelle ici que $\widetilde{P}f$ est défini sur Δ par

$$\widetilde{P}f(\xi) = \sum_a f(a \cdot \xi)\, p(x, a, \sigma) \quad \text{si} \quad \xi = (x, u).$$

On cherche les mesures de probabilité qui sont définies sur Δ, qui sont invariantes par $\widetilde{P}$. Puisque π est l'unique mesure P-invariante, elles sont de la forme

$$\widetilde{\nu}(f) = \int_\Delta f(\xi)\nu_x(\mathrm{d}\xi)\pi(\mathrm{d}x)$$

où $(\nu_x)_{x\in X}$ est une famille de mesures sur $\{x\} \times \mathbb{P}^1$ qui est contenu dans Δ. On peut voir les mesures ν_x comme des désintégrations de ν et donc la fonction $x \mapsto \nu_x$ est mesurable. On peut donc aussi supposer que les ν_x sont des mesures de probabilité sur $\{x\} \times \mathbb{P}^1$. Comme la mesure ν_x ne charge que les sous-ensembles de Δ de la forme $\{x\} \times \mathbb{P}^1$, on utilisera le plus souvent la notation abusive suivante :

$$\widetilde{\nu}(f) = \int_\Delta f(x, u)\nu_x(\mathrm{d}u)\pi(\mathrm{d}x).$$

LEMME 6.11. — *Soit $\widetilde{\nu}$ une mesure sur Δ de la forme $\widetilde{\nu}(f) = \int_\Delta f(x, u)\nu_x(du)\pi(\mathrm{d}x)$. Alors $\widetilde{\nu}$ est invariante par $\widetilde{P}$ si et seulement si pour π-presque tout x de X, on a :*

$$a^x \cdot \nu_{Tx} = \nu_x.$$

La démonstration est classique, elle est laissée au lecteur.

LEMME 6.12. — *Soit p un point de $\mathbb{P}^2$, soit $\tilde{\nu}$ une mesure de probabilité sur Δ qui est invariante par $\widetilde{P}$. Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_2$ et W_σ la partie de X correspondante. Alors sur un ensemble non négligeable de W_σ, on a : $\nu_x(\tilde{p}) < 1$.*

Démonstration. — On appelle $\mathcal{A}_\sigma$ l'ensemble des a de $\mathcal{A}_2$ tels que K_a est contenu dans W_σ. $\mathcal{A}_\sigma$ est l'ensemble des a de $\mathcal{A}_2$ qui vérifient : si x appartient à W_σ alors $a \cdot x$ est encore dans W_σ, en particulier $p(x,a) > 0$.

Supposons que, pour π-presque tout x de W_σ, $\nu_x(\tilde{p}) = 1$. Montrons alors que, pour tout a de $\mathcal{A}_\sigma$, on a $a \cdot p = p$. Sinon, supposons $a \cdot p \neq p$ et considérons l'équation (valide π-presque partout) $a \cdot \nu_x = \nu_{a\cdot x}$ dès que $p(x,a) > 0$. On a donc pour tout a de $\mathcal{A}_\sigma$, π-presque partout sur W_σ,

$$\nu_{a\cdot x}(\tilde{p}) = a \cdot \nu_x(\tilde{p}) = \nu_x(a^{-1} \cdot \tilde{p}) = 1.$$

Cette condition signifie que, π-presque partout sur W_σ, ν_x est concentrée sur le drapeau d'origine x dont la droite passe par $a^{-1} \cdot p$. Comme on a aussi $\nu_x(\tilde{p}) = 1$, π-presque partout, on en déduit, si $a^{-1} \cdot p \neq p$, que les points x, p et $a^{-1} \cdot p$ sont alignés π-presque partout sur W_σ. Donc la restriction de la mesure π à W_σ est portée par la droite qui passe par les points p et $a^{-1} \cdot p$. Ceci est impossible car π est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi pour tout a de $\mathcal{A}_\sigma$, on a $a \cdot p = p$.

Si $p = (\alpha, \beta)$, le point $a \cdot p$ a pour coordonnées (α', β') avec $\alpha' = 1/(\beta + a^{(2)})$, $\beta = \alpha + a^{(1)}/(\beta + a^{(2)})$. L'équation $a \cdot p = p$ revient alors à $\alpha = 1/(\beta + a^{(2)})$ et $\beta = (\alpha + a^{(1)})\alpha$ donc à

$$\alpha^3 + a^{(1)}\alpha^2 + a^{(2)}\alpha = 1.$$

Mais si σ est l'identité e, $\mathcal{A}_e = \{a \in \mathcal{A}_2 : 0 < a^{(1)} \leq a^{(2)}\}$ et si σ est la transposition qui échange 1 et 2, $\mathcal{A}_\sigma = \{a \in \mathcal{A}_2 : a^{(1)} = 0,\ a^{(2)} > 0\}$. L'équation $a\cdot p = p$ revient donc dans le premier cas à $\alpha^3 + a^{(1)}\alpha^2 + a^{(2)}\alpha = 1$ pour tous les entiers tels que $0 < a^{(1)} \leq a^{(2)}$, dans le second cas à $\alpha^3 + a^{(2)}\alpha = 1$ pour tout entier $a^{(2)} > 0$. Il n'y a pas de solution pour ces deux familles d'équations. Il n'existe donc pas de point p de $\mathbb{P}^2$ tel que $\mathcal{A}_\sigma \cdot p = p$. Ainsi, on a $\nu_x(\tilde{p}) < 1$ sur une partie non négligeable de W_σ. □

On définit alors pour $\omega_n = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite admissible la mesure ν'_{ω_n} sur Δ par

$$\nu'_{\omega_n}(f) = \int_X \nu_x(f)\,\mathrm{d}\eta_{\omega_n}(x) = \frac{\int_\Delta f(x,u)\nu_x(\mathrm{d}u)\, p(x,\omega_n)\,\mathrm{d}\pi(x)}{\int_X p(x,\omega_n)\,\mathrm{d}\pi(x)}.$$

On a alors :

PROPOSITION 6.13. — *Soit x un point de X dont le développement par l'algorithme de Jacobi-Perron est $(a_n)_{n\geq 1}$ et soit ν une mesure de probabilité sur Δ invariante par $\widetilde{P}$. Alors la suite $a_1 \cdots a_n \cdot \nu'_{\omega_n} = \omega_n \cdot \nu'_{\omega_n}$ est une martingale qui converge π-presque partout vers ν_x. De plus pour π-presque tout x, ξ_x est un atome de ν_x.*

Démonstration. — Par définition de ν'_ω on a :

$$\omega_n \cdot \nu'_{\omega_n} = E_\pi\big[\nu_x \mid a_1, \dots, a_n\big]$$

Donc $\omega_n \cdot \nu'_{\omega_n}$ est une martingale qui converge presque partout vers ν_x au sens vague.

Pour montrer la deuxième assertion, on écrit :

$$\nu'_{\omega_n} = \int \nu_x \, \mathrm{d}\eta_{\omega_n}(x) \quad \text{où} \quad \eta_{\omega_n} = \frac{p(\,\cdot\,, \omega_n)\pi}{\int p(x, \omega_n)\, \mathrm{d}\pi(x)}.$$

Le lemme 6.9 permet d'extraire de η_{ω_n} une sous-suite convergente en variation totale $\lim_{n'\to\infty} \eta_{\omega_{n'}} = q(\cdot)\pi$. La fonction q est de plus une fonction analytique sur X ; c'est la limite de la suite de fonctions $p(\,\cdot\,, \omega_{n'})/\int p(x, \omega_{n'})\, \mathrm{d}\pi(x)$ et elle est non nulle sur au moins l'un des W_σ.

On a alors :

$$\nu' = \lim_{n'} \nu'_{\omega_{n'}} = \int \nu_x q(x)\, \mathrm{d}\pi(x).$$

On vérifie alors que pour tout point p de $\mathbb{P}^2$ fixé, toute droite D fixée, $\nu'(\tilde{p} \cup \widetilde{D}) < 1$. Comme $\pi(D) = 0$, alors $\nu'(\widetilde{D}) = 0$. Si on avait $\nu'(\tilde{p}) = 1$, on aurait π-presque partout sur au moins un des W_σ, $\nu_x(\tilde{p}) = 1$. D'après le lemme 6.12, c'est impossible.

La proposition 6.5 dit alors que ξ_x est un atome de n'importe quelle valeur d'adhérence de $a_1 \cdots a_n \cdot \nu'$. Comme la variation totale de la mesure $a_1 \cdots a_{n'} \cdot \nu'_{\omega_{n'}} - a_1 \cdots a_{n'} \cdot \nu'$ est égale à la variation totale de la mesure $\nu'_{\omega_{n'}} - \nu'$, on en déduit que

$$\nu_x = \lim_{n\to\infty} \omega_n \cdot \nu_{\omega_n} = \lim_{n'\to\infty} \omega_{n'} \cdot \nu_{\omega_{n'}} = \lim_{n'\to\infty} \omega_{n'} \cdot \nu' \geq \varepsilon\, \delta_{\xi_x}. \qquad \square$$

Remarque. — Si on pose $\varepsilon(x) = \sup\{\varepsilon > 0\,;\ \nu_x \geq \varepsilon\, \delta_x\}$, la fonction ε est mesurable.

Démonstration du théorème 6.7. — Soit $\tilde{\nu}$ une mesure de probabilité sur Δ, on suppose que $\tilde{\nu}$ est ergodique et invariante par $\widetilde{P}$. On va montrer que $\tilde{\nu}$ ne peut être que $\widetilde{\pi}$. La proposition 6.13 montre qu'il existe une fonction mesurable strictement positive telle que

$$\nu = \int \nu_x \, \mathrm{d}\pi(x) \geq \int_X \varepsilon(x) \delta_{\xi_x} \, \mathrm{d}\pi(x).$$

On a aussi :

$$\tilde{\nu} \wedge \widetilde{\pi} \geq \int_X (\varepsilon(x) \wedge 1) \delta_{\xi_x} \, \mathrm{d}\pi(x) > 0.$$

Mais, $\tilde{\nu} = \tilde{\nu} \wedge \widetilde{\pi} + (\tilde{\nu} - \tilde{\nu} \wedge \widetilde{\pi})$ et comme $\tilde{\nu}$ et $\widetilde{\pi}$ sont toutes les deux ergodiques, on a donc $\tilde{\nu} \wedge \widetilde{\pi} = 0$ ou bien $\tilde{\nu} \wedge \widetilde{\pi} = \tilde{\nu}$.

Le cas $\tilde{\nu} \wedge \widetilde{\pi} = 0$ est impossible à cause de l'inégalité précédente; le cas $\tilde{\nu} \wedge \widetilde{\pi} = \tilde{\nu}$ entraîne alors que $\tilde{\nu} = \widetilde{\pi}$.

La mesure $\widetilde{\pi}$ est donc l'unique mesure de probabilité sur Δ qui est ergodique et invariante par $\widetilde{P}$. □

Remarque. — On ignore si $\widetilde{\pi}(\tilde{p}) = 0$ pour tout point p de $\mathbb{P}^2$. Ceci entraîne des complications techniques dans la démonstration précédente.

7. Propriétés de contraction de $\widetilde{P}$ et équations cohomologiques.

On suppose toujours que λ_2 est nul. Soit ε dans $]0,1]$, on dit que la fonction f est *ε-höldérienne sur* Δ, si son coefficient de Hölder $[f]_\varepsilon$ est fini. La quantité $[f]_\varepsilon$ est définie par

$$[f]_\varepsilon = \sup \frac{|f(\xi) - f(\xi')|}{d(\xi, \xi')^\varepsilon},$$

où l'on prend le supremum sur les couples de drapeaux qui sont différents et qui ont leur origine dans le même triangle. On appelle $H_\varepsilon(\Delta)$ l'ensemble des fonctions höldériennes sur Δ. On définit aussi la norme de f par

$$\|f\| = \sup_\xi |f(\xi)|.$$

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant et d'en déduire la régularité des solutions g de l'équation $f = g - \widetilde{P}g$ où $f \in H_\varepsilon(\Delta)$ est donnée :

THÉORÈME 7.1. — *Il existe un entier $n > 0$, il existe ε dans $]0,1[$ et deux constantes $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta \geq 0$ tels que pour toute fonction f de $H_\varepsilon(\Delta)$ on ait*

$$[\widetilde{P}^n f]_\varepsilon \leq \alpha [f]_\varepsilon + \beta \|f\|.$$

Démonstration. — Elle est fondée sur un argument de [LeP] repris dans [GuR2]. On fixe ε dans $]0,1[$, n un entier, une fonction f de $H_\varepsilon(\Delta)$ et un couple de drapeaux différents $(\xi,\xi') = ((x,u),(x',u'))$ qui ont leurs origines dans le même triangle. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{|\widetilde{P}^n f(\xi) - \widetilde{P}^n f(\xi')|}{d(\xi,\xi')^\varepsilon} &\leq \sum_{\omega_n} \frac{|f(\omega_n\cdot\xi)p(x,\omega_n) - f(\omega_n\cdot\xi')p(x',\omega_n)|}{d(\xi,\xi')^\varepsilon} \\ &\leq [f]_\varepsilon \sum_{\omega_n} \Big(\frac{d(\omega_n\cdot\xi,\omega_n\cdot\xi')}{d(\xi,\xi')}\Big)^\varepsilon p(x,\omega_n) \\ &\qquad + \|f\| \sum_{\omega_n} \frac{|p(x,\omega_n) - p(x',\omega_n)|}{d(\xi,\xi')^\varepsilon}.\end{aligned}$$

Le deuxième terme ne va pas poser de problème; en effet, les fonctions $p(\,\cdot\,,\omega_n)$ sont analytiques sur X, elles ne dépendent pas de la direction choisie et on a donc si x et x' sont distincts :

$$\begin{aligned}\frac{|p(x,\omega_n) - p(x',\omega_n)|}{d(\xi,\xi')^\varepsilon} &\leq \frac{|p(x,\omega_n) - p(x',\omega_n)|}{\delta(x,x')^\varepsilon} \\ &\leq C\frac{|\varphi(x,\omega_n) - \varphi(x',\omega_n)|}{\delta(x,x')^\varepsilon} \\ &\qquad + \frac{\varphi(x,\omega_n)}{\delta(x,x')^\varepsilon}\Big|\frac{h(\omega_n\cdot x)}{h(x)} - \frac{h(\omega_n\cdot x')}{h(x')}\Big| \\ &\leq C\frac{|\varphi(x,\omega_n) - \varphi(x',\omega_n)|}{\delta(x,x')^\varepsilon} \\ &\qquad + \frac{1}{c}\varphi(x,\omega_n)\delta(x,x')^{1-\varepsilon}[h](1+\rho^n),\end{aligned}$$

où $[h]$ est le coefficient de Lipschitz de la fonction analytique h, c est une constante non nulle qui minore h, C est une constante positive qui majore le rapport $h(x)/h(y)$ sur X^2. Les fonctions $\varphi(\,\cdot\,,\omega_n)$ sont les poids de l'opérateur Φ^n, $\varphi(\,\cdot\,,\omega_n)$ est dérivable sur X et on a :

$$[\varphi(\,\cdot\,,\omega_n)] = \sup_{x\neq x'} \frac{|\varphi(x,\omega_n) - \varphi(x',\omega_n)|}{\delta(x,x')} \leq \frac{c'}{(a_1^{(2)}\cdots a_n^{(2)})^4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{\omega_n} \frac{|\varphi(x,\omega_n) - \varphi(x',\omega_n)|}{d(\xi,\xi')^\varepsilon} &\leq \sup_{x\neq x'} \delta(x,x')^{1-\varepsilon} \sum_{\omega_n} \frac{c'}{(a_1^{(2)}\cdots a_n^{(2)})^4} \\ &\leq C_\varepsilon \Big(\sum_{a\geq 1} \frac{(a+1)}{a^4}\Big)^n.\end{aligned}$$

Cette dernière série est convergente. Comme la série $\sum_{\omega_n} \varphi(x,\omega_n)$ converge aussi, on a donc bien montré l'existence d'une constante finie $\beta \geq 0$, et ceci quelles que soient les valeurs de ε dans $]0,1[$ et de n.

On estime maintenant le premier terme $\sum_{\omega_n} \big(\frac{d(\omega_n\cdot\xi,\omega_n\cdot\xi')}{d(\xi,\xi')}\big)^\varepsilon p(x,\omega_n)$. On a :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d(\omega_n\cdot\xi,\omega_n\cdot\xi')}{d(\xi,\xi')}\Big)^\varepsilon &= \Big(\frac{\delta(\omega_n\cdot x,\omega_n\cdot x') + \partial((\omega_n)'_x u,(\omega_n)'_{x'}u')}{\delta(x,x')+\partial(u,u')}\Big)^\varepsilon \\ &\leq \Big(\frac{\delta(\omega_n\cdot x,\omega_n\cdot x')}{\delta(x,x')} + \frac{\partial((\omega_n)'_x u,(\omega_n)'_{x'}u')}{\partial(u,u')}\Big)^\varepsilon\end{aligned}$$

où éventuellement l'un des deux termes n'existe pas et vaut 0,

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d(\omega_n\cdot\xi,\omega_n\cdot\xi')}{d(\xi,\xi')}\Big)^\varepsilon &\leq \Big(\frac{\delta(\omega_n\cdot x,\omega_n\cdot x')}{\delta(x,x')}\Big)^\varepsilon + \Big(\frac{\partial((\omega_n)'_x u,(\omega_n)'_{x'}u')}{\partial(u,u')}\Big)^\varepsilon \\ &\leq \rho^{n\varepsilon} + \Big(\frac{\partial((\omega_n)'_x u,(\omega_n)'_{x'}u')}{\partial(u,u')}\Big)^\varepsilon\end{aligned}$$

car δ est contractée par toutes les transformations a de $\mathcal{A}_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\sum_{\omega_n} \Big(\frac{d(\omega_n\cdot\xi,\omega_n\cdot\xi')}{d(\xi,\xi')}\Big)^\varepsilon p(x,\omega_n) \\ &\qquad\leq \rho^{n\varepsilon} + \sum_{\omega_n} \Big(\frac{\partial((\omega_n)'_x u,(\omega_n)'_{x'}u')}{\partial(u,u')}\Big)^\varepsilon p(x,\omega_n).\end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème 7.1 il reste à montrer que l'on peut rendre

$$\rho^{n\varepsilon} + \sup_{\sigma\in\mathfrak{S}_2} \sup_{(\xi,\xi')\in M} \sum_{\omega_n} \Big(\frac{\partial((\omega_n)'_x u,(\omega_n)'_{x'}u')}{\partial(u,u')}\Big)^\varepsilon p(x,\omega_n)$$

strictement plus petit que 1 si on choisit bien ε dans $]0,1[$ et n dans $\mathbb{N}^*$. On utilise ici les propriétés des exposants de Lyapunov associés à T. On appelle ici M l'ensemble des couples de drapeaux $(\xi,\xi') = ((x,u),(x',u'))$ qui ont leurs origines dans le même triangle et qui vérifient $u \neq u'$.

On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des applications projectives de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. On définit l'application θ de $\mathcal{P}_2 \times M$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$\theta\big(a,(\xi,\xi')\big) = \frac{\partial(a'_x u, a'_{x'} u')}{\partial(u,u')}.$$

Alors θ est un cocycle multiplicatif. En effet on a $(ab)'_x = a'_{b\cdot x} b'_x$ et $b\cdot\xi = (b\cdot x, b'_x u)$, $(ab)'_x u = a'_{b\cdot x}(b'_x u)$ ce qui entraîne

$$\theta\big(ab,(\xi,\xi')\big) = \theta\big(a,(b\cdot\xi, b\cdot\xi')\big)\theta\big(a,(\xi,\xi')\big).$$

On compactifie M en lui ajoutant M' où

$$M' = \big\{(x,V) : x \in x,\ V \in M_{1,2}\big\}.$$

$M_{1,2}$ est l'ensemble des drapeaux de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des couples $V = (V_1, V_2)$ d'espaces vectoriels vérifiant $V_1 \subset V_2$, $\dim V_1 = 1$ et $\dim V_2 = 2$. Ici, comme $V_2 = \mathbb{R}^2$, on peut identifier M' à Δ. On note :

$$\overline{M} = M \cup M'.$$

On munit alors $\overline{M}$ de la topologie suivante : M est un ouvert de $\overline{M}$ et (ξ_n, ξ'_n) converge vers (x,V) si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \delta(x_n, x'_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \partial(u_n, u'_n) = 0$, c'est-à-dire x_n et x'_n convergent vers x, $V_n^{(1)} = \mathbb{R}u_n$ converge vers V_1 et $V_n^{(2)} = \mathbb{R}u_n \oplus \mathbb{R}u'_n$ converge vers $V_2 = \mathbb{R}^2$. On appelle alors u un vecteur unitaire qui engendre V_1, $u \wedge u'$ un bivecteur unitaire qui engendre V_2.

On peut alors prolonger par continuité la fonction $\theta(a,(\xi,\xi'))$ à $\overline{M}$, en posant :

$$\theta\big(a,(x,V)\big) = \frac{\|a'_x u \wedge a'_x u'\|}{\|a'_x u\|^2} = \frac{|\det(a'_x)|}{\|a'_x u\|^2}.$$

Ce qu'on écrit :

$$\theta(a,\xi) = \frac{|\det(a'_x)|}{\|a'_x u\|^2} \quad \text{avec} \quad \|u\| = 1$$

car on peut identifier M' avec Δ.

La fonction $(\xi,\xi') \mapsto \sum_{\omega_n} \theta(\omega_n, (\xi,\xi'))^\varepsilon p(x,\omega_n)$ de M vers $\mathbb{R}$ se prolonge alors par continuité au compact $\overline{M}$ et il existe donc ξ_n dans $\overline{M}$ tel que

$$\sup_{(\xi,\xi')\in M} \sum_{\omega_n} \theta\big(\omega_n,(\xi,\xi')\big)^\varepsilon p(x,\omega_n) = \sum_{\omega_n} \theta(\omega_n,\xi_n)^\varepsilon p(x_n,\omega_n).$$

Pour tout réel x, on a $e^x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{|x|}$; on a donc pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n,\varepsilon} &= \sum_{\omega_n} \theta(\omega_n, \xi_n)^{\varepsilon} p(x_n, \omega_n) \\ &\leq 1 + \varepsilon \sum_{\omega_n} \log \theta(\omega_n, \xi_n) p(x_n, \omega_n) \\ &\qquad\qquad + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{\omega_n} [\log \theta(\omega_n, \xi_n)]^2 e^{\varepsilon |\log \theta(\omega_n, \xi_n)|} p(x_n, \omega_n). \end{aligned}$$

LEMME 7.2. — *La série*

$$\sum_{\omega_n} \big[\log \theta(\omega_n, \xi)\big]^2 e^{\varepsilon |\log \theta(\omega_n, \xi)|} p(x, \omega_n)$$

converge uniformément sur $\overline{M}$.

Démonstration. — On a :

$$\theta(\omega_n, \xi) = \frac{|\det((\omega_n)'_x)|}{\|(\omega_n)'_x u\|^2}.$$

Comme $(\omega_n)'_x$ est inversible, on a :

$$\big\|(\omega_n)'_x u\big\| \geq \frac{\|u\|}{\|((\omega_n)'_x)^{-1}\|}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\theta\big(\omega_n, (\xi, \xi')\big) \leq \sup_x \big|\det((\omega_n)'_x)\big| \cdot \big\|((\omega_n)'_x)^{-1}\big\|^2.$$

On rappelle que $\omega_n \cdot x = a_1 \cdots a_n \cdot x = S_n \cdot x$; comme $\det S_n = 1$, on a :

$$\big|\det((\omega_n)'_x)\big| = \frac{1}{(q_{n-2}x^{(1)} + q_{n-1}x^{(2)} + q_n)^3} \leq \frac{1}{q_n^3}.$$

Si on note (q_{n-2}, q_{n-1}, q_n) la dernière ligne de la matrice S_n, on a aussi :

$$\big\|((\omega_n)'_x)^{-1}\big\| \leq 2\|\Lambda^2 S_n\| \cdot \|S_n\| \leq 4\|S_n\|^2,$$

d'après l'inégalité du théorème 5.1. On a donc $\theta(\omega_n, \xi) \leq C q_n$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_n} \big[\log \theta(\omega_n, \xi)\big]^2 e^{\varepsilon |\log \theta(\omega_n, \xi)|} p(x, \omega_n) &\leq C'_\varepsilon \sum_{\omega_n} \big[\log(C q_n)\big]^2 q_n^{\varepsilon} p(x, \omega_n) \\ &\leq C_\varepsilon \text{»} \sum_{q_n} \frac{[\log(C q_n)]^2}{q_n^{3-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Cette dernière série converge dès que $3 - \varepsilon > 2$ donc dès que $\varepsilon < 1$. □

LEMME 7.3. — *Il existe un réel γ, $-\lambda_1 \leq \gamma < 0$, tel qu'à partir d'un certain rang, on ait :*

$$\sum_{\omega_n} \log \theta(\omega_n, \xi_n)\, p(x_n, \omega_n, \sigma_n) \leq n\gamma < 0.$$

Démonstration. — En utilisant la propriété de cocycle de θ, on montre le résultat suivant :

LEMME 7.4. — *Pour $\xi = (x, u)$ dans Δ, on définit f par*

$$f(\xi) = \sum_a \log \theta(a, \xi)\, p(x, a).$$

On a alors :

$$\sum_{\omega_n} \log \theta(\omega_n, \xi_n)\, p(x_n, \omega_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}^k f(\xi_n).$$

Démonstration. — On note $\omega_n = a_1 a_2 \cdots a_n$. La propriété de cocycle de θ entraîne que

$$\log \theta(\omega_n, \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} \log \theta(a_k, a_{k+1} \cdots a_n \cdot \xi_n).$$

On a aussi pour tout k :

$$p(x_n, \omega_n) = p(a_2 \cdots a_n \cdot x_n, a_1) \cdots p(a_{k+1} \cdots a_n \cdot x_n, a_k)\, p(x_n, (a_{k+1} \cdots a_n)).$$

On a alors :

$$\sum_{\omega_n} \log \theta(\omega_n, \xi_n) p(x_n, \omega_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega'_{n-k}} \Big(\sum_{a_k} \log \theta(a_k, \omega'_{n-k} \cdot \xi_n) \times p(\omega'_{n-k} \cdot x_n, a_k) \Big) p(x_n, \omega'_{n-k})$$

avec $\omega'_{n-k} = (a_{k+1} \cdots a_n)$, car

$$\sum_{a_1} \cdots \sum_{a_{k-1}} p(a_2 \cdots a_n \cdot x_n, a_1) \cdots p(a_k \cdots a_n \cdot x_n, a_{k-1}) = 1.$$

D'où

$$\sum_{\omega_n} \log \theta(\omega_n, \xi_n)\, p(x_n, \omega_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega'_{n-k}} f(\omega'_{n-k} \cdot \xi_n)\, p(x_n, \omega'_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}^k f(\xi_n).$$

□

Fin de la démonstration du lemme 7.3. — La fonction f étant continue sur Δ, le lemme 4.1 entraîne que $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{P}^k f(\xi)$ converge uniformément vers $\widetilde{\pi}(f)$. De plus,

$$\widetilde{\pi}(f) = \int_X f(\xi_x)\,\mathrm{d}\pi(x) = \int_X \sum_a \log\theta(a,\xi_x)\,p(x,a)\,\mathrm{d}\pi(x).$$

Notant g la fonction $g(\xi) = \log\theta(a^x, \widetilde{T}\xi)$ si $\xi = (x,u)$, on a $\widetilde{P}g(\xi) = f(\xi)$ et

$$\widetilde{\pi}(f) = \int_X \widetilde{P}g(\xi_x)\,\mathrm{d}\pi(x) = \int_X g(\xi_x)\,\mathrm{d}\pi(x) = \lambda_3 - \lambda_2 = -\lambda_1 < 0$$

car $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 > 0$. On en déduit alors qu'il existe un réel γ, $-\lambda_1 < \gamma < 0$ tel qu'à partir d'un certain rang, on ait :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{P}^k f(\xi_n) \le n\gamma < 0.$$

Ceci termine la démonstration du lemme 7.3 $\square$

On peut alors finir la démonstration du théorème 7.1. On fixe un entier n assez grand pour que l'inégalité du lemme 7.3 soit vérifiée et on choisit alors ε dans $]0,1[$ assez petit pour que

1) $-1 \le n\gamma\varepsilon < 0$,

2) le terme $\rho^{n\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{\omega_n}[\log\theta(\omega_n,(\xi,\xi'))]^2\,\mathrm{e}^{\varepsilon|\log\theta(\omega_n,(\xi,\xi'))|}p(x,\omega_n)$ soit négligeable devant $n\gamma\varepsilon$. On en déduit que

$$\sup\sum_{\omega_n}\Big(\frac{d(\omega_n\cdot\xi,\omega_n\cdot\xi')}{d(\xi,\xi')}\Big)^{\varepsilon} p(x,\omega_n) \le \alpha < 1,$$

d'où le théorème 7.1. $\square$

On fixe ainsi ε et n dans toute la suite. On peut alors montrer que :

THÉORÈME 7.5. — *Si f est une fonction de Δ vers $\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{\pi}(f)$ est nul et $\widetilde{P}f$ est dans $H_\varepsilon(\Delta)$, alors il existe une fonction g de $H_\varepsilon(\Delta)$ qui est solution de l'équation*

$$\widetilde{P}f = \widetilde{P}g - g.$$

De plus si on impose que $\widetilde{\pi}(g)$ soit nul, alors cette solution est unique.

Démonstration. — Comme pour tout f de $H_\varepsilon(\Delta)$, on a :

$$[\widetilde{P}^n f]_\varepsilon \leq \alpha[f]_\varepsilon + \beta\|f\|,$$

le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [ITM] donne la décomposition spectrale de l'opérateur $\widetilde{P}$ dans $H_\varepsilon(\Delta)$: il a un nombre fini de valeurs propres de module 1 qui sont de multiplicité finie et le reste du spectre est à l'intérieur d'un disque centré en 0 et de rayon $0 < \rho < 1$. On peut écrire :

$$\widetilde{P}f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \widetilde{P}_i f + \widetilde{R}f$$

où les λ_i sont les valeurs propres de module 1, les $\widetilde{P}_i$ sont les projections sur les espaces propres qui sont de dimension finie et $\widetilde{R}$ est un opérateur linéaire de $H_\varepsilon(\Delta)$ qui a pour rayon spectral r strictement inférieur à 1. Comme le système dynamique $(\Delta, \mathcal{B}_\Delta, \widetilde{T}, \widetilde{\pi})$ est mélangeant et que $\widetilde{P}$ est l'adjoint de $\widetilde{T}$ relativement à $\widetilde{\pi}$, on en déduit que 1 est l'unique valeur propre de module 1 de $\widetilde{P}$ et qu'elle est simple. De plus, comme $\widetilde{P}1 = 1$, on en déduit que pour tout entier $n > 1$ pour toute fonction f telle que $\widetilde{P}f$ est dans $H_\varepsilon(\Delta)$, on peut écrire :

$$\widetilde{P}^n f = \widetilde{\pi}(f) + \widetilde{R}^n f \quad \text{avec} \quad \|\widetilde{R}^n f\| \leq r^n \|f\|.$$

Ainsi si g et h sont deux solutions de $\widetilde{P}f = \widetilde{P}g - g$ et si $\widetilde{\pi}(g) = \widetilde{\pi}(h) = 0$, alors on a :

$$\widetilde{P}(g-h) = (g-h)$$

donc $g - h$ est constant (car dans $H_\varepsilon(\Delta)$), donc nul.

