ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALBERTO ARABIA

Classes d'Euler équivariantes et points rationnellement lisses

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 3 (1998), p. 861-912

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_3_861_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 3 (1998), 861–912

CLASSES D'EULER ÉQUIVARIANTES ET POINTS RATIONNELLEMENT LISSES

par Alberto ARABIA

Introduction.

Soient $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie algébrique semi-simple complexe et connexe, $\boldsymbol{B}$ un sous-groupe de Borel de $\boldsymbol{G}$, et $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{B}$ un sous-groupe de Cartan de $\boldsymbol{G}$. Notons $\boldsymbol{X} := \boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$ la variété des drapeaux de $\boldsymbol{G}$; c'est une variété algébrique complexe projective lisse que nous considérons munie de la structure de $\boldsymbol{B}$-espace induite par la restriction de l'action naturelle de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$.

Le groupe de Weyl associé à la paire $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$ est, par définition, $\boldsymbol{W} := N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{H})/\boldsymbol{H}$. Comme d'autre part $N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{H}) \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$, l'inclusion $N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{H}) \subseteq \boldsymbol{G}$ identifie $\boldsymbol{W}$ à une partie de $\boldsymbol{X}$. Les éléments de $\boldsymbol{W}$ paramétrent alors les $\boldsymbol{B}$-orbites de $\boldsymbol{X}$ et l'on a «*la décomposition de Bruhat de* $\boldsymbol{X}$» :

$$(*) \qquad \boldsymbol{X} = \coprod_{w \in \boldsymbol{W}} \boldsymbol{B}{\cdot}w.$$

L'orbite $\boldsymbol{B}{\cdot}w$, qu'on notera désormais $\boldsymbol{X}(w)$, admet une structure naturelle d'espace vectoriel complexe (cellule de Schubert ou de Bruhat) de dimension notée $\ell(w)$. La décomposition $(*)$ correspond également à celle d'une structure de CW-complexe (à cellules de dimension réelle paire donc) de l'espace topologique compact sous-jacent à la variété des drapeaux.

Mots-clés : Pseudovariété – Cohomologie équivariante – Classe d'Euler équivariante – Morphisme de Thom-Gysin équivariant – Point rationnellement lisse – Lissité rationnelle – Singularité – Variété de Schubert.
Classification math : 57Pxx – 57Q91 – 14B05 – 55N91 – 55R40 – 55N30 – 57T35 – 14M15 – 32M05 – 20F55 – 13C14.

Pour chaque $w \in \boldsymbol{W}$, notons $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ la fermeture, pour la topologie de Zariski, de la cellule $\boldsymbol{X}(w) \subseteq \boldsymbol{X}$; c'est une variété algébrique complexe projective irréductible généralement singulière, appelée variété de Schubert. La variété $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ étant $\boldsymbol{B}$-stable, la restriction de la décomposition $(*)$ induit une structure de CW-complexe sur $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ de dimension réelle $2\ell(w)$ ne possédant qu'une unique cellule de dimension maximale : la cellule de Schubert $\boldsymbol{X}(w)$.

Soit $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{H}$ le sous-groupe compact maximal de $\boldsymbol{H}$ et considérons son action naturelle sur la variété de Schubert $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$. L'ensemble $\overline{\boldsymbol{X}}(w)^{\boldsymbol{T}}$, des points de $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ fixes pour l'action de $\boldsymbol{T}$, s'identifie alors à l'ensemble des éléments $v \in \boldsymbol{W}$ vérifiant la relation d'incidence $v \in \overline{\boldsymbol{X}}(w)$. On note «$v \preceq w$»[1] cette dernière relation, d'ordre partiel sur $\boldsymbol{W}$, dite «ordre de Bruhat-Ehresmann».

Considérons maintenant le foncteur $\bullet \rightsquigarrow H_{\boldsymbol{T}}^*(\bullet)$ qui associe à un $\boldsymbol{T}$-espace (localement compact) son algèbre de cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante à coefficients **rationnels**. L'algèbre $H_{\boldsymbol{T}}^*(\mathrm{pt})$ (notée aussi $H_{\boldsymbol{T}}^*$) est isomorphe à l'algèbre graduée de polynômes $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_r]$, où $r = \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ et lorsque les monômes X_i sont considérés de degré 2. Le foncteur $\bullet \rightsquigarrow H_{\boldsymbol{T}}^*(\bullet)$ est donc à valeurs dans la catégorie des $H_{\boldsymbol{T}}^*$-modules gradués (sur $\mathbb{N}$). Nous noterons $Q_{\boldsymbol{T}}$ le corps de fractions de $H_{\boldsymbol{T}}^*$; on a $H_{\boldsymbol{T}}^* \subseteq Q_{\boldsymbol{T}}$ et un élément de $Q_{\boldsymbol{T}}$ sera dit «*polynomial*» s'il appartient à $H_{\boldsymbol{T}}^*$.

Munissons $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ de sa topologie transcendante et de l'orientation donnée par la structure complexe sous-jacente, on a alors un morphisme de $\mathbb{R}$-modules d'intégration :

$$\int_{\overline{\boldsymbol{X}}(w)} : H_{\boldsymbol{T}}^*(\overline{\boldsymbol{X}}(w)) \longrightarrow H_{\boldsymbol{T}}^* .$$

D'autre part, le théorème de localisation de Borel-Atiyah-Segal en cohomologie équivariante montre que le morphisme de restriction :

$$H_{\boldsymbol{T}}^*(\overline{\boldsymbol{X}}(w)) \longrightarrow H_{\boldsymbol{T}}^*(\overline{\boldsymbol{X}}(w)^{\boldsymbol{T}}) \ \left(\equiv (H_{\boldsymbol{T}}^*)^{\{v \in \boldsymbol{W} \mid v \preceq w\}}\right),$$

est un isomorphisme modulo $H_{\boldsymbol{T}}^*$-torsion. Il existe donc une famille *canonique* de fractions rationnelles $\left\{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\right)\right\}_{u \preceq w} \subseteq Q_{\boldsymbol{T}}$, homogènes de degré $\ell(w)$, telles que pour toute classe de cohomologie équivariante

[1] La notation "$v \prec w$" sera synonyme de "$v \preceq w$ et $v \neq w$".

$\mu \in H_{\boldsymbol{T}}^*(\overline{\boldsymbol{X}}(w))$, on ait :

$$(**) \qquad \int_{\overline{\boldsymbol{X}}(w)} \mu = \sum_{v \preceq w} \frac{\imath_v^*(\mu)}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\right)},$$

où $\imath_v : \{v\} \to \overline{\boldsymbol{X}}(w)$ désigne l'injection canonique.

Les dénominateurs dans $(**)$ sont à l'origine de notre généralisation des classes d'Euler équivariantes, ce que nous expliquons maintenant.

Soit $\boldsymbol{Y}$ une variété algébrique complexe de dimension d munie de la topologie transcendante. Un point $x \in \boldsymbol{Y}$ est dit «*rationnellement lisse*» s'il existe un voisinage $U_x \subseteq \boldsymbol{Y}$ tel que, pour tout $y \in U_x$:

$$H_y^i(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}) = 0 \text{ si } i \neq 2d, \quad \text{et } H_y^{2d}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}) \equiv \mathbb{Q}.$$

Lorsque $\boldsymbol{Y} = \overline{\boldsymbol{X}}(w)$, la variété $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ est munie de l'action naturelle de $\boldsymbol{B}$ à gauche et le point x sera rationnellement lisse, si et seulement si, chaque point de l'orbite $\boldsymbol{B}{\cdot}x$ l'est. Comme d'autre part, chaque $\boldsymbol{B}$-orbite contient un unique point $\boldsymbol{T}$-fixe, la recherche des points rationnellement lisses de $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ peut être limitée aux points de $\overline{\boldsymbol{X}}(w)^{\boldsymbol{T}}$. Soit donc $v \in \overline{\boldsymbol{X}}(w)^{\boldsymbol{T}}$ rationnellement lisse. La version équivariante de l'isomorphisme de Thom : $H_{\boldsymbol{T},v}^*(\overline{\boldsymbol{X}}(w))[2\ell(w)] \equiv H_{\boldsymbol{T}}^*(\{v\})$ est alors valable et le formalisme cohomologique usuel qui introduit la classe d'Euler à partir de ce dernier isomorphisme identifie cette classe caractéristique équivariante à $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\right)$ (*cf.* [AB]). Par conséquent, et toujours dans le cas où v est supposé rationnellement lisse, l'élément $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\right)$, *a priori* dans $Q_{\boldsymbol{T}}$, est en fait polynomial.

Nous avons alors remarqué que l'introduction des fractions $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\right)$ utilise uniquement l'existence du morphisme $\int_{\overline{\boldsymbol{X}}(w)}$: $H_{\boldsymbol{T},v}^*(\overline{\boldsymbol{X}}(w)) \to H_{\boldsymbol{T}}^*$ et le fait que v est isolé dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)^{\boldsymbol{T}}$. La section 2.3 de cet article, exploite cette observation en introduisant les fractions $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(y, \boldsymbol{Y})$ pour toute variété algébrique complexe $\boldsymbol{Y}$ munie d'une action algébrique de $\boldsymbol{T}$ telle que y est isolé dans $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ [(2)]. Ces fractions généralisent la notion de classe d'Euler équivariante en ce sens que, lorsque y est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$, on a toujours une identification canonique entre $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(y, \boldsymbol{Y})$ et la classe d'Euler équivariante habituelle de y dans $\boldsymbol{Y}$.

(2) En fait nous travaillons sur une catégorie d'espaces bien plus large : celle des $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés orientées.

Pour cette raison, et d'autres qui font l'objet de la section 2.6, nous avons gardé la terminologie de «*classe d'Euler $\boldsymbol{T}$-équivariante de y dans $\boldsymbol{Y}$*» pour désigner la fraction $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(y, \boldsymbol{Y})$.

Notre résultat principal est le critère de lissité suivant, prouvé dans la section 3.2.1.

THÉORÈME 3.2.1-2. — *Soit $\boldsymbol{T} := (\mathbb{S}^1)^r \subseteq (\mathbb{C}^*)^r =: \boldsymbol{H}$. On considère une représentation linéaire algébrique de $\boldsymbol{H}$ dans $\mathbb{C}^n$ à poids dans un même demi-espace ouvert, de multiplicité* 1 *et deux à deux non colinéaires. Soit $\boldsymbol{Y}$ un fermé de Zariski dans $\mathbb{C}^n$, équidimensionnel et $\boldsymbol{H}$-stable. Soit $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par les droites vectorielles $\boldsymbol{H}$-stables contenues dans $\boldsymbol{Y}$. Notons $d_{\boldsymbol{Y}} := \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Y})$, $d_{\mathbb{E}} := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_{\mathbb{E}}}\}$ la liste des poids de $\boldsymbol{T}$ dans $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$.*

a) *Alors :*

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \boldsymbol{Y})} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}} \frac{P}{\alpha_1 \cdots \alpha_{d_{\mathbb{E}}}}, \quad \text{avec } P \in H_{\boldsymbol{T}}^{2(d_{\mathbb{E}} - d_{\boldsymbol{Y}})}.$$

De plus : $P = 1$, si et seulement si, 0 *est un point lisse dans $\boldsymbol{Y}$.*

b) *Supposons qu'il existe un plongement $\jmath : \mathbb{C}^* \hookrightarrow \boldsymbol{H}$ tel que les poids α_i restreints à $\mathbb{C}^*$ soient strictement positifs et tel que le quotient $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)$ soit rationnellement lisse et sans cohomologie rationnelle en degrés impairs. Alors :*

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \boldsymbol{Y})} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}} \frac{P}{\alpha_1 \cdots \alpha_{d_{\mathbb{E}}}},$$
$$\text{avec } P \in H_{\boldsymbol{T}}^{2(d_{\mathbb{E}} - d_{\boldsymbol{Y}})}\backslash\{0\} \text{ sans facteur linéaire.}$$

De plus : P est scalaire, si et seulement si, 0 *est un point rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$.*

Dans le cas des variétés de Schubert, la démarche de Kazhdan-Lusztig de l'appendice de [KL1] nous conduit à une situation où l'on peut appliquer directement ce critère pour démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1-1. — *Soient $v \preceq w$ deux éléments du groupe de Weyl. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le point v est rationnellement lisse dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$.*

b) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,\big(y, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\big) \in H_{\boldsymbol{T}}^*$, *pour tout $y \in \boldsymbol{W}$ vérifiant $v \preceq y \prec w$.*

On démontre également à l'aide de ces méthodes cohomologiques le théorème 4.1-2 qui donne les critères de lissité rationnelle connus auparavant et établis par d'autres méthodes par Kumar ([Ku2]), et Carrell et Peterson ([C]).

Motivations. — Imaginé dans les années 85–86 sous la forme du théorème 4.1-1, le critère de lissité rationnelle est issu du cadre de la cohomologie et de la $\boldsymbol{K}$-théorie équivariantes, disciplines dont l'intérêt en Théorie de Groupes était manifeste à l'époque en raison notamment des recherches de N. Berline, M. Vergne, B. Kostant, S. Kumar, W. Rossmann et personnelles. C'est d'ailleurs à cette même période, dans la prépublication [Ku0] de Kumar et sous une forme plus précise que notre assertion 4.1-1-(b) (*cf.* 4.1-2-(c)), qu'un premier lien entre la forme de certains invariants attachés à un point fixe d'une variété de Schubert et le fait que le point est ou n'est pas singulier fut pour la première fois énoncé comme conjecture (ultérieurement démontrée par Kumar dans [Ku2] (1996)). La principale motivation du présent article a été de replacer le critère de lissité rationnelle dans le contexte même qui lui donna naissance et de le démontrer sous sa forme originale.

Organisation de l'article. — La section 1 est constituée de rappels et précise quelques aspects des actions localement libres ; la proposition 1.2.4-3 donne notamment des conditions assurant à l'algèbre de cohomologie équivariante d'un $\boldsymbol{T}$-espace d'être Cohen-Macaulay, cela est utilisé dans la démonstration du théorème 3.1-1 qui est à la source de nos critères de lissité. On introduit également dans cette section les $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés orientées et le morphisme d'intégration équivariante. La section 2 introduit le morphisme de Thom-Gysin équivariant et la notion d'inverse de classe d'Euler équivariante pour des points fixes isolés, sans exiger de condition de lissité rationnelle. La section 3 constitue le cœur de l'article, on y démontre les théorèmes 3.1-1 et 3.2.1-2 qui donnent des critères de lissité en termes de classes d'Euler équivariantes. La section 4 est une application des techniques introduites pour la démonstration d'un critère de lissité rationnelle pour les variétés de Schubert (th. 4.1-1).

Généralisations possibles. — Dans cette étude nous avons gardé en vue trois voies de généralisation possibles pour nos constructions et résultats :

a) Le remplacement de la cohomologie (équivariante) usuelle par la cohomologie d'intersection (équivariante) suivant [Bry], [GM], [Bo].

b) Le passage en caractéristique finie pour des corps algébriquement clos et pour la cohomologie étale (conforme au cadre de travail de [KL1], [KL2]).

c) Le remplacement de la cohomologie équivariante par la $\boldsymbol{K}$-théorie équivariante.

Remerciements : Très spécialement à Michel Brion et au rapporteur dont les commentaires mathématiques m'ont permis d'améliorer substantiellement ce travail. À Zoghman Mebkhout et Patrick Polo pour toutes les discussions que nous avons eues autour de ces questions.

Table des matières

1. Pseudovariétés et cohomologie équivariante.

1.1. $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés.

Pseudovariétés. Rappelons la notion d'«*espace topologique séparé stratifié de dimension d*», dont la définition, de nature inductive, est la suivante (*cf.* [GM]) :

a) En dimension 0. Il s'agit des ensembles finis ou dénombrables munis de la topologie discrète ;

b) En dimension positive d, un «*espace topologique séparé stratifié de dimension d*» est la donnée d'un espace topologique séparé $\boldsymbol{X}$ muni d'une filtration par des parties fermées :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_d \supseteq \boldsymbol{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{X}_1 \supseteq \boldsymbol{X}_0 \supseteq \boldsymbol{X}_{-1} = \varnothing\,, \tag{1}$$

telle que pour chaque $i = 0, \dots, d$ et chaque $x \in \boldsymbol{X}_i \backslash \boldsymbol{X}_{i-1}$ il existe un voisinage N_x de x dans $\boldsymbol{X}$, un espace topologique *compact* $\boldsymbol{Y}(x)$ stratifié de dimension $d - i - 1$:

$$\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)_{d-i-1} \supseteq \boldsymbol{Y}(x)_{d-i-2} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{Y}(x)_1 \supseteq \boldsymbol{Y}(x)_0 \supseteq \boldsymbol{Y}(x)_{-1} = \varnothing\,,$$

et un homéomorphisme

$$\phi : \mathbb{R}^i \times \hat{c}(\boldsymbol{Y}(x)) \xrightarrow{\sim} N_x$$

dont la restriction à chaque $\mathbb{R}^i \times \hat{c}(\boldsymbol{Y}(x)_j)$ est un homéomorphisme sur $N_x \cap \boldsymbol{X}_{i+j+1}$. On a noté $\hat{c}(\boldsymbol{Y})$ le «*cône ouvert*» : $(\boldsymbol{Y} \times [\![0,1[\![)/(\boldsymbol{Y} \times \{0\})$ et pris par convention $\hat{c}(\varnothing) = \mathrm{pt}$.[3]

En particulier, on a $(N_x \cap \boldsymbol{X}_i) \sim \mathbb{R}^i$, et la «*strate i-dimensionnelle*» $S_i := \boldsymbol{X}_i \backslash \boldsymbol{X}_{i-1}$ est ou bien vide, ou bien c'est une variété topologique de dimension réelle i.

On appelle «*pseudovariété de dimension d*» la donnée d'un espace topologique paracompact $\boldsymbol{X}$ admettant une structure d'espace topologique séparé stratifié de dimension d, tel que $\boldsymbol{X}_{d-1} = \boldsymbol{X}_{d-2}$, et tel que la strate de dimension d, à savoir $\boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{X}_{d-2}$, est partout dense dans $\boldsymbol{X}$. On appelle «*sous-pseudovariété d'une pseudovariété $\boldsymbol{X}$*» tout sous-espace localement fermé $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$ muni d'une structure de pseudovariété.

Une pseudovariété peut admettre beaucoup de stratifications et lorsque dans la suite, une assertion concernant une pseudovariété fera référence à une stratification, cela présupposera que l'on en a fixé une, par contre l'omission à cette référence signifiera que l'assertion est indépendante du choix de la stratification.

Exemple. — Les variétés algébriques ou analytiques complexes $\boldsymbol{X}$ munies de la stratification $\{\boldsymbol{X}_j\}_{j \leqslant 2\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})}$, où $\boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{X}_{j-1}$ pour tout j impair, et où $\boldsymbol{X}_{j-2}$ est le lieu singulier de $\boldsymbol{X}_j$ pour tout j pair, lorsqu'elles sont équidimensionnelles et munies de la topologie transcendante, sont des exemples de pseudovariétés.