Soit f une fonction telle que $\widetilde{P}f$ est dans $H_\varepsilon(\Delta)$ et d'intégrale nulle; on peut maintenant exhiber une solution de l'équation :

$$\widetilde{P}f = \widetilde{P}g - g.$$

En effet, la solution ne peut être que $g = -\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{P}^k f$; on va montrer que g est dans $H_\varepsilon(\Delta)$ ce qui terminera la démonstration du théorème 7.5.

Comme $\widetilde{\pi}(f) = 0$, on a $\widetilde{P}^n f = \widetilde{R}^n f$ donc,

$$\|\widetilde{P}^n f\| \leq r^n \|f\|.$$

Soit k un entier, on l'écrit $k = k_1 n + n_1$ avec $1 \leq n_1 \leq n$; on a alors :

$$\begin{aligned}
[\widetilde{P}^k f]_\varepsilon &= [(\widetilde{P}^n)^{k_1}(\widetilde{P}^{n_1} f)]_\varepsilon \\
&\leq \alpha\big[(\widetilde{P}^n)^{k_1-1}(\widetilde{P}^{n_1} f)\big]_\varepsilon + \beta r^{n(k_1-1)+n_1}\|f\| \\
&\leq \cdots \\
&\leq \alpha^{k_1}[\widetilde{P}^{n_1} f]_\varepsilon + \beta(r^{n(k_1-1)+n_1} + \alpha r^{n(k_1-2)+n_1} + \cdots + \alpha^{k_1-1} r^{n_1})\|f\|.
\end{aligned}$$

Quitte à changer de r, on peut toujours supposer que $\alpha < r^n$, alors on obtient :

$$[\widetilde{P}^k f]_\varepsilon \leq \alpha^{k_1}[\widetilde{P}^{n_1} f]_\varepsilon + \frac{\beta r^k}{r^n - \alpha}\|f\|.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\Big[\sum_{k=1}^{N} \widetilde{P}^k f\Big]_\varepsilon &\leq \sum_{k=1}^{N}[\widetilde{P}^k f]_\varepsilon \\
&\leq \Big(\sum_{k_1=0}^{N} \alpha^{k_1}\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{n}[\widetilde{P}^\ell f]_\varepsilon\Big) + \frac{\beta\|f\|}{r^n - \alpha}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \\
&\leq \frac{1}{1-\alpha}\Big(\sum_{\ell=1}^{n}[\widetilde{P}^\ell f]_\varepsilon\Big) + \frac{\beta\|f\|}{(r^n - \alpha)(1-r)}
\end{aligned}$$

qui est une constante indépendante de N. Ceci montre que la fonction $g = -\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{P}^k f$ est bien dans $H_\varepsilon(\Delta)$ et termine la démonstration du théorème 7.5. □

On est maintenant en mesure de compléter le lemme 4.2.

COROLLAIRE 7.6. — *Soit f une fonction de $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$ à valeurs réelles; on suppose que*

1) *$\widetilde{\pi}(f)$ est nul,*

2) *$\widetilde{P}f$ est dans $H_\varepsilon(\Delta)$,*

3) *il existe une constante $c \geq 0$ telle que pour tout entier $n > 0$, pour $\widetilde{\pi}$-presque tout ξ on ait $\sum_{k=0}^{n-1} f \circ \widetilde{T}^k(\xi) \leq c$.*

Alors il existe une unique fonction g de $H_\varepsilon(\Delta)$ telle que

$$\widetilde{\pi}(g) = 0, \quad f = g - g \circ \widetilde{T} \quad \widetilde{\pi}\text{-presque partout},$$
$$\widetilde{P}f = \widetilde{P}g - g \quad \text{partout}.$$

Démonstration. — Le lemme 4.2 entraîne l'existence d'une fonction g de $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$ telle que

$$\widetilde{\pi}(g) = 0 \quad \text{et} \quad f = g - g \circ \widetilde{T} \quad \widetilde{\pi}\text{-presque partout.}$$

Comme g est dans $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$, on a :

$$\widetilde{P}f = \widetilde{P}(g - g \circ \widetilde{T}) = \widetilde{P}g - \widetilde{P}(g \circ \widetilde{T}) = \widetilde{P}g - g \quad \widetilde{\pi}\text{-presque partout.}$$

Mais le théorème 7.5 dit que $g_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{P}^k f$ est l'unique solution de :

$$\begin{cases} g_1 \text{ est dans } H_\varepsilon(\Delta), \quad \widetilde{\pi}(g_1) = 0, \\ \widetilde{P}f = \widetilde{P}g_1 - g_1 \quad \text{partout.} \end{cases}$$

On en déduit que g_1 est égale $\widetilde{\pi}$-presque partout à la solution g précédente. Ainsi g_1 vérifie :

$$\begin{cases} g_1 \text{ est dans } H_\varepsilon(\Delta), \quad \widetilde{\pi}(g_1) = 0, \\ f = g_1 - g_1 \circ \widetilde{T} \quad \widetilde{\pi}\text{-presque partout,} \\ \widetilde{P}f = \widetilde{P}g_1 - g_1 \quad \text{partout.} \end{cases} \qquad \square$$

8. Fin de la démonstration de $\lambda_2 < 0$.

On suppose toujours que λ_2 est nul. On définit maintenant le cocycle α sur $\mathrm{Gl}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}^2$ par

$$\alpha(g, \xi) = \frac{\|g'_x u\|^3}{|\det g'_x|} \quad \text{si} \quad \xi = (x, u).$$

Alors, on a :

LEMME 8.1. — *Pour $\widetilde{\pi}$-presque tout $\xi = (x, u)$ de Δ, si $\omega_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ représente les n premiers éléments du développement de x par l'algorithme de Jacobi-Perron, on a :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3n} \log\bigl[\alpha(\omega_n, \widetilde{T}^n \xi)\bigr] = \lambda_2 = 0.$$

Démonstration. — Comme $\omega_n \cdot x = S_n \cdot x$ et $\det S_n = 1$, on a :

$$\left|\det((\omega_n)'_x)\right| = \frac{1}{(q_{n-2}x^{(1)} + q_{n-1}x^{(2)} + q_n)^3}.$$

La mesure $\widetilde{\pi}$ ne charge que les drapeaux de la forme $\xi_x = (e_1^{\hat{x}}, e_1^{\hat{x}} \wedge e_2^{\hat{x}})$. On a :

$$\alpha(\omega_n, \widetilde{T}^n \xi_x) = \frac{\|(\omega_n)'_{T^n x} e_1^{\hat{x}} \wedge e_2^{\hat{x}}\|}{|\det((\omega_n)'_{T^n x})|}.$$

En utilisant la proposition 6.3, on obtient le résultat. □

On définit maintenant la fonction f sur

$$\Delta^* = \Delta \setminus \{\xi = (x, u) : x^{(1)} = 0\}$$

par $f(\xi) = \frac{1}{3}\log \alpha(a^x, \widetilde{T}\xi)$, où a^x désigne le premier terme du développement de x dans l'algorithme de Jacobi-Perron. On remarque déjà que :

LEMME 8.2. — *La fonction f est continue sur Δ^*, elle est dans $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$.*

Démonstration. — Comme $(2/\pi)|\theta| \leq |\sin\theta| \leq |\theta|$, il suffit de montrer que la fonction $(x,\theta) \mapsto f(x; \cos\theta, \sin\theta)$ est continue sur $]0,1] \times [0,1] \times [-\frac{1}{2}-\pi, \frac{1}{2}\pi]$. C'est bien le cas car si $\xi = (x; \cos\theta, \sin\theta)$ on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{T}\xi &= (Tx, u') \\ &= \Big(\frac{x^{(2)}}{x^{(1)}} - (a^x)^{(1)}, \frac{1}{x^{(1)}} - (a^x)^{(2)}; \cos\theta x^{(2)} - \sin\theta x^{(1)}, \cos\theta\Big).\end{aligned}$$

Alors,

$$(a^x)'_{Tx} = \frac{1}{(1/x^{(1)} - (a^x)^{(1)} + (a^x)^{(1)})^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{x^{(1)}} & \frac{x^{(2)}}{x^{(1)}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(x^{(1)})^2 \\ x^{(1)} & -x^{(1)}x^{(2)}\end{bmatrix}.$$

On a donc :

$$f(\xi) = \log x^{(1)} - \frac{1}{2}\log\big[(\cos\theta x^{(2)} - \sin\theta x^{(1)})^2 + \cos^2\theta\big].$$

Cette formule montre bien que f est une fonction höldérienne sur les compacts de Δ^*. Une étude de la fonction $\theta \mapsto f(\xi)$ sur $[-\frac{1}{2}-\pi, \frac{1}{2}\pi]$ montre que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\log\Big[\frac{2(x^{(1)})^2}{1 + (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + \sqrt{D}}\Big] \\ &\qquad\qquad \leq f(\xi) \leq \frac{1}{2}\log\Big[\frac{1 + (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + \sqrt{D}}{2}\Big]\end{aligned}$$

avec $D = (2x^{(1)}x^{(2)})^2 + (1 - (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2)^2$. Ainsi on a :

$$|f(\xi)| \leq \max\Big\{\Big|\frac{1}{2}\log[\frac{2x^{(1)}}{1+(x^{(1)})^2+(x^{(2)})^2+\sqrt{D}}]\Big|,\\ \Big|\frac{1}{2}\log[\frac{1+(x^{(1)})^2+(x^{(2)})^2+\sqrt{D}}{2}]\Big|\Big\}.$$

Cette fonction est bien intégrable sur X. Donc f est dans $L^1_{\widetilde{\pi}}(\Delta)$. □

On a aussi le :

LEMME 8.3. — *On a* $\widetilde{\pi}(f) = \lambda_2 = 0$.

Démonstration. — Le théorème ergodique de Birkhoff entraîne que pour $\widetilde{\pi}$-presque tout x de Δ, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ\widetilde{T}^k(\xi) = \widetilde{\pi}(f).$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ\widetilde{T}^k(\xi) &= \frac{1}{3n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\alpha(a^{T^k x},\widetilde{T}^{k+1}\xi)\\ &= \frac{1}{3n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\alpha(a^{T^k x}, a^{T^k x}a^{T^{k+1}x}\cdots a^{T^{n-1}x}\widetilde{T}^n\xi)\\ &= \frac{1}{3n}\log\alpha(a^x a^{Tx}\cdots a^{T^{n-1}x},\widetilde{T}^n\xi) = \frac{1}{3n}\log\alpha(\omega_n,\widetilde{T}^n\xi),\end{aligned}$$

où ω_n désigne les n premiers termes du développement de x par l'algorithme de Jacobi-Perron. Le lemme 8.1 permet alors de conclure. □

LEMME 8.4. — *La fonction* $\widetilde{P}f$ *est dans* $H_\varepsilon(\Delta)$.

Démonstration. — Si $\xi = (x, u)$, on a :

$$\widetilde{P}f = \sum_a f(a\cdot\xi)p(x,a) = \frac{1}{3}\sum_a \log\alpha(a,\xi)p(x,a).$$

Si on prend $u = (\cos\theta, \sin\theta)$, θ dans $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, alors

$$\frac{1}{3}\log\alpha(a,\xi) = \frac{1}{3}\log\big[\sin^2\theta + (\cos\theta(x^{(2)}+a^{(2)}) - \sin\theta(x^{(1)}+a^{(1)}))^2\big].$$

Pour tout a, cette fonction est dans $H_\varepsilon(\Delta)$ et on a :

$$\frac{1}{3}\log \alpha(a,\xi) \leq \frac{1}{2}\log\bigl(1+(2a^{(2)})^2\bigr) \leq \log\bigl(1+2a^{(2)}\bigr).$$

Comme la série $\sum_a \log(1+2a^{(2)}) \sup_x p(x,a)$ est convergente, on en déduit que $\widetilde{P}f$ est aussi dans $H_\varepsilon(\Delta)$. □

On est alors en mesure de montrer que λ_2 ne peut pas être nul. On vient de vérifier les hypothèses du corollaire 7.6, il existe donc une fonction g de $H_\varepsilon(\Delta)$ telle que

$$\widetilde{\pi}(g) = 0 \quad \text{et} \quad f = g - g \circ \widetilde{T} \quad \widetilde{\pi}\text{-presque partout.}$$

On fixe un a de $\mathcal{A}_2$, on se place maintenant sur $\Delta_a = \{\xi = (x,u) : x \in K_a\}$. Sur cet ensemble on a :

$$f(\xi) = \frac{1}{3}\log \alpha(a, \widetilde{T}\xi).$$

Donc f est une fonction continue sur Δ_a, on a donc pour tout ξ de Δ_a :

$$f(\xi) = g(\xi) - g \circ \widetilde{T}(\xi).$$

On choisit maintenant a dans $\mathcal{A}_2$, de façon à ce que la matrice A_a ait trois valeurs propres réelles distinctes ; on prend par exemple $a = (5,5)$, on considère le point fixe ξ_0 de Δ_a. On a alors $\xi_0 = (x^{(1)}, x^{(2)}; \cos\theta, \sin\theta)$ avec

$$x^{(1)} = \frac{x^{(2)}}{x^{(1)}} - 5, \quad x^{(2)} = \frac{1}{x^{(1)}} - 5, \quad \tan\theta = \frac{1}{x^{(2)} - x^{(1)}\tan\theta}.$$

Donc $\tan\theta = (x_2 + \varepsilon\sqrt{(x^{(2)})^2 - 4x^{(1)}})/2x^{(1)}$ avec ε qui vaut 1 ou -1. On a alors :

$$f(\xi_0) = 0 = \frac{1}{2}\log\left[\frac{(x^{(1)})^2}{\cos^2\theta + (\cos\theta x^{(2)} - \sin\theta x^{(1)})^2}\right] = \log|\tan\theta| + \log x^{(1)}.$$

Après calcul, on trouve :

$$f(\xi_0) = 0 = \log\left|\frac{x^{(1)}}{2} + \frac{5}{2} + \varepsilon\sqrt{(x^{(1)})^2 + 10x^{(1)} - 4x^{(2)} + 5}\right| + \log x^{(1)}.$$

Mais le point x est dans le triangle de sommets $(\frac{1}{6},1)$, $(\frac{1}{5},1)$ et $(\frac{1}{6},\frac{5}{6})$. Donc,

- si $\varepsilon = 1$, on a :

$$f(\xi_0) \in \left[\log\left(\frac{31}{12}+\sqrt{\frac{97}{36}}\right)-\log 6, \log\left(\frac{13}{5}+\sqrt{\frac{278}{75}}\right)-\log 5\right] \subset [-0,74; -0,09],$$

- si $\varepsilon = -1$, on a :

$$f(\xi_0) \in \left[\log\left|\frac{31}{12}-\sqrt{\frac{278}{75}}\right|-\log 6, \log\left|\frac{13}{5}-\sqrt{\frac{97}{36}}\right|-\log 5\right] \subset [-1,96; -1,64].$$

Comme 0 n'est dans aucun de ces intervalles, on a une contradiction et donc le théorème 1.1 est démontré en dimension 2. Il peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME 8.5. — *Le deuxième exposant de Lyapunov de l'algorithme de Jacobi-Perron est strictement négatif. On a donc pour m-presque tout x de I^2, si J_n désigne la nième approximation de x et q_n le dénominateur commun :*

$$\lim_{n\to\infty} q_n \|x - J_n\| = 0.$$

De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} q_n^{1+\varepsilon} \|x - J_n\| = 0.$$

III. Simplicité du spectre de Lyapunov

On suppose à partir de maintenant que la dimension d est quelconque.

9. Introduction.

D'après le paragraphe I, la transformation T de Jacobi-Perron satisfait, pour $x \in X$, la relation $x = a \cdot Tx$ où $a = a^x$ désigne l'application projective de $\mathbb{P}^d$ définie par la matrice $A(x) \in \mathrm{Gl}(d+1, \mathbb{Z})$ donnée en I.3. On note $a_n = a^{T^{n-1}x}$, $A_n = A \circ T^{n-1}$ et on considère le produit matriciel :

$$S_n^t(x) = A_n^t(x) \cdots A_1^t(x).$$

Lorsque x est distribué suivant la mesure π, on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d+1}$ les exposants caractéristiques de S_n^t. On a donc a priori : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{d+1}$ et on prouve dans ce paragraphe l'inégalité stricte

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{d+1}.$$

On est aussi amené à considérer le produit $S_n^{-1}(x) = A_n^{-1}(x) \cdots A_1^{-1}(x)$ qui joue un rôle dual de $S_n^t(x)$. La transformation projective correspondante est $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$, et elle coïncide localement avec l'itérée T^n. L'action de la différentielle itérée $(T^n)'$, dans les espaces de drapeaux projectifs, coïncide donc avec l'extension aux drapeaux de la transformation projective $a_n^{-1} \ldots a_1^{-1}$. Les exposants de S_n^{-1} sont $-\lambda_{d+1}, -\lambda_d, \ldots, -\lambda_1$ et ceux de $(T^n)'$ valent $\lambda_1 - \lambda_{d+1}, \lambda_1 - \lambda_d, \ldots, \lambda_1 - \lambda_2$. Le drapeau contractant de S_n^{-1} est la suite de sous-espaces vectoriels $V_i(x)$ définis par

$$V_i(x) = \{v \in \mathbb{R}^{d+1};\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|S_n^{-1}(x)v\| \leq -\lambda_i\}.$$

Il lui correspond un drapeau projectif qui coïncide avec le drapeau contractant de la différentielle de T. La preuve de la simplicité des spectres de $S_n^t(x)$ et $S_n^{-1}(x)$ est basée sur le «caractère stochastique» de T, qui s'exprime ici par les propriétés de contraction et d'irréductibilité du semi-groupe engendré par les branches inverses de T. On utilise aussi le fait que $A(x)$ ne dépend que de la première coordonnée du codage naturel de x. On précise et on justifie maintenant la démarche suivie.

Soit $\mathcal{F}_d$ l'espace des drapeaux complets de $\mathbb{P}^d$, $\mathcal{F}_d^x$ l'espace des drapeaux d'origine $x \in \mathbb{P}^d$, $\Delta = \bigcup_{x\in X} \mathcal{F}_d^x$. On note $\widetilde{T}$ l'extension de T à Δ par la différentielle; si $\xi \in \Delta$ est d'origine $x \in X$, on a $\widetilde{T}\xi = (a^x)^{-1} \cdot \xi$. L'opérateur de transfert $P = T^*$ défini en I.2 par la formule $P\varphi(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \varphi(a \cdot x)p(x,a)$ s'étend aussi à Δ en utilisant l'extension de a et sera noté $\widetilde{P}$:

$$\widetilde{P}\psi(\xi) = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} \psi(a\cdot\xi)p(x,a)$$

où $\xi \in \Delta$ est d'origine $x \in X$. On observe que, pour tout $\xi \in \Delta$ on a $\widetilde{T}[\widetilde{P}\delta_\xi] = \delta_\xi$.

L'étude du spectre de S_n^{-1} se ramène à celle de certaines sommes de Birkhoff pour le système dynamique $(\Delta, \widetilde{T})$ de la manière suivante. On peut repérer un drapeau projectif $\xi \in \mathcal{F}_d$ d'origine quelconque par la suite de multivecteurs $(x_1, x_1 \wedge x_2, \dots, x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_d)$ de sorte que le i-ème sous-espace de ξ corresponde au sous-espace vectoriel défini par $v_i = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_i$. On peut de plus supposer $\|v_i\| = 1$ pour tout $i \in [1,d]$. On note alors $\sigma_i(g,\xi)$ le cocycle sur $\mathrm{Gl}(d+1) \times \mathcal{F}_d$ défini par

$$\sigma_i(g,\xi) = \frac{\|(\Lambda^{i-1}g)(v_{i-1}) \wedge (\Lambda^{i+1}g)(v_{i+1})\|}{\|\Lambda^i g(v_i)\|^2}.$$

Ce cocycle donne le coefficient de multiplication des longueurs le long de la courbe de $\mathcal{F}_d$ passant par ξ définie en fixant les $v_j = v_j(\xi)$ pour tout $j \neq i$.

D'après le théorème ergodique multiplicatif, si le spectre de S_n^{-1} est simple, S_n^{-1} possède un drapeau projectif contractant complet tel que si ξ est opposé à ce drapeau on a π-presque partout :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sigma_{d-i}\big[S_n^{-1}(x), \xi\big] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sigma_i\big[S_n^t(x), \xi^t\big] = \lambda_{i+1} - \lambda_i$$

où ξ^t est le drapeau dual de ξ. On est donc amené à considérer l'espace produit $\overline{X} = X \times \mathcal{F}_d$ et la transformation $\overline{T}$ de $\overline{X}$ dans lui-même définie par :

$$\overline{T}(x,\xi) = \big(Tx, (a^x)^{-1}\cdot\xi\big).$$

Si $\overline{\Delta} \subset \overline{X}$ désigne l'ensemble des couples (x, ξ) où ξ a pour origine x dans X, $\overline{T}$ préserve $\overline{\Delta}$ et sa restriction à $\overline{\Delta}$ s'identifie à l'action de $\widetilde{T}$ sur Δ. Dans la suite, deux mesures de probabilité invariantes par $\overline{T}$ sur $\overline{X}$, et de projection π jouent un rôle. L'une est concentrée sur $\overline{\Delta}$ et correspond donc à une mesure, notée $\widetilde{\pi}$, invariante par $\widetilde{T}$ sur Δ. Elle est construite ci-dessous et satisfait la relation :

$$\widetilde{\pi} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{P}^n \widetilde{m}$$

où $\widetilde{m}$ est la mesure de Lebesgue sur Δ. L'autre mesure $\overline{\pi}$ est concentrée sur $\overline{X} \setminus \overline{\Delta}$ et satisfait :

$$\overline{\pi} = \lim_{n\to\infty} \overline{T}^n \, \overline{m}$$

où $\overline{m}$ est la mesure de Lebesgue sur $\overline{X}$. Elle fournit aussi une mesure invariante par $\widetilde{T}$ sur Δ au moyen de la projection de $\overline{X} \setminus \overline{\Delta}$ sur Δ décrite de la manière suivante. À tout couple (x, ξ) de $\overline{X} \setminus \overline{\Delta}$, on peut associer le drapeau ξ^x de Δ d'origine x et dont le k-ième sous-espace ($k \geq 1$) est engendré par x et par le $(k-1)$-ième sous-espace de ξ. Cette application commute avec $\widetilde{T}$, et avec la restriction de $\overline{T}$ à $\overline{X} \setminus \overline{\Delta}$. La projection $\widetilde{\pi}^-$ de $\overline{\pi}$ sur Δ est donc invariante par $\widetilde{T}$. On a aussi $\widetilde{\pi}^- = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}^n \widetilde{m}$. On verra que $\widetilde{\pi}^-$ est la loi du drapeau dilatant de T^n tandis que $\widetilde{\pi}$ est la loi du drapeau contractant de T^n et qu'elles sont étrangères.

Les constructions de $\widetilde{\pi}$ et de $\widetilde{\pi}^-$ sont décrites ci-dessous, de manière différente. La mesure $\overline{\pi}$ est «non singulière» par rapport au drapeau contractant de S_n^{-1} et elle donne l'asymptotique de la somme de Birkhoff

$$\log \sigma_{d-i}\left[S_n^{-1}(x), \xi\right] = \sum_{k=0}^{n-1} f_i \circ \overline{T}^k(x, \xi)$$

où $f_i(x, \xi) = \log \sigma_{d-i}[A^{-1}(x), \xi]$. On est donc amené à prouver :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_i \circ \overline{T}^k(x, \xi) < 0$$

presque partout au sens de $\overline{\pi}$.

Soit $\widetilde{m}$ la mesure de Lebesgue sur Δ. On construit d'abord une fonction mesurable $\xi(x)$ à valeurs dans $\mathcal{F}_d^x$ telle que l'on ait π-presque partout

$$(**) \qquad \lim_{n\to+\infty} a_1 \cdots a_n \cdot \widetilde{m} = \delta_{\xi(x)}.$$

On note $\widehat{\xi}(x)$ la sous-variété des drapeaux non opposés à $\xi(x)$, et on en déduit par un argument géométrique (*cf.* théorème 10.14)

$$\lim_{n\to+\infty} \log \sigma_{d-i}\big[S_n^{-1}(x), \xi\big] = \lim_{n\to+\infty} \log \sigma_i\big[S_n^t(x), \xi^t\big] = -\infty$$

pour tout $\xi \notin \widehat{\xi}(x)$ et $i \in [1, d]$. Supposant $\overline{\pi}$ connue et désintégrée suivant les fibres $x \times \mathcal{F}_d$, sous la forme $\overline{\pi} = \int \delta_x \times \mu_x \, \mathrm{d}\pi(x)$, il suffit (*cf.* lemme 4.4) pour obtenir (*) de voir que l'on a π-presque partout $\mu_x[\widehat{\xi}(x)] = 0$. Cette observation conduit au choix de $\overline{\pi}$ [*cf.* lemme 13.4] et on montre que, $\overline{\pi}$ étant ainsi choisie, les mesures μ_x ne chargent pas de sous-variétés algébriques de $\mathcal{F}_d$.

La construction de $\xi(x)$ est basée sur les observations suivantes. Si l'on suppose $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{d+1}$, le théorème ergodique multiplicatif appliqué à $S_n^{-1}(x)$ et π fournit un drapeau complet $\xi(x) \in \mathcal{F}_d^x$ tel que l'on ait

$$a_1 \cdot \xi(Tx) = \xi(x). \tag{1}$$

Alors la mesure $\widetilde{\pi} = \int \delta_{\xi(x)} d\pi(x)$ satisfait l'équation :

$$\widetilde{P}\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}. \tag{1'}$$

On montre alors (*cf.* théorème 11.1) l'existence et l'unicité de $\widetilde{\pi}$ vérifiant (1′). On montre de plus que $\widetilde{\pi}$ se désintègre sous la forme

$$\widetilde{\pi} = \int \widetilde{\pi}_x \, \mathrm{d}\pi(x)$$

où $\widetilde{\pi}_x$ est une mesure de Dirac sur $\mathcal{F}_d^x$, ce qui permet de définir $\xi(x)$ par $\widetilde{\pi}_x = \delta_{\xi(x)}$.

L'étude de $\widetilde{\pi}$ est basée sur les propriétés de densité du semi-groupe engendré par les branches inverses de T; en particulier, le théorème de convergence des martingales permet de montrer la relation (**) :

$$\lim_{n\to+\infty} a_1 \ldots a_n \cdot \widetilde{m} = \delta_{\xi(x)}$$

d'où l'on déduit aussi $\lim_n \widetilde{P}^n \widetilde{m} = \widetilde{\pi}$.

Comme pour $\xi(x)$, la construction du noyau $x \mapsto \mu_x$ repose sur un théorème de point fixe (théorème 12.2). Il est commode de considérer l'espace Ω^- des suites $(a_n)_{n\leq 0}$ telles que $a_n \in \mathcal{A}_d$ et $\omega_n = (a_n \dots a_0)$ soit admissible pour tout $n \leq 0$. L'espace $\widehat{X} \subset \Omega^- \times X$ des suites (ω, x) telles que ω_n soit x-admissible pour tout $n \leq 0$ est une réalisation de l'espace des trajectoires de la chaîne de Markov de noyau P. Une trajectoire s'écrit sous la forme $(\omega_n \cdot x)_{n\leq 0}$ et le décalage $\widehat{\theta}$ sur cet espace s'écrit :

$$\widehat{\theta}(\omega, x) = (\theta\omega, a_0 \cdot x)$$

où θ est le décalage sur Ω^-. Alors l'extension naturelle de T est donnée par

$$\widehat{T}(\omega, x) = (\omega a_1, Tx).$$

On note par $\langle \omega_n \rangle = \langle a_n \dots a_0 \rangle$ un cylindre de Ω^-, et Ω^- est muni des probabilités de Markov P_x définies par

$$P_x\big(\langle \omega_n \rangle\big) = p(x, a_0)\, p(a_0 \cdot x, a_{-1}) \cdots p(\omega_{n-1} \cdot x, a_{-n}).$$

L'espace des trajectoires $\widehat{X}$ est alors muni de la mesure markovienne $\widehat{\theta}$-invariante $\widehat{\pi} = \int P_x \times \delta_x \, \mathrm{d}\pi(x)$. Les projections de $\widehat{\pi}$ sur Ω^- et X sont respectivement $P_\pi = \int P_x \, \mathrm{d}\pi(x)$ et π ; on a donc $T\pi = \pi$ et $\theta(P_\pi) = P_\pi$.

D'après II (*cf.* proposition 2.6), la probabilité P_x sur Ω^- dépend continûment de x en variation et donc P_x est absolument continue par rapport à P_π. Toujours en supposant $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{d+1}$, le théorème ergodique multiplicatif appliqué à $S_n^{-1}(\omega)$ pour $n \leq 0$ et à la mesure P_π fournit un drapeau complet $\xi^-(\omega)$ contractant pour $S_n^{-1}(\omega)$. On a donc l'équation

$$\xi^-(\omega) = a_0^{-1} \cdot \xi^-(\theta\omega). \tag{2}$$

Notons que, d'après le théorème ergodique multiplicatif, $\xi^-(\omega)$ est opposé à $\xi(x)$; on peut voir de plus que l'hyperplan de $\xi^-(\omega)$ ne coupe pas X. Si $\mu_x = \xi^-[P_x]$ désigne la loi de $\xi^-(\omega)$ sous P_x on a donc, pour tout x :

$$\mu_x = \sum_{a \in \mathcal{A}_d} a^{-1} \cdot \mu_{a\cdot x}\, p(x, a) \tag{2'}$$

qui découle de (2) et de la relation de Markov $\theta P_x = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} P_{a\cdot x}\, p(x, a)$.

De plus la relation $\mu_x = \xi^-(P_x)$ et la continuité en variation du noyau $x \mapsto P_x$ entraînent la continuité en variation du noyau $x \mapsto \mu_x$. On montre alors (voir théorèmes 12.2 et 13.7) l'existence et l'unicité d'une solution de (2′) continue en variation, toujours en utilisant les propriétés d'irréductibilité du semi-groupe des branches inverses de T. Alors la mesure $\overline{\pi}$ sur $X \times \mathcal{F}_d$ définie par $\overline{\pi} = \int \delta_x \times \mu_x \, \mathrm{d}\pi(x)$ est $\overline{T}$-invariante. Cette invariance permet d'exploiter la relation $\lim_{n\to\infty} \sigma_j[S_n^{-1}(x), \xi] = 0$, établie plus haut pour certains ξ de $\mathcal{F}_d$, et d'en déduire (*cf.* théorème 13.1) l'inégalité $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{d+1}$. On peut alors construire le drapeau dilatant $\xi(x,\omega)$ de la différentielle de T à partir de $\xi^-(\omega)$ en projetant $\overline{X} \setminus \overline{\Delta}$ sur Δ comme indiqué plus haut. On note alors $\xi^-(x,\omega) = [\xi^-(\omega)]^x$ le drapeau de $\mathcal{F}_d^x \subset \Delta$ ainsi déduit de (x,ξ). Les équations fonctionnelles satisfaites par $\xi^-(\omega)$ et $\xi^-(x,\omega)$ montrent que $\xi^-(x,\omega)$ est le drapeau dilatant de la différentielle de T au point x. Si alors $\widetilde{\mu}_x$ désigne la loi de $\xi^-(x,\omega)$ sous P_x, on a :

$$\widetilde{\mu}_x = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} a^{-1} \cdot \widetilde{\mu}_{a\cdot x}\, p(x,a)\,;$$

on notera que $\widetilde{\mu}_x$ et μ_x satisfont la même équation mais que $\widetilde{\mu}_x$ n'est pas continue en variation, contrairement à μ_x, car $\|\widetilde{\mu}_x - \widetilde{\mu}_{x'}\| = 2$ si $x \neq x'$. Le noyau $x \mapsto \delta_{\xi(x)}$ satisfait aussi cette équation sans être continu en variation.

La mesure $\widetilde{\pi}^-$ sur Δ, définie par $\widetilde{\pi}^- = \int \widetilde{\mu}_x \, \mathrm{d}\pi(x)$ est alors $\widetilde{T}$-invariante. Les propriétés de μ_x impliquent $\mu_x[\widehat{\xi}(x)] = 0$ et on peut voir alors que $\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}^n \widetilde{m} = \widetilde{\pi}^-$, et $\lim_{n\to\infty} \widetilde{P}^n \widetilde{m} = \widetilde{\pi}$. On notera que pour $d \geq 2$, les mesures $\widetilde{\pi}^-$ et $\widetilde{\pi}$ sont singulières l'une par rapport à l'autre car $\widetilde{\pi}_x[\xi(x)] = 1$ et $\widetilde{\mu}[\widehat{\xi}(x)] = 0$. Cette dissymétrie est à rapprocher du fait que la relation $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{d+1}$ ne peut être satisfaite pour $d \geq 2$, comme cela a été mentionné dans l'introduction.

10. Applications quasi-projectives et ensembles critiques.

Le but de ce paragraphe est de calculer l'ensemble de continuité d'une limite simple d'applications projectives et de donner des informations quantitatives sur cette convergence (théorèmes 10.8 et 10.14).

DÉFINITION 10.1. — *Soit Y un espace métrique compact et g_n une suite d'applications continues de Y dans Y. On appelle ensemble critique de la suite g_n, le complémentaire de l'ensemble des points $y \in Y$ tels qu'il existe un voisinage de y sur lequel la suite g_n est équicontinue.*

Remarque. — Par définition un ensemble critique est fermé ; la notion n'a d'intérêt que lorsque cet ensemble est non vide, ce qui sera le cas dans ce qui suit.

DÉFINITION 10.2. — *L'espace $\mathbb{R}^{d+1}$ est muni d'un produit scalaire et les espaces $\Lambda^i\mathbb{R}^{d+1}$ $(1 \le i \le d+1)$ des normes correspondantes. Soit g_n une suite d'endomorphismes de $\mathbb{R}^{d+1}$. On dira que la suite g_n est fondamentale si les suites $\Lambda^i g_n/\|\Lambda^i g_n\|$ $(1 \le i \le d+1)$ sont convergentes vers des endomorphismes $u_i \in \mathrm{End}(\Lambda^i\mathbb{R}^{d+1})$.*

On précise dans ce paragraphe l'ensemble critique de certaines suites d'applications projectives g_n opérant sur l'espace $Y = \mathcal{F}_d$ des drapeaux complets de $\mathbb{P}^d$ et on donne des informations quantitatives sur les modules de continuité des applications g_n. Ces considérations sont proches de celles developpées en [GuR1], [GuR2], [GuR3] et [BL]. Il a été cependant nécessaire ici de préciser ces développements sur certains points. Pour des informations complémentaires on pourra se reporter à [GuR1], [GuR2], [GuR3] et [BL].

PROPOSITION 10.3. — *Supposons que la suite $g_n \in \mathrm{Gl}(d+1,\mathbb{R})$ soit fondamentale et décomposons g_n sous sa forme polaire $g_n = k_n a_n k'_n$ avec k_n et k'_n dans $O(d+1)$ et $a_n = \mathrm{diag}(a_n^1,\ldots,a_n^{d+1})$ avec $a_n^1 \ge \cdots \ge a_n^{d+1} > 0$. Alors, pour tout $i < d+1$ la limite du rapport a_n^{i+1}/a_n^i existe.*

Démonstration. — Par compacité, on peut supposer $\lim_n k_n = k$, $\lim_n k'_n = k'$, de sorte que

$$\lim_n \frac{\Lambda^i a_n}{\|\Lambda^i a_n\|} = (\Lambda^i k)^{-1} u_i (\Lambda^i k')^{-1}.$$

On peut donc aussi supposer $g_n = a_n$. Dans ce cas $\|\Lambda^i a_n\| = a_n^1 \cdots a_n^i$ et $\Lambda^i a_n$ est diagonale de coefficients $a_n^J = a_n^{j_1} \cdots a_n^{j_i}$ avec $J = (j_1,\ldots,j_i)$ et $j_1 < j_2 < \ldots < j_i$. Il suffit alors de choisir $J = (1,2,\ldots,i-1,i+1)$ et d'appliquer $\Lambda^i a_n/\|\Lambda^i a_n\|$ au vecteur $e_J = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1}$ pour obtenir la convergence annoncée. □

DÉFINITION 10.4. — *Soit g_n une suite fondamentale et $\theta = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \ldots \cup \theta_p$ la partition de $(1,2,\ldots,d+1)$ définie par la relation d'équivalence $i \sim j$ si et seulement si la suite a_n^i/a_n^j a une limite finie non nulle. On dira alors que la suite g_n est θ-fondamentale et on notera α_i $(i \ge 1)$ le complémentaire de $\theta_1 \cup \theta_2 \cup \ldots \cup \theta_i$.*

PROPOSITION 10.5. — *Soit $g_n = k_n a_n k'_n$ une suite θ-fondamentale et V_i $(1 \le i < d+1)$ la suite des sous-espaces de $\mathbb{R}^{d+1}$ définie par*

$$V_i = \Big\{x \in \mathbb{R}^{d+1}\ ;\ \lim_n \frac{g_n x}{a_n^i} = 0\Big\}.$$

Soit k' une valeur d'adhérence de k'_n et posons pour i donné :

$$\bar{\imath} = \inf\{j,\ j > 1,\ i \notin \alpha_j\} \qquad (\bar{\imath} \leq i).$$

Alors la suite des V_i est décroissante au sens large et $V_i = k'^{-1}(\bigoplus_{j\in\alpha_{\bar{\imath}}} \mathbb{R}e_j)$.

Démonstration. — On peut clairement supposer $g_n = a_n$ afin de prouver la dernière assertion qui implique évidemment la première. Or

$$\frac{a_n}{a_n^i} e_j = \frac{a_n^j}{a_n^i} e_j$$

et la définition de $\alpha_{\bar{\imath}}$ donne la formule $V_i = \bigoplus_{j\in\alpha_{\bar{\imath}}} \mathbb{R}e_j$. □

DÉFINITION 10.6. — *On appelle drapeau L de $\mathbb{R}^{d+1}$ une suite emboîtée de sous-espaces stricts et on note $L = (L_1, L_2, \ldots, L_r)$ avec $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_r$.*

- *On appelle drapeau complet $f = (f_1, f_2, \ldots, f_d)$ un drapeau avec $\dim f_i = i$. On notera $\mathcal{F}_d$ l'ensemble des drapeaux complets de $\mathbb{R}^{d+1}$.*

- *On appelle drapeau associé à la suite g_n le drapeau défini par les $V_i = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}\ ;\ \lim_n g_n x/a_n^i = 0\}$.*

Remarques.

- Un drapeau complet peut être repéré par une suite $u = [u_1, u_1 \wedge u_2, \ldots, u_1 \wedge \ldots \wedge u_d]$ de multivecteurs unitaires.

- Tout drapeau définit une suite croissante de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^d$ et inversement.

- À tout drapeau complet $f = (f_1, f_2, \ldots, f_d)$ de $\mathbb{R}^{d+1}$ est associé un drapeau complet dual de $(\mathbb{R}^{d+1})^*$ noté f^t dont les sous-espaces sont les orthogonaux dans $(\mathbb{R}^{d+1})^*$ des sous-espaces de f. Pour un drapeau projectif ξ, on notera ξ^t le drapeau dual, lorsque la distinction sera nécessaire.

DÉFINITION 10.7. — *Soient $L = (L_1, L_2, \ldots, L_r)$ un drapeau et $f = (f_1, f_2, \ldots, f_d)$ un drapeau complet. On dira que f est subordonné à L s'il existe i et un sous-espace L_j de L de codimension au moins i tels que l'intersection $f_i \cap L_j$ ne soit pas réduite à zéro. On notera $\widehat{L}$ la sous-variété des drapeaux complets subordonnés à L et on dira que $\widehat{L}$ est la sous-variété subordonnée à L. On dit que deux drapeaux complets sont opposés si l'un n'est pas subordonné à l'autre.*

Remarque. — On adoptera maintenant les mêmes notations pour les drapeaux vectoriels et les drapeaux projectifs correspondants. On fera de même pour les applications linéaires et les applications projectives correspondantes, l'action de $u \in \mathrm{GL}(d+1, \mathbb{R})$ sur $x \in \mathbb{P}^d$ étant notée $u \cdot x$. Ces applications projectives opèrent naturellement sur les espaces de drapeaux.

On a alors le

THÉORÈME 10.8. — *Soit g_n une suite fondamentale et L le drapeau associé. Alors pour tout drapeau complet $\xi \notin \widehat{L}$, la suite $g_n \cdot \xi$ converge. La convergence est uniforme sur tout compact de $\widehat{L}$ et l'ensemble critique de g_n est égal à $\widehat{L}$.*

Ce théorème découle de deux lemmes.

LEMME 10.9. — *Avec les notations précédentes, un multivecteur décomposable appartient au noyau de u_i noté* $\ker u_i$ *si et seulement s'il est de la forme $x \wedge v$ avec $x \in V_i$ et v multivecteur décomposable de $\Lambda^{i-1}\mathbb{R}^{d+1}$.*

Démonstration. — On peut clairement supposer $g_n = a_n$ et on calcule alors $\ker u_i$. Dans la base e_J avec $J = (j_1, j_2, \dots, j_i)$ où $j_1 < j_2 < \cdots < j_i$, u_i est diagonale de coefficients donnés par $\lim_n a_n^J / a_n^1 \cdots a_n^i \leq 1$.

Cette limite est nulle dès que J contient un indice de α_i et les e_J correspondants forment une base de $\ker u_i$. Donc

$$\ker u_i = \big\{ w \in \Lambda^i \mathbb{R}^{d+1} \ ; \ w \wedge e_{\alpha_{\bar{\imath}}} = 0 \big\}.$$

La condition $w \wedge e_{\alpha_{\bar{\imath}}} = 0$, pour un multivecteur décomposable w, signifie que le sous-espace défini par w et le sous-espace $\bigoplus_{j \in \alpha_{\bar{\imath}}} \mathbb{R} e_j$ ont une intersection non réduite à zéro. Donc, si $w \in \ker u_i$, w est de la forme $x \wedge v$ avec $x \in V_i$ et $v \in \Lambda^{i-1}\mathbb{R}^{d+1}$. La réciproque est évidente. □

LEMME 10.10. — *Soit $g_n \in \mathrm{Gl}(d+1, \mathbb{R})$ une suite telle que $\lim_n g_n / \|g_n\| = u \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{d+1})$. Alors l'ensemble critique de g_n sur $\mathbb{P}^d$ est la sous-variété projective définie par le noyau de u. La suite $g_n \cdot x$ converge pour tout x n'appartenant pas à ce sous-espace et la convergence est uniforme sur tout compact ne rencontrant pas ce sous-espace.*

Démonstration. — Soit $x \notin \ker u$ tel que $\|x\| = 1$, $x = \lim_n x_n$ avec $\|x_n\| = 1$. On a alors, avec $u_n = g_n / \|g_n\|$:

$$\frac{g_n x_n}{\|g_n x_n\|} = \frac{u_n x_n}{\|u_n x_n\|} \quad \text{et} \quad \lim_n \frac{g_n x_n}{\|g_n x_n\|} = \frac{ux}{\|ux\|}.$$

Si l'on note $\bar{x}_n$ le point de $\mathbb{P}^d$ associé à x_n, cette relation s'écrit

$$\lim_n g_n \cdot \bar{x}_n = u \cdot \bar{x}.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de $g_n \cdot y$ vers $u \cdot y$ au voisinage de $\bar{x}$ et fournit la dernière assertion.

Donc l'ensemble critique de g_n est contenu dans la sous-variété projective définie par $\ker u$. L'appartenance de x à l'ensemble critique de g_n équivaut à l'existence de deux suites x_n et x'_n avec

$$\lim_n x_n = \lim_n x'_n = x, \quad \lim_n g_n \cdot x_n = y \neq \lim_n g_n \cdot x'_n = y'.$$

Si g_n s'écrit $g_n = k_n a_n k'_n$ en décomposition polaire, on peut supposer $\lim_n k_n = k$, $\lim_n k'_n = k'$. L'ensemble critique de a_n est alors l'image par k' de l'ensemble critique de g_n. On peut donc supposer $g_n = a_n$ et $\lim_n a_n^i/\|a_n\| = \alpha^i$. Prenons dans $\mathbb{P}^d$ l'hyperplan à l'infini défini par l'équation $x^1 = 0$ (ici pour alléger les notations on note x^1 et non $x^{(1)}$ la première coordonnée de x) ; alors a_n s'identifie à la transformation affine de $\mathbb{R}^d$ définie par les équations

$$y^j = \alpha_n^j x^j \qquad (2 \leq j \leq d+1)$$

avec $\alpha_n^j = a_n^j/\|a_n\| \leq 1$.

Le sous-espace correspondant à $\ker u$ est alors contenu dans l'hyperplan à l'infini et est défini par les équations $x^j = 0$ $(2 \leq j \leq r)$. Considérons la droite vectorielle de vecteur directeur $v = (v^2, \ldots, v^{d+1})$ avec $v^j = 0$ pour $j \leq r$ et les deux suites de points définies par $x_n = t_n v$, $x'_n = 2t_n v$ avec $t_n = 1/\alpha_n^{r+1}$. Par définition de r on a $\lim_n t_n = \infty$, $\lim_n a_n \cdot x_n = y \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\lim_n a_n \cdot x'_n = y' = 2y$ avec $y \neq 0$ dès que $v^{r+1} \neq 0$. De plus les deux suites x_n et x'_n convergent vers le point à l'infini de la droite de vecteur directeur v. Ce point est arbitraire dans le sous-espace projectif associé à $\ker u$ et il appartient à l'ensemble critique de a_n ; d'où l'énoncé. □

Démonstration du théorème 10.8. — La convergence uniforme annoncée découle de la définition des suites fondamentales et du lemme 10.10 appliqué aux produits extérieurs $\Lambda^i\mathbb{R}^{d+1}$; le lemme 10.9 donne la forme de $\ker u_i$ et la proposition 10.5 donne la forme de $\widehat{L}$ en fonction des sous espaces $\ker u_i$.

L'ensemble critique de g_n est donc contenu dans $\widehat{L}$. D'après le lemme 10.10, il lui est égal. □

DÉFINITION 10.11. — *Soit g_n une suite fondamentale d'applications projectives et soit L le drapeau associé. Pour tout $\xi \notin \widehat{L}$, on note $\tau \cdot \xi = \lim_n g_n \cdot \xi$ et on dira que τ est une application quasi projective de $\mathcal{F}_d$ et que g_n converge vers τ.*

Remarque. — Si g_n est une suite d'applications quasi projectives, on peut toujours en extraire une sous-suite fondamentale qui converge vers une application quasi projective τ. La convergence de $g_n \cdot \xi$ vers $\tau \cdot \xi$ est uniforme en dehors d'un ensemble $\widehat{L}$ d'intérieur vide et τ est définie et continue en dehors de $\widehat{L}$.

DÉFINITION 10.12. — *Soit une mesure sur $\mathcal{F}_d$ telle que pour tout drapeau L on ait $m(\widehat{L}) = 0$. On dit que la suite $g_n \in \mathrm{Gl}(d+1, \mathbb{R})$ est contractante vers $\eta \in \mathcal{F}_d$ si la suite de mesures $g_n \cdot m$ converge vers la mesure de Dirac δ_η.*

Remarque. — On pourra se reporter à [GuR1] pour les formulations différentes de la notion de suite contractante. On voit que le choix de m ne joue pas de rôle en considérant les suites fondamentales extraites et en appliquant le théorème 10.8 qui fournit $\theta_i = \{i\}$ et caractérise les sous-espaces de η comme étant les sous-espaces images des u_i. Les noyaux des u_i dépendent de la suite fondamentale choisie. La suite g_n est contractante si et seulement si $\mathrm{rg}\, u_i = 1$.

DÉFINITION 10.13. — *Soient V et V' deux sous-espaces de dimension i repérés par les multivecteurs v et v'. On définit la distance de V et V' par la formule :*

$$\partial_i(V, V') = \frac{\|v \wedge v'\|}{\|v\| \cdot \|v'\|}.$$

On note ∂ la distance sur $\mathcal{F}_d$ définie par la somme :

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_i(u_1 \wedge \ldots \wedge u_i, u'_1 \wedge \ldots \wedge u'_i)$$

des distances des multivecteurs unitaires qui repèrent les deux drapeaux $f = [u_1, u_1 \wedge u_2, \ldots, u_1 \wedge \ldots \wedge u_d]$ et $f' = [u'_1, u'_1 \wedge u'_2, \ldots, u'_1 \wedge \ldots \wedge u'_d]$.

Remarques.

- Si un espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$, un produit scalaire se trouve aussi défini sur $\Lambda^2 E$ par

$$\langle x \wedge x', y \wedge y' \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, y' \rangle \\ \langle x', y \rangle & \langle x', y' \rangle \end{vmatrix}.$$

En particulier, $\partial(x,y) = \|x \wedge y\|$ est alors le sinus (positif) de l'angle des vecteurs unitaires x et y. L'inégalité triangulaire $\partial(x,z) \le \partial(x,y) + \partial(y,z)$ se réduit alors à une vérification élémentaire dans l'espace de dimension ≤ 3, engendré par les trois vecteurs. Elle est laissée au lecteur.

• À chaque sous-espace V de $\mathbb{R}^{d+1}$ de dimension p, on peut associer par orthogonalité un sous-espace de $(\mathbb{R}^{d+1})^*$ de dimension $d+1-p$. Grâce aux produits scalaires précédents, on peut associer à un p-multivecteur v de $\Lambda^p \mathbb{R}^{d+1}$ un $(d+1-p)$-multivecteur de $\Lambda^{d+1-p}(\mathbb{R}^{d+1})^*$ qui sera noté v^t. On a par exemple les formules :

$$(\Lambda^{d+1-p} g)(v^t) = \left[\Lambda^p (g^t)^{-1} v\right]^t, \quad \partial_p(V_1, V_2) = \partial_{d+1-p}(V_1^t, V_2^t)$$

où g est dans $\mathrm{Gl}(d+1,\mathbb{R})$ et V_1 et V_2 sont deux sous-espaces de dimension p de $\mathbb{R}^{d+1}$.

• Le produit extérieur $v \wedge v'$ (où v, v' sont dans $\Lambda^i \mathbb{R}^{d+1}$) ne doit pas être confondu avec un vecteur de $\Lambda^{2i}\mathbb{R}^{d+1}$. Avec ces définitions, on a par exemple :

$$\|v \wedge v'\|^2 + \left|\langle v, v' \rangle\right|^2 = \|v\|^2 \cdot \|v'\|^2$$

et si $\langle v, v' \rangle = \|v\| \cdot \|v'\| \cos\theta$, le nombre $\|v \wedge v'\|/(\|v\| \cdot \|v'\|)$ est le sinus de l'angle θ des deux i-plans définis par v et v'.

THÉORÈME 10.14. — *Soit $g_n \in \mathrm{Gl}(d+1,\mathbb{R})$ une suite contractante vers $\eta \in \mathcal{F}_d$, (g_n^t) la suite des applications transposées. Alors l'ensemble critique de g_n^t est égal à $\widehat{\eta}^{\,t}$ et le coefficient de Lipschitz de g_n^t sur un compact donné du complémentaire de $\widehat{\eta}^{\,t}$ tend vers zéro.*

Démonstration. — Comme l'image de g_n et le noyau de g_n^t se correspondent par dualité, le passage aux suites fondamentales extraites de g_n^t montre que celles-ci ont toutes pour drapeau associé η^t. D'après le théorème 10.8, $\widehat{\eta}^{\,t}$ est donc contenu dans l'ensemble critique de g_n^t. Il suffit donc maintenant de prouver la dernière assertion.

On choisit la base e_i de $\mathbb{R}^{d+1}$ de façon que η soit défini par les multivecteurs $e_1, e_1 \wedge e_2, \dots, e_1 \wedge \dots \wedge e_d$ et l'on décompose g_n sous la forme $g_n = k_n a_n k'_n$. Le passage aux suites fondamentales extraites montre que $k_n(e_1 \wedge \ldots \wedge e_i)$ converge en direction vers $e_1 \wedge \ldots \wedge e_i$. Notons $J = (1, 2, \ldots, i)$, $J' = (1, 2, \ldots, i-1, i+1)$ et observons que la norme de $\Lambda^i g_n$ vaut $a_n^J = a_n^1 \ldots a_n^i$ tandis que celle de $(\Lambda^i g_n) \wedge (\Lambda^i g_n)$ vaut $a_n^J a_n^{J'}$. Considérons deux sous-espaces V_1 et V_2 de dimension i non subordonnés à η. Donc V_1^t et V_2^t sont non subordonnés à η^t. Si V_1 et V_2 sont repérés par les multivecteurs unitaires v_1 et v_2, ceci signifie que les composantes v_J et v'_J de v_1 et v_2 suivant e_J dans la base canonique de $\Lambda^i \mathbb{R}^{d+1}$ sont non nulles. On a :

$$\|g_n^t v_1^t\| = \|a_n k_n^{-1} v_1^t\| \geq \frac{1}{2} a_n^J |v^J|$$

pour n assez grand car $k_n e_J$ et e_J sont proches en direction. De même $\|g_n^t v_2^t\| \geq \frac{1}{2} a_n^J |v'^J|$. D'autre part,

$$\|g_n^t v_1^t \wedge g_n^t v_2^t\| \leq a_n^J a_n^{J'} \|v_1^t \wedge v_2^t\| = a_n^J a_n^{J'} \|v_1 \wedge v_2\|.$$

On en déduit :

$$\partial_{d+1-i}(g_n^t V_1^t, g_n^t V_2^t) \leq \frac{4 \,\|v_1 \wedge v_2\|}{|v_1^J| \cdot |v_2^J|} \frac{a_n^{i+1}}{a_n^i}.$$

Finalement, pour n assez grand :

$$\frac{\partial_{d+1-i}(g_n^t V_1^t, g_n^t V_2^t)}{\partial_{d+1-i}(V_1^t, V_2^t)} \leq \frac{4}{|v_1^J| \cdot |v_2^J|} \frac{a_n^{i+1}}{a_n^i}.$$

Le second membre converge uniformément vers zéro sur tout compact du complémentaire de $\widehat{\eta}^{\,t}$, ce qui fournit l'assertion annoncée. □

Remarque. — Soient U, V, W trois sous-espaces emboîtés de dimensions $i-1$, i et $i+1$, $g \in \mathrm{Gl}(d+1, \mathbb{R})$ et u, v, w des multivecteurs unitaires repérant U, V, W. Un calcul simple montre que le coefficient infinitésimal de multiplication des distances en v, pour la famille de sous-espaces de dimension i contenant u et contenus dans w a pour expression :

$$\sigma_i(g, \xi) = \frac{\|\Lambda^{i-1} g u\| \cdot \|\Lambda^{i+1} g w\|}{\|\Lambda^i g v\|^2}$$

où ξ désigne un drapeau complet contenant u, v, w. En particulier, dans les conditions de la proposition $\sigma_i(g_n^t, \xi^t)$ tend vers zéro uniformément sur tout compact du complémentaire de $\widehat{\eta}^{\,t}$. Notons aussi la relation $\sigma_i(g, \xi) = \sigma_{d+1-i}[(g^t)^{-1}, \xi^t]$.

La notion d'adhérence de Zariski donne une condition suffisante qui permet souvent de montrer l'existence de suites contractantes dans un semi-groupe donné [GM] et qui sera utile ici. Plus précisément on a l'énoncé suivant, justifié en [GuR3]. On note $Zc(Y)$ l'adhérence de Zariski d'une partie Y d'une variété algébrique affine.

LEMME 10.15. — *Soit S un semi-groupe de* $\mathrm{Gl}(d+1,\mathbb{R})$ *ne laissant pas invariante une réunion finie de sous-espaces et $Zc(S)$ son adhérence de Zariski (qui est un groupe). Alors si $Zc(S)$ contient une suite contractante il en est de même de S. C'est le cas en particulier si $Zc(S)$ contient* $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{R})$.

On rappelle que si Y est une partie d'une variété algébrique affine X, définie sur $\mathbb{R}$, $Zc(Y)$ est l'ensemble des zéros communs aux polynômes nuls sur Y. Le groupe $\mathrm{Gl}(d,\mathbb{R})$ est une sous-variété algébrique affine de $\mathbb{R}^{d^2+1}$.

11. Construction d'un champ de drapeaux $\widetilde{T}$-invariant.

11.1. Quelques notations.

Précisons d'abord quelques notations de I. On considère le cube I^d et ses simplexes W_σ ; on note $X = \bigcup_\sigma W_\sigma$ la réunion disjointe des W_σ muni de la topologie naturelle.

On désigne par $\mathcal{A}_d$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^d$ de la forme $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(d)})$ avec $a^{(d)} \geq 1$ et $0 \leq a^{(i)} \leq a^{(d)}$ pour tout i. On note aussi a la transformation projective de $\mathbb{P}^d$ définie par $w\tau_a$. Si on la restreint à X, son domaine

$$\mathrm{Dom}\, a = a^{-1}X \cap X$$

est une réunion finie de simplexes W_σ tandis que son image vaut :

$$\mathrm{Im}\, a = a(a^{-1}X \cap X) = X \cap aX.$$

De plus on a vu en I que l'image par a de chacun des simplexes W_σ est contenu dans un unique simplexe de la même forme. Considérons alors :

$$\mathcal{A}'_d = \left\{a \in \mathcal{A}_d\,;\ a^{(i)} < a^{(d)}\ \forall i < d\right\},$$
$$\mathcal{A}''_d = \left\{a \in \mathcal{A}_d\,;\ 1 \leq a^{(1)} \leq \cdots \leq a^{(d-1)} \leq a^{(d)}\right\}$$

et le semi-groupe S' engendré par $\overline{\mathcal{A}}'_d = \{w\tau_a; a \in \mathcal{A}'_d\}$, respectivement le semi-groupe S'' engendré par $\overline{\mathcal{A}}''_d = \{w\tau_a; a \in \mathcal{A}''_d\}$. D'après la proposition 2.2, on voit aussi que si $\omega_n = (a_1, \dots, a_n)$ est admissible et que si $\gamma = (b_1, \dots, b_k)$ est une suite finie d'éléments de $\mathcal{A}''_d$, alors (ω_n, γ) est admissible.

On sait que $\mathrm{Dom}\, a = X$ si $a \in \overline{\mathcal{A}'}_d$ et donc que S' et S'' préservent X.

D'après I, il existe une distance δ sur I^d, équivalente à la distance euclidienne, et $\rho \in]0,1[$ tel que $\delta(a\cdot x, a\cdot y) \leq \rho\delta(x,y)$ pour tous $a \in \mathcal{A}_d$, $(x,y) \in I^d \times I^d$. On appellera aussi δ la distance sur X induite par la distance δ sur I^d. Il est commode d'identifier un drapeau projectif d'origine $x \in \mathbb{P}^d$ à un couple (x,Y) où Y est un drapeau projectif de l'espace tangent en x à $\mathbb{P}^d$; on peut repérer Y par une suite de multivecteurs unitaires $u = (u_1, u_1 \wedge u_2, \ldots, u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1})$. On identifiera l'espace des drapeaux d'origine $x \in X$ à $X \times \mathcal{F}_{d-1}$ et on note d la distance sur $I^d \times \mathcal{F}_{d-1}$ définie par

$$d\big[(x,Y),(x',Y')\big] = \delta(x,x') + \partial(Y,Y')$$

où ∂ a été définie en 10.13. Une distance analogue, notée encore d, se trouve alors définie sur $\Delta = X \times \mathcal{F}_{d-1}$.