---

(3) Nous utiliserons également la notation $\hat{c}_x(\boldsymbol{Y})$ lorsque nous aurons besoin de préciser (nommer) le sommet du cône, dans ce cas $\hat{c}_x(\varnothing) = x$.

Remarque 1.1-1.

a) Un espace topologique séparé stratifié (resp. une pseudovariété) $\boldsymbol{X}$ de dimension d est localement compact et l'on montre, par récurrence sur la dimension, que tout point $x \in \boldsymbol{X}$ admet un voisinage homéomorphe au cône d'un espace topologique séparé stratifié (resp. d'une pseudovariété) compact de dimension $d-1$ que nous allons appeler «*le lien de x dans $\boldsymbol{X}$*» et noterons $\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})$

b) (*Cf.* [GM], [Bo].) Un espace topologique séparé stratifié $\boldsymbol{X}$ est donc *localement contractile*, ce qui simplifie l'étude de ses propriétés cohomologiques générales lorsqu'il est en plus paracompact ; en particulier :

(1) Le complexe de faisceaux engendré par le préfaisceau qui fait correspondre à un ouvert l'algèbre différentielle graduée des cochaînes singulières à coefficients dans un anneau $\boldsymbol{A}$, est une résolution fine du faisceau constant $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{X}}$. Par conséquent, le «*complexe dualisant de $\boldsymbol{X}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$*», *i.e.* l'objet $\mathbb{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{A}) := c^{!}(\boldsymbol{A})$ de la catégorie dérivée des faisceaux sur $\boldsymbol{X}$, où c désigne l'application constante $c : \boldsymbol{X} \to \mathrm{pt}$, est quasi-isomorphe au complexe de faisceaux associé au complexe de préfaisceaux $C^{\bullet}(\boldsymbol{A})$:

$$\Gamma(U; C^{-k}(\boldsymbol{A})) = S_k(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}\backslash U; \boldsymbol{A}) \xrightarrow{\delta_k} S_{k-1}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}\backslash U; \boldsymbol{A}) = \Gamma(U; C^{-k+1}(\boldsymbol{A})),$$

où $(S_*(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}\backslash U; \boldsymbol{A}), \delta_*)$ désigne le complexe des chaînes singulières relatives à coefficients dans $\boldsymbol{A}$. L'objet $\mathbb{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{A})$ admet donc cette réalisation canonique dans la catégorie des complexes de faisceaux qui sera implicite dans la suite de cet article.

(2) L'espace topologique $\boldsymbol{X}$ est de dimension cohomologique $\dim(\boldsymbol{X})$.

(3) Les groupes de cohomologie singulière de $\boldsymbol{X}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$ coïncident avec les groupes de cohomologie de faisceaux du faisceau constant $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{X}}$.

(4) Lorsque $\boldsymbol{X}$ est compact, sa cohomologie à coefficients rationnels est de dimension finie.

DÉFINITION 1.1-2. — *Une pseudovariété $\boldsymbol{X}$ de dimension d sera dite «orientable» lorsque sa strate de dimension maximum S_d l'est. On appellera «pseudovariété orientée» la donnée d'une pseudovariété orientable et d'une orientation de sa strate de dimension maximum.*

1.1.1. Rappels sur le faisceau d'orientation sur une pseudovariété. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique séparé stratifié paracompact. Suite à (b-1) de la remarque 1.1-1, notons $\mathcal{H}^j(\mathbb{D}^\bullet_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$ le j-ème faisceau de cohomologie de $\mathbb{D}^\bullet_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$; on a :

$$\mathcal{H}^{-k}(\mathbb{D}^\bullet_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))_{(x)} = H_k(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}\backslash\{x\}; \mathbb{Z})\,, \tag{2}$$

pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$ et $k \in \mathbb{Z}$; en particulier, $\mathcal{H}^{-k}(\mathbb{D}^\bullet_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})) = 0$ pour tout $k > \dim(\boldsymbol{X})$.

Le «*faisceau d'orientation de* $\boldsymbol{X}$» sera, par définition :

$$\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\mathbf{X}} := \mathcal{H}^{-\dim(\mathbf{X})}(\mathbb{D}^\bullet_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}))$$

d'où une augmentation canonique $0 \to \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\mathbf{X}} \to \mathbb{D}^\bullet_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})[-\dim(\boldsymbol{X})]$ sous-entendue dans la suite.

On a une suite exacte de faisceaux :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{H}^{-\dim(\mathbf{X})}(\mathbb{D}^\bullet_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})) \to \jmath_* \mathcal{H}^{-\dim(\mathbf{X})}(\mathbb{D}^\bullet_{S_d}(\mathbb{Z})) \\ \to \imath_* \mathcal{H}^{-\dim(\mathbf{X})+1}(\mathbb{D}^\bullet_{\mathbf{X}_{d-1}}(\mathbb{Z})) \to \end{aligned} \tag{3}$$

où $\imath : \boldsymbol{X}_{d-1} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ et $\jmath : S_d \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ désignent les injections canoniques.

Nous voyons donc que lorsque la condition $\boldsymbol{X}_{d-1} = \boldsymbol{X}_{d-2}$ est vérifiée, le troisième terme de (3) est nul et il y a donc équivalence entre la donnée d'une orientation de la variété topologique S_d et la donnée d'une section globale $[\boldsymbol{X}] \in \Gamma(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\mathbf{X}})$ dont le germe en chaque point $x \in S_d$ est un générateur du groupe $H_{\dim(\mathbf{X})}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}\backslash\{x\}, \mathbb{Z}) \equiv \mathbb{Z}$; ce qui correspond à la définition d'orientation de la variété topologique S_d. On remarquera également que lorsque S_d est partout dense dans $\boldsymbol{X}$, une telle section globale aura nécessairement *tous ses germes non nuls*; en particulier il y a équivalence pour une ***pseudovariété*** $\boldsymbol{X}$ entre : le fait d'être orientable et le fait qu'il existe des injections de faisceaux $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_{\mathbf{X}} \hookrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\mathbf{X}}$.

À signaler que, par l'égalité (2), la donnée de la section $[\boldsymbol{X}] \in \Gamma(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\mathbf{X}})$ définie par une orientation d'une pseudovariété $\boldsymbol{X}$, détermine, pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, une classe d'homologie non nulle $[\boldsymbol{X}]_{(x)} \in H_{\dim(\mathbf{X})}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}\backslash\{x\}; \mathbb{Z})$, d'où l'application $\mu \mapsto \langle \mu, [\boldsymbol{X}]_{(x)} \rangle$ de $H^*_x(\boldsymbol{X}; \mathbb{Z})$ vers $\mathbb{Z}$ que l'on notera $\int_{[\mathbf{X}]} : H^*_x(\boldsymbol{X}; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ (et aussi $\int_{\mathbf{X}}$ lorsque l'orientation est sous-entendue).

Remarque 1.1.1-1. — Lorsque $\boldsymbol{X} = \mathring{c}_x(\mathbb{X})$, où $\mathbb{X}$ est une pseudovariété compacte de dimension $d-1$, la donnée d'une orientation sur $\boldsymbol{X}$ équivaut à la donnée d'une classe d'homologie de $H_{d-1}(\mathbb{X};\mathbb{Z})$ dont la restriction à $H_{d-1}(\mathbb{X},\mathbb{X}\backslash\{x\};\mathbb{Z})$ est non nulle, quel que soit $x \in \mathbb{X}$. Une orientation sur une pseudovariété détermine de cette manière une orientation de pseudovariété pour tous les liens de ses points. Ce fait, de nature locale, se globalise en ce sens que si $\boldsymbol{X}$ désigne maintenant une pseudovariété compacte orientée quelconque, il existe une unique classe d'homologie $H_d(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ dont les restrictions aux groupes $H_d(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}\backslash\{x\};\mathbb{Z})$ coïncident avec l'orientation; cette classe d'homologie est «*la classe fondamentale associée à l'orientation*» et sera également notée par $[\boldsymbol{X}]$.

Convention. — Sur une variété algébrique complexe $\boldsymbol{X}$ munie de la topologie transcendante, l'orientation de sa partie lisse par la structure complexe sous-jacente définit une orientation de pseudovariété sur $\boldsymbol{X}$; cette orientation canonique des variétés algébriques complexes sera sous-entendue dans la suite.

1.1.2. $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés. — Dans cet article un tore sera toujours compact; il sera donc produit fini de groupes : $\boldsymbol{T} = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 = (\mathbb{S}^1)^r$, où $r = \dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ est le «*rang de $\boldsymbol{T}$*».

La notion de $\boldsymbol{T}$-pseudovariété telle qu'elle apparaît dans [Bry] est la suivante.

Un espace topologique muni d'une action continue d'un tore $\boldsymbol{T}$ par des homéomorphismes est appelé un «*$\boldsymbol{T}$-espace*». Lorsqu'une pseudovariété $\boldsymbol{X}$ est un $\boldsymbol{T}$-espace, on dit que c'est une «*$\boldsymbol{T}$-pseudovariété*» si sa stratification est $\boldsymbol{T}$-stable et vérifie la propriété de «*$\boldsymbol{T}$-trivialité locale*» suivante :

Pour toute strate S_i et tout point $x \in S_i$ de stabilisateur noté $\boldsymbol{T}_x$, il existe :

a) *un voisinage N_x de x dans $\boldsymbol{X}$ qui est $\boldsymbol{T}$-stable;*

b) *une sous-variété $\boldsymbol{T}_x$-stable $\boldsymbol{Z}$ de la strate S_i, «section transverse» de l'orbite $\boldsymbol{T}\cdot x$;*

c) *un espace topologique compact $\boldsymbol{Y}$ muni d'une action de $\boldsymbol{T}_x$ et d'une stratification topologique $\boldsymbol{T}_x$-stable : $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_{d-i-1} \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{Y}_1 \supseteq \boldsymbol{Y}_0 \supseteq \boldsymbol{Y}_{-1} = \varnothing$;*

d) *et un homéomorphisme $\boldsymbol{T}$-équivariant $\phi : \boldsymbol{T} \times_{\boldsymbol{T}_x} (\boldsymbol{Z} \times \hat{c}(\boldsymbol{Y})) \to N_x$ dont la restriction à $\boldsymbol{T} \times_{\boldsymbol{T}_x} (\boldsymbol{Z} \times \hat{c}(\boldsymbol{Y}_j))$ est un homéomorphisme sur $N_x \cap \boldsymbol{X}_{i+j-1}$.*

On appellera «*sous-$\boldsymbol{T}$-pseudovariété*» d'une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété $\boldsymbol{X}$, toute partie localement fermée $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{T}$-stable et qui soit une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété pour l'action induite de $\boldsymbol{T}$.

Remarque 1.1.2-1. — On démontre que si $\boldsymbol{X}$ est une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété, l'espace topologique quotient $\boldsymbol{X}/_{\boldsymbol{T}}$ admet une structure de pseudovariété (*cf.* [Bry]).

Exemples 1.1.2-2.

- Les variétés algébriques complexes (quasi-projectives) $\boldsymbol{X}$ munies de la topologie transcendante sont des pseudovariétés orientées (par la structure complexe). Soit $\boldsymbol{T} = (\mathbb{S}^1)^r \subseteq (\mathbb{C}^*)^r$ et munissons la variété $\boldsymbol{X}$ d'une action algébrique de $(\mathbb{C}^*)^r$; le $\boldsymbol{T}$-espace obtenu en restreignant cette action à $\boldsymbol{T}$, fait de $\boldsymbol{X}$ une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété.
- Dans le cas d'une variété de drapeaux $\boldsymbol{X}$, les sous-espaces topologiques $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$, fermés (pour la topologie transcendante) et stables sous l'action de $\boldsymbol{B}$ sont des sous-variétés algébriques (des réunions de variétés de Schubert). Ces variétés, munies de l'action du tore compact maximal $\boldsymbol{T}$, induite par l'action de $\boldsymbol{B}$ et stratifiées par les cellules de Schubert, sont des $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés orientées lorsqu'elles sont équidimensionnelles.
- Le produit topologique de deux $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés est une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété.

1.2. Cohomologie équivariante d'une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété.

1.2.1. Fibrés universels. Rappelons qu'un «*fibré universel pour* $\boldsymbol{T}$» est la donnée d'un espace topologique $\mathbb{E}\boldsymbol{T}$ contractile, muni d'une action *libre* de $\boldsymbol{T}$. L'espace topologique quotient $\mathbb{B}\boldsymbol{T} = \mathbb{E}\boldsymbol{T}/\boldsymbol{T}$ est appelé «*classifiant de* $\boldsymbol{T}$». Notons $\pi : \mathbb{E}\boldsymbol{T} \to \mathbb{B}\boldsymbol{T}$ la projection canonique, le triplet $(\pi, \mathbb{E}\boldsymbol{T}, \mathbb{B}\boldsymbol{T})$ est appelé «*une fibration universelle pour* $\boldsymbol{T}$».

Lorsque, pour chaque entier positif m, on fait agir $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{C}^{m+1}$ (muni du produit hermitien canonique) par multiplication de scalaires, on obtient des actions (unitaires) libres et compatibles aux plongements $\mathbb{C}^{m+1} \equiv \mathbb{C}^{m+1} \oplus \{0\} \subseteq \mathbb{C}^{m+2}$ (†). On en déduit des actions libres de $\mathbb{S}^1$ sur les sphères $\mathbb{S}^{2m+1}$ et des fibrations principales $\pi_m : \mathbb{S}^{2m+1} \to \mathbb{S}^{2m+1}/\mathbb{S}^1 = \mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ trivialement compatibles aux plongements $\mathbb{S}^{2m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m+3}$ (induits par (†)). On pose $\mathbb{E}\mathbb{S}^1 := \mathbb{S}^\infty = \varinjlim \mathbb{S}^{2m+1}$ (espace contractile) et $\mathbb{B}\mathbb{S}^1 := \mathbb{P}_\infty(\mathbb{C}) = \varinjlim \mathbb{P}_m(\mathbb{C})$.

Dans le cas général où $\boldsymbol{T} = (\mathbb{S}^1)^r$, le produit de l'action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{E}\mathbb{S}^1$ donne une action libre de $\boldsymbol{T}$ sur $(\mathbb{E}\mathbb{S}^1)^r = \mathbb{E}\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{E}\mathbb{S}^1$ qui fait de $(\mathbb{E}\mathbb{S}^1)^r$ un fibré universel pour tout sous-tore $\boldsymbol{T}'$ de $\boldsymbol{T}$.

1.2.2. Cohomologie équivariante. À chaque $\boldsymbol{T}$-espace $\boldsymbol{X}$ associons, suivant A. Borel, la fibration de fibre $\boldsymbol{X}$:

$$\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}} := \mathbb{E}\boldsymbol{T} \times_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{X} \to \mathbb{B}\boldsymbol{T}, \qquad [e,x] \xmapsto{\pi_{\boldsymbol{X}}} [e], \tag{4}$$

quotient topologique de la projection $\boldsymbol{T}$-équivariante canonique : $\mathbb{E}\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{E}\boldsymbol{T}$, où $\boldsymbol{T}$ opère par l'action "diagonale" sur $\mathbb{E}\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{X}$, *i.e.* $t{\cdot}(e,x) := (e{\cdot}t^{-1}, t{\cdot}x)$. La correspondance $\bullet \rightsquigarrow \bullet_{\boldsymbol{T}}$ est alors fonctorielle de la catégorie des $\boldsymbol{T}$-espaces (basés sur un point) où les morphismes sont $\boldsymbol{T}$-équivariants, vers la catégorie des espaces topologiques basés sur $\mathbb{B}\boldsymbol{T}$. La cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$ à coefficients dans l'anneau $\boldsymbol{A}$ est, par définition, la cohomologie singulière à coefficients dans $\boldsymbol{A}$ de l'espace topologique $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}$:

$$H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) := H^*(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}};\boldsymbol{A}).$$

Pour chaque entier positif n, notons $\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n) := \mathbb{P}_n(\mathbb{C})^{\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})}$, $\mathbb{E}\boldsymbol{T}(n) := (\mathbb{S}^{2n+1})^{\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})}$ et $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n) := \pi_{\boldsymbol{X}}^{-1}(\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n)) = \mathbb{E}\boldsymbol{T}(n) \times_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{X}$. Nous avons ainsi la filtration croissante de la fibration (4) : $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(0) \subseteq \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(1) \subseteq \cdots \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n) \subseteq \cdots$, donnant lieu, pour chaque $k \in \mathbb{N}$ fixé, aux systèmes projectifs :

$$\longrightarrow H^k(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n);\boldsymbol{A}) \longrightarrow H^k(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n-1);\boldsymbol{A}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^k(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(0);\boldsymbol{A}) \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow H^k_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n);\boldsymbol{A}) \longrightarrow H^k_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n-1);\boldsymbol{A}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^k_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(0);\boldsymbol{A}) \longrightarrow 0$$

où les flèches désignent les morphismes de restriction. Ces systèmes sont *stationnaires.* Le premier converge vers $H^k_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ et le second vers un groupe que nous noterons $H^k_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$. Nous définissons alors la «*cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante à supports compacts de $\boldsymbol{X}$*» par :

$$H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) := \varprojlim_n H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n);\boldsymbol{A}).$$

Le foncteur de cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante (resp. à supports compacts) aboutit naturellement dans la catégorie des $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathrm{pt};\boldsymbol{A})$-modules gradués, et l'on a :

$$H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathrm{pt};\boldsymbol{A}) = H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T};\boldsymbol{A}) \equiv H^*(\mathbb{P}_\infty(\mathbb{C});\boldsymbol{A})^{\otimes\,\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})} \equiv \boldsymbol{A}[X]^{\otimes\,\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})}\,, \tag{5}$$

où X désigne la classe fondamentale de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. L'anneau $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathrm{pt}, \boldsymbol{A})$ s'identifie donc à l'algèbre des polynômes à $\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})$ variables et à coefficients dans $\boldsymbol{A}$, munie de la graduation qui double le degré polynôme habituel. En particulier, $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathrm{pt}; \boldsymbol{A})$ est intègre (factoriel) si $\boldsymbol{A}$ l'est.

Remarque 1.2.2-1. — Soit $\mathcal{U} := \{U_i\}_i$ un recouvrement de $\boldsymbol{X}$ par des ouverts $\boldsymbol{T}$-stables et soit $\mu \in H^*_{\boldsymbol{T},c}(\boldsymbol{X})$; comme dans le cas non équivariant, il existe une sous-famille *finie* $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_r}\} \subseteq \mathcal{U}$ telle que μ appartient à l'image du morphisme canonique $H^*_{\boldsymbol{T},c}(U_1 \cup \cdots \cup U_r) \to H^*_{\boldsymbol{T},c}(\boldsymbol{X})$. Cette observation simple rend valables bien des arguments de localisation de Borel-Atiyah-Segal (*cf.* [Hs] Th. III.1) pour les classes de cohomologie équivariante à support compact ; par exemple, si $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} = \varnothing$, le $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T},c}(\boldsymbol{X})$ est de torsion.