On a vu en I que l'opérateur P adjoint de la transformation T par rapport à la mesure T-invariante π opère sur les fonctions continues sur $X = \bigcup_\sigma W_\sigma$ par la formule :

$$P\varphi(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}_d} p(x,a)\varphi(a\cdot x)$$

où les $p(x,a)$ (*cf.* I) sont pour $a \in \mathcal{A}_d$ des fonctions continues sur X, et sont en restriction à un W_σ donné des fonctions analytiques strictement positives ou identiquement nulles. On a vu en I que $p(x,a) > 0$ équivaut à $x \in \mathrm{Dom}\ a$. Si $\omega_{n+1} = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ est dans $\mathcal{A}_d^{n+1}$ et si x est dans X, on note $\omega_{n+1}\cdot x$ le point de X défini par récurrence :

$$\omega_{n+1}\cdot x = \omega_n \cdot (a_{n+1}\cdot x) \quad \text{si } \omega_{n+1} \text{ est } x\text{-admissible.}$$

On a donc (*cf.* I) :

$$P^n\varphi(x) = \sum_{\omega_n} p(x,\omega_n)\varphi(\omega_n\cdot x)$$

où les $\omega_n = (a_1, \ldots, a_n)$ sont x-admissibles et où :

$$p(x,\omega_n) = p(x,a_1)\ldots p(a_2\ldots a_n\cdot x, a_1).$$

Les fonctions $p(x,\omega_n)$ sont strictement positives si et seulement si $x \in \mathrm{Dom}\ (a_1 \ldots a_n)$.

On prolonge naturellement T à $\Delta = X \times \mathcal{F}_{d-1}$ par la différentielle. Si T'_x désigne la matrice jacobienne de T au point x et $\xi = (x,Y) = (x, u_1, u_1 \wedge u_2 \ldots u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1})$, alors ξ est transformé par $\widetilde{T}$ en :

$$\widetilde{T}\xi = \big[Tx, T'_x u_1, \Lambda^2 T_x(u_1\wedge u_2), \ldots, \Lambda^{d-1}T'_x(u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1})\big].$$

On étend exactement de la même façon les transformations $x \mapsto a \cdot x$ de X à Δ par :

$$a \cdot \xi = \left[a \cdot x, a'_x u_1, \Lambda^2 a'_x(u_1 \wedge u_2), \ldots, \Lambda^{d-1} a'_x(u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1})\right]$$

où a'_x désigne la différentielle de a au point x. Puisque T et a sont localement projectives, ces extensions coïncident avec les extensions à $X \times \mathcal{F}_{d-1}$ comme transformations projectives. On notera $\widetilde{P}$ l'extension de P à Δ ainsi obtenue :

$$\widetilde{P}\varphi(\xi) = \sum_{a \in \mathcal{A}_d} p(x,a)\varphi(a \cdot \xi)$$

et on peut observer que $\widetilde{P}$ préserve les fonctions analytiques sur Δ, continues sur Δ, *etc.*

Pour x fixé dans X on définit les suites a_i $(i \geq 1)$ et x_i $(i \geq 0)$ par :

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_0 &= a_1 \cdot x_1 \\ x_1 &= a_2 \cdot x_2, \qquad & x &= a_1 a_2 \cdot x_2 \\ x_{n-1} &= a_n \cdot x_n, \qquad & x &= a_1 \ldots a_n \cdot x_n. \end{aligned}$$

Pour une suite admissible $\omega_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ on note alors η_{ω_n} la loi conditionnelle de x_n sachant ω_n. Sa densité par rapport à π est donnée ci-dessous par la formule :

$$\frac{\mathrm{d}\eta_{\omega_n}}{\mathrm{d}\pi}(x) = \frac{p(x,\omega_n)}{\int p(x,\omega_n)\,\mathrm{d}\pi(x)}.$$

Pour une mesure $\widetilde{P}$-invariante sur Δ donnée par la désintégration :

$$\nu = \int \nu_x \,\mathrm{d}\pi(x)$$

où ν_x est concentrée sur les drapeaux d'origine x, on considère les mesures :

$$\nu'_{\omega_n} = \int \nu_x \,\mathrm{d}\eta_{\omega_n}(x).$$

Ces mesures sont clairement absolument continues par rapport à ν et leurs densités sont les fonctions $\mathrm{d}\eta_{\omega_n} / \mathrm{d}\pi(x)$.

11.2. La mesure $\widetilde{P}$-invariante.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 11.1. — *L'équation $\nu\widetilde{P} = \nu$ a une unique solution. Elle est de la forme :*

$$\nu = \int \delta_{\xi(x)}\,\mathrm{d}\pi(x) = \widetilde{\pi}$$

et $x \mapsto \xi(x) \in \mathcal{F}_d^x$ est l'unique application mesurable de X dans Δ qui vérifie $\xi(a\cdot x) = a\cdot\xi(x)$ dès que $p(x,a) > 0$. En particulier, on a $\xi(Tx) = \widetilde{T}\xi(x)$. La suite de mesures $a_1\cdots a_n\nu'_{\omega_n}$ est une martingale qui converge π-presque partout vers $\delta_{\xi(x)}$. La suite de transformations projectives $a_1\cdots a_n$ est contractante vers $\xi(x)$ (π-p.p.).

La démonstration du théorème 11.1 va découler de plusieurs propositions et d'un théorème apparemment plus faible que le théorème 11.1 : le théorème 11.10. On énonce tout de suite un corollaire :

COROLLAIRE 11.2. — *La mesure $\widetilde{\pi}$ est $\widetilde{T}$-invariante, l'application $x \mapsto \xi(x)$ est un isomorphisme du système (X, T, π) sur le système $(\Delta, \widetilde{T}, \widetilde{\pi})$ et $\widetilde{P}$ est l'adjoint de $\widetilde{T}$ par rapport à $\widetilde{\pi}$.*

Démonstration. — Clairement $x \mapsto \xi(x)$ est injectif, et $\widetilde{\pi}$ est l'image de π par cette application de X dans Δ. De plus la relation $\xi(a\cdot x) = a\cdot\xi(x)$, dès que $p(x,a) > 0$, implique $\xi(Tx) = \widetilde{T}\xi(x)$. □

Les quatre lemmes qui suivent sont des généralisations immédiates de résultats déjà établis dans le cas de la dimension 2.

LEMME 11.3. — *Soit $\omega_n = (a_1\cdots a_n)$ une suite admissible. Alors la loi η_{ω_n} de x_n sachant ω_n a pour densité (par rapport à π) :*

$$\frac{\mathrm{d}\eta_{\omega_n}}{\mathrm{d}\pi}(x) = \frac{p(x,\omega_n)}{\int_X p(x,\omega_n)\,\mathrm{d}\pi(x)}.$$

Démonstration. — Même démonstration que celle du lemme 6.8. □

On note $a^x = a_1$ et $a\cdot\pi$ la mesure image de π par la transformation $a : x \mapsto a\cdot x$, a dans $\mathcal{A}_d$. On a alors :

$$a\cdot\pi(f) = \int_X f(a\cdot x)\,\mathrm{d}\pi(x).$$

LEMME 11.4. — *Soit a dans $\mathcal{A}_d$. Alors, pour π-presque tout x de X, si $p(Tx, a)$ n'est pas nul, on a :*

$$p(Tx,a)\frac{\mathrm{d}a\cdot\pi}{\mathrm{d}\pi}(x) = \begin{cases} 0 & si\ a \neq a^x, \\ 1 & si\ a = a^x. \end{cases}$$

Démonstration. — C'est la même démonstration que celle du lemme 6.10. □

On appelle $\mathcal{S}_{(f)}$ l'ensemble des suites admissibles de longueur finie. On note M l'adhérence de l'ensemble des mesures η_ω quand ω parcourt $\mathcal{S}_{(f)}$.

LEMME 11.5. — *M est relativement compact pour la norme des variations des mesures.*

Démonstration. — C'est la même démonstration que celle du lemme 6.9. □

On passe maintenant aux drapeaux. On rappelle ici que $\widetilde{P}f$ est défini sur Δ par :

$$\widetilde{P}f(\xi) = \sum_a f(a\cdot\xi)p(x,a)$$

si $\xi = (x, Y) = (x, u_1, \ldots, u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1})$.

On cherche les mesures définies sur Δ qui sont invariantes par l'action de $\widetilde{P}$ et qui se projettent sur X sur la mesure π. Elles sont donc de la forme :

$$\widetilde{\nu}(f) = \int_\Delta f(\xi)\nu_x(d\xi)\pi(\,\mathrm{d}x), \quad \text{avec} \quad \xi = (x,Y) \in X \times \mathcal{F}_{d-1},$$

où $(\nu_x)_{x\in X}$ est une famille de mesures sur $\mathcal{F}_d$ concentrées sur $\{x\} \times \mathcal{F}_{d-1} = \mathcal{F}_d^x$. La fonction $x \mapsto \nu_x$ est mesurable.

LEMME 11.6. — *Soit $\widetilde{\nu}$ une mesure invariante par $\widetilde{P}$ qui se projette sur la mesure π. Alors, pour π-presque tout x de X, on a :*

$$a^x \cdot \nu_{Tx} = \nu_x.$$

Inversement, cette relation implique que $\widetilde{\nu} = \int \nu_x \,\mathrm{d}\pi(x)$ est $\widetilde{P}$-invariante.

Démonstration. — C'est la même démonstration que celle du lemme 6.11. □

Soit ω dans $\mathcal{S}_{(f)}$ et soit η_ω la mesure (dans M) associée. On définit alors la mesure ν'_ω sur Δ par

$$\nu'_\omega(f) = \int_X \nu_x(f)\,\mathrm{d}\eta_\omega(x) = \frac{\int_\Delta f(\xi)\nu_x(\mathrm{d}\xi)p(x,\omega)\,\mathrm{d}\pi(x)}{\int_X p(x,\omega)\,\mathrm{d}\pi(x)}$$

avec $\xi = (x, Y) \in X \times \mathcal{F}_{d-1}$. On a alors le résultat suivant :

LEMME 11.7. — *Soit x dans X, $(a_k)_k$ son développement de Jacobi-Perron. Soit $\gamma = (b_1, \ldots, b_k)$ une suite finie d'éléments de $\overline{\mathcal{A}}''_d$ et $(\omega_n, \gamma) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k) \in \mathcal{S}_f$. Alors la suite $a_1 \cdots a_n \cdot \nu'_{\omega_n}$ est une martingale et l'on a π-presque partout :*

$$\lim_{n\to\infty} a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_k \cdot \nu'_{\omega_n\gamma} = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdots a_n \cdot \nu'_{\omega_n} = \nu_x.$$

Démonstration. — On remarque d'abord que pour π-presque tout x de X,

$$a_1 \cdots a_n \cdot \nu'_{\omega_n} = E_\pi\big[\nu_x \mid a_0, \ldots, a_n\big].$$

Donc $a_1 \cdots a_n \cdot \nu'_{\omega_n}$ est une martingale. Soit φ une fonction de $C(\Delta)$, on pose :

$$\begin{aligned}
f_n(\omega) = f_n &= a_1 \cdots a_n \cdot \nu'_{\omega_n}(\varphi) = \omega_n \cdot \nu'_{\omega_n}(\varphi),\\
h_n^\gamma(\omega) = h_n^\gamma &= a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_k \cdot \nu'_{\omega_n\gamma}(\varphi) = \omega_n\gamma \cdot \nu'_{\omega_n\gamma}(\varphi),\\
\pi_{\omega_n}^\gamma &= \pi\big[a_{n+1} = b_1, \ldots, a_{n+k} = b_k \mid a_1, \ldots, a_n\big].
\end{aligned}$$

La propriété de martingale entraîne alors que

$$\sum_\gamma (f_n - h_n^\gamma)^2 \pi_{\omega_n}^\gamma = E_\pi\big[f_{n+k}^2 \mid a_1, \ldots, a_n\big] - f_n^2,$$

(on fait ici la somme sur tous les $\gamma = (b_1 \cdots b_k)$ tels que (ω_n, γ) soit dans $\mathcal{S}_f$). En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_\gamma (f_n - h_n^\gamma)^2 \pi_{\omega_n}^\gamma &= \sum_\gamma \big[f_n^2 - 2h_n^\gamma f_n + (h_n^\gamma)^2\big]\pi_{\omega_n}^\gamma\\
&= f_n^2 \sum_\gamma \pi_{\omega_n}^\gamma - 2f_n \sum_\gamma h_n^\gamma \pi_{\omega_n}^\gamma + \sum_\gamma (h_n^\gamma)^2 \pi_{\omega_n}^\gamma.
\end{aligned}$$

Mais,

$$\sum_\gamma \pi^\gamma_{\omega_n} = \sum_{\gamma=(b_1,\dots,b_k)} \pi\big[a_{n+1}=b_1,\dots,a_{n+k}=b_k \mid a_1,\dots,a_n\big] = 1,$$

$$\begin{aligned}\sum_\gamma h^\gamma_n \pi^\gamma_{\omega_n} &= \sum_\gamma \omega_n\gamma\cdot\nu_{\omega_n\gamma}(\varphi)\pi\big[a_{n+1}=b_1,\dots,a_{n+k}=b_k \mid a_1,\dots,a_n\big]\\ &= E_\pi\big[f_{n+k}\mid a_1,\dots,a_n\big] = f_n \ \text{ car } \ (f_n) \text{ est une martingale,}\end{aligned}$$

$$\sum_\gamma (h^\gamma_n)^2\pi^\gamma_{\omega_n} = E_\pi[f^2_{n+k}\mid a_1,\dots,a_n].$$

Ainsi, pour tout ω_n admissible fixé, on a :

$$\sum_\gamma (f_n - h^\gamma_n)^2\pi^\gamma_{\omega_n} = E_\pi\big[f^2_{n+k}\mid\omega_n\big] - f^2_n(\omega_n)$$

où la somme porte sur tout les γ de longueur k tels que (ω_n,γ) soit dans $\mathcal{S}_f$. Fixons alors γ comme dans l'énoncé et observons que $(\omega_n\gamma)$ est admissible dès que ω_n l'est. Pour tout ω_n,

$$(f_n - h^\gamma_n)^2\pi^\gamma_{\omega_n} \le E_\pi\big[f^2_{n+k}\mid\omega_n\big] - E_\pi(f^2_n).$$

En intégrant par rapport à π,

$$E_\pi\big[(f_n - h^\gamma_n)^2\pi^\gamma_{\omega_n}\big] \le E_\pi\big[f^2_{n+k}\mid\omega_n\big] - E_\pi(f^2_n).$$

D'où $\sum_1^N E_\pi[(f_n - h^\gamma_n)^2\pi^\gamma_{\omega_n}] \le 2k|\varphi^2|_\infty$. On en déduit alors que π-presque partout $\lim_n (f_n - h^\gamma_n)^2\pi^\gamma_{\omega_n} = 0$. Mais d'après la proposition 2.7, si $(\omega_n\gamma) = (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_k)$ est une suite admissible, il existe une constante $\varepsilon(\gamma)$ telle que

$$\pi^\gamma_{\omega_n} \ge \varepsilon(\gamma) > 0.$$

On en déduit alors que pour tout γ fixé $\lim_{n\to\infty}(f_n - h^\gamma_n)^2 = 0$ π-presque partout. D'où la convergence annoncée en faisant varier φ dans une partie dénombrable dense de $C(\Delta)$. □

LEMME 11.8. — *Le groupe $\overline{H}$ engendré par $\overline{\mathcal{A}'}_d$ (resp. $\overline{\mathcal{A}}''_d$) est le groupe des matrices à coefficients entiers de déterminant* 1 *si d est pair et le groupe des matrices entières de déterminant* ±1 *si d est impair.*

Démonstration. — Comme $\overline{\mathcal{A}}''_d \subset \overline{\mathcal{A}'}_d$, il suffit de considérer le cas de $\overline{\mathcal{A}}''_d$. Si $w\tau_a$ et $w\tau_b$ appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}''_d$, on a :

$$g = (w\tau_b)^{-1}(w\tau_a) = \tau_{a-b}$$

et g appartient au groupe engendré par $\overline{\mathcal{A}}''_d - \overline{\mathcal{A}}''_d$. Il est immédiat que $\mathcal{A}''_d - \mathcal{A}''_d$ engendre $\mathbb{Z}^d$. Donc le groupe $\overline{H}$ contient τ_a pour tout a de $\mathbb{Z}^d$; il contient aussi $w = (w\tau_a)\tau_a^{-1}$. Donc $\overline{H}$ contient les sous-groupes $w^k\tau_a w^{-k}(a \in \mathbb{Z}^d)$ et $k \in \mathbb{Z}$. Si E_{ij} désigne la matrice dont tous les termes sont nuls à l'exception du terme d'indice (i,j) qui vaut 1, on obtient que les matrices $I + E_{ij}$ $(i \neq j)$ appartiennent à $\overline{H}$. On sait qu'elles forment un système de générateurs de $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{Z})$ et donc $\overline{H}$ contient $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{Z})$. Si $\det w = 1$, on a $\overline{H} = \mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{Z})$ et si $\det w = -1$, $\overline{H}$ est l'ensemble des matrices entières de déterminant ± 1. □

COROLLAIRE 11.9. — *L'adhérence de Zariski du semi-groupe S' (resp. S'') engendré par $\overline{\mathcal{A}}'_d$ (respectivement par $\overline{\mathcal{A}}''_d$) contient le groupe des matrices réelles de déterminant* 1.

Démonstration. — $Zc(S'')$ est un groupe, donc contient $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{Z})$ d'après le lemme 11.8. D'après le théorème de densité de Borel, celui-ci est dense au sens de Zariski dans le groupe indiqué car $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{Z})$ est de co-volume fini dans $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{R})$ (*cf.* [Bo], p. 17). □

THÉORÈME 11.10. — *Il existe une application mesurable $x \mapsto \xi(x)$ de X dans Δ telle que $\xi(x)$ soit d'origine x et telle que pour toute probabilité ν sur Δ qui soit $\widetilde{P}$-invariante, il existe $\varepsilon_\nu > 0$ avec*

$$\nu \geq \varepsilon_\nu \int \delta_{\xi(x)} \,\mathrm{d}\pi(x).$$

La démonstration découlera de trois lemmes qui correspondent aux énoncés 6.11, 6.12 et 6.13.

LEMME 11.11. — *Soit ν une probabilité $\widetilde{P}$-invariante et écrivons sa désintégration $\nu = \int \nu_x \,\mathrm{d}\pi(x)$. Supposons qu'il existe une permutation σ, un drapeau L tel que π-presque partout sur W_σ on ait $\nu_x(\widehat{L}) = 1$. Alors, pour tout drapeau $\xi \in \Delta$, d'origine $x \in W_\sigma$, appartenant au support de ν_x, pour toute suite admissible ω_n qui satisfait $\omega_n \cdot x \in W_\sigma$, on a $\omega_n \cdot \xi \in \widehat{L}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 11.6, l'équation $\nu\widetilde{P} = \nu$ implique $\nu_x = a^x \cdot \nu_{Tx}$ π-presque partout, donc aussi $\nu_{a\cdot x} = a \cdot \nu_x$ dès que $p(x,a) > 0$. Le même raisonnement vaut pour $\widetilde{P}^n$ et donne $\nu_{\omega_n \cdot x} = \omega_n \cdot \nu_x$ dès que $p(x,\omega_n) > 0$. Si $x \in W_\sigma$ et $\omega_n \cdot x \in W_\sigma$ on a π-presque partout $1 = \nu_{\omega_n \cdot x}(\widehat{L}) = \omega_n \cdot \nu_x(\widehat{L})$. Pour tout ξ du support de ν_x, où $\xi \in \widehat{L}$, le drapeau $\omega_n \cdot \xi$ appartient alors au support de $\nu_{\omega_n \cdot x}$, donc à $\widehat{L}$. □

LEMME 11.12. — *Soient L un drapeau et $\widehat{L}$ sa sous-variété subordonnée. Soit M le compact (en variation) formé des mesures valeurs d'adhérence des mesures η_{ω_n} où ω_n est admissible, et M_ν le compact (en variation) des mesures sur Δ qui s'écrivent sous la forme $\nu' = \int \nu_x \, d\eta(x)$ avec $\eta \in M$ et ν mesure $\widetilde{P}$-invariante fixée de désintégration $\nu = \int \nu_x \, d\pi(x)$. Alors il existe $\varepsilon(L,\nu) = \varepsilon > 0$ tel que $\nu'(\widehat{L}) \leq 1 - \varepsilon$ pour tout $\nu' \in M_\nu$.*

Démonstration. — Comme la fonction $\nu' \mapsto \nu'(\widehat{L})$ est continue sur le compact M_ν, elle atteint sa borne supérieure, et il suffit donc de voir que l'équation $\nu'(\widehat{L}) = 1$ est impossible. Or si $\nu' = \int \nu_x \, d\eta(x)$, une telle relation implique $\nu_x(\widehat{L}) = 1$, η-presque partout, donc pour π-presque tout x dans un certain W_σ. Le lemme 11.11 montre alors qu'il existe $\xi \in \Delta$ d'origine $x \in W_\sigma$ tel que les relations $\omega_n \cdot x \in W_\sigma$ et $p(x,\omega_n) > 0$ impliquent $\omega_n \cdot \xi \in \widehat{L}$; cette propriété est valide pour presque tout x dans W_σ. Fixons alors $a \in \overline{\mathcal{A}}'_d$ avec $a \cdot X \subset W_\sigma$. On obtient alors $as \cdot \xi \in \widehat{L}$ pour tout $s \in S'$. Ceci est impossible car d'après le corollaire 11.9, l'adhérence de Zariski de S' contient $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{R})$, donc $Zc(S') \cdot \xi = \mathcal{F}_d$. □

LEMME 11.13. — *Soit L un drapeau et $\widehat{L}$ sa sous-variété subordonnée. Avec les notations du lemme précédent, il existe $\alpha \notin \widehat{L}$ une suite contractante $\gamma_n \in S''$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute mesure ν' de M_ν, les valeurs d'adhérence de la suite $\gamma_n \cdot \nu'$ soient supérieures à $\varepsilon\delta_\alpha$. La même conclusion vaut pour toute suite ν'_n de M_ν.*

Démonstration. — On sait d'après [GM] que, puisque l'adhérence de Zariski de S'' contient $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{R})$ (corollaire 11.9 et lemme 10.15), le semi-groupe S'' contient aussi une suite contractante γ_n. On extrait une sous-suite fondamentale γ_{n_k} de γ_n et on note L' son drapeau associé, de sorte que

$$\forall \xi \notin \widehat{L}', \quad \lim_n \gamma_n \cdot \xi = \alpha.$$

Si $\alpha \in \widehat{L}$, on remplace γ_n par $\gamma\gamma_n$, avec $\gamma \in S''$ de sorte que $\gamma \cdot \alpha \notin \widehat{L}$, ce qui est possible d'après la propriété de densité au sens de Zariski de $S'' \subset S'$.

Soit alors $\varepsilon = \varepsilon(L', \nu)$ donné par le lemme 11.12 : $\nu'(\widehat{L'}) \leq 1 - \varepsilon$ pour tout $\nu' \in M_\nu$. Soit ν'' la restriction de ν' à $\widehat{L'}^c$, mesure dont la masse est au moins $\varepsilon > 0$. On peut supposer les suites $\gamma_n \cdot \nu'$ et $\gamma_n \cdot \nu''$ convergentes. Alors $\lim_n \gamma_n \cdot \nu' \geq \lim_n \gamma_n \cdot \nu'' \geq \varepsilon \delta_\alpha$, puisque γ_n est contractante vers α. La dernière assertion découle de la convergence uniforme de $\gamma_n \cdot x$ vers α sur les compacts de $(\widehat{L'})^c$. □

Démonstration du théorème 11.10. — On fixe une partie X_1 de X de mesure 1 où la convergence du lemme 11.7 a lieu. En extrayant une sous-suite de $a_1 \cdots a_{n_k}$, on peut supposer que la suite $a_1 \cdots a_{n_k}$ est fondamentale et converge vers l'application quasi-projective τ_x ($x \in X_1$). En utilisant le lemme 11.7 on peut supposer que, pour tout $\gamma \in S''$, et tout $x \in X_1$ on a :

$$\nu_x = \lim_n a_1 \cdots a_{n_k} \gamma \cdot \nu'_{\omega_{n_k}\gamma}.$$

Notons $\widehat{L}_x$ le sous-ensemble critique de τ_x. Alors,

$$\nu_x \geq \lim_k a_1 \cdots a_{n_k} (\gamma \nu'_{\omega_{n_k}\gamma})_{|\widehat{L}_x^c}.$$

Si $\gamma_n \in S''$, $\alpha \in \Delta$ et $\varepsilon > 0$ sont définis par le lemme 11.13; on a $\lim_n \gamma_n \cdot \nu'_{\omega_{n_k}\gamma} \geq \varepsilon \delta_\alpha$ avec $\alpha \notin \widehat{L}_x$ puisque $\nu'_{\omega_{n_k}\gamma}$ varie dans le compact (en variation) M_ν. On en déduit :

$$\nu_x \geq \varepsilon \tau_x \delta_\alpha$$

puisque τ_x est continue sur $\widehat{L}_x^c$. Ceci prouve le théorème avec $\varepsilon = \varepsilon_\nu$, $\xi(x) = \tau_x \alpha$ pour $x \in X_1$. □

COROLLAIRE 11.14. — *L'équation $\nu\widetilde{P} = \nu$ a une unique solution et il existe $r \geq 1$ et des fonctions mesurables $\xi_i(x)$ de X dans Δ telles que, si ν s'écrit $\nu = \int \nu_x \, \mathrm{d}\pi(x)$, on a :*

$$\nu_x = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \delta_{\xi_i(x)}.$$

Démonstration. — a) Soient ν et ν' deux mesures $\widetilde{P}$-invariantes extrémales distinctes : elles sont étrangères; or d'après le théorème 11.10,

$$\nu \geq \int \varepsilon \delta_{\xi(x)} \, \mathrm{d}\pi(x) \quad (\varepsilon > 0) \quad \text{et} \quad \nu' \geq \int \varepsilon' \delta_{\xi(x)} \, \mathrm{d}\pi(x) \quad (\varepsilon' > 0).$$

Il y a donc contradiction et solution unique de l'équation $\nu\widetilde{P} = \nu$.

b) On peut décomposer ν_x en sa partie atomique ν_x^0 et sa partie diffuse ν_x^d : $\nu_x = \nu_x^0 + \nu_x^d$. L'équation $a^x \cdot \nu_{Tx} = \nu_x$ donne $a^x \cdot \nu_{Tx}^0 = \nu_x^0$, $a^x \cdot \nu_{Tx}^d = \nu_x^d$. D'après le lemme 11.6, les mesures $\nu^0 = \int \nu_x^0 \, \mathrm{d}\pi(x)$ et

$\nu^d = \int \nu_x^d \, d\pi(x)$ sont $\widetilde{P}$-invariantes. Donc ν^0 et ν^d sont proportionnelles à ν d'après a). Le théorème 11.10 montre que $\nu_x^d = 0$ et $\nu_x^0 \geq \varepsilon\delta_{\xi(x)}$, donc $\nu_x = \nu_x^0$.

c) Les atomes de ν_x de masse maximale $m(x)$ sont en nombre fini $r(x)$ et on peut encore décomposer ν_x sous la forme :

$$\nu_x = \nu_x^m + \nu_s^n$$

où les atomes de ν_x^n sont de masse inférieure à $m(x)$ et ceux de ν_x^m de masse $m(x)$. L'équation $a^x \cdot \nu_{Tx} = \nu_x$ implique :

$$a^x \cdot \nu_{Tx}^m = \nu_x^m \qquad a^x \cdot \nu_{Tx}^n = \nu_x^n.$$

Comme en b), on conclut que $\int \nu_x^m \, d\pi(x)$ est proportionnelle à ν, de même que $\int \nu_x^n \, d\pi(x)$. Comme elles sont étrangères et dominent $\varepsilon \int \delta_{\xi(x)} \, d\pi(x)$, on conclut que $\nu_x^n = 0$ et $\nu_x = \nu_x^m$, π-presque partout. L'équation $a^x \cdot \nu_{Tx}^m = \nu_x^m$ donne $m(Tx) = m(x), n(Tx) = n(x)$, et par ergodicité de T, $m(x) = m = \mathrm{C^{te}}, r(x) = r = \mathrm{C^{te}}$, et donc $\nu_x = r^{-1}\sum_{i=1}^r \delta_{\xi_i}(x)$. □

Fin de la démonstration du théorème 11.1. — On prouve d'abord que, avec les notations du corollaire 11.14 on a $r = 1$. Au lieu de considérer Δ, on considère Δ^r, l'espace compact des parties de Δ formées de r drapeaux de même origine; ces drapeaux sont distincts ou non mais en ce cas ils sont comptés avec leurs multiplicités. Alors Δ^r est fibré au-dessus de X, comme Δ l'était au-dessus de X, la nouvelle fibre au-dessus de $x \in X$ étant le produit symmétrisé de r copies de l'ensemble des drapeaux d'origine x. Les transformations projectives s'étendent naturellement à Δ^r ainsi que le noyau P :

$$\widetilde{P}_r\varphi(\eta) = \sum_a p(x,a)\varphi(a \cdot \eta)$$

où $\eta = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r\}$ est un ensemble non ordonné de r drapeaux de même origine. On pose avec les notations du corollaire précédent :

$$\eta(x) = \{\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots, \xi_r(x)\}.$$

L'application $x \mapsto \eta(x)$ de X dans Δ^r vérifie donc $a^x \cdot \eta(Tx) = \eta(x)$ Il en découle comme ci-dessus (lemme 11.6) que la mesure $\lambda = \int \delta_x \times \delta_{\eta(x)} \, d\pi(x)$ est $\widetilde{P}_r$-invariante.

D'autre part, la diagonale Δ_1^r de Δ^r est invariante par les transformations projectives et compacte. Comme le noyau $\widetilde{P}_r$ opère continûment sur cette diagonale, il admet une mesure invariante μ portée par $\Delta_1^r \subset \Delta^r$. Pour montrer que $r = 1$, il suffit donc de voir que $\widetilde{P}_r$ admet une unique mesure invariante sur Δ^r, c'est-à-dire l'analogue du théorème 11.10 précédent.

Au lieu de donner une démonstration détaillée, observons que le théorème 11.10 reposait sur les faits suivants :

a) l'existence pour un drapeau donné L et la variété subordonnée $\widehat{L}$, d'une suite contractante $\gamma_n \in S'$ telle que $\gamma_n \cdot \xi$ converge vers $\alpha \notin \widehat{L}$ sauf si ξ appartient à l'ensemble critique de γ_n,

b) le fait que toute probabilité ν sur Δ qui est $\widetilde{P}$-invariante satisfait $\nu(\widehat{L}) < 1$ pour toute variété subordonnée $\widehat{L}$ donnée à l'avance.

c) le fait que, pour une variété subordonnée $\widehat{L}$ et un drapeau $\xi \in \Delta$ il existe $\gamma \in S'$, avec $\gamma \cdot \xi \notin \widehat{L}$.

Dans Δ, les ensembles critiques, ensemble de discontinuité des applications quasi-projectives, sont des variétés subordonnées à des drapeaux. Ici, dans Δ^r, si $\widehat{L}^r$ est un ensemble critique d'une suite d'applications projectives, $\widehat{L}^r$ est égal à l'ensemble des $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r\}$, tels que l'un des ξ_i $(1 \leq i \leq r)$ appartienne à une sous-variété $\widehat{L}$ subordonnée à un drapeau L. La propriété c) correspond donc ici à la propriété que pour une variété subordonnée $\widehat{L}$, et des drapeaux complets ξ_i $(1 \leq i \leq r)$, il existe $\gamma \in S'$ tel que $\gamma \cdot \xi_i \notin \widehat{L}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Elle est bien réalisée car S' est dense au sens de Zariski dans $\mathrm{Sl}(d+1, \mathbb{R})$. La propriété a) découle de l'existence de suites contractantes et de c). Elle est donc encore réalisée ici, d'après la densité de S'. La propriété b) est conséquence formelle de c) et de l'équation de $\widetilde{P}$-invariance. Elle est donc valide ici. Le corollaire 11.14 implique alors $\nu_x = \delta_{\xi(x)}$. La martingale $a_1 \cdots a_n \cdot \nu'_{\omega_n}$ converge alors π-presque partout vers la mesure $\delta_{\xi(x)}$.

Si $\xi'(x)$ satisfait $\xi'(a \cdot x) = a \cdot \xi'(x)$ dès que $p(x, a) > 0$, la mesure $\nu = \xi'(\pi)$ sur Δ satisfait $\nu\widetilde{P} = \nu$. L'unicité de ν implique $\xi' = \xi$ π-presque partout. Afin de montrer que la suite $a_1 \cdots a_n$ est contractante vers $\xi(x)$, il suffit de voir que toute valeur d'adhérence τ_x d'une suite fondamentale extraite est de rang 1. Soit $\widehat{L}_x$ l'ensemble critique d'une telle sous-suite $a_1 \cdots a_{n_k}$. Par continuité de τ_x en dehors de $\widehat{L}_x$, et d'après la première partie de la preuve, on a :

$$\delta_{\xi(x)} = \lim_k a_1 \cdots a_{n_k} \cdot \nu_{\omega_{n_k}} \geq \tau_x \cdot \nu'|_{\widehat{L}_x^c}$$

où $\nu' \in M_\nu$ est valeur d'adhérence $\nu_{\omega_{n_k}}$. Comme $\nu'|_{\widehat{L}_x}$ est de masse non nulle, et n'est pas portée par un ensemble de la forme $\widehat{L}$, on a :

$$\operatorname{Im} \tau_x = \xi(x).$$

Donc τ_x est de rang 1 et pour toute mesure m ne chargeant pas d'ensemble de la forme $\widehat{L}$, on a $\lim_k a_1 \cdots a_{n_k} \cdot m = \tau_x \cdot m = \delta_{\xi(x)}$. □

COROLLAIRE 11.15. — *Soit $\widetilde{m}$ la mesure de Lebesgue sur $\Delta = X \times \mathcal{F}_{d-1}$, $\widetilde{\pi} = \int \delta_{\xi(x)} \, \mathrm{d}\pi(x)$. Alors $\widetilde{P}^n \widetilde{m}$ converge vaguement vers $\widetilde{\pi}$.*

Démonstration. — Soit m^{d-1} la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{F}_{d-1}$ et considérons d'abord la mesure $\pi^d = \pi \times m^{d-1}$ qui est équivalente à $\widetilde{m}$. On a :

$$\begin{aligned} \widetilde{P}^n \pi^d &= \int a_{-n+1} \cdots a_0 \cdot (\delta_x \times m^{d-1}) \, \mathrm{d}P_x(\omega) \, \mathrm{d}\pi(x) \\ &= \int a_1 \cdots a_n \cdot (\delta_{T^n x} \times m^{d-1}) \, \mathrm{d}\pi(x), \end{aligned}$$

d'après l'invariance de $\widehat{\pi} = \int P_x \times \delta_x \, \mathrm{d}\pi(x)$ sous $\widehat{T}$ et en notant $a_k = a_k(x)$ pour $k > 0$.

Considérons les mesures $\delta_{T^n x} \times m^{d-1} = \pi^d_{T^n x}$ et la suite d'applications projectives $a_1 \cdots a_n$, et montrons que π-presque partout,

$$\lim_n a_1 \ldots a_n \cdot \pi^d_{T^n x} = \delta_{\xi(x)}.$$

En raison de la positivité des matrices $S_n = A_1 \cdots A_n$, il est clair que pour tout $y = (x, 1) \in I^d \times \{1\}$, on a $\|S_n y\| \geq q_n$ et donc $\lim_n \|S_n y\| / \|S_n\| > 0$ sur I^d. Comme la suite $a_1 \cdots a_n$ est contractante vers $\xi(x)$, le drapeau associé à n'importe quelle suite fondamentale $a_1 \cdots a_{n_k}$ extraite est un drapeau complet. L'observation précédente montre que l'hyperplan de ce drapeau complet ne coupe pas I^d. Il en découle que les mesures π^d_x, $x \in I^d$, ne chargent pas l'ensemble critique de la suite fondamentale précédente. Comme la même propriété est vraie pour leurs valeurs d'adhérence, on a par continuité $\lim_k a_1 \cdots a_{n_k} \cdot \pi^d_{x_k} = \delta_{\xi(x)}$ et $\lim_n a_1 \cdots a_n \cdot \pi^d_{T^n x} = \delta_{\xi(x)}$. Par convergence dominée, on a $\lim_n \widetilde{P}^n \pi^d = \int \delta_{\xi(x)} \, \mathrm{d}\pi(x) = \widetilde{\pi}$.

Si $\pi = hm$, le même calcul donne :

$$\widetilde{P}^n \widetilde{m} = \int a_1 \cdots a_n \cdot \pi^d_{T^n x} \frac{1}{h(T^n x)} \, \mathrm{d}\pi(x).$$

Fixons $\varphi \in C^+(\Delta)$ et posons

$$\varphi_n(x) = \left[a_1 \cdots a_n \cdot \pi^d_{T^n x}\right](\varphi).$$

On a donc $\lim_n \varphi_n(x) = \varphi[\xi(x)]$ π-presque partout. Cette convergence a aussi lieu dans $L^1(\pi)$ car $|\varphi_n(x)| \leq |\varphi|_\infty$. Évaluons alors $\widetilde{P}^n \pi^d - \widetilde{P}^n \widetilde{m}$:

$$(\widetilde{P}^n \pi^d - \widetilde{P}^n \widetilde{m})(\varphi) = \int \varphi_n(x) \Big[1 - \frac{1}{h(T^n x)}\Big] \, \mathrm{d}\pi(x).$$

Introduisant l'opérateur adjoint de T, on obtient :

$$(\widetilde{P}^n \pi^d - \widetilde{P}^n \widetilde{m})(\varphi) = \int P^n(\varphi_n) \Big[1 - \frac{1}{h}\Big] \, \mathrm{d}\pi.$$

Puisque $\lim_n \varphi_n(x) = \varphi[\xi(x)] = v(x)$ dans L^1_π et que $\lim_n P^n v = \pi(v)$, on obtient :

$$\lim_n \big[\widetilde{P}^n \pi^d - \widetilde{P}^n \widetilde{m}\big](\varphi) = \pi(v) \int \Big[1 - \frac{1}{h}\Big] \, \mathrm{d}\pi = 0.$$

D'où $\lim_n \widetilde{P}^n \widetilde{m} = \widetilde{\pi}$. □

Avant d'aller plus loin, on remarque qu'en dimension $d = 2$, le support de la mesure $\widetilde{\pi}$ est Δ. On énonce aussi :

CONJECTURE. — *En dimension d quelconque, on considère l'action du semi-groupe S' sur Δ. Alors pour tout ξ de Δ, $\overline{S' \cdot \xi} = \Delta$.*

Ceci est équivalent au fait que le support de la mesure $\widetilde{\pi}$ est Δ. La conjecture revient à montrer que les points $\widetilde{T}$-périodiques sont denses dans Δ.

Pour le moment, on ne sait montrer ce résultat qu'en dimension $d = 2$.

PROPOSITION 11.16. — *Pour $d = 2$, l'image de l'application $x \in X \mapsto \xi_x \in \Delta$ est dense dans Δ.*

Remarque. — Cette proposition montre alors que le support de la mesure $\widetilde{\pi}$ est Δ.

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'il existe une matrice M_a, a dans $\mathcal{A}_2$ qui a une valeur propre dominante réelle positive et une valeur propre de la forme $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\mathrm{e}^{i\theta}$ qui n'est pas racine de l'unité. En effet, si on définit les drapeaux

$$\xi_{p,m} = (M_{a_1} \cdots M_{a_k})^p M_a^m \cdot (0, e_1) = (x_{p,m}, u_{p,m}).$$

Pour p assez grand, m quelconque, le point $x_{p,m}$ est aussi proche du point périodique qui a pour développement $\overline{(a_1 \ldots a_k)}$ et les vecteurs $(u_{p,m})_m$ forment une suite dense de $\mathbb{P}^1$.

On considère les matrices $M_n = M_a$ avec $a = (0, n)$ et $n > 0$. Le quadrant $\{x \in \mathbb{R}^3\,;\ x_i \geq 0\}$ est invariant par M_n ; le théorème de Perron-Frobenius dit alors que M_n a une valeur propre réelle positive dominante et que les autres sont en module strictement plus petites. On a :

$$P_n(x) = \det(M_n - xI_3) = -(x^3 - nx^2 - 1),$$
$$P_n(n) = 1, \quad P_n(n+1) = -n^2 - 2n < 0.$$

Il existe donc α dans $]n, n+1[$ tel que $P_n(\alpha) = 0$. Comme $P_n'(x) = -2x(x-n)$ et comme $P_n(0) = 1$, P_n a comme unique racine réelle α et les deux autres racines sont complexes conjuguées. On va maintenant montrer que les racines non réelles de P_n ne sont pas de la forme $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\mathrm{e}^{i\theta}$ racine de l'unité. On suppose le contraire : il existe un réel positif r strictement plus petit que α et deux entiers p et q premiers entre eux, tel que $r\,\mathrm{e}^{i2\pi p/q}$ soit racine de P_n. Alors,

$$r^3\,\mathrm{e}^{i6\pi p/q} - nr^2\,\mathrm{e}^{i4\pi p/q} = 1.$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on trouve :

$$r^3 \cos(6\pi p/q) - nr^2 \cos(4\pi p/q) = 1, \tag{1}$$
$$r^3 \sin(6\pi p/q) - nr^2 \sin(4\pi p/q) = 0. \tag{2}$$

• L'équation (1) entraîne que r ne peut pas être nul. Alors l'équation (2) entraîne que $\sin(6\pi p/q)$ et $\sin(4\pi p/q)$ ne peuvent pas être nuls car sinon $\mathrm{e}^{i\theta}$ vaudrait -1 ou 1. Donc p/q n'appartient ni à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, ni à $\frac{1}{3}\mathbb{Z}$.

• L'équation (2) donne :

$$r = \frac{n \sin(4\pi p/q)}{\sin(6\pi p/q)}.$$

En remplaçant dans (1), on obtient

$$n^3 \big[\sin(4\pi p/q)\big]^2 \sin(2\pi p/q) = -\big[\sin(6\pi p/q)\big]^3. \tag{3}$$

Si n est grand, cette dernière équation n'est vraie que si les sinus sont nuls. Mais $\sin(2\pi p/q)$ ne pas être nul car p et q sont premiers entre eux, $\sin(4\pi p/q)$ et $\sin(6\pi p/q)$ ne peuvent pas être nuls car p/q n'appartient ni à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, ni à $\frac{1}{3}\mathbb{Z}$. $\square$

12. Propriétés de certains noyaux harmoniques.

12.1. Notations.

Afin de dégager le rôle des diverses conditions qui apparaissent dans le paragraphe 13, on va se placer dans une situation plus générale qui concerne deux espaces compacts X et Y, une famille dénombrable A d'applications continues de X dans X. On se donne aussi une application α de A vers le semi-groupe des applications continues de Y dans Y et on note S le semi-groupe engendré par $\alpha(A)$. On se donne aussi une famille de fonctions positives $p(x,a)$ continues pour chaque a de A et telle que $\sum_{a\in A} p(x,a) = 1$. Au paragraphe 13, on aura $X = \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}d} W_\sigma, Y = \mathcal{F}_d$ et S sera formé de transformations projectives.

On supposera ici que $X = \bigcup_\sigma X_\sigma$ est une réunion finie disjointe de parties ouvertes et fermées et que A opère aussi sur X, au sens où chaque a de A définit une transformation continue d'une partie $X_a = \mathrm{Dom}\, a$ de X, réunion de certains X_σ dans X. On suppose que $\mathrm{Dom}\, a = \{x\,;\, p(x,a) > 0\}$ et que l'image de chaque X_σ inclus dans $\mathrm{Dom}\, a$ est contenue dans un unique $X_{\sigma'}$ (voir la remarque 2.4). On notera l'action de $a \in A$ sur $x \in X_\sigma$ par $a \cdot x$ et celle de a sur Y par $\alpha(a)$.

DÉFINITION 12.1. — *Soient X, Y, A, $p(x,a)$ comme ci-dessus et ν_x un noyau markovien de X dans Y. On dira que $x \mapsto \nu_x$ est p-harmonique si l'on a :*

$$\forall x \in X, \quad \nu_x = \sum_{a\in A} p(x,a)\alpha(a)\nu_{a\cdot x}. \tag{1}$$

On va s'intéresser surtout aux solutions de (1) qui sont continues en variation, c'est-à-dire :

$$\lim_{x'\to x} \|\nu_{x'} - \nu_x\| = 0.$$

Pour ces solutions on va s'intéresser aux supports Y_x de ν_x et on souhaite montrer la « non-dégérescence » de ν_x relativement à certaines familles spéciales de fermés que l'on précisera au paragraphe 12.3 et qui seront des sous-variétés algébriques de $\mathcal{F}_d$ au paragraphe 13. De telles équations interviennent également dans [GuLeP].

12.2. Construction de noyaux p-harmoniques continus en variation.

Comme au paragraphe 2.4, on définit $p(x,\omega_n)$ où $\omega_n = (a_1, a_2, \cdots a_n)$ est x-admissible :

$$p(x,\omega_n) = p(x,a_n)p(a_n \cdot x, a_{n-1}) \cdots p(a_2 \cdots a_n \cdot x, a_1).$$

La nullité de $p(x,\omega_n)$ ne dépend que de X_σ et de ω_n, (x est dans X_σ). On a alors le :

THÉORÈME 12.2. — *Avec les notations précédentes, supposons que pour tout x de X,*

$$\lim_{y\to x} \sup_n \sum_{\omega_n} \big|(p(x,\omega_n) - p(y,\omega_n)\big| = 0.$$

Alors il existe un noyau p-harmonique de X dans Y qui est continu en variation.

Démonstration. — On définit un opérateur $\mathcal{P}$ sur les noyaux markoviens continus de X dans Y par

$$(\mathcal{P}\nu)_x = \sum_a p(x,a)\alpha(a)\nu_{a\cdot x}.$$

Alors on vérifie que

$$(\mathcal{P}^n\nu)_x = \sum_{\omega_n} p(x,\omega_n)\alpha(a_n)\cdots\alpha(a_1)\nu_{a_1\cdots a_n\cdot x}.$$

Prenons en particulier pour ν_x un noyau constant $\nu_x = m$. Alors,

$$(\mathcal{P}^n m)_x = \sum_{\omega n} p(x,\omega_n)\alpha(a_n)\cdots\alpha(a_1)m$$

et

$$\big\|(\mathcal{P}^n m)_x - (\mathcal{P}^n m)_y\big\| \le \sum_{\omega_n} \big|p(x,\omega_n) - p(y,\omega_n)\big|.$$

Considérons alors la suite de noyaux $\nu_x^n = n^{-1}\sum_1^n (\mathcal{P}^k m)_x$, et munissons l'espace des probabilités sur Y de la topologie vague. Alors

$$\|\nu_x^n - \nu_y^n\| \le \sup_k \sum_{\omega_k} \big|p(x,\omega_k) - p(y,\omega_k)\big|,$$

la suite de fonctions $x \mapsto \nu_x^n$ est équicontinue par hypothèse, et est à valeurs dans un espace métrique compact. D'après le théorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous-suite $\nu_x^{n_k}$ qui soit convergente en topologie vague : $\lim_k \nu_x^{n_k} = \nu_x$. Or,

$$(\mathcal{P}\nu^n)_x = \nu_x^n + \frac{1}{n}\left[(\mathcal{P}^{n+1}m)_x - m\right],$$

et à la limite $(\mathcal{P}\nu)_x = \nu_x$. D'autre part, pour toute fonction continue φ sur Y, on a :

$$\left|\nu_x^n(\varphi) - \nu_y^n(\varphi)\right| \leq \|\varphi\|_\infty \sup_k \sum_{\omega_k} \left|p(x,\omega_k) - p(y,\omega_k)\right|,$$

$$\left|\nu_x(\varphi) - \nu_y(\varphi)\right| \leq \|\varphi\|_\infty \sup_n \sum_{\omega_n} \left|p(x,\omega_n) - p(y,\omega_n)\right|.$$

D'où $\|\nu_x - \nu_y\| \leq \sup_n \sum_{\omega_n} |p(x,\omega_n) - p(y,\omega_n)|$. On a donc ainsi construit un noyau $x \mapsto \nu_x$ qui est continu en variation et qui satisfait :

$$\forall x \in X, \quad \nu_x = \sum_a p(x,a)\alpha(a)\nu_{a\cdot x}. \qquad \square$$

12.3. Irréductibilité des noyaux p-harmoniques.

Si Y est une variété algébrique projective sur laquelle opère un groupe de transformations projectives, des familles de fermés de Y particulières s'introduisent, et on est amené à étudier si une mesure ν_x donne une masse positive à l'un de ces fermés spéciaux. Ceci conduit à formaliser la situation pour S et Y de la façon suivante, en s'inspirant de la topologie de Zariski et de la dynamique topologique. Soit $\mathcal{T}$ la famille des fermés d'une nouvelle topologie sur Y. Rappelons que Y est dit noethérien si toute famille strictement décroissante de fermés est finie. Un fermé Y' de Y est dit irréductible s'il ne peut s'écrire $Y' = Z \cup Z'$ avec $Z, Z' \in \mathcal{T}$ et $Z \neq \emptyset$, $Z' \neq \emptyset$. On appelle dimension de Y la plus grande longueur possible des suites strictement décroissantes de fermés irréductibles. Si la dimension de Y est finie, tout élément Y' de $\mathcal{T}$ est réunion d'un nombre fini d'éléments irréductibles de $\mathcal{T}$ appelés composantes irréductibles de Y'. On note $A' \subset A$ l'ensemble des a de A tels que $p(x,a) > 0$ pour tout x de X (ou $\operatorname{Dom} a = X$) et on note S' le semi-groupe de S engendré par A'. On fera sur (p, α, Y) les hypothèses suivantes :

a) $\dim Y < +\infty$ et Y est irréductible;

b) pour tout F de $\mathcal{T}$ irréductible et tout s de S, $s^{-1}F$ appartient à $\mathcal{T}$ et $s^{-1}F$ est irréductible de même dimension que F;

c) tout F de $\mathcal{T}$ est un fermé de la topologie d'espace compact de Y ;

d) S' est totalement irréductible sur $(Y, \mathcal{T})$ au sens où les relations $F \in \mathcal{T}$, $F \neq \emptyset$ et $s^{-1}F \subset F$ pour tout $s \in S'$ impliquent $F = Y$.

DÉFINITION 12.3 (*cf.* [CR]). — *On dira qu'un ensemble F de X est un p-fermé invariant si F est fermé et si de plus les conditions $x \in F$, $p(x, a) > 0$ impliquent $a \cdot x \in F$. On dira que l'action de A sur X est p-minimale si ϕ et X sont les seuls ensembles p-fermés invariants.*

On a alors le :

THÉORÈME 12.4. — *Soit A un ensemble dénombrable de $C(X, X)$, soit α une application de A vers $C(Y, Y)$, S le semi-groupe engendré par $\alpha(A)$. Soit $p(x, a)$ une famille de fonctions sur $X \times A$, comme ci-dessus, et soit $x \mapsto \nu_x$ un noyau markovien p-harmonique continu en variation. On suppose Y muni d'une structure d'espace noethérien $(Y, \mathcal{T})$, vérifiant les conditions a, b, c, d ci-dessus. Alors si l'action de A sur X est p-minimale les conditions $F \in \mathcal{T}$, $x \in X$, $\nu_x(F) > 0$ impliquent $F = Y$.*

La démonstration découlera de deux lemmes. Le lemme suivant montre le rôle de la condition de «type noethérien» pour une mesure de probabilité.

LEMME 12.5. — *Soit ν une mesure de probabilité sur l'espace compact et noethérien Y, d_ν la dimension minimale des fermés F de $\mathcal{T}$ tels que $\nu(F) > 0$. Alors pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des éléments H de $\mathcal{T}$ irréductibles tels que* $\dim \mathrm{H} = \mathrm{d}_\nu$ *et $\nu(H) \geq \alpha$ est fini.*

Démonstration. — Observons que si H et H' de $\mathcal{T}$ sont irréductibles de dimension d_ν et si $H \neq H'$, on a $\nu(H \cap H') = 0$. En effet, si $H \cap H' \neq \phi$, $H \cap H' \neq H$, le fermé $H \cap H' \subset H$ est de dimension strictement inférieure à d_ν car H est irréductible; donc $\nu(H \cap H') = 0$. Si alors H_i (où $i \in I$) est un ensemble fini de fermés irréductibles distincts de dimension d_ν avec $\nu(H_i) \geq \alpha$, on a

$$1 \geq \nu\Big(\bigcup_{i \in I} H_i\Big) = \sum_{i \in I} \nu(H_i) \geq \alpha \operatorname{card} I,$$

car $\nu(H_i \cap H_j) = 0$. Alors $\operatorname{card} I \leq \alpha^{-1}$ et il y a donc au plus $[\alpha^{-1}]$ fermés irréductibles de dimension d_ν et de masse α au moins. □

Remarque. — Il découle du lemme 12.5 que la borne supérieure m_ν des nombres $\nu(H)$ pour $H \in \mathcal{T}$ irréductible et de dimension d_ν est atteinte ; il existe donc H dans $\mathcal{T}$, irréductible avec $\nu(H) = m_\nu$, et l'ensemble des H de ce type est fini. De plus il existe $\varepsilon > 0$, tel que si H est irréductible de dimension d_ν, on a $\nu(H) = m_\nu$ ou $\nu(H) \leq m_\nu - \varepsilon$.

DÉFINITION 12.6. — *Avec les notations du lemme* 12.5, *on appellera $\mathcal{T}$-atome principal de ν tout fermé irréductible H de dimension d_ν tel que*

$$\nu(H) = m_\nu = \sup\{\nu(H)\,;\ H \in \mathcal{T},\ H \neq Y\}.$$

On notera $\mathcal{W}_\nu$ la réunion (finie) des $\mathcal{T}$-atomes principaux de ν.

LEMME 12.7. — *Soit $\mathcal{H}$ une famille de fermés de Y, $x \mapsto \nu_x$ un noyau p-harmonique continu en variation et $h(x) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \nu_x(H)$. Alors la fonction h est continue. Si de plus $\mathcal{H}$ vérifie la condition :*

$$\forall H \in \mathcal{H},\ \forall s \in S, \quad s^{-1}(H) \in \mathcal{H},$$

et si A est p-minimal sur X, alors h est constante.

Démonstration. — Pour H fixé, $\nu_x(H)$ est fonction continue de x, car le noyau $x \mapsto \nu_x$ est continu en variation. Pour ε fixé et x' assez voisin de x fixé on a donc :

$$-\varepsilon < \nu_{x'}(H) - \nu_x(H) \leq \varepsilon \ \text{ et } \ \nu_{x'}(H) < \varepsilon + \nu_x(H) \leq \varepsilon + h(x).$$

On a donc aussi $h(x') \leq \varepsilon + h(x)$ de même $h(x) \leq \varepsilon + h(x')$, ce qui justifie la continuité de h. Comme le noyau est p-harmonique, on a :

$$\nu_x(H) = \sum_{a\in A} p(x,a)\nu_{a\cdot x}\big(\alpha(a)^{-1}H\big)$$

pour tout H de $\mathcal{H}$. D'où, puisque $\alpha(a)^{-1}H \in \mathcal{H}$,

$$h(x) \leq \sum_{a\in A} p(x,a)h(a\cdot x).$$

Soit x_0 dans X vérifiant $h(x_0) = \sup_{x\in X} h(x)$. Comme $\sum_a p(x,a) = 1$, il en découle $h(a\cdot x_0) = h(x_0)$ si $p(x_0,a) > 0$. L'ensemble

$$X_0 = \{x\,;\ h(x) = h(x_0)\} \subset X$$

est donc un p-fermé invariant. Par p-minimalité de l'action de A sur X, il est égal à X : $h(x) = h(x_0)$. □

Démonstration du théorème 12.4. — Soit $\mathcal{W}(x)$ la réunion des $\mathcal{T}$-atomes principaux de ν_x et

$$d(x) = \dim \mathcal{W}(x), \quad \mu(x) = \nu_x\big[\mathcal{W}(x)\big].$$

Soit $n(x)$ le nombre des $\mathcal{T}$-atomes principaux de ν_x et $m(x)$ la masse de l'un quelconque de ces atomes : par définition de μ, on a $\mu(x) = n(x)m(x)$. On va prouver que $\mathcal{W}(x) = Y$, $n(x) = 1$ et $m(x) = 1$.

Soit $\delta = \inf_{x \in X} d(x) = d(x_0)$ et $\mathcal{H}$ la famille des éléments irréductibles de $\mathcal{T}$ de dimension δ. On pose :

$$h(x) = \sup_{H \in \mathcal{H}} \nu_x(H).$$

Par hypothèse si $H \in \mathcal{H}$, on a $s^{-1}(H) \in \mathcal{H}$. Le lemme 12.7 permet de conclure $h(x) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$. Le choix de δ donne $h(x_0) = m(x_0) > 0$ et donc $h(x) = m(x_0) > 0$, pour tout $x \in X$. La définition de δ implique donc aussi $d(x) = \delta$ et la définition de $h(x)$ donne $m(x) = h(x) = m$ pour tout x.

Puisque ν_x est une probabilité on a $n(x)m \leq 1$ et donc $n(x)$ est bornée. Posons :

$$k = \sup_x n(x) = n(x_1)$$

et considérons l'ensemble $\mathcal{H}'$ des réunions finies L de k éléments irréductibles H de $\mathcal{T}$. On définit la fonction :

$$h'(x) = \sup_{L \in \mathcal{H}'} \nu_x(L).$$

Les hypothèses du lemme 12.7 sont satisfaites par $\mathcal{H}'$ pour l'action de S sur $\mathcal{H}'$: on obtient $h'(x) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = c = h'(x_1)$. Par définition de k et x_1, il est clair que

$$h'(x_1) = \nu_{x_1}\big[\mathcal{W}(x_1)\big] = \sup_x \nu_x\big[\mathcal{W}(x)\big] = km.$$

La condition $h'(x) = km$ implique clairement :

$$n(x) = k, \quad \nu_x\big[\mathcal{W}(x)\big] = km$$

pour tout x. Autrement dit, le nombre des atomes principaux de ν_x est constamment égal à k et leur masse vaut m. L'équation :

$$km = \nu_x\big[\mathcal{W}(x)\big] = \sum_a p(x,a)\nu_{ax}\big[\alpha(a)^{-1}\mathcal{W}(x)\big],$$

et la condition :

$$\nu_{ax}\big[\alpha(a)^{-1}\mathcal{W}(x)\big] \le h'(a\cdot x) = km,$$

impliquent :

$$\nu_{ax}\big[\alpha(a)^{-1}\mathcal{W}(x)\big] = km, \quad \alpha(a)^{-1}\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(ax)$$

pour tout x tel que $p(x,a) > 0$.

On montre maintenant que la fonction $x \mapsto \mathcal{W}(x)$ de X dans $\mathcal{H}'$ est localement constante. Soit x fixé et

$$\lambda(x) = \sup\big\{\nu_x(H)\,;\ H \in \mathcal{H},\ H \not\subset \mathcal{W}(x)\big\}.$$

D'après la remarque suivant le lemme 12.5, on a $\lambda(x) < m$. Soit alors x' assez voisin de x pour que l'on ait $\|\nu_{x'} - \nu_x\| < m - \lambda(x)$, et soit $F_{x'}$ l'une quelconque des composantes irréductibles de $\mathcal{W}(x')$. On a :

$$m - \nu_x(F_{x'}) = \big|\nu_x(F_{x'}) - \nu_{x'}(F_{x'})\big| \le \|\nu_x - \nu_{x'}\| < m - \lambda(x).$$

D'où $\nu_x(F_{x'}) > \lambda(x)$. Par définition de $\lambda(x)$ on obtient que $F_{x'}$ est égal à l'une des composantes irréductibles de $\mathcal{W}(x)$; comme $n(x) = n(x')$, il en découle $\mathcal{W}(x') = \mathcal{W}(x)$. Alors $\mathcal{W} = \bigcup_{x\in X}\mathcal{W}(x)$ appartient à $\mathcal{T}$ comme réunion finie d'éléments de $\mathcal{T}$ et satisfait :

$$\forall a \in A', \quad \alpha(a)^{-1}\mathcal{W} = \bigcup_{x\in X}\alpha(a)^{-1}\mathcal{W}(x) = \bigcup_{x\in X}\mathcal{W}(ax) \subset \mathcal{W}.$$

On a aussi $s^{-1}\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$ pour tout $s \in S'$. Les propriétés de S' et $\mathcal{T}$ impliquent alors $\mathcal{W}(x) = Y$, et l'irréductibilité de Y donne $\mathcal{W}(x) = Y$, $n(x) = 1$, $m(x) = \nu_x(Y) = 1$. □

13. Application à la simplicité du spectre de Lyapunov.

On considère ici les produits de matrices :

$$S_n^{-1}(x) = A^{-1}(T^{n-1}x)\cdots A^{-1}(x)$$

dont l'étude est cruciale pour celle des exposants de la différentielle. Le système dynamique de base est (X, T, π) et il est ergodique.

THÉORÈME 13.1. — *Les exposants du produit de matrices stationnaires :*

$$S_n^{-1}(x) = A^{-1}(T^{n-1}x) \cdots A^{-1}(x)$$

sont tous différents.