Notations et terminologie. — Lorsque $\boldsymbol{A} = \mathbb{Q}$, on omettra de préciser l'anneau des coefficients dans nos notations. On notera également $H^*_{\boldsymbol{T}} := H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathrm{pt}; \mathbb{Q})$ et $Q_{\boldsymbol{T}}$ désignera le corps des fractions de $H^*_{\boldsymbol{T}}$; on a $H^*_{\boldsymbol{T}} \subseteq Q_{\boldsymbol{T}}$ et un élément de $Q_{\boldsymbol{T}}$ sera dit «*polynomial*» s'il appartient à $H^*_{\boldsymbol{T}}$. Enfin, si P est un élément homogène de $H^*_{\boldsymbol{T}}$, on appellera «*degré polynomial*» de P la moitié de son degré cohomologique ; ces degrés seront respectivement notés $\deg_{\mathrm{poly}}(P)$ et $\deg_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(P)$.

Remarque 1.2.2-2. — Pour un produit de tores $\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2$, on prendra $\mathbb{E}(\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2) = \mathbb{E}\boldsymbol{T}_1 \times \mathbb{E}\boldsymbol{T}_2$ muni de l'action de $\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2$ coordonnée par coordonnée. On a aussitôt $H^*_{\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2} \equiv H^*_{\boldsymbol{T}_1} \otimes_{\mathbb{Q}} H^*_{\boldsymbol{T}_2}$ et un isomorphisme canonique :

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2) \times_{\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2} \boldsymbol{X} \equiv \mathbb{E}\boldsymbol{T}_1 \times_{\boldsymbol{T}_1} (\mathbb{E}\boldsymbol{T}_2 \times_{\boldsymbol{T}_2} \boldsymbol{X})$$

pour tout $(\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2)$-espace $\boldsymbol{X}$; en particulier $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2} \equiv (\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}_2})_{\boldsymbol{T}_1}$. Le $H^*_{\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2}(\boldsymbol{X})$ est ainsi canoniquement muni d'une structure de $H^*_{\boldsymbol{T}_1}$-module. Cette structure est celle qui découle de l'homomorphisme d'algèbres $H^*_{\boldsymbol{T}_1} \hookrightarrow H^*_{\boldsymbol{T}_1} \otimes_{\mathbb{Q}} H^*_{\boldsymbol{T}_2} \equiv H^*_{\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2}$ donné par $P \mapsto P \otimes 1$.

Remarque 1.2.2-3. — Le fait que la cohomologie équivariante de $\boldsymbol{X}$ (resp. à supports compacts) puisse être "approchée" par la cohomologie (resp. à supports compacts) des espaces $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)$ qui sont des pseudovariétés (de dimension finie), va nous permettre d'utiliser tout l'arsenal de cohomologie de faisceaux tel qu'il est développé, par exemple, dans [Bo].

À ce sujet, nous utiliserons systématiquement le fait que le foncteur d'hypercohomologie défini sur la catégorie dérivée $\mathcal{D}^+(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{X}})$ de la catégorie des complexes de $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{X}}$-modules bornés à gauche, où $\boldsymbol{X}$ est un espace topologique et $\boldsymbol{A}$ désigne un anneau, aboutit naturellement dans la catégorie des $H^*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$-modules gradués. En particulier, tout morphisme $\alpha : \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{X}} \to \mathcal{A}^\bullet$ de $\mathcal{D}^+(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{X}})$ donne lieu à un morphisme gradué $H(\alpha) : H^*(\boldsymbol{X};\mathbf{A}) \to \mathbb{H}^*(\boldsymbol{X};\mathcal{A}^\bullet)$ entièrement déterminé par l'image de $\mathbf{1}_{\boldsymbol{X}}$, *i.e.* $H(\alpha)(\mu) = \mu{\cdot}H(\alpha)(\mathbf{1}_{\boldsymbol{X}})$.

1.2.3. Suite spectrale de Serre. Pour chaque $\boldsymbol{T}$-espace $\boldsymbol{X}$, on filtre la fibration (4) par la structure standard de CW-complexe de $\mathbb{B}\boldsymbol{T}$, d'où «*la suite spectrale de Serre*» (*cf.* [Hs] chap. III), notée $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{X}), d_r)$:

$$\mathbb{E}_2^{p,q}(\boldsymbol{X}) = H^p(\mathbb{B}\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^q(\boldsymbol{X}) \Longrightarrow H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}). \tag{6}$$

Ces suites spectrales sont fonctorielles en ce sens que si $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$ sont des $\boldsymbol{T}$-espaces et $f : \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_2$ est une application continue $\boldsymbol{T}$-équivariante, on a un morphisme de suites spectrales $\mathbb{E}_r(f) : \mathbb{E}_r^{*,*}(\boldsymbol{X}_2) \to \mathbb{E}_r^{*,*}(\boldsymbol{X}_1)$ de bidegré $(0,0)$ qui s'identifie à $\mathbf{1} \otimes f^*$ sur les termes $\mathbb{E}_2$. En particulier, les morphismes $\mathbb{E}_r(f)$ sont des morphismes de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-modules, et $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{X}), d_r)$ est canoniquement muni d'une structure de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module différentiel gradué.

Remarques 1.2.3-1.

a) $\mathbb{E}_{r+1}(\boldsymbol{X})$ est un sous-quotient du $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $\mathbb{E}_r(\boldsymbol{X})$ (et par induction de $\mathbb{E}_2(\boldsymbol{X})$), par conséquent, si $\dim_{\mathbb{Q}}(H^*(\boldsymbol{X})) < \infty$, le $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ est de type fini. En particulier, la cohomologie équivariante d'une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété compacte est un $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module de type fini (*cf.* (b) dans 1.1-1).

b) La suite spectrale de Serre est trivialement dégénérée ($d_r = 0$ pour $r \geqslant 2$) lorsque $H^{2m+1}(\boldsymbol{X}) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}) \sim H^*_{\boldsymbol{T}} \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(\boldsymbol{X})$, en tant que $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module.

Ce qui précède est également vrai après remplacement de $H^*(\boldsymbol{X})$ et $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ par $H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ et $H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ respectivement.

1.2.4. Actions localement libres.

Définition 1.2.4-1. — Soit $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{T}$-espace. L'action de $\boldsymbol{T}$ sur $\boldsymbol{X}$ sera dite «*localement libre*» lorsque les stabilisateurs de tous les points de $\boldsymbol{X}$ sont des sous-groupes **finis** de $\boldsymbol{T}$.

La projection canonique $\sigma_{\boldsymbol{X}}$ de $\mathbb{E}\boldsymbol{T} \times_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{X}$ sur le quotient $\boldsymbol{X}/_{\boldsymbol{T}}$ définie par $\sigma_{\boldsymbol{X}} : [e,x] \mapsto [x]$, où $[x] \in \boldsymbol{X}/_{\boldsymbol{T}}$ désigne la $\boldsymbol{T}$-orbite de $\boldsymbol{X}$ contenant x, donne lieu, pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, au diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}\boldsymbol{T}_x \equiv \mathbb{E}\boldsymbol{T} \times_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T}\cdot x \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{E}\boldsymbol{T} \times_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}} \arrow[d, "\sigma_{\mathbf{X}}"] \\ {[x]} \arrow[r, hook] & \boldsymbol{X}/_{\boldsymbol{T}} \end{tikzcd}$$

où $\boldsymbol{T}_x$ est le stabilisateur de x dans $\boldsymbol{T}$. La fibre de $\sigma_{\mathbf{X}}$ au-dessus du point $[x]$ est l'espace classifiant $\mathbb{B}\boldsymbol{T}_x$. Le lemme suivant est bien connu (*cf.* [Hs] ch. III).

LEMME 1.2.4-2. — *Soient $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{T}$-espace et $\boldsymbol{A}$ un anneau. Le morphisme canonique*

$$\sigma_{\mathbf{X}}^* : H^*(\boldsymbol{X}/_{\boldsymbol{T}}; \boldsymbol{A}) \longrightarrow H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{A}),$$

est **bijectif** *lorsque*

a) *$\boldsymbol{T}$ opère librement sur $\boldsymbol{X}$.*

b) *$\boldsymbol{T}$ opère de façon localement libre sur $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{A}$ est un corps de caractéristique nulle.*

PROPOSITION 1.2.4-3. — *Soient $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{T}$-espace et $\boldsymbol{T}'$ un sous-tore de $\boldsymbol{T}$ dont l'action induite sur $\boldsymbol{X}$ est localement libre.*

a) *Pour toute décomposition de groupes de Lie $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}'' \times \boldsymbol{T}'$, on a un isomorphisme canonique de $H_{\mathbf{T}''}^*$-modules $H_{\mathbf{T}''}^*(\boldsymbol{X}/_{\mathbf{T}'}) \xrightarrow{\equiv} H_{\mathbf{T}}^*(\boldsymbol{X})$ (cf. 1.2.2-2).*

b) *Considérons une décomposition comme dans (a), et supposons de plus que la cohomologie en degrés impairs de l'espace $\boldsymbol{X}/_{\mathbf{T}'}$ est nulle. Alors le $H_{\mathbf{T}''}^*$-module $H_{\mathbf{T}}^*(\boldsymbol{X})$ est libre.*

Les projections canoniques $H_{\mathbf{T}''\times\mathbf{T}'}^* \twoheadrightarrow H_{\mathbf{T}''}^*$ et $H_{\mathbf{T}''\times\mathbf{T}'}^* \twoheadrightarrow H_{\mathbf{T}'}^*$ donnent des structures de $H_{\mathbf{T}''\times\mathbf{T}'}^*$-module pour $H_{\mathbf{T}''}^*$ et $H_{\mathbf{T}'}^*(\boldsymbol{X})$; on a alors un isomorphisme de $H_{\mathbf{T}''\times\mathbf{T}'}^*$-modules :

$$H_{\mathbf{T}''\times\mathbf{T}'}^*(\boldsymbol{X}) \sim H_{\mathbf{T}''}^* \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(\boldsymbol{X}/_{\mathbf{T}'}) \equiv H_{\mathbf{T}''}^* \otimes_{\mathbb{Q}} H_{\mathbf{T}'}^*(\boldsymbol{X}).$$

c) *Gardons les hypothèses de l'assertion (b) et supposons en plus que* $\mathrm{rg}(\boldsymbol{T}') = 1$ *(donc $\boldsymbol{T}' \sim \mathbb{S}^1$) et que $H_{\mathbf{T}}^*(\boldsymbol{X})$ est un $H_{\mathbf{T}}^*$-module de type fini et de torsion.*

(1) *Les idéaux associés au $H_{\mathbf{T}}^*$-module $H_{\mathbf{T}}^*(\boldsymbol{X})$ sont tous principaux (donc minimaux) engendrés par des polynômes homogènes de degré 1.*

(2) *Le $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ est de Cohen-Macaulay de dimension* $\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})-1$.

Démonstration.

a) Soit $\boldsymbol{T}''$ un sous-tore de $\boldsymbol{T}$ supplémentaire de $\boldsymbol{T}'$ dans $\boldsymbol{T}$ (il en existe toujours). En faisant agir $\boldsymbol{T}''\times\boldsymbol{T}'$ à droite sur $\mathbb{E}\boldsymbol{T}:=\mathbb{E}\boldsymbol{T}''\times\mathbb{E}\boldsymbol{T}'$ par $(e,f)\cdot(k,j):=(e\cdot k,f\cdot j)$, on a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X_T}&=(\mathbb{E}\boldsymbol{T}''\times\mathbb{E}\boldsymbol{T}')\times_{\boldsymbol{T}''\times\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{X}\\&\equiv\mathbb{E}\boldsymbol{T}''\times_{\boldsymbol{T}''}(\mathbb{E}\boldsymbol{T}'\times_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{X})\xrightarrow{\ \nu\ }\mathbb{E}\boldsymbol{T}''\times_{\boldsymbol{T}''}(\boldsymbol{X}/_{\boldsymbol{T}'}),\end{aligned}$$

où ν est l'application induite par la projection canonique $\sigma_{\boldsymbol{X}}:\mathbb{E}\boldsymbol{T}'\times_{\boldsymbol{T}'}\boldsymbol{X}\twoheadrightarrow\boldsymbol{X}/_{\boldsymbol{T}'}$ qui est trivialement $\boldsymbol{T}''$-équivariante. Le lemme 1.2.4-2 montre alors que le morphisme des suites spectrales de Serre induit par ν est un isomorphisme sur les termes $\mathbb{E}_r$ pour $r\geqslant 2$; le morphisme $\nu^*: H^*_{\boldsymbol{T}''}(\boldsymbol{X}/_{\boldsymbol{T}'})\to H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ est donc l'isomorphisme annoncé.

b) Découle de la dégénérescence de la suite spectrale de Serre (*cf.* (b) dans 1.2.3-1).

c) Posons $H^*_{\mathbb{S}^1}=\mathbb{Q}[Y]$ et $H^*_{\boldsymbol{T}''}\equiv\mathbb{Q}[\overline{X}]$, où $\overline{X}$ désigne la liste de variables $\{X_1,\dots,X_{r-1}\}$ avec $r=\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})$, on a donc un isomorphisme $H^*_{\boldsymbol{T}}\equiv\mathbb{Q}[\overline{X}]\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[Y]$.

Soit $\mathfrak{P}\in\mathrm{Ass}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}))$ un idéal associé minimal. La théorie de Hsiang affirme que $\mathfrak{P}$ est engendré par des polynômes homogènes de degré 1 (*cf.* 2.5.1). D'autre part, comme $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ est un $\mathbb{Q}[\overline{X}]$-module sans torsion, l'idéal $\mathfrak{P}$ ne contient pas de polynôme non nul indépendant de la variable Y. On en déduit que $\mathfrak{P}$ est principal engendré par un polynôme homogène de la forme $(\beta(\overline{X})-Y)$. Soit maintenant $\mathfrak{Q}\in\mathrm{Ass}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}))$ un idéal associé quelconque. Comme il existe un idéal associé minimal $\mathfrak{P}$ contenu dans $\mathfrak{Q}$, l'idéal $\mathfrak{Q}$ contient un polynôme de la forme $(\beta(\overline{X})-Y)$. Pour tout $P(\overline{X},Y)\in\mathfrak{Q}$, le reste de la division euclidienne de P par $(\beta(\overline{X})-Y)$ est également dans $\mathfrak{Q}$ et ce reste est indépendant de Y ; c'est donc le polynôme nul et $\mathfrak{Q}$ est un idéal associé minimal. L'assertion (c-1) est donc prouvée.

Enfin, comme $H^*_{\boldsymbol{T}}$ est une algèbre de polynômes et que $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ est un $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module *gradué*, ce module sera de Cohen-Macaulay (voir [Ma], [AP]), si et seulement si, son localisé, par rapport à l'idéal d'augmentation de $H^*_{\boldsymbol{T}}$, l'est (*cf.* propositions A.16.13 et A.16.14 de [AP]). L'assertion (c-1) a montré que le $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ est extension de modules de la forme $H^*_{\boldsymbol{T}}/\langle\alpha_i\rangle$ et il est élémentaire de voir que ce dernier type de module est de Cohen-Macaulay de dimension $\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})-1$; comme une extension de modules de Cohen-Macaulay de même dimension est encore de Cohen-Macaulay de même dimension, l'assertion (c-2) est prouvée.

1.2.5. Liens topologiques. — Soit $\boldsymbol{X}$ une pseudovariété. Pour chaque $x \in \boldsymbol{X}$, nous avons défini dans la remarque 1.1-1 (a) le lien du point $x \in \boldsymbol{X}$; noté $\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})$. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété, la condition de $\boldsymbol{T}$-trivialité locale permet de montrer que les liens des points fixes $x \in \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ sont naturellement munis d'une action de $\boldsymbol{T}$; en prolongeant cette action sur $[\![0,1[\![\times \mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})$ de manière triviale sur la première coordonnée on induit une structure de $\boldsymbol{T}$-pseudovariété sur $\hat{\mathrm{c}}(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X}))$ qui est alors homéomorphe de manière $\boldsymbol{T}$-équivariante à un voisinage $\boldsymbol{T}$-stable de x. Par conséquent, pour tout $x \in \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$, on a un triangle exact de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-modules gradués :

$$(7) \qquad H^*_{\boldsymbol{T},x}(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{p^*} H^*_{\boldsymbol{T}}(\hat{\mathrm{c}}_x(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X}))) \xrightarrow{q^*} H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})) \xrightarrow[\mathrm{c}^*_x]{[+1]},$$

où $H^*_{\boldsymbol{T}}(\hat{\mathrm{c}}_x(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X}))) \equiv H^*_{\boldsymbol{T}}(x) \equiv H^*_{\boldsymbol{T}}$.

LEMME 1.2.5-1. — *Pour tout $x \in \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ on a les équivalences suivantes :*

$$\big(x \text{ est isolé dans } \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\big) \iff \big(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})^{\boldsymbol{T}} = \varnothing\big) \iff \big(p^* \neq 0\big).$$

Démonstration. — La première équivalence est immédiate. Puis, lorsque l'action de $\boldsymbol{T}$ sur $\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})$ est sans point fixe, les éléments de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X}))$ sont de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-torsion d'après le théorème de localisation de Borel-Atiyah-Segal (*cf.* [Hs] Th. III.1) ; l'application p^* est par conséquent un isomorphisme modulo torsion et ne peut donc pas être nulle. Réciproquement, lorsque $\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})^{\boldsymbol{T}} \neq \varnothing$, le morphisme q^* est injectif puisqu'il en est ainsi de la composée de $\rho \circ q^*$, où $\rho : H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})) \to H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x, \boldsymbol{X})^{\boldsymbol{T}})$ désigne le morphisme de restriction, et l'égalité $p^* = 0$ découle alors de l'exactitude du triangle (7). □

1.3. Points et variétés rationnellement lisses.

DÉFINITION 1.3-1. — *Soit $\boldsymbol{X}$ une pseudovariété de dimension d, un élément $x \in \boldsymbol{X}$ sera dit «un point rationnellement lisse» s'il existe un voisinage U_x de x dans $\boldsymbol{X}$, tel que pour tout $z \in U_x$ on ait :*

$$(8) \qquad H^j_z(\boldsymbol{X}) = 0, \text{ pour tout } j \neq d, \text{ et } H^d_z(\boldsymbol{X}) \equiv \mathbb{Q}.$$

On dira que $\boldsymbol{X}$ est une «variété rationnellement lisse» lorsque tous ses points sont rationnellement lisses.

Remarque 1.3-2. — Une pseudovariété $\boldsymbol{X}$ de dimension d est rationnellement lisse, si et seulement si, l'augmentation $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Q}) := \mathcal{H}^{-d}(\mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Q})) \hookrightarrow \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{Q})[-d]$ est un quasi-isomorphisme (*cf.* 1.1.1). On prendra garde du fait que si dans le cas rationnellement lisse le faisceau d'orientation est localement constant de fibres $\mathbb{Q}$, il n'est pas nécessairement isomorphe au faisceau constant $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{X}}$; c'est l'orientabilité de $\boldsymbol{X}$ qui assure l'existence d'un tel isomorphisme, auquel cas le morphisme injectif $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_{\boldsymbol{X}} \hookrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}$ associé à une orientation de $\boldsymbol{X}$ le détermine et la dualité de Poincaré à coefficients rationnels est vérifiée.