Avant de montrer cet énoncé, nous introduisons quelques notations. Si le drapeau $\xi \in \mathcal{F}_d$ est repéré par la suite de multivecteurs $(x_1, x_1 \wedge x_2, \ldots, x_1 \wedge \cdots \wedge x_d)$, on note $\sigma_i(g, \xi)$ le cocycle défini par

$$\sigma_i(g, \xi) = \frac{\|\Lambda^{i-1} g(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1})\| \cdot \|\Lambda^{i+1} g(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i+1})\|}{\|\Lambda^i g(x_1 \wedge \cdots \wedge x_i)\|^2}.$$

On note aussi $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \cdots \geq \lambda'_{d+1}$ la suite des exposants de S_n^{-1}, répétés avec leurs multiplicités, et $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r$ les valeurs distinctes ($\lambda'_1 = \lambda_1$ et $\lambda_r = \lambda'_{d+1}$).

DÉFINITION 13.2. — *Soit* (Y, S, λ) *un système dynamique inversible,* $\Sigma_n(x)$ *un produit de matrices stationnaires d'ordre* $d+1$, *satisfaisant le théorème ergodique multiplicatif et soit* $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r$ *la suite de ses exposants caractéristiques.*

On appelle drapeau contractant (respectivement dilatant) le drapeau C_y, *de sous-espaces* $C_y^1 \supset C_y^2 \supset \cdots \supset C_y^{r-1}$ *défini par*

$$C_y^{k-1} = \Big\{ v \in \mathbb{R}^{d+1};\ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|\Sigma_n(y) v\| \leq \lambda_k \Big\}$$

pour $2 \leq k \leq r$, *respectivement le drapeau* D_y, *de sous-espaces* $D_y^r \supset \cdots \supset D_y^2 \supset D_y^1$ *défini par*

$$D_y^{k-1} = \Big\{ v \in \mathbb{R}^{d+1};\ \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{|n|} \log \|\Sigma_n(y) v\| \leq -\lambda_k \Big\}.$$

La démonstration du théorème va résulter des deux lemmes suivants où l'on note L_x le drapeau contractatnt de $\Sigma_n(x)$:

LEMME 13.3. — *Il existe un borélien* $X' \subset X$ *de* π*-mesure* 1, *tel que pour tout drapeau complet non subordonné à* L_x ($\xi \notin \widehat{L}_x$), *on ait :*

$$\forall x \in X', \quad \lim_n \frac{1}{n} \log \sigma_i\big(S_n^{-1}(x), \xi\big) = \lambda'_{i+1} - \lambda'_i.$$

Démonstration. — Si ξ est repéré par $(x_1, x_1 \wedge x_2, \ldots, x_1 \wedge \ldots \wedge x_d)$, le théorème ergodique multiplicatif implique que, si le sous-espace engendré par $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ a une intersection réduite à $\{0\}$ avec L_x^k, on a π-presque partout,

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \big\| \Lambda^k S_n^{-1}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) \big\| = \lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_k'.$$

On prendra pour X' l'ensemble de validité de cette formule. Donc, si $\xi \notin \widehat{L}_x$ et $x \in X'$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \sigma_k \big[S_n^{-1}(x), \xi \big] = \lambda_{k+1}' - \lambda_k'. \qquad \square$$

LEMME 13.4. — *On considère l'action de $a \in \overline{A}_d$ sur $\mathcal{F}_d$ définie par l'action projective de a^{-1}, l'action de a sur X étant celle considérée plus haut. Il existe alors un noyau p-harmonique, de X dans $\mathcal{F}_d$ qui est continu en variation :*

$$\mu_x = \sum_a p(x,a) a^{-1} \cdot \mu_{a \cdot x}.$$

Alors la transformation $\overline{T}$ de $X \times \mathcal{F}_d$ dans lui-même définie par

$$\overline{T}(x,\xi) = \big(Tx, a^{-1}(x)\xi \big)$$

laisse invariante la mesure

$$\overline{\pi} = \int_X \delta_x \times \mu_x \, \mathrm{d}\pi(x)$$

De plus on a, pour $\overline{\pi}$-presque tout (x,ξ) :

$$\lim \frac{1}{n} \log \sigma_i \big(S_n^{-1}(x), \xi \big) < 0.$$

Démonstration. — Ici les notations sont celles introduites en III.11 et III.12 avec $\alpha(a) = a^{-1}$. L'existence de μ_x découle directement du théorème 12.2, car on a :

$$\sum_{\omega_n} \big| p(x,\omega_n) - p(y,\omega_n) \big| = \sum_{\omega_n} \left| \frac{p(x,\omega_n)}{p(y,\omega_n)} - 1 \right| p(y,\omega_n)$$

avec de plus $|p(x,\omega_n)/p(y,\omega_n) - 1| \leq c\delta(x,y)$ en vertu de la proposition 2.6 ; ces relations impliquent :

$$\sum_{\omega_n} \big| p(x,\omega_n) - p(y,\omega_n) \big| \leq c\delta(x,y) \sum_{\omega_n} p(y,\omega_n) = c\delta(x,y)$$

et la condition de validité du théorème 12.2 est donc satisfaite.

Soient φ et ψ deux fonctions continues sur X et $\mathcal{F}_d$. On a :

$$\overline{T}\overline{\pi}(\varphi\psi) = \int \varphi(Tx)\psi\big((a^x)^{-1} \cdot \xi\big)\, \mathrm{d}\mu_x(\xi)\, \mathrm{d}\pi(x).$$

Par définition de l'adjoint P de T sur (X, π), on obtient :

$$\overline{T}\overline{\pi}(\varphi\psi) = \int \varphi(y) \sum_a \psi(a^{-1} \cdot \xi) p(y,a)\, \mathrm{d}\mu_{a\cdot y}(\xi)\, \mathrm{d}\pi(y),$$

$$\overline{T}\overline{\pi} = \int \delta_y \times \sum_a p(y,a) a^{-1} \cdot \mu_{a\cdot y}\, \mathrm{d}\pi(y).$$

Puisque le noyau $y \mapsto \mu_y$ est p-harmonique, on obtient $\overline{T}\overline{\pi} = \overline{\pi}$.

D'après les théorèmes 11.1 et 10.14, on sait que $\lim_n \sigma_i(S_n^{-1}(x), \xi) = 0$ pour π-presque tout x et tout $\xi \notin \widehat{\xi}(x)$.

Observons maintenant que si $Y = \mathcal{F}_d$ et $\mathcal{A}_d$ agit sur Y par $a \mapsto a^{-1}$, les conditions de validité du théorème 12.4 sont satisfaites. Ici $\mathcal{T}$ est la topologie de Zariski et le semi-groupe S' est engendré par $\overline{\mathcal{A}}'_d$; clairement $\widehat{L} \in \mathcal{T}$. La condition d) de p-minimalité de l'action de $\mathcal{A}_d$ sur X découle du lemme 2.10 de [Br2]. Puisque le semi-groupe S' engendré par $\overline{\mathcal{A}}'_d$ est dense au sens de Zariski, il ne laisse pas de sous-variété algébrique invariante dans $\mathcal{F}_d$. D'après le théorème 12.4, on déduit que pour tout $x \in X$ où $\widehat{\xi}(x)$ est défini on a $\mu_x[\widehat{\xi}(x)] = 0$. Donc on a $\lim_n \sigma_i(S_n^{-1}(x), \xi) = 0$ $\overline{\pi}$-presque partout, et le lemme 4.3 implique alors $\lim_n n^{-1} \log \sigma_i(S_n^{-1}(x), \xi) < 0$ $\overline{\pi}$-presque partout. □

Démonstration du théorème 13.1. — Supposons $\lambda'_{i+1} = \lambda'_i$; d'après le lemme 13.3 pour presque tout x de X et pour tout $\xi \notin \widehat{L}_x$, on a $\lim_n n^{-1} \log \sigma_i(S_n^{-1}(x), \xi) = 0$. Le lemme 13.4 implique alors que pour presque tout $x \in X$, on a $\mu_x(\widehat{L}_x^c) = 0$ donc $\mu_x(\widehat{L}_x) = 1$. D'après le théorème 12.4, une telle relation est impossible, car le semi-groupe S' est Zariski-dense. Donc,

$$\lambda'_1 > \lambda'_2 > \cdots > \lambda'_{d+1} \quad \text{et} \quad r = d+1. \qquad \square$$

COROLLAIRE 13.5. — *Si l'on note $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{d+1}$ les exposants caractéristiques du produit de matrices stationnaires $S_n(x)$, les exposants caractéristiques de la différentielle $(T^n)'_x$ sont égaux à $\gamma_i = \lambda_1 - \lambda_{d+2-i}$ $(1 \leq i \leq d)$. Ils sont donc distincts et l'on a $\gamma_d > 0$. De plus le drapeau caractéristique de $(T^n)'_x$ est égal à $\xi(x)$.*

Démonstration. — Dans cette démonstration, la notation a^x est remplacée par a_1. On a la relation $x = a^x \cdot Tx = a_1 \cdot Tx$, d'où par différentiation $(a_1)'_{Tx} T'_x = \mathrm{Id}$ et

$$(T^n)'_x = \left[(a_1 a_2 \cdots a_n)'_{T^n x}\right]^{-1} = \left[(a_n)'_{T^n x}\right]^{-1} \cdots \left[(a_2)'_{T^2 x}\right]^{-1} \left[(a_1)'_{Tx}\right]^{-1}.$$

Considérons le produit $A^{-1}(T^n x) \cdots A^{-1}(Tx)$ dont les exposants sont :

$$-\lambda_{d+1} > -\lambda_d > \cdots > -\lambda_1.$$

Notons $\eta(x)$ le drapeau caractéristique : il satisfait l'équation (π-presque partout) :

$$a_1^{-1} \cdot \eta_x = \eta_{a_1^{-1} \cdot x}.$$

D'après le théorème 11.1, il y a unicité de la solution de cette équation $\eta_x = \xi(x)$. Considérons l'extension naturelle $(\widehat{X}, \widehat{T}, \widehat{\pi})$ du système (X, T, π), et une base $e_k(\widehat{x})$ de $\mathbb{R}^{d+1}$, fournie par le théorème ergodique multiplicatif, pour le produit

$$\begin{aligned} S_n^{-1}(\widehat{x}) &= A^{-1}(\widehat{T}^n \widehat{x}) \cdots A^{-1}(\widehat{x}) \\ &= A^{-1}(T^n x) \cdots A^{-1}(x) = S_n^{-1}(x), \qquad \text{si } n \geq 0, \end{aligned}$$

$$S_n^{-1}(x) e_k(\widehat{x}) = \alpha_n^k e_k(\widehat{T}^n \widehat{x})$$

avec $\alpha_n^k \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \to +\infty} n^{-1} \log |\alpha_n^k| = -\lambda_k$ $(1 \leq k \leq d+1)$.

L'application projective associée à $S_n^{-1}(x)$ est $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$, et les points de $\mathbb{P}^d$ correspondant à $e_k(\widehat{x})$ seront notés $\bar{e}_k(\widehat{x})$; clairement $e_1(\widehat{x}) = x$ et le drapeau défini par cette base est égal à $\xi(x)$: $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1} \cdot \xi(\widehat{x}) = \xi(\widehat{T}^n \widehat{x})$. On peut prendre une base dans l'espace tangent en x à X, formée de vecteurs unitaires $E_k(\widehat{x})$ d'origine x et colinéaires aux droites $[x, \bar{e}_k(\widehat{x})]$. Alors on a :

$$(a_n^{-1} \cdots a_1^{-1})'_x E_k(\widehat{x}) = \frac{\alpha_n^k}{\alpha_n^1} E_k(\widehat{T}^n \widehat{x}).$$

D'autre part, on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\alpha_n^k}{\alpha_n^1} = \lambda_1 - \lambda_k.$$

Soit $M(\widehat{x})$ la matrice des vecteurs $E_k(\widehat{x})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$: les propriétés des $e_k(\widehat{x})$ donnent :

$$\lim_{|n| \to +\infty} \frac{1}{|n|} \log \left\| M(\widehat{T}^n \widehat{x}) \right\| = 0.$$

Donc les exposants de $(T^n)'_x = (a_n^{-1} \cdots a_1^{-1})'_x$ sont :

$$\lambda_1 - \lambda_{d+1} > \lambda_1 - \lambda_d > \cdots > \lambda_1 - \lambda_2$$

et le drapeau caractéristique de $(T^n)'_x$ (lorsque $n \to +\infty$) est égal à $\xi(x)$. □

On va montrer maintenant que la mesure μ_x, utilisée dans la preuve du théorème, est la loi conditionnelle, lorsque x est fixé, du drapeau caractéristique du cocycle $S_n^{-1}(\widehat{x})$ quand $n \to -\infty$. Il n'est donc pas étonnant que l'on ait $\mu_x[\widehat{\xi}(x)] = 0$.

DÉFINITION 13.6. — *Pour un sous espace-projectif v de $\mathbb{P}^d$ et un point x de $\mathbb{P}^d$, ($x \notin v$), on note v^x le sous-espace projectif engendré par x et v. Pour un drapeau ξ de sous-espaces $L_1, L_2, \ldots, L_r$, on note ξ^x le drapeau défini par les sous-espaces $L_1^x, L_2^x, \ldots, L_r^x$.*

THÉORÈME 13.7. — *Soit $\xi^-(\omega)$ le drapeau dilatant du produit de matrices stationnaire S_n^-. Alors la loi de $\xi^-(\omega)$ sous P_x est égale à μ_x, qui est l'unique solution continue en variation de l'équation :*

$$\mu_x = \sum_a a^{-1} \cdot \mu_{a \cdot x} p(x,a).$$

Soit $\widetilde{\mu}_x$ l'image de μ_x par l'application $\xi \mapsto \xi^x$ de $\mathcal{F}_d$ dans Δ et $\widetilde{\pi}^- = \int \widetilde{\mu}_x \, \mathrm{d}\pi(x)$. On a alors, en convergence vague,

$$\lim_n \overline{T}^n(\pi \times m^d) = \overline{\pi} = \lim_n \overline{T}^n(m \times m^d) \quad et \quad \lim_n \widetilde{T}^n(\widetilde{m}) = \widetilde{\pi}^-,$$

où m^d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{F}_d$.

Démonstration. — Le théorème ergodique multiplicatif entraîne que la suite $a_0^{-1} \cdots a_{-n}^{-1}$ est contractante vers $\xi^-(\omega)$. Donc pour toute mesure ν ne chargeant pas la sous-variété critique $\widehat{L}$ d'une sous-suite fondamentale $a_0^{-1} \cdots a_{-n_k}^{-1}$, on a :

$$\lim_k a_0^{-1} \cdots a_{-n_k}^{-1} \cdot \nu = \delta_{\xi^-(\omega)}.$$

La même observation reste valide lorsque l'on remplace ν par une suite ν_k dont les valeurs d'adhérence ne chargent pas $\widehat{L}$. D'après le lemme 13.4, μ_x ne charge pas de sous-variété algébrique. Comme de plus μ_x est continue en variation, on a bien :

$$\lim_k a_0^{-1} a_{-1}^{-1} \cdots a_{-n_k}^{-1} \cdot \mu_{a_{-n_k} \cdots a_{-1} a_0 \cdot x} = \delta_{\xi^-(\omega)}.$$

Comme le second membre est indépendant de la sous-suite choisie, on en déduit

$$\lim_n a_0^{-1} a_{-1}^{-1} \cdots a_{-n}^{-1} \cdot \mu_{a_{-n} \cdots a_{-1} a_0 \cdot x} = \delta_{\xi^-(\omega)}.$$

D'autre part, l'équation :

$$\mu_x = \sum_a a^{-1} \cdot \mu_{a \cdot x} p(x, a)$$

montre que

$$\int a_0^{-1} a_{-1}^{-1} \cdots a_{-n}^{-1} \cdot \mu_{a_{-n} \cdots a_{-1} a_0 \cdot x} \, \mathrm{d}P_x(\omega) = \mu_x$$

et donc, par convergence dominée :

$$\mu_x = \int \delta_{\xi^-(\omega)} \, \mathrm{d}P_x(\omega) = \xi^-[P_x]$$

d'où la première assertion.

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \overline{T}^n[\pi \times m^d] &= \int \delta_{T^n x} \times (a_n^{-1} \cdots a_1^{-1} \cdot m^d) \, \mathrm{d}\pi(x) \\ &= \int \delta_x \times (a_0^{-1} \cdots a_{-n+1}^{-1} \cdot m^d) \, \mathrm{d}\pi(x) \, \mathrm{d}P_x(\omega). \end{aligned}$$

Comme $a_0^{-1} \ldots a_{-n+1}^{-1} \cdot m^d$ converge P_x-presque partout vers $\xi^-(\omega)$, on obtient par convergence dominée,

$$\lim_n \overline{T}^n[\pi \times m^d] = \int \delta_x \times \delta_{\xi^-(\omega)} \, \mathrm{d}P_x(\omega) \, \mathrm{d}\pi(x) = \overline{\pi}.$$

Une formule analogue vaut pour $\overline{T}^{n+1}[m \times m^d]$. On obtient

$$\overline{T}^{n+1}[m \times m^d] = \int \frac{\delta_x}{h(a_n \cdots a_0 \cdot x)} \times (a_0^{-1} \cdots a_{-n+1}^{-1} \cdot m^d) \, \mathrm{d}\pi(x) \, \mathrm{d}P_x(\omega).$$

Pour φ dans $C^+(X)$ et ψ dans $C^+(\mathcal{F}_d)$, en posant :

$$\psi_n(\omega) = (a_0^{-1} \cdots a_{-n+1}^{-1} \cdot m^d)(\psi),$$

on obtient alors

$$\overline{T}^{n+1}(m \times m^d)(\psi \otimes \varphi) = \int \frac{\varphi(x)}{h(a_{-n} \cdots a_0 \cdot x)} \psi_n(\omega) \, \mathrm{d}\pi(x) \, \mathrm{d}P_x(\omega).$$

Puisque $\psi_n(\omega)$ converge vers $\psi^-(\omega) = \psi[\xi^-(\omega)]$ dans $L^1(P_x)$, le second membre est proche, pour n grand, de

$$\int \frac{\varphi(x)}{h(a_{-n}\cdots a_0\cdot x)}\,\psi^-(\omega)\,\mathrm{d}\widehat{\pi}(\omega,x) = \int (\psi^-\otimes\varphi)(\omega,x)\,\frac{1}{h\circ\widehat{\theta}^n(\omega,x)}\,\mathrm{d}\widehat{\pi}(\omega,x),$$

où $\widehat{\theta}(\omega,x) = (\theta\omega, a_0\cdot x)$. La propriété de mélange de $\widehat{\theta}$ donne alors :

$$\lim_n \overline{T}^{\,n+1}(m\times m^d)(\psi\otimes\varphi) = \int (\psi^-\otimes\varphi)\,\mathrm{d}\widehat{\pi}\int \frac{1}{h}\,\mathrm{d}\widehat{\pi} = \widetilde{\pi}^-(\psi\otimes\varphi).$$

Soit $\overline{\pi} = \lim_n \overline{T}^{n+1}[m\times m^d]$. Puisque l'application $(x,\xi)\mapsto \xi^x$ de $X\times\mathcal{F}_d$ dans Δ commute avec $\overline{T}$ et $\widetilde{T}$, la relation

$$\widetilde{\pi}^- = \lim_n \widetilde{T}^n[\widetilde{m}]$$

est conséquence de la relation précédente. □

IV. Stricte positivité de la somme des exposants extrêmes $\lambda_1+\lambda_{d+1}$

Cette partie est une généralisation en dimension $d>2$ de la partie II; on va montrer que la somme des exposants extrêmes est strictement positive. Ce résultat entraîne que les volumes des $(d-1)$-faces des simplexes $\sigma_n(x)$ décroissent vers 0 plus vite que $q_n^{-(d-1)-\varepsilon}$, pour un certain $\varepsilon>0$.

14. Propriétés de contraction de $\widetilde{P}$.

Dans cette partie, on se restreint à des fonctions définies sur Δ, qui dépendent uniquement des composantes x et $u_1\wedge\ldots\wedge u_{d-1}$, et non du drapeau complet,

$$f(\xi) = f(x; u_1, u_1\wedge u_2,\ldots,u_1\wedge\ldots\wedge u_{d-1}) = f(x, u_1\wedge\ldots\wedge u_{d-1}).$$

Soit ε dans $[0,1]$, on dit qu'une telle fonction est *höldérienne* si

$$[f]_\varepsilon = \sup\frac{|f(\xi)-f(\xi')|}{d(\xi,\xi')^\varepsilon}$$

est fini, où le supremum est pris sur l'ensemble des couples de drapeaux qui sont différents, et qui ont leurs origines dans le même simplexe de X. Ce qui revient ici à

$$[f]_\varepsilon = \sup \frac{|f(x,u) - f(x',u')|}{(\delta(x,x') + \partial(u,u'))^\varepsilon} < \infty$$

car on peut toujours voir $u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1}$ comme un vecteur de $\mathbb{R}^d$. On note encore d la distance :

$$d\big((x,u),(x',u')\big) = \delta(x,x') + \partial(u,u').$$

On appelle $H_\varepsilon(\Delta)$ l'ensemble de ces fonctions höldériennes. On définit aussi la norme de f par

$$\|f\| = \sup_\xi \big|f(\xi)\big|.$$

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant, analogue au théorème 7.1 :

THÉORÈME 14.1. — *Il existe ε dans $]0,1]$, un entier $n > 0$, une constante $0 \le \alpha < 1$ et une constante $\beta \ge 0$ tels que pour toute fonction f de $H_\varepsilon(\Delta)$ on ait*

$$[\widetilde{P}^n f]_\varepsilon \le \alpha[f]_\varepsilon + \beta\|f\|.$$

Démonstration. — On fixe un couple $((x,u),(x',u'))$, $(x,u) \neq (x',u')$, les points x et x' étant dans le même simplexe. On se donne aussi un $\varepsilon > 0$ et une fonction f de $H_\varepsilon(\Delta)$. On rappelle que

$$\widetilde{P}^n f(x,u) = \sum_{\omega_n} f\big(\omega_n \cdot (x,u)\big)\, p(x,\omega_n)$$

où

$$\omega_n \cdot (x,u) = \big(\omega_n \cdot x, \Lambda^{d-1}(\omega_n)'_x u\big).$$

On a donc :

$$\frac{|\widetilde{P}^n f(x,u) - \widetilde{P}^n f(x',u')|}{d((x,u),(x',u'))^\varepsilon} \le [f]_\varepsilon \sum_{\omega_n} \Big(\frac{d(\omega_n \cdot (x,u), \omega_n \cdot (x',u'))}{d((x,u),(x',u'))}\Big)^\varepsilon p(x,\omega_n)$$
$$+ \|f\| \sum_{\omega_n} \frac{|p(x,\omega_n,\sigma) - p(x',\omega_n,\sigma)|}{d((x,u),(x',u'))^\varepsilon}.$$

Le deuxième terme ne va pas poser de problème ; en effet, les fonctions $p(\cdot, \omega_n)$ sont analytiques sur X et ne dépendent que de x, et on a donc si x et x' sont distincts :

$$\frac{|p(x,\omega_n) - p(x',\omega_n)|}{d((x,u),(x',u'))^{\varepsilon}} \leq \frac{|p(x,\omega_n) - p(x',\omega_n)|}{\delta(x,x')^{\varepsilon}}$$
$$\leq C\frac{|\varphi(x,\omega_n) - \varphi(x',\omega_n)|}{\delta(x,x')^{\varepsilon}} + c'\varphi(x,\omega_n)$$

où c' et C sont des constantes qui dépendent de n et ε, $\varphi(\cdot, \omega_n)$ est le poids correspondant dans l'opérateur Φ^n. La fonction $\varphi(\cdot, \omega_n)$ est dérivable sur X et on a :

$$\big[\varphi(\cdot,\omega_n)\big] = \sup_{x\neq x'} \frac{|\varphi(x,\omega_n) - \varphi(x',\omega_n)|}{\delta(x,x')} \leq \frac{c}{(a_1^{(d)}\cdots a_n^{(d)})^{d+2}}.$$

Ainsi,

$$\sum_{\omega_n} \frac{|p_n(x,\omega_n) - p_n(x',\omega_n)|}{d((x,u),(x',u'))^{\varepsilon}} \leq C + C'\sum_{\omega_n} \frac{1}{(a_1^{(d)}\cdots a_n^{(d)})^{d+2}}$$
$$\leq C + C'\Big(\sum_{a\geq 1} \frac{(a+1)^{d-1}}{a^{d+2}}\Big)^n$$

et cette dernière série est convergente. On a donc bien montré l'existence d'une constante finie $\beta \geq 0$, comme dans l'énoncé.

On estime maintenant le premier terme ; on a :

$$\Big(\frac{d(\omega_n\cdot(x,u),\omega_n\cdot(x',u'))}{d((x,u),(x',u'))}\Big)^{\varepsilon}$$
$$\leq \Big(\frac{\delta(\omega_n\cdot x,\omega_n\cdot x')}{\delta(x,x')}\Big)^{\varepsilon} + \Big(\frac{\partial(\Lambda^{d-1}(\omega_n')_x u, \Lambda^{d-1}(\omega_n')_{x'}u'}{\partial(u,u')}\Big)^{\varepsilon}$$

où éventuellement l'un des deux termes n'existe pas et vaut 0. Comme δ est contractée par toutes les transformations $x \mapsto a\cdot x$, on a la majoration $\delta(\omega_n\cdot x, \omega_n\cdot x')/\delta(x,x') \leq \rho^n$. On aura donc montré le théorème si on peut rendre strictement plus petite que 1 la quantité suivante :

$$\sup_{u\neq u'} \sum_{\omega_n} \Big(\frac{\partial(\Lambda^{d-1}(\omega_n')_x u, \Lambda^{d-1}(\omega_n')_{x'}u')}{\partial(u,u')}\Big)^{\varepsilon} p(x,\omega_n) + \rho^{n\varepsilon},$$

en faisant un bon choix pour ε et n. On utilise ici les propriétés des exposants caractéristiques de la matrice jacobienne de T.

On appelle M l'ensemble des couples $((x,u),(x',u'))$, $u \neq u'$, x et x' dans le même simplexe de X. On note θ le cocycle de $\mathcal{A}_d \times M$ suivant :

$$\begin{aligned}\theta\big(a, ((x,u),(x',u'))\big) &= \frac{\partial(\Lambda^{d-1}(a')_x u, \Lambda^{d-1}(a')_{x'} u')}{\partial(u,u')} \\ &= \frac{\|\Lambda^{d-1}(a')_x u \wedge \Lambda^{d-1}(a')_{x'} u'\|}{\|\Lambda^{d-1}(a')_x u\| \cdot \|\Lambda^{d-1}(a')_{x'} u'\|}.\end{aligned}$$

L'ensemble M n'étant pas compact, on le compactifie en lui rajoutant

$$\begin{aligned}M_{1,2} = \big\{(x,u,u\wedge v),\ x \in X,\ u \in \mathbb{R}^d,\ u \wedge v \in \Lambda^2\mathbb{R}^d, \\ \|u\| = 1,\ \|u \wedge v\| = 1\big\}.\end{aligned}$$

On note $\overline{M} = M \cup M_{1,2}$. L'ensemble $\overline{M}$ est compact si on le munit la topologie suivante :

- M est un ouvert de $\overline{M}$,
- $((x_n,u_n),(x'_n,u'_n))$ converge vers $(x,u,u\wedge v)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \delta(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} \delta(x'_n,x) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \partial(u_n,u'_n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{R}u_n = V^{(1)}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{R}u_n \oplus \mathbb{R}u'_n = V^{(2)}.$$

Les espaces vectoriels $V^{(i)}$ sont de dimension i et $V^{(2)}$ contient $V^{(1)}$. Le bivecteur $(u, u\wedge v)$ engendre le drapeau $(V^{(1)}, V^{(2)})$.

On peut alors prolonger par continuité le cocycle θ à $\overline{M}$ en posant :

$$\theta\big(a, (x,u,u\wedge v)\big) = \frac{\|\Lambda^{d-1}(a')_x u \wedge \Lambda^{d-1}(a')_x v\|}{\|\Lambda^{d-1}(a')_x u\|^2}.$$

La fonction $((x,u),(x',u')) \mapsto \sum_{\omega_n} \theta^\varepsilon(\omega_n, ((x,u),(x',u')))p(x,\omega_n)$ est continue sur M et se prolonge par continuité sur $\overline{M}$, qui est compact. Il existe donc un point $\zeta_n = (x_n, u_n, u_n \wedge v_n)$ de $\overline{M}$ tel que

$$\begin{aligned}\sup_{((x,u),(x',u'))\in M} \sum_{\omega_n} \theta^\varepsilon\big(\omega_n, ((x,u),(x',u'))\big)\, p(x,\omega_n) \\ = \sum_{\omega_n} \theta^\varepsilon(\omega_n,\zeta_n)\, p(x_n,\omega_n).\end{aligned}$$

On rappelle maintenant que pour tout x réel, $\mathrm{e}^x \le 1 + x + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{|x|}$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{\omega_n} \theta^\varepsilon(\omega_n,\zeta_n)\, p(x_n,\omega_n) \le 1 + \varepsilon \sum_{\omega_n} \log\theta(\omega_n,\zeta_n)\, p(x_n,\omega_n) \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{\omega_n} \log^2\theta^\varepsilon(\omega_n,\zeta_n)\, \mathrm{e}^{\varepsilon|\log\theta(\omega_n,\zeta_n)|}\, p(x_n,\omega_n).\end{aligned}$$

La convergence de la deuxième série est assurée par le résultat suivant :

LEMME 14.2. — *Pour tout $n > 0$, pour tout $\varepsilon < 1/(2d+2)$, la série :*

$$\sum_{\omega_n} \log^2 \theta^\varepsilon(\omega_n, \zeta_n)\, \mathrm{e}^{\varepsilon|\log\theta(\omega_n,\zeta_n)|} p(x_n, \omega_n)$$

est convergente.

Démonstration. — On a :

$$\theta(\omega_n, \zeta_n) = \frac{\|\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n} u_n \wedge \Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n} v_n\|}{\|\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n} u_n\|^2}.$$

Comme la matrice $\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n}$ est inversible, on a :

$$1 = \|u_n\| \le \big\|\big[\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n}\big]^{-1}\big\| \cdot \big\|\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n} u_n\big\|.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n} &= \frac{1}{\det(\omega_n)'_{x_n}}\, {}^t\big[(\omega_n)'_{x_n}\big]^{-1} \\ &= (q_n + q_{n-1}x_n^{(d)} + \cdots + q_{n-d}x_n^{(1)})^{d+1}\, {}^t\big[(\omega_n)'_{x_n}\big]^{-1}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\big\|\big[\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n}\big]^{-1}\big\| \le \frac{1}{(q_n + q_{n-1}x_n^{(d)} + \cdots + q_{n-d}x_n^{(1)})^{d+1}} \big\|(\omega_n)'_{x_n}\big\|,$$

et $(\omega_n)'_{x_n}$ est la matrice de terme général :

$$\frac{1}{(q_n + q_{n-1}x_n^{(d)} + \cdots + q_{n-d}x_n^{(1)})^2} \sum_{k=1}^{d+1} \det \begin{bmatrix} p_{n-d+j}^{(i)} & p_{n-d+k}^{(i)} \\ q_{n-d+j} & q_{n-d+k} \end{bmatrix} x_n^{(k)}$$

avec $x_n^{(d+1)} = 1$. Donc $\|(\omega_n)'_{x_n}\| \le 2d$. Ainsi,

$$\theta(\omega_n, \zeta_n) \le \frac{4d^2}{q_n^{2d+2}} \big\|\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n} u_n \wedge \Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n} v_n\big\|.$$

Les composantes du vecteur $\Lambda^{d-1}(\omega_n)'_{x_n} u_n$ sont de la forme $\sum_{1\le j\le d} m_{i,j,n} u_j$, où les $m_{i,j,n}$ sont les mineurs d'ordre $d-1$ de la matrice $(\omega_n)'_{x_n}$. On a donc :

$$m_{i,j,n} \le C \frac{q_n^{2(d-1)}}{q_n^{2(d-1)}} \le C$$

où C est une constante qui dépend de d et de x_n. On a donc :

$$\theta(\omega_n, \zeta_n) \leq \frac{C'}{q_n^{2d+2}}.$$

Alors,

$$\sum_{\omega_n} \log^2 \theta^{\varepsilon}(\omega_n, \zeta_n)\, \mathrm{e}^{\varepsilon|\log \theta(\omega_n,\zeta_n)|} p(x_n, \omega_n) \leq C'' \sum_{\omega_n} (\log q_n)^2 q_n^{\varepsilon(2d+2)} p(x_n, \omega_n).$$

Cette dernière série converge dès que $\varepsilon(2d+2) < 1$. □

LEMME 14.3. — *Il existe un réel γ avec $\gamma_2 - \gamma_1 \leq \gamma < 0$ tel qu'à partir d'un certain rang, on ait :*

$$\sum_{\omega_n} \log \theta(\omega_n, \zeta_n)\, p(x_n, \omega_n) \leq n\gamma < 0.$$

Démonstration. — La propriété de cocycle de θ permet d'écrire que :

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega_n} \log \theta(\omega_n, \zeta_n)\, p(x_n, \omega_n)
&= \sum_{\omega_n=(a_1\cdots a_n)} \sum_{k=1}^{n} \log \theta(a_k, a_{k+1} \cdots a_n \cdot \zeta_n)\, p(x_n, \omega_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega_n=(a_1\cdots a_n)} \log \theta(a_k, a_{k+1} \cdots a_n \cdot \zeta_n)\, p(x_n, \omega_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\omega_{n-k}} \sum_{a} \log \theta(a, \omega_{n-k} \cdot \zeta_n)\, p(\omega_{n-k} \cdot x_n, a)\, p(x_n, \omega_{n-k}),
\end{aligned}$$

avec $\omega_{n-k} = (a_{k+1} \cdots a_n)$,

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}^{n-k} f(\zeta_n) \quad \text{où} \quad f(\zeta) = \sum_a \log \theta(a, \zeta)\, p(x, a).$$

La fonction f est continue sur Δ, donc d'après le lemme 4.1, la suite $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}^{n-k} f$ converge uniformément sur Δ vers $\int_\Delta f \,\mathrm{d}\widetilde{\pi}$. On a de plus :

$$\begin{aligned}
\int_\Delta f \,\mathrm{d}\widetilde{\pi} &= \int_X f(\xi_x)\, \mathrm{d}\pi(x) = \int_X \sum_a \log \theta(a, \xi_x)\, p(x, a) d\pi(x) \\
&= \int_X \log \theta(a^x, \xi_{Tx})\, \mathrm{d}\pi(x) = \gamma_2 - \gamma_1.
\end{aligned}$$

En effet,

$$\theta(a^x, \xi_{Tx}) = \frac{\|\Lambda^{d-1}(a^x)'_{Tx} u_{Tx} \wedge \Lambda^{d-1}(a^x)'_{Tx} v_{Tx}\|}{\|\Lambda^{d-1}(a^x)'_{Tx} u_{Tx}\|^2} = \frac{\|T'_x u_{Tx} \wedge T'_x v_{Tx}\|}{\|T'_x u_{Tx}\|^2},$$

si $\xi_{Tx} = (Tx; u_{Tx}, u_{Tx} \wedge v_{Tx}, \ldots)$. L'intégrale est donc égale à la différence des deux premiers exposants caractéristiques de la matrice jacobienne de T. Comme tous les γ_i sont différents, alors $\gamma_2 - \gamma_1$ est strictement négatif. On fixe alors un réel γ vérifiant $\gamma_2 - \gamma_1 \leq \gamma < 0$; alors à partir d'un certain rang, on a :

$$2(\gamma_2 - \gamma_1) - \gamma \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}^k f \leq \gamma < 0,$$

et donc à partir d'un certain rang, on a bien :

$$\sum_{\omega_n} \log \theta(\omega_n, \zeta_n)\, p(x_n, \omega_n) \leq n\gamma < 0. \qquad \square$$

On est alors en mesure de montrer le théorème 14.1. D'après les lemmes 14.2 et 14.3, si n est suffisament grand et $\varepsilon < (2d+2)^{-1}$,

$$\rho^{n\varepsilon} + \sum_{\omega_n} \theta^\varepsilon(\omega_n, \zeta_n) p(x_n, \omega_n) \leq \rho^{n\varepsilon} + 1 - n\gamma\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \ell_{n,\varepsilon}.$$

On fixe un n assez grand, on choisit alors un ε assez petit pour que le terme $\rho^{n\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ell_{n,\varepsilon}$ soit négligeable devant $n\gamma\varepsilon$ et que $-1 < n\gamma\varepsilon < 0$. On a alors :

$$\rho^{n\varepsilon} + \sum_{\omega_n} \theta^\varepsilon(\omega_n, \zeta_n)\, p(x_n, \omega_n) \leq \alpha < 1.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 14.1. $\square$

Remarque. — Une démonstration analogue, basée sur le corollaire 13.5, montre que le théorème 14.1 reste vrai si on prend une fonction qui dépend du drapeau complet. Si on note

$$[f]_\varepsilon = \sup \frac{|f(\xi) - f(\xi')|}{d(\xi, \xi')^\varepsilon}$$

où on prend le supremum sur l'ensemble des couples de drapeaux complets qui sont différents et qui ont leurs origines dans le même simplexe de X. On note $H'_\varepsilon(\Delta)$ l'ensemble des fonctions qui ont un coefficient de Hölder fini. Alors il existe un entier n, un $\varepsilon > 0$, deux constantes $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$ tels que, pour toute fonction f de $H'_\varepsilon(\Delta)$, on ait

$$[\widetilde{P}^n f]_\varepsilon \leq \alpha [f]_\varepsilon + \beta \|f\|.$$

15. Généralisation d'une inégalité de Paley et Ursell en dimension $d \geq 3$.

THÉORÈME 15.1. — *Pour toute dimension $d \geq 3$ et pour tout entier $n > 0$, si $\omega_n = (a_1, \dots, a_n)$ est une suite admissible et si on note $S_n = M_{a_1} M_{a_2} \cdots M_{a_n}$, on a :*

$$\|\Lambda^d S_n\| \leq d \|S_n\|,$$

où

$$\|\Lambda^d S_n\| = \sup_{1 \leq i,j \leq d+1} \leq \left|(\Lambda^d S_n)_{i,j}\right|, \quad \|S_n\| = \sup_{1 \leq j \leq d+1} \sum_{i=1}^{d+1} \left|(S_n)_{i,j}\right|.$$

Démonstration. — On précise dans un premier temps les notations. On a :

$$S_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I & a_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-d}^{(1)} & \cdots & p_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-d}^{(d)} & \cdots & p_n^{(d)} \\ q_{n-d} & \cdots & q_n \end{bmatrix}.$$

On a : $p_{n-k}^{(i)} \leq p_n^{(i)}$, $q_{n-k} \leq q_n$ pour tout $1 \leq k \leq d$. Donc,

$$\|S_n\| = p_n^{(1)} + p_n^{(2)} + \cdots + p_n^{(d)} + q_n.$$

Dans toute la suite, on notera w_n à la place de $\|S_n\|$. La suite (w_n) est strictement croissante et vérifie la relation de récurrence suivante :

$$w_{n+1} = a_{n+1}^{(d)} w_n + a_{n+1}^{(d-1)} w_{n-1} + \cdots + a_{n+1}^{(1)} w_{n-d+1} + w_{n-d}.$$

En écrivant que $a_{n+1}^{(d)} = (a_{n+1}^{(d)} - 1) + 1$ et en utilisant d fois la relation précédente, on obtient : pour $n \geq d$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} = (a_{n+1}^{(d)} - 1) w_n &+ (a_{n+1}^{(d-1)} + a_n^{(d)} - 1) w_{n-1} + \cdots \\ &+ (a_{n+1}^{(2)} + a_n^{(3)} + \cdots + a_{n-d+3}^{(d)} - 1) w_{n-d+2} \\ &+ (a_{n+1}^{(1)} + a_n^{(2)} + \cdots + a_{n-d+2}^{(d)}) w_{n-d+1} \\ &+ (1 + a_n^{(1)} + \cdots + a_{n-d+1}^{(d)}) w_{n-d} \\ &+ \cdots + (1 + a_{n-d+1}^{(1)}) w_{n-2d+1} + w_{n-2d}. \end{aligned}$$

On remarque que tous les coefficients de cette égalité sont positifs. Comme $\Lambda^d M_a = (-1)^d \left[\begin{smallmatrix} -a & 1 \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right]$, on a donc :

$$\Lambda^d S_n = (-1)^{dn} \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_2 & 1 \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} -a_n & 1 \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes $(\beta_n^{(r)})_{1 \le r \le d+1}$ de $\Lambda^d S_n$ vérifient donc les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \beta_{n+1}^{(r)} = (-1)^d [-a_n^{(r)} \beta_n^{(1)} + \beta_n^{(r+1)}], & 1 \le r \le d, \\ \beta_{n+1}^{(d+1)} = (-1)^d \beta_n^{(1)}. \end{cases}$$

On peut exprimer toutes ces relations en fonction des $\beta_k^{(1)}$, et on trouve pour $1 \le r \le d+1$:

$$\beta_{n+1}^{(r)} = (-1)^{d+1} \Big[\sum_{k=0}^{d-r} (-1)^{kd} a_{n+1-k}^{(r+k)} \beta_{n-k}^{(1)} \Big] + (-1)^{d(d-r+1)} \beta_{n+r-d-1}^{(1)}.$$

On remarque maintenant qu'il suffit de montrer que $|\beta_n^{(1)}| \le w_n$, pour montrer le théorème. En effet, on a alors :

$$\begin{aligned} |\beta_{n+1}^{(d+1)}| &\le w_n \le d w_{n+1}, \\ |\beta_{n+1}^{(d)}| &\le a_{n+1}^{(d)} w_n + w_{n-1} \le w_{n+1} + w_{n-1} \le d w_{n+1}, \\ |\beta_{n+1}^{(d-1)}| &\le a_{n+1}^{(d-1)} w_n + w_n + w_{n-2} \le w_{n+1} + w_n + w_{n-2} \le d w_{n+1}, \\ &\vdots \\ |\beta_{n+1}^{(2)}| &\le a_{n+1}^{(2)} w_n + (w_n + w_{n-1} + \cdots + w_{n-d+2} + w_{n-d}), \\ &\le w_{n+1} + \cdots + w_{n-d+2} + w_{n-d} \le d w_{n+1}. \end{aligned}$$

On rappelle aussi les conditions d'admissibilité de la suite $(a_n)_{n>0}$; elles sont essentielles pour la démonstration du théorème. On a pour tout $n > 0$:

$$0 \le a_n^{(k)} \le a_n^{(d)} \quad (1 \le k \le d-1), \quad a_n^{(d)} \ge 1,$$

et si de plus

$$a_n^{(k)} = a_n^{(d)}, \quad a_{n+1}^{(k-1)} = a_{n+1}^{(d-1)}, \quad a_{n+t}^{(k-t)} = a_{n+t}^{(d-t)},$$

alors :

- si $k-t=1$, on a $a_{n+t+1}^{(d-t-1)} \geq 1$,
- si $k-t>1$, on a $a_{n+t+1}^{(k-t-1)} \leq a_{n+t+1}^{(d-t-1)}$.

On va maintenant montrer par récurrence que $|\beta_n^{(1)}| \leq w_n$; on suppose que pour tout $k \leq n$, $|\beta_k^{(1)}| \leq w_k$ et que n est suffisamment grand, pour utiliser les relations de récurrence précédentes. L'équation :

$$\beta_{n+1}^{(1)} = (-1)^{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^{kd} a_{n+1-k}^{(1+k)} \beta_{n-k}^{(1)} + (-1)^{d^2} \beta_{n-d}^{(1)}$$

donne alors que

$$|\beta_{n+1}^{(1)}| \leq \sum_{k=0}^{d-1} a_{n+1-k}^{(1+k)} w_{n-k} + w_{n-d}.$$

En comparant avec w_{n+1} on a donc $|\beta_{n+1}^{(1)}| \leq w_{n+1}$, sauf si l'une des inégalités suivantes n'est pas vraie :

$$(1) \qquad a_{n+1}^{(1)} \leq a_{n+1}^{(d)} - 1,$$

$$(A_k) \qquad a_{n+1-k}^{(1+k)} \leq a_{n+1}^{(d-k)} + a_n^{(d-k+1)} + \cdots + a_{n+1-k}^{(d)} - 1, \qquad (1 \leq k \leq d-1).$$

L'inégalité (1) n'est pas vraie si et seulement si $a_{n+1}^{(1)} = a_{n+1}^{(d)}$.

L'inégalité (A_k) n'est pas vraie si et seulement si :

$$a_{n+1-k}^{(k+1)} = a_{n+1-k}^{(d)} \quad \text{et} \quad a_{n+1}^{(d-k)} = a_n^{(d-k+1)} = \cdots = a_{n+2-k}^{(d-1)} = 0.$$

Les conditions d'admissibilité de la suite (a_n) entraînent alors que

$$a_{n+1-k}^{(k+1)} = a_{n+1-k}^{(d)} \quad \text{donc} \quad a_{n+2-k}^{(k)} \leq a_{n+2-k}^{(d-1)} \quad \text{mais} \quad a_{n+2-k}^{(d-1)} = 0,$$

donc on a l'égalité et ainsi de suite. On obtient alors que l'inégalité (A_k) n'est pas vraie si et seulement si :

$$\begin{cases} a_{n+1}^{(1)} = a_{n+1}^{(d-k)} = 0, \\ a_n^{(2)} = a_n^{(d+1-k)} = 0, \\ \vdots \\ a_{n+2-k}^{(k)} = a_{n+2-k}^{(d-1)} = 0, \\ a_{n+1-k}^{(k+1)} = a_{n+1-k}^{(d)} > 0. \end{cases}$$

Donc, au plus une des inégalités (1) ou (A_k) n'est pas vérifiée.

On se place dans le cas où $a_{n+1}^{(1)} = a_{n+1}^{(d)}$. Alors :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1}^{(1)} &= (-1)^{d+1}\big[(a_{n+1}^{(d)}-1)\beta_n^{(1)} + (\beta_n^{(1)}-\beta_n^{(2)})\big]\\ &= (-1)^{d+1}(a_{n+1}^{(d)}-1)\beta_n^{(1)} + \sum_{k=0}^{d-2}(-1)^{kd}(a_{n-k}^{(1+k)} - a_{n-k}^{(2+k)})\beta_{n-k-1}^{(1)}\\ &\quad + (-1)^{d(d-1)}a_{n-d+1}^{(d)}\beta_{n-d}^{(1)} + (-1)^{d^2+d+1}\beta_{n-d-1}^{(1)} + (-1)^{d^2}\beta_{n-d}^{(1)}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|\beta_{n+1}^{(1)}| \le (a_{n+1}^{(d)}-1)w_n + \sum_{k=0}^{d-2}|a_{n-k}^{(1+k)} - a_{n-k}^{(2+k)}|w_{n-k-1}&\\ + (a_{n-d+1}^{(d)})w_{n-d} + w_{n-d-1}.&\end{aligned}$$

Donc $|\beta_{n+1}^{(1)}| \le w_{n+1}$, sauf si l'une des inégalités suivantes n'est pas vraie :

$$(B_k)\quad |a_{n-k}^{(1+k)} - a_{n-k}^{(2+k)}| \le a_{n+1}^{(d-k-1)} + a_n^{(d-k)} + \cdots + a_{n-k}^{(d)} - 1, \qquad (0 \le k \le d-2).$$

L'inégalité (B_k) est toujours vraie, sinon, on aurait :

- cas (B_{k_1}) $\begin{cases} a_{n-k}^{(1+k)} = a_{n-k}^{(d)},\\ a_{n+1}^{(d-k-1)} = a_n^{(d-k)} = \cdots = a_{n-k+1}^{(d-1)} = a_{n-k}^{(2+k)} = 0,\end{cases}$
- cas (B_{k_2}) $\begin{cases} a_{n-k}^{(2+k)} = a_{n-k}^{(d)},\\ a_{n+1}^{(d-k-1)} = a_n^{(d-k)} = \cdots = a_{n-k+1}^{(d-1)} = a_{n-k}^{(1+k)} = 0.\end{cases}$

Le cas (B_{k_1}) ne peut pas avoir lieu : les conditions d'admissibilité entraînent $a_{n-k}^{(1+k)} = a_{n-k}^{(d)}, a_{n-k+1}^{(k)} = a_{n-k+1}^{(d-1)}, \ldots, a_n^{(1)} = a_n^{(d-k)}$, et donc $a_{n+1}^{(d-k-1)} \ge 1$, ce qui n'est pas le cas.

Le cas (B_{k_2}) n'a pas lieu non plus, sinon on aurait $a_{n-k}^{(2+k)} = a_{n-k}^{(d)}, a_{n-k+1}^{(k+1)} = a_{n-k+1}^{(d-1)}, \ldots, a_n^{(2)} = a_n^{(d-k)}$, et donc $a_{n+1}^{(1)} \le a_{n+1}^{(d-k-1)}$, donc $a_{n+1}^{(1)} = 0$, ce qui est impossible.

Donc, dans le cas où $a_{n+1}^{(1)} = a_{n+1}^{(d)}$, on a aussi $|\beta_{n+1}^{(1)}| \le w_{n+1}$.

On regarde maintenant le cas où l'inégalité (A_{k_0}) n'est pas vérifiée. On remarque déjà que si $a_{n+1}^{(d)} - 1 \ne 0$, ou s'il existe un $k < k_0$ tel que

$$a_{n+1-k}^{(k+1)} \ne a_{n+1}^{(d-k)} + \cdots + a_{n+1-k}^{(d)} - 1,$$

alors on a $|\beta_{n+1}^{(1)}| \le w_{n+1}$; en effet, on peut alors majorer $a_{n+1-k_0}^{(d)}w_{n-k_0}$ par $(a_{n+1-k_0}^{(d)}-1)w_{n-k_0} + w_n$ ou par $(a_{n+1-k_0}^{(d)}-1)w_{n-k_0} + w_{n-k}$.

On suppose donc que (A_{k_0}) n'est pas vraie et que pour $k < k_0$, on a :

$$\begin{aligned}
&a_{n+1-k}^{(k+1)} = a_{n+1}^{(d-k)} + a_n^{(d+1-d)} + \cdots + a_{n+1-k}^{(d)} - 1,\\
&a_{n+1}^{(d)} = 1.
\end{aligned}$$

Ce qui revient à supposer que :

$$\begin{cases}
a_{n+1}^{(d)} = 1,\ a_{n+1}^{(1)} = a_{n+1}^{(d-k_0)} = 0 \text{ et } a_{n+1}^{(d-1)} = \cdots = a_{n+1}^{(d-k_0+1)} = 0;\\
a_n^{(d)} = 1,\ a_n^{(2)} = a_n^{(d+1-k_0)} = 0 \text{ et } a_n^{(d-1)} = \cdots = a_n^{(d-k_0+2)} = 0;\\
\cdots\\
a_{n+2-k_0}^{(d)} = 1,\ a_{n+2-k_0}^{(k_0)} = a_{n+2-k_0}^{(d-1)} = 0;\\
a_{n+1-k_0}^{(1+k_0)} = a_{n+1-k_0}^{(d)}.
\end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} = (a_{n+1-k_0}^{(d)} &- 1)w_{n-k_0}\\
&+ (a_{n+1}^{(d-k_0-1)} + a_n^{(d-k_0)} + \cdots + a_{n-k_0}^{(d)} - 1)w_{n-k_0-1}\\
&+ \cdots + (a_{n+1}^{(2)} + a_n^{(3)} + \cdots + a_{n-d+3}^{(d)} - 1)w_{n-d+2}\\
&+ (a_{n-k_0-1}^{(k_0+2)} + \cdots + a_{n-d+2}^{(d)})w_{n-d+1}\\
&+ (1 + a_{n-d+1}^{(d)} + \cdots + a_n^{(1)})w_{n-d}\\
&+ \cdots + (1 + a_{n-d+1}^{(1)})w_{n-2d+1} + w_{n-2d};\\
\beta_{n+1}^{(1)} = (-1)^{d+1} &\sum_{k=k_0}^{d-1} (-1)^{kd} a_{n+1-k}^{(k+1)} \beta_{n-k}^{(1)} + (-1)^{d^2} \beta_{n-d}^{(1)}.
\end{aligned}$$

On écrit que $a_{n+1-k_0}^{(k_0+1)} = a_{n+1-k_0}^{(d)} = (a_{n+1}^{(d)} - 1) + 1$ et on décompose $\beta_{n-k_0}^{(1)}$; après calculs, on obtient

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1}^{(1)} = (-1)^{d(k_0+1)+1}&(a_{n+1-k_0}^{(d)} - 1)\beta_{n-k_0}^{(1)}\\
&+ (-1)^{d(k_0+1)+1} \sum_{k=0}^{d-2-k_0} (-1)^{kd} (a_{n-k_0-k}^{(k+1)} - a_{n-k_0-k}^{(k+k_0+2)})\beta_{n-k_0-k-1}^{(1)}\\
&+ (-1)^{k_0(d+1)+1} \sum_{k=d-1-k_0}^{d-1} (-1)^{kd} a_{n-k_0-k}^{(k+1)} \beta_{n-k_0-k-1}^{(1)}\\
&+ (-1)^{d(k_0+1)+d^2+1} \beta_{n-k_0-1-d}^{(1)} + (-1)^{d^2} \beta_{n-d}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}|\beta_{n+1}^{(1)}| \leq (a_{n+1-k_0}^{(d)} 1) w_{n-k_0} \\ + \sum_{k=0}^{d-2-k_0} |a_{n-k_0-k}^{(k+1)} - a_{n-k_0-k}^{(k+k_0+2)}| w_{n-k_0-k-1} \\ + \sum_{k=d-1-k_0}^{d-1} a_{n-k_0-k}^{(k+1)} w_{n-k_0-k-1} + w_{n-k_0-1-d} + w_{n-d}.\end{aligned}$$

La relation

$$|a_{n-k_0-k}^{(k+1)} - a_{n-k_0-k}^{(k+k_0+2)}| \leq a_{n+1}^{(d-k-k_0-1)} + a_n^{(d-k-k_0)} + \cdots + a_{n-k_0-k}^{(d)} - 1$$

est toujours vraie, car dans le cas contraire, l'une des deux propriétés suivantes serait vraie :

- $\begin{cases} a_{n-k_0-k}^{(k+1)} = a_{n-k_0-k}^{(d)}, \\ a_{n+1}^{(d-k-k_0-1)} = \cdots = a_{n-k_0-k+1}^{(d-1)} = a_{n-k_0-k}^{(k+k_0+2)} = 0, \end{cases}$
- $\begin{cases} a_{n-k_0-k}^{(k+k_0+2)} = a_{n-k_0-k}^{(d)}, \\ a_{n+1}^{(d-k-k_0-1)} = \cdots = a_{n-k_0-k+1}^{(d-1)} = a_{n-k_0-k}^{(k+1)} = 0. \end{cases}$

Le premier cas entraînerait que

$$a_{n-k_0-k+1}^{(k)} = a_{n-k_0-k+1}^{(d-1)}, \ldots, a_{n-k_0}^{(1)} = a_{n-k_0}^{(d-k)}$$

et donc $a_{n-k_0+1}^{(d-k-1)} \geq 1$. Le deuxième cas entraînerait que

$$a_{n-k_0-k+1}^{(k+k_0+1)} = a_{n-k_0-k+1}^{(d-1)}, \ldots, a_n^{(2)} = a_n^{(d-k-k_0)}$$

et donc $a_{n+1}^{(1)} \geq 1$. Ce qui est exclu par hypothèse.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=d-1-k_0}^{d-1} a_{n-k_0-k}^{(k+1)} w_{n-k_0-k-1} + w_{n-k_0-1-d} + w_{n-d} \\ \leq (2 + a_{n-d+1}^{(d-k_0)}) w_{n-d} + w_{n-d-1} + \cdots + w_{n-d-k_0}.\end{aligned}$$

On aura montré que $|\beta_{n+1}^{(1)}| \leq w_{n+1}$, si on vérifie que l'on a toujours :

$$2 + a_{n-d+1}^{(d-k_0)} \leq 1 + a_{n-d+1}^{(d)} + a_{n-d+2}^{(d-1)} + \cdots + a_n^{(1)}.$$

Cette inégalité est vérifiée sauf si

$$a_{n-d+1}^{(d-k_0)} = a_{n-d+1}^{(d)} \quad \text{et} \quad a_n^{(1)} = a_{n-1}^{(2)} = \ldots = a_{n-d+2}^{(d-1)} = 0,$$

ce qui entraîne

$$a_{n-d+2}^{(d-k_0-1)} = a_{n-d+2}^{(d-1)},\ a_{n-d+3}^{(d-k_0-2)} = a_{n-d+3}^{(d-2)},\ \ldots\ ,\ a_{n-k_0-1}^{(2)} = a_{n-k_0-1}^{(k_0+1)},$$

donc $a_{n-k_0}^{(1)} \geq 1$ donc $a_{n-k_0}^{(1)} = a_{n-k_0}^{(d)} = 1$ donc $a_{n-k_0+1}^{(d-1)} \geq 1$, ce qui est exclu par les hypothèses.

Donc si l'inégalité (A_k) n'est pas vérifiée, on a encore $|\beta_{n+1}^{(1)}| \leq w_{n+1}$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que la relation est vraie pour les $2d+2$ premiers rangs. Soit w la matrice de la permutation $e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_{d+1}$. On a $w^{d+1} = I$ et $\Lambda^d w = w$. On pose :

$$M_{a_{-(2d+1)}} = M_{a_{-2d}} = \cdots = M_{a_{-1}} = M_{a_0} = w$$

et $S_n = M_{a_{-(2d+1)}} \cdots M_{a_n}$ pour $n \geq -(2d+1)$. Toutes les relations précédentes restent valables et l'inégalité du théorème est vérifiée de façon élémentaire pour les premiers rangs, ce qui achève la démonstration du théorème. □

16. Fin de la démonstration $\lambda_1 + \lambda_{d+1} > 0$.

Le résultat suivant relie $\lambda_1 + \lambda_{d+1}$ aux exposants de la matrice jacobienne de T.