Remarque 1.3-3. — En prenant pour U_x un voisinage conique $\mathrm{\hat{c}}_x(\mathbb{L})$, les conditions (8) se traduisent par :

$$H^*(\mathbb{L}) \equiv H^*(\mathbb{S}^{d-1}),$$

et $\mathbb{L}$ est une variété rationnellement lisse de dimension $(d-1)$.

On dira alors que $\mathbb{L}$ est une «*sphère rationnelle* (*de dimension* $(d-1)$) [4]».

1.4. Intégration en cohomologie équivariante des $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés.

Soit $(\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{X}])$ une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété de dimension d orientée et *non nécessairement compacte ni rationnellement lisse.* La restriction de la fibration $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}} = \mathbb{E}\boldsymbol{T} \times_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{X} \to \mathbb{B}\boldsymbol{T}$ à chaque sous-espace $\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n) \subseteq \mathbb{B}\boldsymbol{T}$ (*cf.* 1.2.2), est localement triviale de fibre $\boldsymbol{X}$ et d'espace total $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)$. L'espace $\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n)$ étant une variété analytique complexe simplement connexe munie de l'orientation donnée par sa structure complexe, l'orientation de $\boldsymbol{X}$ au-dessus de $\mathbb{B}\boldsymbol{T}(0)$ définit canoniquement une orientation sur la pseudovariété $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)$, d'où un morphisme injectif canonique de faisceaux $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)} \hookrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}$ et la suite :

$$\begin{array}{ll} \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)} \hookrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)} & \\ \qquad\qquad\qquad\downarrow & \\ \qquad \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}(\mathbb{Z})[-d_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}] & \equiv \pi^!_{\boldsymbol{X}}\, \mathbb{D}^\bullet_{\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n)}(\mathbb{Z}[-d_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}] \\ & \equiv \pi^!_{\boldsymbol{X}}\, \underline{\underline{\mathbb{Z}}}_{\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n)}[d_{\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n)} - d_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}] \end{array}$$

---

[4] Suivant cette terminologie, un espace projectif réel de dimension impaire sera une sphère rationnelle et $\mathrm{\hat{c}}_{\mathrm{pt}}(\mathbb{P}_{2n+1}(\mathbb{R}))$ est une variété rationnellement lisse mais n'est pas une variété topologique.

de composée notée $\varphi^{(n)}_{[\mathbf{X}]} \in \mathrm{Hom}^{-d_{\boldsymbol{X}}}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}, \pi^{!}_{\boldsymbol{X}}\,\mathbb{Z}_{\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n)})$. La dualité de Grothendieck-Verdier fait alors correspondre à $\varphi^{(n)}_{[\mathbf{X}]}$ un morphisme de $H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n))$-modules :

$$\int_{[\mathbf{X}]} : H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)) \longrightarrow H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n))[-d_{\boldsymbol{X}}].$$

Les propriétés de naturalité de cette construction permettent de prouver la commutativité des diagrammes :

$$(9)\qquad \begin{array}{ccc} H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n+1)) & \longrightarrow & H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)) \\ {\scriptstyle\int_{[\mathbf{X}]}}\big\downarrow{\scriptstyle[-d_{\boldsymbol{X}}]} & & {\scriptstyle\int_{[\mathbf{X}]}}\big\downarrow{\scriptstyle[-d_{\boldsymbol{X}}]} \\ H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n+1)) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n)) \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont les morphismes de restriction, et le passage à la limite projective donne lieu au morphisme d'«*intégration en cohomologie équivariante*» :

$$(10)\qquad \int_{[\mathbf{X}]} : H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \longrightarrow H^*_{\boldsymbol{T}}[-d_{\boldsymbol{X}}]$$

que l'on notera également $\int_{\boldsymbol{X}}$ lorsque l'orientation de $\boldsymbol{X}$ sera sous-entendue. Le morphisme $\int_{\boldsymbol{X}}$ est une forme $H^*_{\boldsymbol{T}}$-linéaire sur $H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$.

Remarque 1.4-1. — La caractérisation de l'image de $\int_{\boldsymbol{X}}$ est une question partiellement abordée dans cet article; on a les résultats généraux suivants. Soit $\boldsymbol{X}$ une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientable :

a) Lorsque $\boldsymbol{X}$ *ne possède aucun* point fixe, le $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est de torsion et alors $\int_{[\mathbf{X}]} = \mathbf{0}$.

b) Lorsque $\boldsymbol{X}$ admet un point fixe x, pas nécessairement isolé dans $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ mais rationnellement lisse dans $\boldsymbol{X}$, alors $\int_{\boldsymbol{X}}$ est ***surjective***. En effet, dans ce cas $\int_{\boldsymbol{X}}$ factorise $\int_{V_x}$, où V_x désigne un voisinage conique rationnellement lisse de x, et $\int_{V_x}$ est bijective en raison de l'isomorphisme de Thom-Gysin (*cf.* 2.1-1 (a)).

En particulier, si $\boldsymbol{T} = \{\mathbf{1}\}$ ou si $\boldsymbol{T}$ opère trivialement sur $\boldsymbol{X}$, le morphisme $\int_{\boldsymbol{X}}$ est surjectif.

c) Lorsque les différentielles d_r de la suite spectrale de Serre sont nulles pour $r \geqslant 2$, $\int_{\boldsymbol{X}}$ **est surjective**. En effet, on a alors $H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \equiv H^*_{\boldsymbol{T}} \otimes_{\mathbb{Q}} H^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$, et $\int_{\boldsymbol{X}}$ est donnée par l'intégration non équivariante sur $\boldsymbol{X}$; la surjectivité découle alors de (b).

d) Lorsque $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ est discret, une formule "de localisation" que nous verrons dans 2.3.1 permettra de préciser les générateurs de l'image de $\int_{\mathbf{X}}$.

En dehors de ces cas, nous donnerons des exemples de $\boldsymbol{T}$-pseudovariété $\boldsymbol{X}$ compacte, connexe avec $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ fini et non vide, où $\int_{\mathbf{X}}(H^*_{\mathbf{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}))$ n'est pas libre et d'autres où $\int_{\mathbf{X}} = 0$ (voir 2.7-1).

Remarque 1.4-2. — Lorsque la $\boldsymbol{T}$-pseudovariété $\boldsymbol{X}$ admet une structure de variété différentiable orientée de dimension d et que l'action de $\boldsymbol{T}$ est différentiable, la cohomologie équivariante à supports compacts est calculée par le complexe de de Rham $\boldsymbol{T}$-équivariant : $(S^*(\mathfrak{t}^*) \otimes \Omega^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{T}}, d_{\boldsymbol{T}})$, où $S^*(\mathfrak{t}^*)$ désigne l'algèbre symétrique de $\mathfrak{t}^* = \mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})^*$, et où $d_{\boldsymbol{T}}$ est $S^*(\mathfrak{t}^*)$-linéaire et $d_{\boldsymbol{T}}(1 \otimes \omega) = 1 \otimes d(\omega) - \sum_i X_i \otimes \imath_{e_i}(\omega)$, avec $\{e_i\}$ base de $\mathfrak{t}$ de base duale X_i, et $\imath_{e_i}$ la contraction par le champ de vecteurs de $\boldsymbol{X}$ engendré par l'action infinitésimale de e_i (*cf.* [AB] §4). Une n-forme différentielle équivariante est alors une somme $\mu = \sum f_a \otimes \omega_b$ avec $f_a \in S^a(\mathfrak{t}^*)$, $\omega_b \in \Omega^b_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{T}}$ et $2a + b = n$. En posant $\int_{\mathbf{X}} \mu = f_{(n-d)/2} \int_{\mathbf{X}} \omega_d$, on définit une forme $H^*_{\boldsymbol{T}}$-linéaire $\int_{\mathbf{X}} : H^*_{\mathbf{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}$ et des arguments usuels montrent que cette notion d'intégration coïncide avec celle que nous avons introduite.

Remarque 1.4-3. — Il est intéressant d'observer le lien qui existe entre l'intégrale équivariante et non équivariante sur une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée $(\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{X}])$ de dimension d. La compatibilité de l'intégration équivariante vis à vis de la filtration de $\mathbb{B}\boldsymbol{T}$, compatibilité au niveau de la catégorie dérivée par ailleurs, fait qu'elle est entièrement déterminée par ses avatars dans la suite spectrale de Serre (*cf.* 1.2.3), plus précisément par la propagation de la forme linéaire $\mathbf{1} \otimes \int_{\mathbf{X}} : \mathbb{E}_2^{*,d}(\boldsymbol{X}) = H^*_{\boldsymbol{T}} \otimes_{\mathbb{Q}} H^d_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}$. Or, des raisons évidentes de degré montrent que $\mathbb{E}_\infty^{*,d}(\boldsymbol{X})$ est un sous-module de $H^*_{\boldsymbol{T}} \otimes H^d_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$, et l'intégrale équivariante sera respectivement nulle ou non nulle suivant que $(\mathbf{1} \otimes \int_{\mathbf{X}})(\mathbb{E}_\infty^{*,d}(\boldsymbol{X}))$ le soit. Il s'ensuit que si l'on se donne deux $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés orientées $(\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{X}])$ et $(\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Y}])$ de même dimension d et une application équivariante continue et propre $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ vérifiant dans le cas *non équivariant* $\int_{\mathbf{X}} f^*(\mu) = \int_{\mathbf{Y}} \mu$, pour tout $\mu \in H^d_c(\boldsymbol{Y})$, la fonctorialité de la suite spectrale de Serre fait que cette égalité demeure satisfaite également en cohomologie équivariante. Ceci est en particulier vrai lorsque f est une «*désingularisation équivariante*» de $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés orientables.

1.4.1. Soit maintenant x un point fixe de la $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée $(\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{X}])$. Fixons un voisinage ouvert $V_x \ni x$ de la forme $\mathring{\mathrm{c}}_x(\mathbb{X})$ muni de l'orientation induite notée $[V_x]$ et notons ζ la composée des isomorphismes canoniques $H^*_{T,x}(\boldsymbol{X}) \equiv H^*_{T,x}(V_x) \equiv H^*_{T,c}(V_x)$. On définit alors la forme H^*_T-linéaire :

$$\int_{[\boldsymbol{X}]} : H^*_{T,x}(\boldsymbol{X}) \longrightarrow H^*_T[-d_{\boldsymbol{X}}] \tag{11}$$

en posant $\int_{[\boldsymbol{X}]} \mu = \int_{[V_x]} \zeta(\mu)$, ce qui est clairement indépendant du choix du voisinage conique et met en relief la nature locale de cette intégrale.

2. Classes d'Euler équivariantes dans les T-pseudovariétés.

2.1. Rappel du cas différentiable non équivariant (*cf.* [AB]).

Soient $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable et $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ une sous-variété fermée de codimension d, toutes deux orientées. Notons $T_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M})$ le fibré normal à $\boldsymbol{N}$ dans $\boldsymbol{M}$. L'isomorphisme de Thom établit que l'application $\Phi^*_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}}$: $H^*(\boldsymbol{N})[-d] \to H^*(T_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M}))$, définie localement par la multiplication d'une classe de $\boldsymbol{N}$ par la classe à support l'origine de la fibre de $T_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M})$ déterminée par les orientations de $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{M}$, se recolle en un *isomorphisme* canonique de $H^*(\boldsymbol{N})$-modules :

$$H^*(\boldsymbol{N})[-d] \xrightarrow[\equiv]{\Phi^*_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}}} H^*_{\boldsymbol{N}}(T_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M})) \equiv H^*_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M}),$$

d'application inverse donnée par «*l'opération d'intégration sur les fibres*», notée $\int_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}}$.

Le morphisme $\Phi^*_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}}$ est entièrement déterminé par la classe $\Phi^*_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}}(\mathbf{1}_{\boldsymbol{N}}) \in H^d_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M})$ (5), notée $\tau(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})$ et appelée «*la classe de Thom de* $\boldsymbol{N}$ *dans* $\boldsymbol{M}$». La restriction de $\tau(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})$ à $\boldsymbol{N}$, notée $\mathrm{Eu}\,(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})$, est par définition «*la classe d'Euler de* $\boldsymbol{N}$ *dans* $\boldsymbol{M}$».

Nous avons ainsi le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^*_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, shift left, "\int_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}}"] & H^*(\boldsymbol{M}) \arrow[d, "\text{restriction}"] \\ H^*(\boldsymbol{N})[-d] \arrow[u, shift left, "\Phi^*_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}}", "\equiv"'] \arrow[r, dashed, "\mathrm{m}(\mathrm{Eu}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}))"] & H^*(\boldsymbol{N}) \end{tikzcd} \tag{12}$$

---

(5) Nous noterons $\mathbf{1}_{\boldsymbol{X}}$ l'identité multiplicative de l'algèbre $H^*(\boldsymbol{X})$ (resp. $H^*_T(\boldsymbol{X})$).

où φ^* désigne le morphisme canonique et m(Eu$(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})$) est la multiplication (à droite) par Eu$(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})$. On a :

$$\left(\int_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}} \mu\right) \wedge \mathrm{Eu}\,(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}) = \mu|_{\boldsymbol{N}}\,, \tag{13}$$

pour tout $\mu \in H^*_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M})$.

Remarques 2.1-1.

a) Oublions la structure différentiable de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ et retenons uniquement le fait que ce sont des pseudovariétés orientées de dimensions respectives $d_{\boldsymbol{M}}$ et $d_{\boldsymbol{N}}$ et que $\boldsymbol{M}$ et *rationnellement lisse*; notons $I\!D^\bullet_{\boldsymbol{M}}(\mathbb{Q})$ et $I\!D^\bullet_{\boldsymbol{N}}(\mathbb{Q})$ leurs complexes dualisants à coefficients rationnels. Notons $\imath : \boldsymbol{N} \hookrightarrow \boldsymbol{M}$ l'injection canonique, et rappelons que l'on a $H^*_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M}) \equiv I\!R\Gamma(\boldsymbol{N}; \imath^! \,\underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{M}})$, où $\imath^!$ désigne le foncteur image inverse exceptionnelle. Les orientations de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ déterminent alors un morphisme $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{N}} \to I\!D^\bullet_{\boldsymbol{N}}(\mathbb{Q})[-d_{\boldsymbol{N}}]$ et un quasi-isomorphisme $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{M}} \sim I\!D^\bullet_{\boldsymbol{M}}(\mathbb{Q})[-d_{\boldsymbol{M}}]$ (*cf.* 1.3-2). Comme d'autre part $I\!D^\bullet_{\boldsymbol{N}}(\mathbb{Q}) \equiv \imath^! I\!D^\bullet_{\boldsymbol{M}}(\mathbb{Q})$, on en déduit des morphismes :

$$\underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{N}} \xrightarrow[{[N]}]{} I\!D^\bullet_{\boldsymbol{N}}(\mathbb{Q})[-d_{\boldsymbol{N}}] \xrightarrow{\equiv} \imath^!\, I\!D^\bullet_{\boldsymbol{M}}(\mathbb{Q})[-d_{\boldsymbol{N}}] \xrightarrow[{[M]}]{\sim} \imath^!\, \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{M}}[d_{\boldsymbol{M}} - d_{\boldsymbol{N}}] \tag{14}$$

dont la composée induit un morphisme de $H^*(\boldsymbol{N})$-modules $\Phi^*_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}}$: $H^*(\boldsymbol{N}) \to H^*_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{M})[d_{\boldsymbol{M}} - d_{\boldsymbol{N}}]$, qu'on appellera «*de Thom-Gysin*»; ce morphisme généralise le morphisme de Thom et est un isomorphisme lorsque $\boldsymbol{N}$ est rationnellement lisse car alors le morphisme de gauche de (14) est un quasi-isomorphisme, mais, en dehors de ce cas, $\Phi^*_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}}$ **n'est généralement pas bijectif**.

En augmentant à droite la suite (14) par le morphisme canonique $\imath^!\,\underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{M}} \to \imath^*\,\underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{M}} = \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{N}}$, on obtient un morphisme (en catégorie dérivée) $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{N}} \to \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{N}}[d_{\boldsymbol{M}} - d_{\boldsymbol{N}}]$ qui induit, en cohomologie, l'application (restriction)$\,\circ\, \varphi^* \circ \Phi^*_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}}$ du diagramme (12); cette application est un morphisme de $H^*(\boldsymbol{N})$-module entièrement déterminé par la classe de $H^{d_{\boldsymbol{M}}-d_{\boldsymbol{N}}}(\boldsymbol{N})$ qu'il fait correspondre à $\mathbf{1}_{\mathbb{L}}$; cette classe, notée toujours Eu$(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M})$, est *la classe d'Euler de la sous-pseudovariété orientée et fermée* $\boldsymbol{N}$ *dans* $\boldsymbol{M}$.

La conclusion de cette remarque est qu'il suffit que l'espace ambiant soit rationnellement lisse pour avoir : le morphisme de Thom-Gysin, la classe de Thom et la classe d'Euler d'un sous-espace fermé admettant une structure de pseudovariété orientée.

b) Lorsque, dans ce qui précède, $\boldsymbol{M}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ ou à $\mathbb{S}^m$, on a Eu$(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}) = 0$ dès que $\dim(\boldsymbol{N}) < \dim(\boldsymbol{M})$.

2.2. Morphisme de Thom-Gysin et intégration sur les fibres.

Dans cette section nous considérons la donnée d'un couple de $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés orientées *non nécessairement compactes ni rationnellement lisses*, notées $(\boldsymbol{X},[\boldsymbol{X}])$ et $(\boldsymbol{Y},[\boldsymbol{Y}])$, et la donnée d'un plongement fermé $\boldsymbol{T}$-équivariant $\imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ par lequel on identifie $\boldsymbol{Y}$ à son image ; $\boldsymbol{Y}$ est donc une sous-$\boldsymbol{T}$-pseudovariété fermée de $\boldsymbol{X}$. Pour chaque $y \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, on notera $(\mathbb{Y},[\mathbb{Y}])$ et $(\mathbb{X},[\mathbb{X}])$ respectivement les liens de $\mathbb{L}(y,\boldsymbol{Y})$ et de $\mathbb{L}(y,\boldsymbol{X})$ munis de leur orientation induite.

Nous allons distinguer deux cas suivant que $\boldsymbol{X}$ ou $\boldsymbol{Y}$ soit rationnellement lisse.

2.2.1. Espace ambiant X rationnellement lisse et classes d'Euler équivariantes. Nous pouvons reproduire, mot à mot, la remarque 2.1-1 (a) dans le cas équivariant. Tout comme dans (14) les orientations définissent la suite des morphismes en catégorie dérivée :

$$\underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{T}}(n)} \xrightarrow[{[\mathrm{Y}]}]{} \imath^! \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}(\mathbb{Q})[-d_{\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{T}}(n)}] \xrightarrow[{[\mathrm{X}]}]{\sim} \imath^! \underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}[d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Y}}]$$
$$\text{(15)} \qquad \dashrightarrow \imath^* \underline{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}}(n)}[d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Y}}]$$

[6] qui donnent lieu aux morphismes :

$$\text{(16)} \quad H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y}) \xrightarrow{\Phi^*_{\mathbf{Y},\mathbf{X}}} H^*_{\mathbf{T},\mathbf{Y}}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})[d_{\mathbf{X}} - d_{\mathbf{Y}}] \overset{\text{(restriction)}}{\dashrightarrow} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y})[d_{\mathbf{X}} - d_{\mathbf{Y}}]$$

où celui de gauche est la version équivariante du morphisme de Thom-Gysin et celui de droite est le morphisme de restriction. Le groupe $H^*_{\mathbf{T},\mathbf{Y}}(\boldsymbol{X})$ possède une structure naturelle de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y})$-module (*cf.* remarque 1.2.2-3) et $\Phi^*_{\mathbf{Y},\mathbf{X}}$ est un morphisme de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y})$-modules ; il est donc entièrement déterminé par $\Phi^*_{\mathbf{Y},\mathbf{X}}(\mathbf{1}_{\boldsymbol{Y}})$: «*la classe de Thom $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{Y}$ dans $\boldsymbol{X}$*», notée $\tau_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$. La composée des applications de (16) est alors la multiplication à droite par la restriction de $\tau_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ à $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y})$: la «*classe d'Euler $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{Y}$ dans $\boldsymbol{X}$*» notée $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$.

Lorsque l'on se donne une classe à support compact $\mu \in H^*_{\mathbf{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})$, la classe $\Phi^*_{\mathbf{Y},\mathbf{X}}(\mu)$ est également à support compact ; on démontre alors (formellement) la compatibilité entre le morphisme de Thom-Gysin et

[6] L'indice (n) désigne le degré de l'approximation des espaces $(\_)_{\boldsymbol{T}} := \mathbb{E}\boldsymbol{T} \times_{\boldsymbol{T}} (\_)$ par rapport à la filtration de $\mathbb{B}\boldsymbol{T}$ (voir aussi début de 1.4). Dans la suite nous passerons sous silence ce détail technique.

l'intégration :

$$\int_{\boldsymbol{X}} \Phi^*_{\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}}(\nu) = \int_{\boldsymbol{Y}} \nu\,,$$

pour tout $\nu \in H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})$. Bien évidemment, lorsque $\boldsymbol{Y} = \{y\} \subseteq \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$, le morphisme $\Phi^*_{y,\boldsymbol{X}}$ est bijectif d'inverse l'intégration sur $\boldsymbol{X}$ et l'on a l'analogue de (13) :

$$\Big(\int_{\boldsymbol{X}} \mu\Big)\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(y,\boldsymbol{X}) = \mu|_y \tag{17}$$

pour tout $\mu \in H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$. En particulier, $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(y,\boldsymbol{X}) \neq 0$, *si et seulement si, y est isolé dans $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$* (*cf.* lemme 1.2.5-1). [7]

Dans le cas où $(\boldsymbol{X},[\boldsymbol{X}])$ n'est pas nécessairement rationnellement lisse, les considérations précédentes s'appliquent aux voisinages coniques des points de $y \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ qui sont rationnellement lisses dans $\boldsymbol{X}$. Soit donc $y \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ rationnellement lisse dans $\boldsymbol{X}$ et notons $\kappa : \{y\} \hookrightarrow \boldsymbol{Y}$ l'injection canonique. En restreignant donc la suite (15) à des voisinages de y de la forme $\hat{\mathrm{c}}_y(\mathbb{Y})$ et $\hat{\mathrm{c}}_y(\mathbb{X})$, munis de leur orientation induite, et en lui appliquant le foncteur $\kappa^!$, on définit le morphisme de Thom-Gysin $\Phi^*_{y,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}} : H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y}) \to H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Y}}]$. D'autre part, comme $\hat{\mathrm{c}}_y(\mathbb{X})$ est rationnellement lisse, la pseudovariété $\mathbb{X}$ est une sphère rationnelle contenant naturellement $\mathbb{Y}$ et $\Phi^*_{\mathbb{Y},\mathbb{X}}$ est bien défini et participe dans un morphisme de triangles exacts de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y})$-modules (on note $d := d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Y}}$) :

(18)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y}) & \xrightarrow{p^*} & H^*_{\boldsymbol{T}}(\hat{\mathrm{c}}_y(\mathbb{Y})) = H^*_{\boldsymbol{T}} & \xrightarrow{q^*} & H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}) & \xrightarrow{[+1]} \\
 & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi^*_{y,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi^*_{\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi^*_{\mathbb{Y},\mathbb{X}}} & \\
H^*_{\boldsymbol{T}}[-d_{\boldsymbol{Y}}] \equiv & H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{X})[d] & \longrightarrow & H^*_{\boldsymbol{T},\hat{\mathrm{c}}_y(\mathbb{Y})}(\hat{\mathrm{c}}_y(\mathbb{X}))[d] & \longrightarrow & H^*_{\boldsymbol{T},\mathbb{Y}}(\mathbb{X})[d] & \xrightarrow[c^*_{\boldsymbol{X}}]{[+1]} \\
 & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{rest.}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{rest.}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{rest.}} & \\
 & H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y})[d] & \xrightarrow{p^*} & H^*_{\boldsymbol{T}}(\hat{\mathrm{c}}_y(\mathbb{Y}))[d] = H^*_{\boldsymbol{T}} & \xrightarrow{q^*} & H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})[d] & \xrightarrow[c^*_{\boldsymbol{Y}}]{[+1]}
\end{array}$$

---

[7] Dans le cas différentiable le tore $\boldsymbol{T}$ agit naturellement sur l'espace tangent $T_y(\boldsymbol{X})$; cette action est linéaire et donne une décomposition $T_y(\boldsymbol{X}) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s$ en sous-espaces $\boldsymbol{T}$-irréductibles de dimensions $\leqslant 2$. Comme $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(y,\boldsymbol{X})$ est de nature locale, on a $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(y,\boldsymbol{X}) = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,T_y(\boldsymbol{X}))$ et nous montrerons dans 2.6.1-1 l'égalité $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,T_y(\boldsymbol{X})) = \prod_j \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,\big(0,L_j\big)$. Or, si $\boldsymbol{T}$ opère trivialement sur l'un des L_j la classe $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,\big(0,L_j\big)$ n'est autre que la classe d'Euler ordinaire et est donc nulle.

Les compositions des morphismes verticaux des deux colonnes de droite de ce diagramme s'obtiennent comme multiplication respectivement par $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\hat{c}_y(\mathbb{Y}),\hat{c}_y(\mathbb{X})) = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y$ (égalité justifiée par la compatibilité aux restrictions ouvertes du morphisme de Thom-Gysin) et par $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\mathbb{Y},\mathbb{X})$. On a $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\mathbb{Y},\mathbb{X}) = q^*(\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\hat{c}_y(\mathbb{Y}),\hat{c}_y(\mathbb{X})))$ [8] et les composées en question sont toutes deux réalisées par la multiplication par $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y$. Lorsque y ***n'est pas*** isolé dans $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ le morphisme p^* est nul (*cf.* 1.2.5-1) et cette dernière remarque s'applique à la première colonne. *Il n'est par contre pas clair que* (rest.) $\circ\, \Phi^*_{y,\mathbf{Y},\mathbf{X}}$ *se réalise, en général, comme multiplication par* $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y$. On a cependant le résultat général suivant :

LEMME 2.2.1-1. — *La différence* $\Phi^*_{y,\mathbf{Y},\mathbf{X}}(\nu)|_{\mathbf{Y}} - \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y{\cdot}\nu$ *est de* $H^*_{\boldsymbol{T}}$*-torsion, quel que soit* $\nu \in H^*_{\mathbf{T},y}(\boldsymbol{Y})$.

Démonstration. — Il suffit de le prouver lorsque y est isolé dans $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$. Dans ce cas la $\boldsymbol{T}$-pseudovariété compacte $\mathbb{Y}$ est sans point fixe et $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ est de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-torsion et p^* est un isomorphisme modulo torsion. La commutativité du diagramme (18) montre alors que pour chaque $\nu \in H^*_{\mathbf{T},y}(\boldsymbol{Y})$, la différence $\Phi^*_{y,\mathbf{Y},\mathbf{X}}(\nu)|_{\mathbf{Y}} - \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y{\cdot}\nu$ provient d'un élément de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$, ce qui prouve le lemme. □

PROPOSITION 2.2.1-2. — *Soit* $(\boldsymbol{Y},[\boldsymbol{Y}]) \subseteq (\boldsymbol{X},[\boldsymbol{X}])$ *une inclusion fermée de* $\boldsymbol{T}$*-pseudovariétés orientées. Soit* $y \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ ***rationnellement lisse dans*** $\boldsymbol{X}$. *Notons* $(\mathbb{Y},[\mathbb{Y}])$ *et* $(\mathbb{X},[\mathbb{X}])$ *les liens de* y *respectivement dans* $\boldsymbol{Y}$ *et* $\boldsymbol{X}$, *munis de leur orientation induite.*

a) *Les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} H^*_{\mathbf{T},y}(\boldsymbol{Y}) & \xrightarrow[{[-d_{\mathbf{Y}}]}]{\int_{\mathbf{Y}}} & \mathbb{Q} \\ {\scriptstyle \Phi^*_{y,\mathbf{Y},\mathbf{X}}}\big\downarrow{\scriptstyle [d_{\mathbf{X}}-d_{\mathbf{Y}}]} & & \big\| \\ H^*_{\mathbf{T},y}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow[{[-d_{\mathbf{X}}]}]{\int_{\mathbf{X}}} & \mathbb{Q} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}) & \xrightarrow[{[-d_{\mathbb{Y}}]}]{\int_{\mathbb{Y}}} & \mathbb{Q} \\ {\scriptstyle \Phi^*_{\mathbb{Y},\mathbb{X}}}\big\downarrow{\scriptstyle [d_{\mathbb{X}}-d_{\mathbb{Y}}]} & & \big\| \\ H^*_{\mathbf{T},\mathbb{Y}}(\mathbb{X}) & \xrightarrow[{[-d_{\mathbb{X}}]}]{\int_{\mathbb{X}}} & \mathbb{Q} \end{array}$$

b) *Supposons* y ***isolé*** *dans* $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$. *Pour tout* $\mu \in H^*_{\mathbf{T},y}(\boldsymbol{X})$, *on a :*

$$\Big(\int_{\mathbf{X}} \mu\Big)\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y = \int_{\mathbf{Y}} \mu|_{\mathbf{Y}}. \tag{19}$$

---

[8] Ces classes d'Euler sont donc nulles ou de degré cohomologique pair.

Démonstration.

a) Conséquence immédiate de la commutativité, en catégorie dérivée, du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{Y_T}}[d_{\boldsymbol{Y}}] \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\bigoplus"] & & \pi^!_{\boldsymbol{Y_T}} \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\mathbb{B}\boldsymbol{T}} \arrow[d, equal] \\ \imath^! \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{X_T}}[d_{\boldsymbol{X}}] \arrow[rr] & & \pi^!_{\boldsymbol{Y_T}} \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\mathbb{B}\boldsymbol{T}} \end{tikzcd}$$

auquel on applique respectivement les foncteurs $\kappa^!$ et $\jmath^{-1}$.

Nous avons donc :

$$(\ddagger) \qquad \int_{\boldsymbol{Y}} \nu = \int_{\boldsymbol{X}} \Phi^*_{y,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}}(\nu)\,, \quad \text{quel que soit } \nu \in H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y}).$$

b) Lorsque $\Phi^*_{y,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}} = 0$, on a $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y = 0$, grâce à la commutativité du diagramme (18) et puisque p^* est un isomorphisme modulo torsion. L'égalité (19) est alors conséquence immédiate de ($\ddagger$).

Soit maintenant $\nu_0 \in H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y})$ tel que $\mu_0 {:=}\ \Phi^*_{y,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}}(\nu_0) \neq 0$. Les égalités :

$$\int_{\boldsymbol{Y}} \mu_0|_{\boldsymbol{Y}} = \int_{\boldsymbol{Y}} \Phi^*_{y,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}}(\nu_0)|_{\boldsymbol{Y}} = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y \int_{\boldsymbol{Y}} \nu_0 = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\,|_y \int_{\boldsymbol{X}} \mu_0,$$

qui résultent du lemme précédent (2.2.1-1) et de ($\ddagger$), montrent que l'égalité (19) est bien vérifiée par μ_0, et comme $H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{X})$ est un $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module de rang 1 (isomorphe à $H^*_{\boldsymbol{T}}[-d_{\boldsymbol{X}}]$), ce cas particulier implique le cas général, ce qui termine la démonstration de (b).

2.2.2. Sous-espace $\boldsymbol{Y}$ rationnellement lisse et intégration sur les fibres. Les mêmes idées qui nous ont permis de définir l'intégration dans 1.4 montrent l'existence d'un morphisme canonique en catégorie dérivée $\imath^! \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{X_T}} \to \imath^! \mathbb{D}^\bullet_{\boldsymbol{X_T}}(\mathbb{Q})[-d_{\boldsymbol{X}}] \equiv \underline{\underline{\mathbb{Q}}}_{\boldsymbol{Y_T}}[d_{\boldsymbol{Y}} - d_{\boldsymbol{X}}]$ qui donne lieu à un morphisme de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-modules :

$$(20) \qquad \int_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}} : H^*_{\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{X}) \longrightarrow H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y})[-d_{\boldsymbol{X}} + d_{\boldsymbol{Y}}]$$

qui généralise la notion d'intégration sur les fibres de 2.1.

Soit maintenant $y \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$. De manière tout à fait analogue à la construction des morphismes de Thom-Gysin de la section précédente, on définit le morphisme de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-modules :

$$\int_{y,\boldsymbol{X},\mathbb{Y}} : H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{X}) \longrightarrow H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y})[-d_{\boldsymbol{X}} + d_{\boldsymbol{Y}}] \tag{21}$$

et l'on a un morphisme de triangles distingués de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-modules :

$$\begin{tikzcd}
H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y}) \arrow[r] & H^*_{\boldsymbol{T}}(\hat{\mathbb{c}}_y(\mathbb{Y})) \arrow[r] & H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}) \arrow[r, "{[+1]}"] & {} \\
H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{X})[d] \arrow[u, "\int_{y,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}"] \arrow[r] & H^*_{\boldsymbol{T},\hat{\mathbb{c}}_y(\mathbb{Y})}(\hat{\mathbb{c}}_y(\mathbb{X}))[d] \arrow[u, "\int_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}"] \arrow[r] & H^*_{\boldsymbol{T},\mathbb{Y}}(\mathbb{X})[d] \arrow[u, "\int_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}"] \arrow[r, "{[+1]}"] & {}
\end{tikzcd} \tag{22}$$

où $d := d_{\boldsymbol{X}} - d_{\boldsymbol{Y}}$.

L'analogue de l'assertion 2.2.1-2 (a) est également vérifiée.

PROPOSITION 2.2.2-1. — *Soit* $(\boldsymbol{Y},[\boldsymbol{Y}]) \subseteq (\boldsymbol{X},[\boldsymbol{X}])$ *une inclusion fermée de* $\boldsymbol{T}$*-pseudovariétés orientées. Soit* $y \in \boldsymbol{Y}^{\mathbf{T}}$ ***rationnellement lisse dans*** $\boldsymbol{Y}$. *Notons* $(\mathbb{Y},[\mathbb{Y}])$ *et* $(\mathbb{X},[\mathbb{X}])$ *les liens de* y *respectivement dans* $\boldsymbol{Y}$ *et* $\boldsymbol{X}$*, munis de leur orientation induite. Les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y}) \arrow[r, "\int_{\boldsymbol{Y}}", "{[-d_{\boldsymbol{Y}}]}"'] & \mathbb{Q} \\
H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{X}) \arrow[u, "\int_{y,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}}", "{[-d_{\boldsymbol{X}}+d_{\boldsymbol{Y}}]}"'] \arrow[r, "\int_{\boldsymbol{X}}", "{[-d_{\boldsymbol{X}}]}"'] & \mathbb{Q} \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}) \arrow[r, "\int_{\mathbb{Y}}", "{[-d_{\mathbb{Y}}]}"'] & \mathbb{Q} \\
H^*_{\boldsymbol{T},\mathbb{Y}}(\mathbb{X}) \arrow[u, "\int_{\mathbb{Y},\mathbb{X}}", "{[-d_{\mathbb{X}}+d_{\mathbb{Y}}]}"'] \arrow[r, "\int_{\mathbb{X}}", "{[-d_{\mathbb{X}}]}"'] & \mathbb{Q} \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.2.2-2. — La conclusion de cette section est qu'un formalisme unique et naturel permet de définir des morphismes, soit d'intégration sur les fibres, soit de Thom-Gysin, dont l'aboutissement est déterminé par l'objet rationnellement lisse et ces morphismes sont inverses l'un de l'autre lorsque toutes les données en question sont rationnellement lisses.

2.3. Inverse de classe d'Euler équivariante d'un point fixe isolé.

Soit $(\boldsymbol{X},[\boldsymbol{X}])$ une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée de dimension d, et soit x un point *rationnellement lisse dans* $\boldsymbol{X}$ *et* ***isolé*** *dans* $\boldsymbol{X}^{\mathbf{T}}$; nous avons déjà indiqué que $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}(x,\boldsymbol{X}) \neq 0$, et l'égalité (17) peut s'écrire :

$$\frac{1}{\mu|_x}\int_{\boldsymbol{X}} \mu = \frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}(x,\boldsymbol{X})}, \quad \text{pour tout } \mu \in H^*_{\boldsymbol{T},x}(\boldsymbol{X})\backslash\{0\}.$$

Lorsque *nous ne supposons plus x rationnellement lisse dans $\boldsymbol{X}$* mais exigeons toujours qu'il soit ***isolé*** dans $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$, il demeure que le morphisme de restriction $p^* : H^*_{\boldsymbol{T},x}(\boldsymbol{X}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}$ est un isomorphisme modulo torsion et l'application qui fait correspondre à un élément *sans torsion* $\mu \in H^*_{\boldsymbol{T},x}(\boldsymbol{X})$, la fraction $\mu_x^{-1} \int_{\boldsymbol{X}} \mu \in Q_{\boldsymbol{T}}$ est *constante*. Cette observation nous emmène à introduire la définition suivante.

DÉFINITION 2.3-1. — Soient $\boldsymbol{X}$ une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée et $x \in \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ un point fixe **isolé**. On appelera «*inverse de classe d'Euler $\boldsymbol{T}$-équivariante de x dans $\boldsymbol{X}$*» la fraction rationnelle notée et définie par :

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\ (x, \boldsymbol{X})} := \frac{1}{\mu|_x} \int_{\boldsymbol{X}} \mu \in Q_{\boldsymbol{T}}$$

où μ est un élément sans torsion arbitraire de $H^*_{\boldsymbol{T},x}(\boldsymbol{X})$. Lorsque cette fraction sera non nulle, son inverse : $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\ (x, \boldsymbol{X})$, continuera d'être appelé «la classe d'Euler $\boldsymbol{T}$-équivariante de x dans $\boldsymbol{X}$», même s'il n'est pas polynomial.