LEMME 16.1. — *On a*

$$\lambda_2 + \cdots + \lambda_d = -(\lambda_1 + \lambda_{d+1}) = \frac{d-1}{d+1} \sum_{i=1}^{d} \gamma_i - \sum_{i=2}^{d} \gamma_i.$$

Démonstration. — Pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $\gamma_i = \lambda_1 - \lambda_{d+2-i}$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{d} \gamma_i = d\lambda_1 - \sum_{i=2}^{d+1} \lambda_i = (d+1)\lambda_1,$$

car $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 0$. On a aussi :

$$\sum_{i=2}^{d} \gamma_i = (d-1)\lambda_1 - \sum_{i=2}^{d} \lambda_i.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\lambda_2 + \cdots + \lambda_d &= (d-1)\lambda_1 - \sum_{i=2}^{d} \gamma_i \\ &= \frac{d-1}{d+1} \sum_{i=1}^{d} \gamma_i - \sum_{i=2}^{d} \gamma_i = \gamma_1 - \frac{2}{d+1} \sum_{i=1}^{d} \gamma_i.\end{aligned} \qquad \square$$

Sur $\Delta^* = \{\xi \in \Delta : x^{(1)} \neq 0\}$, on définit la fonction f à valeurs réelles par

$$f(\xi) = \frac{1}{d+1} \log \frac{\|\Lambda^{d-1} T'_x u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1}\|^{d+1}}{[\det T'_x]^{d-1}},$$

où $\xi = (x, u_1, \ldots, u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1})$ avec les $u_1 \wedge \ldots \wedge u_i$ unitaires. Alors :

PROPOSITION 16.2. — *Pour $\widetilde{\pi}$-presque tout ξ de Δ, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{T}^k \xi) = \lambda_1 + \lambda_{d+1}.$$

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned} f(\xi) + f(\widetilde{T}\xi) &= \frac{1}{d+1} \log \frac{\|\Lambda^{d-1} T'_x u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1}\|^{d+1}}{[\det T'_x]^{d-1}} \\ &\quad + \frac{1}{d+1} \log \frac{\|\Lambda^{d-1} T'_{Tx}(\Lambda^{d-1} T'_x u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1})\|^{d+1}}{\|\Lambda^{d-1} T'_x u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1}\|^{d+1} [\det T'_{Tx}]^{d-1}} \\ &= \frac{1}{d+1} \log \frac{\|\Lambda^{d-1} (T^2)'_x u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1}\|^{d+1}}{[\det (T^2)'_x]^{d-1}} \end{aligned}$$

car $T'_{Tx} T'_x = (T^2)'_x$. De même, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{T}^k \xi) = \frac{1}{n} \frac{1}{d+1} \log \frac{\|\Lambda^{d-1} (T^n)'_x u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1}\|^{d+1}}{[\det (T^n)'_x]^{d-1}}.$$

Mais la mesure $\widetilde{\pi}$ ne charge que les drapeaux de la forme ξ_x, qui sont les drapeaux caractéristiques de $(T^n)'_x$. Donc, $\widetilde{\pi}$-presque partout,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{T}^k \xi) = \sum_{i=2}^{d} \gamma_i - \frac{d-1}{d+1} \sum_{i=1}^{d} \gamma_i. \qquad \square$$

LEMME 16.3. — *La fonction f est continue sur Δ^*, elle est höldérienne sur tous les compacts de Δ^*.*

Démonstration. — Si $\xi = (x, u_1, \ldots, u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1})$ avec $u_1 \wedge \ldots \wedge u_i$ unitaire, et si

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \hat{e}_i$$

avec $\hat{e}_i = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_d$ et $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 = 1$, on a :

$$f(\xi) = \frac{1}{d+1} \log \left[\frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{d} \alpha_i^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 x^{(2)} + \cdots + \alpha_d x^{(d)})^2}}{(x^{(1)})^{d-1}} \right]^{d+1}.$$

On a donc :

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{1 - \alpha_1^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 x^{(2)} + \cdots + \alpha_d x^{(d)})^2}{(x^{(1)})^{2(d-1)}} \right].$$

Cette fonction est bien définie sur Δ^* et est continue sur Δ^*, höldérienne sur tous les compacts de Δ^*. $\square$

LEMME 16.4. — *La fonction f est dans $L^1_{\bar{\pi}}(\Delta)$.*

Démonstration. — Soit $c = 1 - \alpha_1^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 x^{(2)} + \cdots + \alpha_d x^{(d)})^2$, les α_i et les $x^{(i)}$ sont en module plus petits que 1, donc,

$$c \leq 1 + \Big(\sum_{i=2}^{d} x^{(i)} \Big)^2 \leq d^2.$$

On remarque que c est une fonction croissante de α_1 si $\sum_{i=2}^{d} \alpha_i x^{(i)}$ est positif, décroissante sinon. La valeur minimale de c est $(1 - |\sum_{i=2}^{d} \alpha_i x^{(i)}|)^2$; elle est atteinte pour $\alpha_1^2 = 1$, les autres α_i sont donc nuls et donc $c \geq 1$. On en déduit que

$$|f(\xi)| \leq \max \Big\{ (d-1) |\log x^{(1)}|, \Big| \log \frac{d}{(x^{(1)})^{(d-1)}} \Big| \Big\} \leq c |\log x^{(1)}|.$$

Comme la mesure π est équivalente à la mesure de Lebesgue, f est donc bien une fonction de $L^1_{\bar{\pi}}(X)$. $\square$

LEMME 16.5. — *La fonction $\widetilde{P}f$ est dans $H_\varepsilon(\Delta)$.*

Démonstration. — On a $\widetilde{P}f(\xi) = \sum_a f(a\cdot\xi)p(x,a)$. Pour a dans $\mathcal{A}_d$ et si $\xi = (x, u_1, \dots, u_1\wedge\dots\wedge u_{d-1})$, on a :

$$f(a\cdot\xi) = \frac{1}{d+1}\log\left[\frac{\|\Lambda^{d-1}T'_{a\cdot x}v_1\wedge\dots\wedge v_{d-1}\|^{d+1}}{(\det T'_{a\cdot x})^{d-1}}\right]$$

où $v_1\wedge\dots\wedge v_{d-1} = \Lambda^{d-1}a'_x u_1\wedge\dots\wedge u_{d-1}/\|\Lambda^{d-1}a'_x u_1\wedge\dots\wedge u_{d-1}\|$. Comme $T'_{a\cdot x}a'_x = I$, on a :

$$\|\Lambda^{d-1}T'_{a\cdot x}\Lambda^{d-1}a'_x u_1\wedge\dots\wedge u_{d-1}\| = 1$$

et donc on a :

$$f(a\cdot\xi) = -\frac{1}{d+1}\log\big[\|\Lambda^{d-1}a'_x u_1\wedge\dots\wedge u_{d-1}\|^{d+1}\cdot|\det T'_{a\cdot x}|^{d-1}\big].$$

Si on écrit maintenant $u_1\wedge\dots\wedge u_{d-1} = \sum_{i=1}^d \alpha_i\hat{e}_i$, on a :

$$f(a\cdot\xi) = \frac{1}{d+1}\log\left[\frac{(x^{(d)}+a^{(d)})^{(d+1)(d-1)}}{[(\sum_{i=1}^d(x^{(i)}+a^{(i)})\alpha_i)^2+\sum_{i=1}^{d-1}\alpha_i^2]^{(d+1)/2}}\right].$$

Comme $u_1\wedge\dots\wedge u_{d-1}$ est unitaire, on a :

$$f(a\cdot\xi) = \frac{1}{2}\log\left[\frac{(\sum_{i=1}^d(x^{(i)}+a^{(i)})\alpha_i)^2+1-\alpha_d^2}{(x^{(d)}+a^{(d)})^{2(d-1)}}\right].$$

Chaque fonction $\xi\mapsto f(a\cdot\xi)$ est donc bien höldérienne. La majoration du lemme précédent permet d'écrire que

$$\big|f(a\cdot\xi)\big| \le c\log a^{(d)}$$

où c est une constante indépendante de a. La série $\sum_a \log a^{(d)}\sup_x p(x,a)$ est convergente, donc $\widetilde{P}f$ est aussi höldérienne. □

Si on suppose que $\lambda_2+\dots+\lambda_d$ est nul, alors d'après le corollaire 7.6, il existe une fonction g de $H_\varepsilon(\Delta)$ telle que

$$\widetilde{\pi}(g)=0,\ f = g - g\circ\widetilde{T}\quad \widetilde{\pi}\text{-p.p.}\quad \text{et}\quad \widetilde{P}f = \widetilde{P}g - g\quad \text{partout.}$$

Sur $\Delta_a = \{\xi : x\in K_a\}$, avec a dans $\mathcal{A}_d$, T est continue, de même que f et g ; donc pour tout ξ dans Δ_a, d'origine x, on a

$$f(\xi) = g(\xi) - g(\widetilde{T}\xi). \tag{1}$$

On a alors le :

LEMME 16.6. — *La fonction f n'est pas de la forme $f(\xi) = g(\xi) - g(\widetilde{T}\xi)$ avec g continue.*

Démonstration. — On montre que cette équation ne peut pas avoir lieu en la testant sur des points périodiques x pour lesquels on peut construire un drapeau ξ particulier. Ils sont tels que leur développement par l'algorithme de Jacobi-Perron soit une suite périodique $(\overline{a_1 \cdots a_k})$ de période k et tels que la matrice $A_{a_1} \cdots A_{a_k}$ ait exactement $d+1$ valeurs propres distinctes en module. On calcule alors :

$$f(\xi) + \cdots + f(\widetilde{T}^{k-1}\xi) = \frac{1}{d+1} \log \frac{\|\Lambda^{d-1}(T^k)'_x u_1 \wedge \ldots \wedge u_{d-1}\|^{d+1}}{[\det(T^k)'_x]^{d-1}}$$

et on montre que cette quantité ne peut pas être nulle. Si ξ_x est alors le drapeau complet d'origine x, dont le sous-espace projectif de dimension $p < d$ est engendré par les p vecteurs propres de $(T'_x)^k$ correspondant aux p plus petites valeurs propres μ_i (en module $|\mu_i| = \mathrm{e}^{\lambda_i}$), la quantité $k^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} f(\widetilde{T}^i \xi)$ vaut $\lambda_1 - \lambda_{d+1}$.

Il suffit donc de connaître l'existence d'un produit $A_{a_1} \cdots A_{a_k}$ de S', dont les valeurs propres μ_i sont réelles, distinctes en module et telles que $|\mu_1 \mu_{d+1}| \neq 1$. Cette existence découle du lemme suivant qui est un cas particulier du lemme 1.4 de [GGu].

LEMME 16.7. — *Soit S' un semi-groupe Zariski-dense dans* Sl $(\mathrm{d}+1, \mathbb{R})$ *et $\Gamma \subset S'$ l'ensemble des γ de S' dont les valeurs propres sont réelles, distinctes en module. Alors Γ est aussi Zariski-dense dans* Sl $(\mathrm{d}+1, \mathbb{R})$.

La démonstration du lemme 16.6 s'achève aisément. Pour un élément g de Sl $(d+1, \mathbb{R})$ de valeurs propres $\mu_i(g)$, la fonction

$$\prod_{i \neq j} \left(\mu_i^2(g) \cdot \mu_j^2(g) - 1\right) = R(g)$$

est une fonction symétrique des racines, qui est elle-même un polynôme par rapport aux fonctions symétriques élémentaires des racines, donc un polynôme par rapport aux coefficients de la matrice g. Puisque Γ est dense au sens de Zariski dans Sl $(d+1, \mathbb{R})$, la relation $R(g) = 0$ pour tout g de Γ implique $R(g) = 0$ pour tout g de Sl $(d+1, \mathbb{R})$, ce qui n'est pas le cas. Donc il existe γ dans $\Gamma \subset S'$ avec $R(\gamma) \neq 0$ et donc dans ce cas $|\mu_1 \mu_{d+1}| \neq 1$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Complément. — Pour illustrer les considérations précédentes, on donne des exemples explicites. En dimensions 3 et 4, on peut en effet faire tous les calculs et donner des points qui vérifient les conditions précédentes.

a) En dimension 3, on prend le point x du cube I^3 de développement périodique par l'algorithme de Jacobi-Perron $(\overline{a, b})$ où $a = (9, 9, 10)$ et $b = (1, 1, 1)$. En ce point les quantités précédentes se calculent, ce sont les logarithmes des racines des modules des valeurs propres de la matrice $A_a A_b$. On a :

$$A_a A_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

qui a pour polynôme caractéristique

$$P(x) = x^4 - 20x^3 - 12x^2 + x + 1.$$

Les racines de P sont toutes les quatre différentes et réelles; elles sont proches de -0.47, -0.38, 0.27 et 20.6. La valeur absolue du produit des racines extrêmes vaut environ 9.7 et est donc bien différente de 1. La fonction f ne s'écrit donc pas sous la forme $g - g \circ T$, pour

$$f(\xi) = \log \frac{\|\Lambda^2 T'_x u_1 \wedge u_2\|^4}{[\det(T)'_x]^2}$$

où $\xi = (x, u_1, u_1 \wedge u_2)$.

b) En dimension 4, on choisit par exemple le point qui a pour développement par l'algorithme de Jacobi-Perron $(\overline{ab})$ avec $a = (2, 2, 2, 2)$ et $b = (10, 10, 10, 10)$. Les valeurs propres de la matrice $A_a A_b$ sont les racines du polynôme

$$-x^5 + 32x^4 + 32x^3 - 8x^2 - 8x + 1$$

qui valent à peu près -0.9, -0.62, 0.12, 0.45, 32.96. On vérifie que f n'est pas de la forme $g - g \circ T$ exactement de la même façon qu'en dimension 3.

Remarque. — En suivant les arguments de [Gu2], on peut donner une autre caractérisation des λ_p analogue à celle considérée en [Z] :

THÉORÈME 16.8. — *Considérons l'algorithme de Jacobi-Perron et posons*

$$S_n(x) = A(x)A(Tx)\cdots A(T^{n-1}x).$$

Alors pour π-presque tout x, il existe un entier $n = n(x)$ tel que $S_n(x)$ ait $(d+1)$ valeurs propres réelles, distinctes en module $\mu_p^n(x)$, $(1 \le p \le d+1)$. Si ces $\mu_p^n(x)$ sont ordonnés par module décroissant, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} \log\left|\mu_p^n(x)\right| = \lambda_p.$$

Le drapeau correspondant $\xi^n(x)$ converge vers $\xi(x)$ π-presque partout.

Annexe : résultats pour l'algorithme de Brun

Dans ce paragraphe, on montre brièvement que les résultats obtenus sont aussi valables pour l'algorithme de Brun. On peut voir cet algorithme comme la restriction de l'algorithme de Jacobi-Perron à l'ensemble $\{x \in I^d : x^{(i)} \le x^{(d)}\}$. Il faut noter que la densité de la mesure invariante est connue explicitement [S2], [AN], à cause de la relation de cet algorithme avec les échanges d'intervalles. Cette densité vaut

$$h(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{i} x^{(\sigma(j))}}.$$

Il faut remarquer que cet algorithme apparaît comme une généralisation «moins naturelle» de l'algorithme classique des fractions continues, car dans la construction géométrique (voir 2.2) des approximations, au lieu de projeter sur un demi-plan, on projette sur la réunion des demi-bandes suivantes :

$$\bigcup_{i=1}^{d} \{u^{(i)} = 1,\ 0 \le u^{(j)} \le 1,\ 1 \le i \ne j \le d,\ u^{(d+1)} \in \mathbb{R}_+\}.$$

Ceci entraîne que les simplexes qui approchent le point x ne sont pas construits aussi simplement que dans le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron. Cependant, on peut utiliser cette structure supplémentaire pour obtenir un algorithme ayant des propriétés de symétrie très analogues à celles de l'algorithme classique des fractions continues [HK2].

Tout ce qu'on a fait précédemment reste valable pour l'algorithme de Brun, à condition de montrer que l'analogue de l'inégalité de Paley et Ursell est encore vraie pour cet algorithme, et que le semi-groupe de matrices qui apparaît est dense au sens de Zariski.

Supposons $d \geq 2$, soit $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$ un point de I^d. On définit $r(x) = r$ si $x^{(r)} = \max_{1 \leq j \leq d}\{x^{(j)}\}$. L'algorithme de Brun est défini par la transformation de I^d suivante :

$$B(x) = \Big(\frac{x^{(r+1)}}{x^{(r)}}, \dots, \frac{x^{(d)}}{x^{(r)}}, \Big\{\frac{1}{x^{(r)}}\Big\}, \frac{x^{(1)}}{x^{(r)}}, \dots, \frac{x^{(r-1)}}{x^{(r)}}\Big).$$

On définit aussi l'entier $c(x) = [1/x^{(r)}]$; alors

$$B(x) = \Big(\frac{x^{(r+1)}}{x^{(r)}}, \dots, \frac{x^{(d)}}{x^{(r)}}, \frac{1}{x^{(r)}} - c, \frac{x^{(1)}}{x^{(r)}}, \dots, \frac{x^{(r-1)}}{x^{(r)}}\Big).$$

Un point de I^d est entièrement déterminé par la suite (c_n, r_n) construite ainsi par récurrence. On considère w la matrice de la permutation $e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_{d+1} \to e_1$ et n la matrice de $\mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$ qui a des coefficients tous nuls, sauf le coefficient $n_{d+1,d+1}$ qui vaut 1. On a alors

$$x = \big[w^{r(x)} + c(x)n\big] \cdot Bx = M(x) \cdot Bx.$$

Pour construire une distance équivalente à la distance euclidienne et qui est contractée par toutes les homographies $\Psi_{c,r}(x) = (w^r + cn) \cdot x$, on remarque que le polyèdre symétrique convexe qui a pour sommets les points $(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon)$, $(\varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{-1})$, $\sigma(2, -2\varepsilon, \dots, -2\varepsilon)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, est envoyé strictement à l'intérieur de lui-même si ε est suffisamment petit (par exemple on peut prendre $\varepsilon = \frac{1}{8}$). Pour le voir, il suffit, comme tout est symétrique, de le faire pour $d = 2$. Ensuite, comme dans [Br2], on déduit de la distance de Hilbert une distance δ qui est contractée par tous les $\Psi_{c,r}$.

Comme dans le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron, on construit une suite de bases du réseau $\mathbb{Z}^{d+1}$ par récurrence, en partant de la base canonique du réseau $(e_1, \dots, e_{d+1})$. La n-ième base est alors l'image de cette base par la matrice $S_n(x) = M(x)M(Bx) \cdots M(B^{n-1}x)$. On a donc :

$$e_{n+1}^{(i)} = e_n^{(r_{n+1}+i)} \quad (1 \leq i \leq d) \quad \text{et} \quad e_{n+1}^{(d+1)} = e_n^{(r_{n+1})} + c_{n+1}e_n^{(d+1)},$$

dans les indices, on fait les sommes modulo $d + 1$.

On note s_n la somme de la dernière colonne de la matrice S_n. On a alors :

LEMME 16.9. — *Soit k le plus petit entier tel que $r_{n+1}+\cdots+r_{n-k}=0$ modulo $(d+1)$; alors on a :*

$$s_{n+1}=c_{n+1}s_n+s_{n-k-1}.$$

Éventuellement, si $n-k$ est négatif, on a $s_{n+1}=c_{n+1}s_n+1$.

Démonstration. — On note $(\gamma_n^{(i)})_{1\le i\le d+1}$ les colonnes de la matrice S_n. On a alors :

$$\gamma_{n+1}^{(i)}=\gamma_n^{(r_{n+1}+i)}\quad (\text{si } 1\le i\le d)\quad \text{et}\quad \gamma_{n+1}^{(d+1)}=\gamma_n^{(r_{n+1})}+c_{n+1}\gamma_n^{(d+1)},$$

dans les indices on fait les sommes modulo $d+1$. Donc,

$$\gamma_{n+1}^{(d+1)}=\gamma_{n-1}^{(r_{n+1}+r_n)}+c_{n+1}\gamma_n^{(d+1)}=\cdots=\gamma_{n-k-1}^{(r_{n+1}+r_n+\cdots+r_{n-k})}+c_{n+1}\gamma_n^{(d+1)}$$

où k est le plus petit entier tel que $r_{n+1}+r_n+\cdots+r_{n-k}=0$ $[d+1]$. D'où,

$$\gamma_{n+1}^{(d+1)}=\gamma_{n-k-1}^{(d+1)}+c_{n+1}\gamma_n^{(d+1)}.$$

Ainsi $s_{n+1}=c_{n+1}s_n+s_{n-k-1}$. □

L'inégalité de Paley-Ursell généralisée est alors donnée par :

PROPOSITION 16.10. — *Pour tout x qui a un développement jusqu'au rang n, on a :*

$$\big\|\Lambda^d S_n(x)\big\|\le s_n(x).$$

Démonstration. — On calcule d'abord $\Lambda^d M(x)$. On a :

$$\begin{aligned}\Lambda^d M(x)&=\frac{1}{\det M(x)}\big[{}^tM(x)\big]^{-1}=(-1)^{dr(x)}\big[w^{d+1-r(x)}+c(x)n\big]^{-1}\\&=(-1)^{dr(x)}\big[w^{r(x)}-c(x)w^{r(x)}nw^{r(x)}\big].\end{aligned}$$

Alors, si x a pour développement (c_n,r_n) par l'algorithme de Brun :

$$\Lambda^d S_{n+1}=(-1)^{dr_{n+1}}\Lambda^d S_n[w^{r_{n+1}}-c_{n+1}w^{r_{n+1}}nw^{r_{n+1}}].$$

Si on note $(\alpha_n^{(j)})_{1\le j\le d+1}$ les colonnes de la matrice $\Lambda^d S_n$, on a alors :

$$\alpha_{n+1}^{(i)}=\begin{cases}(-1)^{dr_{n+1}}\alpha_n^{(r_{n+1}+i)} & \text{si } i\ne -r_{n+1},\\ (-1)^{dr_{n+1}}\big(\alpha_n^{(d+1)}-c_{n+1}\alpha_n^{(r_{n+1})}\big) & \text{sinon,}\end{cases}$$

dans les indices, on fait les sommes modulo $d+1$.

Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que $|\alpha_n^{(-r_n)}|\le s_n$, où $|\alpha|$ désigne le plus grand en module des coefficients de $\Lambda^d S_n$. On le fait par récurrence.

• C'est vrai pour les entiers compris entre $-d$ et 0, car on impose pour $\ell \leq 0$, $r_\ell = 1$ et $c_\ell = 0$.

• On suppose que c'est vrai jusqu'au rang n ; on a alors

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^{(-r_{n+1})} &= (-1)^{dr_{n+1}}\big(\alpha_n^{(d+1)} - c_{n+1}\alpha_n^{(r_{n+1})}\big)\\
&= (-1)^{dr_{n+1}}\alpha_n^{(d+1)} - c_{n+1}(-1)^{d(r_{n+1}+r_n)}\alpha_{n-1}^{(r_{n+1}+r_n)}\\
&\ \vdots\\
&= (-1)^{dr_{n+1}}\alpha_n^{(d+1)} - c_{n+1}(-1)^{d(r_{n+1}+r_n+\cdots+r_{n-k})}\alpha_{n-k-1}^{(-r_{n-k})}
\end{aligned}$$

où k est le plus petit entier tel que $r_{n+1} + r_n + \cdots + r_{n-k} = 0\ [d+1]$. On a alors :

$$\alpha_{n+1}^{(-r_{n+1})} = (-1)^{dr_{n+1}}\alpha_n^{(d+1)} - c_{n+1}\alpha_{n-k-1}^{(-r_{n-k})}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|\alpha_{n+1}^{(-r_{n+1})}| &\leq |\alpha_n^{(d+1)}| + c_{n+1}|\alpha_{n-k-1}^{(-r_{n-k})}|\\
&\leq s_n + c_{n+1}s_{n-k-1} = s_n + (c_{n+1}-1)s_{n-k-1} + s_{n-k-1} \leq s_{n+1}
\end{aligned}$$

car la suite (s_n) est croissante. □

On a aussi le résultat suivant :

PROPOSITION 16.11. — *Soit G le groupe engendré par l'ensemble des matrices*

$$\{w^r + cn,\ c \in \mathbb{N}^*, 1 \leq r \leq d\}.$$

Alors G est le groupe des matrices à coefficients entiers de déterminant 1 *si d est pair et le groupe des matrices à coefficients entiers de déterminant* ± 1 *si d est impair.*

Démonstration. — Le groupe G contient toutes les matrices $I + E_{d+1,r}$ et $I + E_{r,d+1}$, $1 \leq r \leq d$. En effet,

$$\begin{aligned}
(w^r + cn)^{-1}\big(w^r + (c+1)n\big) &= I + E_{d+1-r,d+1},\\
(w^r + cn)\big(w^r + (c-1)n\big)^{-1} &= I + E_{d+1,d+1-r}.
\end{aligned}$$

Alors G contient aussi la matrice w car

$$(I + E_{d,d+1})^{-1}(w+n) = (I - E_{d,d+1})(w+n) = w.$$

Donc G contient $w^k(I + E_{d+1,r})w^{-k} = I + E_{k,r+k}$. Ainsi G contient toutes les matrices $I + E_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq d+1$ qui engendrent $\mathrm{Sl}(d+1,\mathbb{Z})$. Comme $\det w = (-1)^d$, on a donc $G = Sl(d+1,\mathbb{Z})$, si d est pair ; G est le groupe des matrices à coefficients entiers de déterminant ± 1 si d est impair. □

Ce résultat entraîne alors que l'adhérence de Zariski du semi-groupe S' engendré par $\{w^r + cn, c \in \mathbb{N}^*, 1 \leq r \leq d\}$ contient le groupe des matrices réelles de déterminant 1. Ainsi tous les résultats que l'on a montrés pour l'algorithme de Jacobi-Perron sont valables pour l'algorithme de Brun. Ce qu'on peut énoncer ainsi :

THÉORÈME 16.12. — *Les exposants caractéristiques de l'algorithme de Brun sont tous différents et la somme des exposants extrêmes est strictement positive.*

BIBLIOGRAPHIE

[AN] P. ARNOUX, A. NOGUEIRA, Mesures de Gauss pour des algorithmes de fractions continues, Ann. École Norm. Sup., 26 (1993), 645–664.

[At] G. ATKINSON, Recurrence of cocycles and random walks, J. London Math. Soc., 13 (1976), 486–488.

[Ba1] P.R. BALDWIN, A multidimensional continued fractions and some of its statistical properties, J. Stat. Physics, 66-5/6 (1992), 1463–1505.

[Ba2] P.R. BALDWIN, A convergence exponent for multidimensional continued fractions algorithms, J. Stat. Physics, 66-5/6 (1992), 1507–1526.

[Bo] A. BOREL, Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, Paris, 1969.

[BL] P. BOUGEROL, J. LACROIX, Products of random matrices with applications to Schrödinger operators, Progress in Probability and Statistics, 8, Birkhäuser, 1985.

[Br1] A. BROISE, Thèse et annexe, Université de Rennes I, 1994.

[Br2] A. BROISE, Fractions continues multidimensionnelles et lois stables, Bull. Soc. Math. France, 124 (1996), 97–139.

[Ca] J.W.S. CASSELS, An introduction to diophantine approximation, Cambridge University Press, Cambridge, 1957.

[CGu] J.-P. CONZE, Y. GUIVARC'H, Limits sets of groups of linear transformations, Sankyā : The Indian Journal of Statistics, Special issue on Ergodic Theory and Harmonic Analysis, 62, Serie A, Pt 3 (2000), 367–385.

[CR] J.-P. CONZE, A. RAUGI, Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications, Bull. Soc. Math. France, 118 (1990), 273–310.

[D] S.G. DANI, Dynamical systems on homogeneous spaces, Encyclopediae of Mathematical Sciences, vol. 100, chap. 6, Math. Physics I : Dynamical systems, Ergodic theory and Applications, Ya.G. Sinaï, ed., Springer, 2000.

[F] H. FURSTENBERG, Non commuting random products, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 377–428.

[GGu] I. GOLDSHEID, Y. GUIVARC'H, Zariski closure and the dimension of the Gaussian law of the product of random matrices. I, Probab. Theory Relat. Fields, 105 (1996), 109–142.

[GM] I. GOLDSHEID, G.A. MARGULIS, Simplicity of the Liapunoff spectrum for product of random matrices, Soviet Math., 35 (1987), 309–313.

[Go] M. GORDIN, Exponentially fast mixing, Sov. Math. Dokl., 12 (1971), 331–335.

[Gr] W.L. GREENBERG, Discrete groups with dense orbits, in 'Flows on homogeneous spaces', L. Auslander, L. Green, F. Hahn, eds., Princeton University Press, Princeton, p. 85–103, 1963.

[Gu1] Y. GUIVARC'H, Propriétés ergodiques, en mesure infinie, de certains systèmes dynamiques fibrés, Ergodic Th. Dynam. Systems, 9 (1989), 433–453.

[Gu2] Y. GUIVARC'H, Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire, Ergodic Th. Dynam. Systems, 10 (1990), 483–512.

[GuLeP] Y. GUIVARC'H, E. LE PAGE, Transformée de Laplace d'une mesure de probabilité sur le groupe linéaire et applications, Prépublication, Rennes, IRMAR, n° 00–26, 2000.

[GuR1] Y. GUIVARC'H, A. RAUGI, Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, Z. Wahr. Verw. Geb., 69 (1985), 187–242.

[GuR2] Y. GUIVARC'H, A. RAUGI, Product of random matrices : convergence theorems, Contemp. Math., 50 (1986), 31–54.

[GuR3] Y. GUIVARC'H, A. RAUGI, Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles. Cœfficients de Liapunoff d'un produit de matrices aléatoires indépendantes, Israel J. Math., 65 (1989), 165–196.

[HK1] D.M. HARDCASTLE, K. KHANIN, On almost everywhere strong convergence of multidimensionnal continued fractions algorithms, Ergodic Th. Dynam. Systems, 20 (2000), 1711–1733.

[HK2] D.M. HARDCASTLE, K. KHANIN, Continued fractions and the d-dimensionnal Gauss transformation, Prépublication, 30 p., Edinburgh, 2000.

[ITM] C.T. IONESCU-TULCEA, G. MARINESCU, Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues, Ann. Math., 52 (1950), 140–147.

[IKO] S. ITO, M. KEANE, M. OHTSUKI, Almost everywhere exponential convergence of the modified Jacobi-Perron algorithm, Ergodic Th. Dynam. Systems, 13, 319–334, 1993 et (avec FUJITA), 16 (1996), 1345–1352.

[Ke] H. KESTEN, Sums of stationary sequences cannot grow slower than linearly, Proc. Amer. Math. Soc., 49 (1975), 205–211.

[Ko] D.V. KOSYGIN, Multidimensional KAM theory from the renormalisation group viewpoint, in 'Dynamical System and Statistical Mechanics', Advances in Soviet Math., 1991.

[La1] J.C. LAGARIAS, The quality of the diophantine approximations found by the Jacobi-Perron and related algorithms, Mh. Math., 115 (1993), 299–328.

[La2] J.C. LAGARIAS, Geodesic multidimensionnal continued fractions, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 69, No. 3 (1994), 464–488.

[LeP] E. LE PAGE, Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications, Ann. Inst. Henri Poincaré, 25 (1989), 109–142.

[Ma] D. MAYER, Approach to equilibrium for locally expanding maps in $\mathbb{R}^k$, Comm. Math. Phys., 9 (1984), 1–15.

[Me] R. MEESTER, A simple proof of the exponential convergence of the modified Jacobi-Perron algorithm, Ergodic Th. Dynam. Systems, 19 (1999), 1077–1083.

[Mo] P. MONTEL, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, chap. I et IX, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

[N] A. NOGUEIRA, The three–dimensional Poincaré continued fractions algorithm, Israel J. Math., 90 (1995), 373–401.

[Os] V.I. OSELEDETS, A multiplicative ergodic theorem, Trans. Moscow Math. Soc., 19 (1968), 197–231.

[PU] R.E.A.C. PALEY, H.D. URSELL, Continued fractions in several dimensions, Proc. Camb. Phil. Soc., 26 (1930), 127–144.

[Pe] O. PERRON, Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Math. Ann., 64 (1907), 1–76.

[Po] H. POINCARÉ, Sur une généralisation des fractions continues, C. R. Acad. Sci. Paris, 99, 8 déc. 1884; Œuvres complètes de H. Poincaré, t. V, p. 185–188.

[Ra] M.S. RAGHUNATHAN, A proof of Oseledets multiplicative ergodic theorem, Israel J. Math., 32 (1979), 356–362.

[S1] F. SCHWEIGER, The metrical theory of the Jacobi-Perron algorithm, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 334 (1973).

[S2] F. SCHWEIGER, A modified Jacobi-Perron algorithm with explicitely given invariant measure, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 729 (1979), 199–202.

[S3] F. SCHWEIGER, The exponent of convergence for the two–dimensional Jacobi-Perron algorithm, Proceedings Conference on Analytic and Elementary Number Theory, W.G. Nowak, J. Schoissengeier, eds., Vienne, 1996, p. 207–213.

[Z] A. ZORICH, Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunoff exponents, Annales de l'Institut Fourier, 46–2 (1996), 325–370.

Manuscrit reçu le 5 novembre 1999,
accepté le 7 septembre 2000.

Anne BROISE-ALAMICHEL,
Université Paris-Sud
Mathématiques – UMR 8628 du CNRS
Bât. 425
91405 Orsay Cedex (France).
Anne.Broise@math.u–psud.fr
&
Yves GUIVARC'H,
Université de Rennes I
IRMAR – UMR 6625 du CNRS
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).
guivarch@maths.univ–rennes1.fr