Avec cette définition, l'égalité :

$$\int_{\boldsymbol{X}} \mu = \frac{\mu|_x}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\ (x, \boldsymbol{X})}, \quad \text{pour tout } \mu \in H^*_{\boldsymbol{T},x}(\boldsymbol{X}) \tag{23}$$

sera valable sous l'unique hypothèse que x soit un point fixe isolé, donc indépendamment de toute considération de lissité rationnelle.

Remarques 2.3-2.

a) Notre inverse de classe d'Euler coïncide, dans le cas algébrique complexe, avec les multiplicités équivariantes de points non dégénérés (voir [Bri] §4).

b) S'il est clair que l'inverse de classe d'Euler d'un point fixe isolé d'une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée $(\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{X}])$ est l'inverse d'un polynôme *lorsque* le point est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{X}$, la réciproque est fausse en général (*cf.* 2.7). Nous donnerons dans 3.1 des conditions assurant l'équivalence, pour un point fixe isolé de $\boldsymbol{X}$, entre : «*être rationnellement lisse*» et «*avoir une classe d'Euler équivariante polynomiale*».

2.3.1. Formule de localisation. Soit maintenant $(\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{X}])$ une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée, tel que l'ensemble $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ des points fixes soit ***discret*** et *ne supposons toujours pas* ces points rationnellement lisses dans $\boldsymbol{X}$. Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x\in \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}} H^*_{\boldsymbol{T},x}(\boldsymbol{X}) \equiv H^*_{\boldsymbol{T},\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\ \pi\ } & H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \\ \Big\downarrow \int_{\boldsymbol{X}} & & \Big\downarrow \int_{\boldsymbol{X}} \\ \bigoplus_{x\in \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}} H^*_{\boldsymbol{T}}(x) & \xrightarrow{\ \Sigma\ } & H^*_{\boldsymbol{T}} \end{array}$$

où $\Sigma(P_1, P_2, \ldots) = P_1 + P_2 + \cdots$.

Les théorèmes de localisation de Borel-Atiyah-Segal montrent que dans la suite des morphismes canoniques :

$$H^*_{\boldsymbol{T},\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}}(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\ \pi\ } H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) \longrightarrow H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}})$$

celui de droite est un isomorphisme modulo torsion puisque son noyau et conoyau sont contrôlés par $H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}})$ qui est de torsion; et de même pour leur composée. Il en résulte que π est un isomorphisme modulo torsion. En particulier, pour chaque $\mu \in H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$, il existe $\xi_\mu \in H^*_{\boldsymbol{T}}$, non nul, tel que $\xi_\mu{\cdot}\mu \in \mathrm{im}(\pi)$. Notons $\overline{\nu} = (\nu_x)_{x\in\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}}$ un élément de $\bigoplus_{x\in\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}} H^*_{\boldsymbol{T}}(x)$ vérifiant $\pi(\nu) = \xi_\mu{\cdot}\mu$. On aura alors l'égalité :

$$\xi_\mu \int_{\boldsymbol{X}} \mu = \sum_{x\in\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}} \Big(\int_{\boldsymbol{X}} \nu_x\Big) = \sum_{x\in\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}} \frac{\xi_\mu{\cdot}\mu|_x}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x,\boldsymbol{X})}\,,$$

qui incorpore les inverses de classe d'Euler conformément à (23). Dans cette «*formule de localisation*» on peut, bien évidemment, simplifier l'élément ξ_μ des deux membres et obtenir ainsi la justification de l'égalité (**) de l'introduction :

$$\int_{\boldsymbol{X}} \mu = \sum_{x\in\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}} \frac{\mu|_x}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x,\boldsymbol{X})} \tag{24}$$

pour tout $\mu \in H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$.

En particulier, si $\boldsymbol{X}$ est compacte et que l'on prend $\mu = \mathbf{1}_{\mathbf{X}}$, on démontre :

PROPOSITION 2.3.1.1. — *Soit* $(\boldsymbol{X}, [\mathbf{X}])$ *une* $\boldsymbol{T}$*-pseudovariété de dimension non nulle, orientée,* ***compacte*** *et telle que* $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ *est un ensemble* ***fini****. Alors :*

$$\sum_{x\in\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}} \frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x,\boldsymbol{X})} = 0\,.$$

Les deux sections suivantes rappellent des éléments bien connus en cohomologie équivariante ; ils nous seront indispensables pour aller plus loin dans l'étude des classes d'Euler.

2.4. Cohomologie équivariante et fonctions régulières de Lie $(\boldsymbol{T})$.

Pour chaque caractère $\gamma : \boldsymbol{T} \to \mathbb{S}^1$ considérons le fibré en droites $\mathcal{L}(\gamma) := \mathbb{E}\boldsymbol{T} \times_\gamma \mathbb{C} \to \mathbb{B}\boldsymbol{T}$ et identifions $\mathbb{B}\boldsymbol{T}$ à l'image de la section nulle de $\mathcal{L}(\gamma)$ Les constructions de la section 2.1 s'appliquent au couple d'espaces $(\mathbb{B}\boldsymbol{T}, \mathcal{L}(\gamma))$ [9] et font correspondre au caractère γ la classe $\xi(\gamma) := \mathrm{Eu}\,(\mathbb{B}\boldsymbol{T}, \mathcal{L}(\gamma)) \in H^2(\mathbb{B}\boldsymbol{T}, \mathbb{Z}) = H^2_{\boldsymbol{T}}(\mathrm{pt}, \mathbb{Z})$, d'où une application canonique ξ entre l'ensemble $\mathcal{X}(\boldsymbol{T})$, des caractères de $\boldsymbol{T}$, et $H^2(\mathbb{B}\boldsymbol{T}, \mathbb{Z}) \sim \mathbb{Z}^{\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})}$. L'ensemble $\chi(\boldsymbol{T})$ est un groupe abélien libre de rang r et l'application ξ est un isomorphisme de groupes. En effet, ξ est compatible aux décompositions $\mathcal{X}(\boldsymbol{T}) = \mathcal{X}(\mathbb{S}^1)^{\oplus r}$ et $H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T}, \mathbb{Z}) = H^2(\mathbb{B}\mathbb{S}^1, \mathbb{Z})^{\oplus r}$ et lorsque $\boldsymbol{T} = \mathbb{S}^1$, on vérifie que $\mathrm{Eu}\,(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathcal{L}(\mathrm{id}))$ est l'opposé de la classe fondamentale de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Ceci étant, l'application qui associe à un caractère $\gamma \in \chi(\boldsymbol{T})$, le caractère infinitésimal $d\gamma_{\mathrm{e}} \in \mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})^*$, définit une injection $\mathcal{X}(\boldsymbol{T}) \hookrightarrow \mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})^*$ d'image «*le réseau des poids de* $\boldsymbol{T}$», noté $\mathcal{P}(\boldsymbol{T})$. En composant avec ξ, on obtient une bijection canonique $\imath : H^2(\mathbb{B}\boldsymbol{T}, \mathbb{Z}) \equiv \mathcal{P}(\boldsymbol{T}) \subseteq \mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})^*$ qui se prolonge (algébriquement) en un homomorphisme d'algèbres

$$\imath : H^*_{\boldsymbol{T}} \hookrightarrow S^*(\mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})^*)$$

injectif, qui sera sous-entendu dans la suite. L'homomorphisme $\imath$ est gradué lorsque l'on munit $H^*_{\boldsymbol{T}}$ de la graduation polynomiale.

Les identifications ci-dessus montrent l'égalité $\mathrm{Eu}\,(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathcal{L}(\alpha)) = -\alpha$, pour tout poids $\alpha \in \mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})^*$; ce qui se généralise immédiatement au cas d'une famille finie de poids $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ par l'égalité :

$$\mathrm{Eu}\,(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathcal{L}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(\alpha_n)) = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n \in H^*_{\boldsymbol{T}}. \tag{25}$$

2.4.1. Exemple lisse standard. Soit $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ une famille *arbitraire* de poids de $\boldsymbol{T}$ et faisons agir $\boldsymbol{T}$ sur $\mathbb{C}^n$, par l'égalité :

$$t\cdot(z_1, \ldots, z_n) := (e^{\alpha_1}(t)\, z_1, \ldots, e^{\alpha_n}(t)\, z_n)\,.$$

---

(9) On pourra raisonner avec les approximations différentiables de dimension finie : $\mathbb{B}\boldsymbol{T}(n) := \mathbb{P}_n(\mathbb{C})^{\mathrm{rg}(\boldsymbol{T})}$.

L'origine est donc un point fixe isolé pour cette action, si et seulement si, les poids dans $\mathcal{A}$ sont tous différents de zéro.

Notations. On notera $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ la $\boldsymbol{T}$-pseudovariété ainsi obtenue et $\mathbb{S}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ la sphère unité (de dimension $2n-1$) considérée munie de l'action induite de $\boldsymbol{T}$, on a $\mathbb{L}(0, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}) \equiv \mathbb{S}_{\mathcal{A}}$. Ces pseudovariétés sont orientées par leur orientation canonique. Pour chaque $i = 1 \ldots, n$, on note $\mathbb{C}_{\alpha_i}$ l'axe de coordonnées correspondant au poids α_i.

L'égalité (25) s'interprète en cohomologie équivariante par :

$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}) = \textstyle\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \mathbb{C}_\alpha) = (-1)^n \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha$$

Il s'ensuit que l'image du morphisme p^* dans le triangle exact :

$$H^*_{\boldsymbol{T},0}(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{p^*} H^*_{\boldsymbol{T}}(0) \xrightarrow{q^*} H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{[+1]},$$

est l'idéal principal $\langle \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha \rangle \subseteq H^*_{\boldsymbol{T}}$. D'autre part, comme le morphisme de Thom-Gysin $\Phi^*_{0,\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}}$ est un isomorphisme, l'application p^* est nulle ou injective suivant que $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})$ est nulle ou non. On a par conséquent :

$$\begin{cases} H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \equiv \dfrac{H^*_{\boldsymbol{T}}}{\langle \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}) \rangle} = \dfrac{H^*_{\boldsymbol{T}}}{\langle \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha \rangle}, & \text{si } \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha \neq 0\,; \\ H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \equiv H^*_{\boldsymbol{T}} \oplus H^*_{\boldsymbol{T}}\,, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Dans le premier cas la famille des idéaux associés minimaux (*cf.* section suivante) du $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module en question est :

$$\mathrm{Min}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}\,(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}})) = \{\langle \alpha_1 \rangle, \ldots, \langle \alpha_n \rangle\}$$

et l'algèbre $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}})$ est réduite, si et seulement si, les poids de $\mathcal{A}$ sont deux à deux non colinéaires.

Remarque 2.4.1-1. — Lorsque les poids dans $\mathcal{A}$ sont deux à deux distincts, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})$ muni de la structure de $\boldsymbol{T}$-espace induite, possède exactement n points fixes : les droites $\mathbb{C}_{\alpha_i}$. On déduit de ce qui précède la formule $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,([\mathbb{C}_{\alpha_i}], \mathbb{P}(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})) = \prod_{j \neq i}(\alpha_i - \alpha_j)$.

2.5. Supports des H_T^*-modules de cohomologie équivariante (*cf.* [Ma]).

On appelle «*support*» d'un H_T^*-module de type fini M, et l'on note $\mathrm{supp}_{H_T^*}(M)$, l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de H_T^* tels que le localisé $M_{\mathfrak{P}} := M \otimes_{H_T^*} (H_T^*)_{\mathfrak{P}}$, où $(H_T^*)_{\mathfrak{P}}$ désigne l'anneau des fractions de la forme P/Q avec $P \in H_T^*$ et $Q \in (H_T^* \backslash \mathfrak{P})$, n'est pas nul. Le support de M est alors une partie fermée du spectre premier de H_T^*. L'ensemble $\mathrm{supp}_{H_T^*}(M)$, muni de l'ordre partiel d'inclusion, comporte un nombre fini d'éléments minimaux dont on notera $\mathrm{Min}_{H_T^*}(M)$ l'ensemble. Les composantes irréductibles (pour la topologie spectrale) de $\mathrm{supp}_{H_T^*}(M)$ sont les adhérences des éléments de $\mathrm{Min}_{H_T^*}(M)$.

Pour chaque $m \in M$, on note $\mathrm{Annul}_{H_T^*}(m)$ l'idéal des éléments P de H_T^* tels que $P{\cdot}m = 0$. Un idéal premier $\mathfrak{P}$ est alors appelé «*idéal associé à M*» lorsqu'il est de la forme $\mathfrak{P} = \mathrm{Annul}_{H_T^*}(m)$ pour un certain $m \in M$. On notera $\mathrm{Ass}_{H_T^*}(M)$ l'ensemble des idéaux associés à M, muni de l'ordre partiel d'inclusion. L'ensemble $\mathrm{Min}_{H_T^*}(M)$ s'identifie alors à l'ensemble des éléments minimaux de $\mathrm{Ass}_{H_T^*}(M)$.

Le support des H_T^*-modules de cohomologie équivariante jouera un rôle important dans la suite de cet article. Nous rappelons maintenant les résultats de [Hs] concernés par cette problématique.

2.5.1. Types d'orbites. Soit $\boldsymbol{X}$ une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété telle que le H_T^*-module $H_T^*(\boldsymbol{X})$ est de type fini (*voir* (a) dans les remarques 1.2.3-1). Pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, on notera $\boldsymbol{T}{\cdot}x$ la $\boldsymbol{T}$-orbite contenant x. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_x$ du stabilisateur $\boldsymbol{T}_x \subseteq \boldsymbol{T}$ du point x, est alors un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{t} := \mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})$ **défini sur** $\mathbb{Q}$. On notera $\mathfrak{P}_x$ l'idéal des éléments de H_T^* qui, suite à l'injection canonique d'algèbres $\imath : H_T^* \hookrightarrow S^*(\mathfrak{t}^*)$ (*cf.* 2.4), annulent $\mathfrak{t}_x$. L'idéal $\mathfrak{P}_x$ est premier et il est engendré par $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T}{\cdot}x)$ éléments linéairement indépendants de H_T^2 ; on l'appellera le «*type d'orbite*» [10] de $\boldsymbol{T}{\cdot}x$. On remarquera que deux orbites ont un même type $\mathfrak{P}$, si et seulement si, les composantes connexes de l'élément neutre de leurs groupes d'isotropie coïncident ; nous noterons $\boldsymbol{T}(\mathfrak{P})$ cette composante commune.

---

[10] Nous nous écartons ici de la terminologie de Hsiang en ce sens que chez-lui, le type d'une $\boldsymbol{T}$-orbite $\boldsymbol{T}{\cdot}x$ est le groupe d'isotropie $\boldsymbol{T}_x$ et pas seulement sa composante connexe $(\boldsymbol{T}_x)_0$ qu'il appelle le «*type connexe*» de l'orbite.

Soit $\mathcal{O}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ la famille des types des $\boldsymbol{T}$-orbites de $\boldsymbol{X}$ munie de l'ordre partiel d'inclusion; c'est un ensemble *fini* et ses éléments minimaux sont précisément les éléments minimaux de $\mathrm{supp}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}))$ ([Hs] théorème **IV.6**, page 56). Ce support se réalise donc comme la réunion des algèbres de Lie des groupes d'isotropie des $\boldsymbol{T}$-orbites de $\boldsymbol{X}$. Enfin, l'intersection des idéaux (minimaux) de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ donne le radical de l'idéal $\mathrm{Annul}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}))$.

Les types d'orbite minimaux sont donc en correspondance bijective avec les composantes irréductibles du support du $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$, et pour chaque type *minimal* $\mathfrak{m} \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ on a (toujours d'après *loc. cit.*) :

$$H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})_{(\mathfrak{m})} \equiv H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}(\mathfrak{m})})_{(\mathfrak{m})} \equiv H^*(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}(\mathfrak{m})}/\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathbb{Q}} (H^*_{\boldsymbol{T}(\mathfrak{m})})_{(\mathfrak{m})},$$

dont on déduit la formule permettant le calcul de la multiplicité $\mu_{\mathfrak{m}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}))$ de la composante irréductible du support du $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$ correspondant à l'idéal $\mathfrak{m}$:

$$\mu_{\mathfrak{m}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})) = \dim_{\mathbb{Q}} H^*(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}(\mathfrak{m})}/\boldsymbol{T}). \tag{26}$$

Dans la suite, nous dirons par abus de langage qu'une orbite est «*minimale*» lorsque son type est un élément minimal de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})$.

2.6. Quelques propriétés des inverses de classe d'Euler équivariantes.

PROPOSITION 2.6-1. — *Soit $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ une famille de poids* ***non nuls*** *de $\boldsymbol{T}$. Soit $(\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Y}])$ une sous-$\boldsymbol{T}$-pseudovariété fermée et orientée de $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$. Supposons $0 \in \boldsymbol{Y}$ et notons $\mathbb{Y} := \mathbb{L}(0, \boldsymbol{Y})$, alors :*

a) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y}, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})\,|_0$ *est* ***l'unique élément homogène*** $\xi \in H^*_{\boldsymbol{T}}$ *vérifiant* $\xi \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{Y}} = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\mathbb{Y}, \mathbb{S}_{\mathcal{A}})$.

b) *Le polynôme $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha$ est dénominateur dans une expression de $\dfrac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \boldsymbol{Y})}$ comme fraction de polynômes. On a :*

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \boldsymbol{Y})} = (-1)^n \, \frac{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y}, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})\,|_0}{\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha} \,.$$

De plus, $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y}, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})\,|_0$ *est divisible par les poids $\alpha \in \mathcal{A}$ vérifiant $(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}} \backslash \boldsymbol{Y})^{\boldsymbol{T}(\langle\alpha\rangle)} \neq \varnothing$.*

Démonstration.

a) Le fait que $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})\,|_0$ relève $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}})$ a déjà été prouvé dans 2.2.1. Nous venons d'autre part de montrer dans le paragraphe précédent l'exactitude de la suite :

$$0 \to H^*_{\boldsymbol{T},0}(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{p^*} H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{q^*} H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \to 0$$

et l'égalité $\mathrm{im}(p^*) = \langle \prod \alpha_i \rangle$. En particulier la classe de Thom $\tau_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \in H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}})$ admet bien un relèvement $\xi \in H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})$ homogène de degré $2n - \dim \boldsymbol{Y}$. Comme tout autre relèvement est de la forme $\xi + P\prod \alpha_i$ et que $\prod \alpha_i$ est de degré $2n$, l'unicité du relèvement homogène s'ensuit.

b) Conséquence immédiate de l'assertion 2.2.1.2 (b), du fait que la classe de Thom équivariante $\tau_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}})$ appartient au noyau du morphisme de restriction $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\backslash\mathbb{Y}) \sim H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}\backslash \boldsymbol{Y})$. □

Remarques 2.6-2.

a) Comme $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ est un espace vectoriel, le formalisme de la section 2.2.1 peut se faire avec le complexe dualisant à coefficients entiers et les classes d'Euler $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})$ et $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})$ sont définies dans $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathrm{pt},\mathbb{Z})$.

b) On voit apparaître dans l'assertion 2.6-1 (b) une identification entre $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\boldsymbol{Y},\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})\,|_0$ et la «*multiplicité équivariante*» de $0 \in \boldsymbol{Y} \subseteq \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ de W. Rossmann ([R], voir aussi [Bri] §4.5).

2.6.1. Multiplicativité des inverses de classe d'Euler.

PROPOSITION 2.6.1-1. — *Soient $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ deux $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés orientées, et $x_1 \in \boldsymbol{X}_1^{\boldsymbol{T}}$, $x_2 \in \boldsymbol{X}_2^{\boldsymbol{T}}$, deux points fixes* **isolés**. *Munissons $\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2$ de l'orientation produit. On a alors*

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,((x_1,x_2),\boldsymbol{X}_1\times\boldsymbol{X}_2)} = \frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x_1,\boldsymbol{X}_1)}\,\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x_2,\boldsymbol{X}_2)}\,.$$

Démonstration. — En effet d'après (23), on aura, pour tous $\mu_1 \in H^*_{T,x_1}(\boldsymbol{X}_1)$ et $\mu_2 \in H^*_{T,x_2}(\boldsymbol{X}_2)$:

$$\int_{\boldsymbol{X}_1\times\boldsymbol{X}_2} \mu_1 \boxtimes \mu_2 = \frac{(\mu_1\boxtimes\mu_2)|_{(x_1,x_2)}}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,((x_1,x_2),\boldsymbol{X}_1\times\boldsymbol{X}_2)} = \frac{\mu_1|_{x_1}\,\mu_2|_{x_2}}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,((x_1,x_2),\boldsymbol{X}_1\times\boldsymbol{X}_2)}\,,$$

$$\int_{\boldsymbol{X}_1} \mu_1 = \frac{\mu_1|_{x_1}}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x_1,\boldsymbol{X}_1)}\,,\qquad \int_{\boldsymbol{X}_2} \mu_2 = \frac{\mu_2|_{x_2}}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x_2,\boldsymbol{X}_2)}\,;$$

et le résultat découle de l'égalité : $\int_{\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2}\mu_1\boxtimes\mu_2=\int_{\mathbf{X}_1}\mu_1\int_{\mathbf{X}_2}\mu_2$.

2.6.2. Additivité des inverses de classe d'Euler. Soit $(\boldsymbol{X},[\boldsymbol{X}])$ une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée de dimension d et soient $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$ deux sous-$\boldsymbol{T}$-pseudovariétés de $\boldsymbol{X}$ de dimension d orientées par la restriction de $[\boldsymbol{X}]$. Supposons que $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1\cup\boldsymbol{X}_2$ et que $\boldsymbol{X}_{12}:=\boldsymbol{X}_1\cap\boldsymbol{X}_2$ est une sous-pseudovariété de $\boldsymbol{X}$ de codimension plus grande ou égale à 2. Soit $x\in\boldsymbol{X}_{12}$ un point fixe isolé de $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$. La condition sur la codimension assure alors que le morphisme naturel de restrictions $H^d_x(\boldsymbol{X})\to H^d_x(\boldsymbol{X}_1)\oplus H^d_x(\boldsymbol{X}_2)$ est un isomorphisme et donc $\int_{\mathbf{X}}\mu=\int_{\mathbf{X}_1}\mu|_{\mathbf{X}_1}+\int_{\mathbf{X}_2}\mu|_{\mathbf{X}_2}$, pour tout $\mu\in H^*_x(\boldsymbol{X})$. Comme cette égalité sera encore satisfaite en cohomologie équivariante (*cf.* remarque 1.4.3), la proposition suivante est prouvée (voir aussi [Bri] §4.3).

PROPOSITION 2.6.2-1. — *Sous les hypothèses décrites ci-dessus, on a*

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x,\boldsymbol{X})}=\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x,\boldsymbol{X}_1)}+\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x,\boldsymbol{X}_2)}\,.$$

2.7. Exemples de classes d'Euler équivariantes non polynomiales.

Bouquets et lissité rationnelle. Le but de cet exemple élémentaire est de montrer dans quelles conditions il est raisonnable d'espérer que la classe d'Euler équivariante détecte la présence ou l'absence d'une singularité. Cet exemple est à la base du critère de lissité rationnelle 3.2.1-2 et de celui pour les variétés de Schubert de 4.1-1.

Faisons agir $\boldsymbol{T}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ coordonnée par coordonnée sur $\mathbb{C}^2$ suivant deux poids non nuls α_1,α_2 ; notons $\mathbb{C}_{\alpha_i}$ les $\boldsymbol{T}$-espaces de coordonnées ainsi obtenus et considérons la variété algébrique $\boldsymbol{X}:=\mathbb{C}_{\alpha_1}\cup\mathbb{C}_{\alpha_2}$. On a $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X})=2$. Ces données munissent $\boldsymbol{X}$ d'une structure de $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée. Les conditions (2.6.2) sont satisfaites et la proposition 2.6.2-1 s'applique. On a $\mathbb{L}(x,\boldsymbol{X})=\mathbb{L}(0,\mathbb{C}_{\alpha_1})\coprod\mathbb{L}(0,\mathbb{C}_{\alpha_2})=\mathbb{S}^1_{\alpha_1}\coprod\mathbb{S}^1_{\alpha_2}$ d'où le triangle exact :

$$\begin{tikzcd}
H^*_{\boldsymbol{T},x}(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "\varphi^*"] & H^*_{\boldsymbol{T}} \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[d, equal] & H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}^1_{\alpha_1})\oplus H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}^1_{\alpha_2}) \arrow[r, "{[+1]}", "c^*"'] \arrow[d, equal] & {} \\
 & \mathbb{Q}[X_1,X_2] \arrow[r, "\delta^*"] & \frac{\mathbb{Q}[X_1,X_2]}{\langle\alpha_1\rangle}\oplus\frac{\mathbb{Q}[X_1,X_2]}{\langle\alpha_2\rangle} &
\end{tikzcd}$$

où δ^* désigne le morphisme diagonal. Nous avons les deux cas suivants :

$$\begin{cases} \langle\alpha_1\rangle \neq \langle\alpha_2\rangle & \begin{cases} \ker(\psi^*) = \langle\alpha_1\alpha_2\rangle\,, \quad \operatorname{coker}(\psi^*) \equiv \mathbb{Q}[0]\,, \quad \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x,\boldsymbol{X}) = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,; \\ \mathrm{Min}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x,\boldsymbol{X}))) = \{\langle\alpha_1\rangle,\langle\alpha_2\rangle\}\,, \quad \mu_{\langle\alpha_i\rangle}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x,\boldsymbol{X}))) = 1\,; \\ H^*_{\boldsymbol{T},x}\big(\boldsymbol{X}\big) \equiv \langle\alpha_1\alpha_2\rangle \oplus \mathbb{Q}[-1] \equiv \mathbb{Q}[X_1,X_2][-4] \oplus \mathbb{Q}[-1]\,; \\ \int_{\boldsymbol{X}} H^*_{\boldsymbol{T},x}\big(\boldsymbol{X}\big) = \langle\alpha_1+\alpha_2\rangle \subseteq \mathbb{Q}[X_1,X_2]\,; \end{cases} \\ \alpha = \alpha_1 = \varepsilon\,\alpha_2 & \begin{cases} \ker(\psi^*) = \langle\alpha\rangle\,, \quad \operatorname{coker}(\psi^*) \equiv \frac{\mathbb{Q}[X_1,X_2]}{\langle\alpha\rangle}\,, \quad \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(x,\boldsymbol{X}) = \frac{-1}{1+\varepsilon}\alpha\,; \\ \mathrm{Min}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x,\boldsymbol{X}))) = \{\langle\alpha\rangle\}\,, \quad \mu_{\langle\alpha\rangle}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x,\boldsymbol{X}))) = 2\,; \\ H^*_{\boldsymbol{T},x}\big(\boldsymbol{X}\big) \equiv \langle\alpha\rangle \oplus \frac{\mathbb{Q}[X_1,X_2]}{\langle\alpha\rangle}[-1] \equiv \mathbb{Q}[X_1,X_2][-2] \oplus \frac{\mathbb{Q}[X_1,X_2]}{\langle\alpha\rangle}[-1]\,; \\ \int_{\boldsymbol{X}} H^*_{\boldsymbol{T},x}\big(\boldsymbol{X}\big) = (1+\varepsilon)\,\mathbb{Q}[X_1,X_2]\,; \end{cases} \end{cases}$$

où $\mu_{\langle\alpha_i\rangle}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x,\boldsymbol{X})))$ désigne la multiplicité de la composante irréductible du support du $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(x,\boldsymbol{X}))$ correspondante à l'idéal $\langle\alpha_i\rangle$.

Remarque 2.7-1. — Pour chaque poids $\alpha \neq 0$ de $\boldsymbol{T}$, notons $\mathbb{P}_\alpha$ l'espace projectif complexe de $\mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_0$, notons N_α et S_α ses deux points fixes (pôles nord et sud resp.) paramétrés de manière à ce que $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(N_\alpha,\mathbb{P}_\alpha) = \alpha$ (et donc $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(S_\alpha,\mathbb{P}_\alpha) = -\alpha$).

Soit $\boldsymbol{X} := (\mathbb{P}_\alpha \coprod \mathbb{P}_{-\alpha})/\langle N_\alpha = N_{-\alpha}, S_\alpha = S_{-\alpha}\rangle$ l'espace topologique obtenu en identifiant les pôles nord puis les pôles sud de la réunion disjointe $\mathbb{P}_\alpha \coprod \mathbb{P}_{-\alpha}$. L'espace $\boldsymbol{X}$ est une $\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée compacte ayant deux points fixes isolés. Les calculs précédents pour $\alpha_1 = -\alpha_2$ montrent alors que les inverses de classe d'Euler aux points de $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ sont nuls et par la formule de localisation (24), on a $\int_{\boldsymbol{X}} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}) = 0$.

Soient maintenant α,β,γ trois poids non nuls de $\boldsymbol{T}$ et posons comme dans le paragraphe précédent $\boldsymbol{X} := (\mathbb{P}_\alpha \coprod \mathbb{P}_\beta \coprod \mathbb{P}_\gamma)/\langle N_\alpha = N_\beta, S_\beta = S_\gamma, S_\alpha = N_\gamma\rangle$. Supposons α, β, γ deux à deux non colinéaires; les calculs ci-dessus pour $\langle\alpha_1\rangle \neq \langle\alpha_2\rangle$ donnent :

$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(N_\alpha = N_\beta,\boldsymbol{X}) = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,, \quad \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(S_\beta = S_\gamma,\boldsymbol{X}) = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\,,$$
$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(S_\alpha = N_\gamma,\boldsymbol{X}) = -\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}\,,$$

de sorte que $\int_{\boldsymbol{X}} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}) = \langle\alpha+\beta,\alpha-\gamma\rangle$ et nous avons un exemple avec $\boldsymbol{X}$ compacte et connexe où l'image de l'intégrale n'est pas un idéal principal de $H^*_{\boldsymbol{T}}$.

Remarque 2.7-2. — Considérons les assertions suivantes concernant la donnée d'une sous-$\boldsymbol{T}$-pseudovariété orientée $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ contenant l'origine

0 de $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$. On suppose que 0 est isolé dans $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ et que $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,\boldsymbol{X})$ est définie (*i.e.* $\neq \infty$) :

$\mathcal{P}_0(\boldsymbol{X})$: *Il existe une classe de cohomologie équivariante à support dans 0 qui n'est pas de torsion et dont le degré est égal à* $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X})$.

$\mathcal{P}_1(\boldsymbol{X})$: *L'application* $\int_{\boldsymbol{X}} : H^*_{\boldsymbol{T};0}(\boldsymbol{X}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}$ *est surjective.*

$\mathcal{P}_2(\boldsymbol{X})$: *La classe d'Euler équivariante* $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,\boldsymbol{X})$ *est polynomiale.*

(On a $\mathcal{P}_0 \Rightarrow \mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$.)

Ces trois propriétés sont vérifiées lorsque $0 \in \boldsymbol{X}$ est rationnellement lisse et le sont également dans l'exemple du bouquet lorsque $\langle\alpha_1\rangle = \langle\alpha_2\rangle$ (partiellement pour $\alpha_1 = -\alpha_2$) mais sont toutes les trois fausses dans l'autre cas. L'exemple en question se généralise de la manière suivante : soient $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_s$ des familles de m poids non nuls de $\boldsymbol{T}$ et soit $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}^m_{\mathcal{A}_1} \vee_0 \cdots \vee_0 \mathbb{C}^m_{\mathcal{A}_s}$ le bouquet à l'origine de ces espaces que l'on plonge dans $\mathbb{C}^{sm}_{\mathcal{A}} := \mathbb{C}^m_{\mathcal{A}_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^m_{\mathcal{A}_s}$. L'application itérée de 2.6.2-1 donne alors l'égalité :

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,\boldsymbol{X})} = (-1)^m \sum_{j=1\ldots s} \frac{1}{\prod_{\alpha\in\mathcal{A}_j}\alpha}\cdot$$

Nous voyons donc que lorsque les poids de la représentation $\mathbb{C}^{sm}_{\mathcal{A}}$ sont de multiplicité 1 et deux à deux non proportionnels, ou ce qui revient au même : que les multiplicités des idéaux associés minimaux de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}})$ sont toutes égales à 1, *ce qui constitue des conditions* ***extrinsèques*** à $\boldsymbol{X}$, alors, *la classe d'Euler* $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,\boldsymbol{X})$ *est polynomiale, si et seulement si,* $s = 1$ *; c'est à dire, si et seulement si,* 0 *est rationnellement lisse dans* $\boldsymbol{X}$.

La section 3, notamment par les théorèmes 3.1-1 et 3.2.1-2, développera cette dernière remarque.

Cas des variétés de Schubert et désingularisations de Bott-Samelson. Reprenons les notations pour les variétés de Schubert de l'introduction. Pour $w \in \boldsymbol{W}$, soit $[w] = [r_{\alpha_1},\ldots,r_{\alpha_\ell}]$ une décomposition réduite de w, et notons $\Gamma([w])$ la variété de Bott-Samelson associée ([Ha], [Dem]). Rappelons que $\Gamma([w])$ est une variété projective lisse munie d'une action de $\boldsymbol{T}$ à gauche qui désingularise la variété de Schubert $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ à l'aide d'un morphisme $\boldsymbol{T}$-équivariant $g : \Gamma([w]) \to \overline{\boldsymbol{X}}(w)$. Chaque $v \in \overline{\boldsymbol{X}}(w)^{\boldsymbol{T}}$ vérifie $v \in \boldsymbol{W}$ et $v \preceq w$; l'ensemble $g^{-1}(v)^{\boldsymbol{T}}$ est fini et paramétré par les sous-suites de $[w]$ dont le produit égale v. On a alors (*cf.* [A2]) :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(v,\overline{\boldsymbol{X}}(w)\right)} &= \sum_{y\in g^{-1}(v)^{\boldsymbol{T}}} \frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y,\Gamma([w])\right)} \\
&= (-1)^{\ell} \sum_{[\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell]} \frac{1}{\prod_{j=1}^{\ell} \sigma_1\cdots\sigma_j(\alpha_j)}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

où les suites $[\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell]$ vérifient $\sigma_k\in\{1,r_{\alpha_k}\}$ et $\sigma_1\cdots\sigma_\ell=v$. Cette formule résulte d'appliquer la formule de localisation (24) à l'égalité $\int_{\overline{\boldsymbol{X}}(w)}\mu=\int_{\Gamma([w])} g^*(\mu)$, puis d'une étude des espaces tangents à $\Gamma([w])$ en chaque point de $g^{-1}(v)^{\boldsymbol{T}}$.

3. Un critère de lissité rationnelle.

3.1. Classes d'Euler équivariantes polynomiales et lissité rationnelle.

Dans cette section on s'intéresse plus particulièrement au cas des sous-$\boldsymbol{T}$-pseudovariétés fermées de $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ où $\mathcal{A}$ est une famille de poids de $\boldsymbol{T}$ *deux à deux non colinéaires*. La proposition suivante établit un critère de lissité rationnelle dans ce contexte, ce critère, ou plutôt son corollaire en géométrie algébrique 3.2.1-2 sera plus tard appliqué aux variétés de Schubert (théorème 4.1-1).

THÉORÈME 3.1-1. — *On se donne une famille $\mathcal{A}$ de n poids de $\boldsymbol{T}$* **deux à deux non colinéaires**. *Soit $\boldsymbol{Y}$ une sous-$\boldsymbol{T}$-pseudovariété fermée de $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ contenant l'origine. Notons $\mathbb{Y}:=\mathbb{L}(0,\boldsymbol{Y})$ muni de l'orientation induite.*

a) *Supposons que les $\boldsymbol{T}$-orbites minimales de $\mathbb{Y}$ sont des cercles. Alors, il existe une sous-famille $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\mathrm{Min}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}))=\{\langle\alpha_1\rangle,\ldots,\langle\alpha_s\rangle\}$. La multiplicité de chaque $\langle\alpha_i\rangle$ dans le support du $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ est égale à 1, et le noyau du morphisme structural $q^*:H^*_{\boldsymbol{T}}\to H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ est l'idéal principal $\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle$. De plus on a :*

$$
\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(0,\boldsymbol{Y}\right)} = (-1)^s\,\frac{P}{\alpha_1\cdots\alpha_s}\,,\quad \text{avec } P\in H_{\boldsymbol{T}}^{2s-\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{Y})}\,. \tag{28}
$$

b) *Supposons maintenant que* $\boldsymbol{Y}$ *est orientable, que* $\mathbb{Y}$ *est rationnellement lisse et qu'il existe un sous-tore* $\mathbb{S}^1 \subseteq \boldsymbol{T}$ *agissant de façon presque libre sur* $\mathbb{Y}$ *et tel que les groupes de cohomologie rationnelle du quotient* $\mathbb{Y}/\mathbb{S}^1$ *soient nuls en degrés impairs. Alors, (a) s'applique et l'on a :*

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\ (0, \boldsymbol{Y})} = (-1)^s \frac{P}{\alpha_1 \cdots \alpha_s}, \tag{29}$$
$$\textit{avec } P \in H_{\boldsymbol{T}}^{2s-\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{Y})} \backslash \{0\} \textit{ sans facteur linéaire.}$$

De plus, $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\ (0, \boldsymbol{Y})$ *est polynomiale, si et seulement si,* 0 *est rationnellement lisse dans* $\boldsymbol{Y}$.

Démonstration. — On notera $\mathbb{S}_{\mathcal{A}} := \mathbb{L}(0, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})$ muni de l'orientation induite.

a) Comme $\mathcal{O}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y}) \subseteq \mathcal{O}_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})$, on a bien $\mathrm{Min}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})) = \{\langle\alpha_1\rangle, \ldots, \langle\alpha_s\rangle\}$, pour une certaine sous-famille $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ de $\mathcal{A}$. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$, notons $\boldsymbol{T}_i$ le sous-tore de $\boldsymbol{T}$ d'algèbre de Lie : $\{\alpha_i = 0\} \subseteq \mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})$. On a $\mathbb{Y}^{\boldsymbol{T}_i} \subseteq \mathbb{S}_{\mathcal{A}}^{\boldsymbol{T}_i} \subseteq \mathbb{C}_{\alpha_i}/\mathbb{R}^*_+ \simeq \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{Y}^{\boldsymbol{T}_i}/\boldsymbol{T}$ est réduit à un point d'après l'hypothèse de non colinéarité des poids dans $\mathcal{A}$. La multiplicité de l'idéal $\langle\alpha_i\rangle$ associé au $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ est donc égale à 1 d'après la formule (26).

Le radical du noyau du morphisme $q^* : H^*_{\boldsymbol{T}} \to H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ (associé à l'application constante $\mathbb{Y} \to \mathrm{pt}$) est l'intersection des idéaux de $\mathrm{Min}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}))$, c'est donc l'idéal principal $\langle\alpha_1 \cdots \alpha_s\rangle$. Or, ce noyau *est* radical; en effet, autrement il existerait un élément $\mu \in H^*_{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{Y}}$ tel que $\alpha_i^2 \cdot \mu = 0$ et $\alpha_i \cdot \mu \neq 0$, pour un certain $i = 1, \ldots, s$. Mais alors $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ contiendrait un sous-module isomorphe à $H^*_{\boldsymbol{T}}/\langle\alpha_i^2\rangle$ et la multiplicité de $\langle\alpha_i\rangle$ serait au moins égale à 2.

La forme de l'inverse de classe d'Euler (28) résulte alors d'appliquer l'assertion (b) de la proposition 2.6-1.

b) Les conditions d'application de la proposition 1.2.4-3 étant vérifiées, les idéaux associés minimaux du $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ sont principaux et donc les orbites minimales de $\mathbb{Y}$ sont des cercles; les conclusions de (a) s'appliquent donc au cas présent.

Avant de prouver que P ne possède pas de facteur linéaire, nous allons démontrer que P est étranger aux poids de la liste $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, ce qui par l'hypothèse de non colinéarité des poids, équivaut, d'après (b) de la proposition 2.6-1, à prouver que $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\ (\boldsymbol{Y}, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})\,|_0$ est étrangère aux poids de la liste $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$.

Complétons la liste $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ en une liste $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n\}$ de tous les poids de $\mathcal{A}$.

Nous supposons maintenant la pseudovariété $\mathbb{Y}$ rationnellement lisse et notons $d_{\mathbb{Y}}$ et $d_{\mathbb{S}}$ les dimensions respectives de $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{S}_{\mathcal{A}}$. Le morphisme de Thom-Gysin est donc bijectif et l'on a le diagramme :

(30)

$$
\begin{tikzcd}
 & \xi \in H^*_{\boldsymbol{T}} \arrow[d] & & \\
H^*_{\boldsymbol{T},\mathbb{Y}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\varphi^*"] & H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \equiv \dfrac{H^*_{\boldsymbol{T}}}{\langle \alpha_1 \cdots \alpha_n \rangle} \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[d, "\rho^*"', "\text{restriction}"] & H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}} \backslash \mathbb{Y}) \arrow[r, "{[+1]}"] & {} \\
H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})[-d_{\mathbb{S}} + d_{\mathbb{Y}}] \arrow[u, "\equiv", "\Phi^*_{\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}}}"'] \arrow[r, "\mathrm{m}(\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}}))"] & H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}) & & \\
\mu \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}})\ \mu = \xi\cdot\mu & &
\end{tikzcd}
$$

où ξ est une notation abrégée pour la classe $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\ (\boldsymbol{Y}, \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}})\,|_0$; rappelons que c'est l'unique relèvement homogène de $\tau_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}, \mathbb{S}_{\mathcal{A}})$ à $H^*_{\boldsymbol{T}}$. On remarquera que, puisque $\Phi^*_{\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}}}$ est un isomorphisme, l'élément $\xi \in H^{d_{\mathbb{S}}-d_{\mathbb{Y}}}_{\boldsymbol{T}}$, et donc le polynôme P, est **non nul**.

Montrons que ξ n'est pas un diviseur de zéro dans $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$. On raisonne par l'absurde. Si ξ divise zéro dans $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$, il appartient à la réunion des idéaux de $\mathrm{Ass}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}))$. Mais $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ *est un* $H^*_{\boldsymbol{T}}$*-module de Cohen-Macaulay* (prop. 1.2.4-3), on a donc $\mathrm{Ass}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})) = \mathrm{Min}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}))$ et nous pouvons supposer que $\xi \in \langle \alpha_i \rangle$ pour un certain $i \in 1, \ldots, s$. Dans ce cas,

$$
\begin{aligned}
\varphi^* \circ \Phi^*_{\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}}}(\alpha_1 \cdots \widehat{\alpha}_i \cdots \alpha_n \mathbf{1}_{\mathbb{Y}}) &= \alpha_1 \cdots \widehat{\alpha}_i \cdots \alpha_n \tau_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}, \mathbb{S}_{\mathcal{A}}) \\
&= \alpha_1 \cdots \widehat{\alpha}_i \cdots \alpha_n \xi \mathbf{1}_{\mathbb{S}_{\mathcal{A}}} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Or, $\alpha_1 \cdots \widehat{\alpha}_i \cdots \alpha_n \mathbf{1}_{\mathbb{Y}} \neq 0$, d'après la question (a), et $\Phi^*_{\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}}}(\alpha_1 \cdots \widehat{\alpha}_i \cdots \alpha_n\ \mathbf{1}_{\mathbb{Y}})$ engendre un sous-$H^*_{\boldsymbol{T}}$-module de $\ker(\varphi^*)$ isomorphe à $H^*_{\boldsymbol{T}}/\langle \alpha_i \rangle$. On déduit que le localisé $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}} \backslash \mathbb{Y})_{\langle \alpha_i \rangle}$ est non nul, et comme d'autre part $\boldsymbol{T}$ opère sur $\mathbb{S}_{\mathcal{A}}$ (et donc sur $\mathbb{S}_{\mathcal{A}} \backslash \mathbb{Y}$) *sans points fixes*, $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}} \backslash \mathbb{Y})$ est de $H^*_{\boldsymbol{T}}$-torsion et $\langle \alpha_i \rangle \in \mathrm{Min}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}\,(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}} \backslash \mathbb{Y}))$. En particulier, il existe une $\boldsymbol{T}$-orbite de $\mathbb{S}_{\mathcal{A}} \backslash \mathbb{Y}$ dont le type est $\langle \alpha_i \rangle$, autrement dit, l'ensemble $(\mathbb{S}_{\mathcal{A}} \backslash \mathbb{Y})^{\boldsymbol{T}_i} \neq \varnothing$. Comme par ailleurs $\mathbb{Y}^{\boldsymbol{T}_i} \neq \varnothing$ et que $\mathbb{S}^{\boldsymbol{T}_i}_{\mathcal{A}}$ est réduit à une unique orbite d'après l'hypothèse de non colinéarité des poids, nous avons une contradiction et ξ n'est pas diviseur de zéro dans $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$; autrement dit, ξ est étranger au polynôme $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ et (29) est démontrée.

Le paragraphe précédent a également prouvé l'injectivité de φ^* dans le diagramme (30), et en rappelant que ξ désigne le polynôme $P\alpha_{s+1}\cdots\alpha_n$, on a les inclusions de sous-$H^*_{\boldsymbol{T}}$-modules de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}})$:

$$(\diamond)\qquad \begin{array}{c} \langle P\alpha_{s+1}\cdots\alpha_n\,\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{\mathcal{A}}}\rangle \subseteq \varphi^*\circ\Phi^*_{\mathbb{Y},\mathbb{S}_{\mathcal{A}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})) \subseteq \langle\alpha_{s+1}\cdots\alpha_n\,\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{\mathcal{A}}}\rangle \\ \parallel\!\!| \\ H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})[-d_{\mathbb{S}}+d_{\mathbb{Y}}] \end{array}$$

où l'inclusion de droite se justifie par le fait que $\mathrm{Annul}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\setminus\mathbb{Y}})$ est contenu dans chaque idéal minimal associé à $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\setminus\mathbb{Y})$.

On observe également que comme le polynôme $P\alpha_{s+1}\cdots\alpha_n$ est de degré *minimum* dans l'idéal $\mathrm{Annul}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\setminus\mathbb{Y}}) \equiv H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})[-d_{\mathbb{S}}+d_{\mathbb{Y}}]$, si $P=\gamma Q$ avec $\gamma\in H^2_{\boldsymbol{T}}$, l'élément $Q\alpha_{s+1}\cdots\alpha_n\mathbf{1}_{\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\setminus\mathbb{Y}}$ de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\setminus\mathbb{Y})$, est non nul d'annulateur l'idéal principal $\langle\gamma\rangle$. Cet idéal est alors minimal dans $\mathrm{Ass}_{H^*_{\boldsymbol{T}}}(H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\setminus\mathbb{Y}))$ et alors $(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\setminus\mathbb{Y})^{\boldsymbol{T}(\langle\gamma\rangle)}\neq\varnothing$ et donc $\gamma\in\{\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n\}$, ce qui entraîne que la multiplicité de $\langle\gamma\rangle$ dans le support du $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{S}_{\mathcal{A}}\setminus\mathbb{Y})$ est plus grande que 1. Ceci est impossible d'après l'hypothèse de non colinéarité des poids, et par conséquent *le polynôme P n'admet pas de facteur linéaire.*

Nous abordons maintenant la démonstration de la dernière assertion du théorème.

Lorsque $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,\boldsymbol{Y})$ *est polynomiale, P est un scalaire non nul et, grâce aux inclusions* $(\diamond)$, $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$ *est un $H^*_{\boldsymbol{T}}$-module cyclique.* On en déduit que l'application $q^*: H^*_{\boldsymbol{T}}\to H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y})$, de noyau $\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle$, est *surjective* et par passage au quotient, on a un isomorphisme

$$\frac{H^*_{\boldsymbol{T}}}{\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle}\xrightarrow[\equiv]{\overline{q}^*} H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}). \tag{31}$$

La détermination des groupes de cohomologie non équivariante de $\mathbb{Y}$ se fait maintenant à l'aide de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (suite du second quadrant [M], [Hs]) :

$$I\!\!E_2^{p,q}:=\mathrm{Tor}_{-p}^{H^*_{\boldsymbol{T}}}(\mathbb{Q}\,,H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{Y}))^q \Longrightarrow H^{p+q}(\mathbb{Y})\,, \tag{32}$$

où p désigne le degré de torsion (négatif ou nul) et q l'indice de graduation. La résolution libre :

$$0\longrightarrow H^*_{\boldsymbol{T}}[-2s]\xrightarrow{\mathrm{m}(\alpha_1\cdots\alpha_s)} H^*_{\boldsymbol{T}}\longrightarrow\frac{H^*_{\boldsymbol{T}}}{\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle}\longrightarrow 0,$$

montre que les seuls termes de $\mathbb{E}_2$ *non nuls* sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2^{0,0} &= \operatorname{Tor}_0^{H_T^*}(\mathbb{Q}, H_T^*(\mathbb{Y}))^0 \equiv \mathbb{Q}[0]\,, \\ \mathbb{E}_2^{-1,2s} &= \operatorname{Tor}_1^{H_T^*}(\mathbb{Q}, H_T^*(\mathbb{Y}))^{2s} \equiv \mathbb{Q}\,[-2s+1]\,, \end{aligned}$$

et comme $d_r : \mathbb{E}_r^{p,q} \to \mathbb{E}_r^{p+r,q-r+1}$, la suite spectrale (32) dégénère ($d_r = 0$ pour tout $r \geqslant 2$) et :

$$H^*(\mathbb{Y}) \equiv \mathbb{Q}[0] \oplus \mathbb{Q}\,[-2s+1]\,.$$

La pseudovariété rationnellement lisse $\mathbb{Y}$ a donc la même cohomologie rationnelle globale que la sphère de dimension $(2s-1)$, et ceci termine la démonstration de la proposition. □

3.2. Classes d'Euler équivariantes sur les variétés algébriques complexes.

Notons $\boldsymbol{H} := (\mathbb{C}^*)^r$ et $\boldsymbol{T} := (\mathbb{S}^1)^r \subseteq \boldsymbol{H}$; dans cette section nous allons nous intéresser aux représentations linéaires algébriques de $\boldsymbol{H}$ dans $\mathbb{C}^n$. Ces représentations sont entièrement déterminées par leur restriction à $\boldsymbol{T}$. Pour chaque poids α de $\boldsymbol{T}$, nous notons $\mathbb{C}_\alpha$ l'espace vectoriel complexe muni de la représentation algébrique de $\boldsymbol{H}$ déterminée par α, et, plus généralement, pour toute famille $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de poids de $\boldsymbol{T}$, nous notons maintenant $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ le $\boldsymbol{H}$-espace $\mathbb{C}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{\alpha_n}$. Le résultat suivant (*cf.* [C]), est à remarquer :

Proposition 3.2-1. — *Un fermé de Zariski $\boldsymbol{Y}$ de $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ qui est $\boldsymbol{H}$-stable et de dimension complexe supérieure ou égale à* 1, *possède toujours des courbes (algébriques) $\boldsymbol{H}$-stables.*

Ce fait entraîne bien des simplifications à notre étude, en particulier si $y \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, on déduit de cette proposition que les types d'orbite minimaux de $\mathbb{L}(y, \boldsymbol{Y})$ sont tous principaux.

3.2.1. Représentations linéaires à poids dans un même demi-espace ouvert (*cf.* [Bri] §4.4). Lorsque l'ensemble $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ des poids de la représentation est contenu dans *un même demi-espace ouvert de* $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})^*$, autrement dit, lorsque $\alpha_i(x) > 0$ pour un certain $x \in \mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe des sous-tores $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{C}^* \hookrightarrow \boldsymbol{H}$ tels que les restrictions des α_i à $\mathbb{S}^1$ sont des poids *strictement positifs*; dans ces cas, on a $\lim t{\cdot}z = 0$, lorsque $t \in \mathbb{R}_+^* \subseteq \mathbb{C}^*$ tend vers $-\infty$, et ceci quel que soit $z \in \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$, et l'origine 0 de $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ est alors l'unique point fixe de $\boldsymbol{T}$.

En particulier, pour tout fermé de Zariski $\boldsymbol{Y} \subseteq \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ *qui soit* $\boldsymbol{H}$*-stable, on a* $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}} = \{0\}$. *Le groupe* $\mathbb{R}_+^*$ *opère librement sur* $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})$, *le lien* $\mathbb{L}(0, \boldsymbol{Y})$ *se réalise comme espace topologique quotient :* $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\mathbb{R}_+^*$, *et le quotient* $\mathbb{L}(0, \boldsymbol{Y})/\mathbb{S}^1$ *est alors donné par* $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\mathbb{C}^*$.

Pour toute courbe fermée $\boldsymbol{H}$*-stable* $C \subseteq \boldsymbol{Y}$, *l'origine de* $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ *appartient à* C *et le cône tangent à* C *en* 0 *est une réunion de droites vectorielles* $\boldsymbol{H}$*-stables de* $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ *; le groupe* $\boldsymbol{H}$ *opère linéairement sur chacune de ces droites avec des poids dans* $\mathcal{A}$.

Lorsque les poids de $\mathcal{A}$ *sont, en plus,* ***deux à deux non colinéaires****, les courbes fermées irréductibles* $\boldsymbol{H}$*-stables contenues dans* $\boldsymbol{Y}$ *sont des axes de coordonnées de* $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ *et l'on a une correspondance bijective entre : les axes de coordonnées de* $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ *qui sont contenus dans* $\boldsymbol{Y}$ *; les points fixes du* $\boldsymbol{T}$*-espace* $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\mathbb{C}^*$ *; et les idéaux minimaux du* $H^*_{\boldsymbol{T}}$*-module* $H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathbb{L}(0, \boldsymbol{Y}))$ *(dont les multiplicités sont alors égales à* 1*).*

Ceci étant, Michel Brion m'a signalé l'intérêt remarquable de la construction et proposition qui suivent (à rapprocher de [C] et [P]). Notons $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace de $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ engendré par les droites vectorielles de $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ tangentes à l'origine aux courbes fermées $\boldsymbol{H}$-stables contenues dans $\boldsymbol{Y}$. Pour tout projecteur linéaire $\boldsymbol{H}$-équivariant $\Pi : \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}} \twoheadrightarrow \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$, notons $\pi : \boldsymbol{Y} \to \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ sa restriction à $\boldsymbol{Y}$.

PROPOSITION 3.2.1-1. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une famille de* n *poids de* $\boldsymbol{T}$ *dans un même demi-espace ouvert et soit* $\boldsymbol{Y}$ *un fermé de Zariski* $\boldsymbol{H}$*-stable de* $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$. *Le morphisme* $\pi : \boldsymbol{Y} \to \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ *est fini (et donc propre). De plus :*

a) *Si* $\dim(\boldsymbol{Y}) = \dim(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}) =: d$, *le morphisme* π *est surjectif et donc étale sur un ouvert de Zariski de* $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$. *Le morphisme image inverse* $H^{2d}_c(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^{2d}_c(\boldsymbol{Y}; \mathbb{Z})$ *est alors injectif et vérifie* $\int_{\boldsymbol{Y}} \pi^*(\mu) = \deg(\pi) \int_{\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}} \mu$, *où* $\deg(\pi)$ *désigne le cardinal de la fibre générique de* π. *Cette dernière formule est également vraie en cohomologie équivariante et, en particulier :*

$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}) = \deg(\pi)\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \boldsymbol{Y}). \tag{33}$$

b) *Lorsque* $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \boldsymbol{Y}) = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$, *on a* $\dim(\boldsymbol{Y}) = \dim(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$, $\deg(\pi) = 1$, *et* π *est un isomorphisme.*

Démonstration (d'après Michel Brion). — L'hypothèse qui affirme que $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est contenu dans un demi-espace ouvert de $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{T})^*$ nous permet de fixer un plongement de groupes $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \boldsymbol{T}$ tel que l'action induite de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ est de la forme $t{\cdot}(z_1, \ldots, z_n) = (t^{m_1} z_1, \ldots, t^{m_n} z_n)$, avec $m_1, \ldots, m_n$ des entiers *strictement négatifs* (m_i est la restriction de α_i à $\mathrm{Lie}(\mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{R}$). Notons $\mathbb{C}[\boldsymbol{Y}]$, $\mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}]$ et $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}]$ les $\mathbb{C}$-algèbres des fonctions régulières sur $\boldsymbol{Y}$, $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ et $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ respectivement; quitte à rénuméroter les variables, nous pouvons même poser $\mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s]$ et $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s, \ldots, X_n]$, où $s := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$ et où X_i désigne la i-ème fonction coordonnée sur $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}]$). Soient $\pi^\sharp : \mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}] \to \mathbb{C}[\boldsymbol{Y}]$, $\Pi^\sharp : \mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}] \to \mathbb{C}[\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}]$ et $\imath^\sharp : \mathbb{C}[\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}] \to \mathbb{C}[\boldsymbol{Y}]$ les morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres induits respectivement par π, Π et l'injection canonique $\imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$, on a $\pi^\sharp = \imath^\sharp \circ \Pi^\sharp$. Comme l'action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}$ laisse stables $\boldsymbol{Y}$ et $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$, les algèbres $\mathbb{C}[\boldsymbol{Y}]$, $\mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}]$ et $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}]$ se trouvent naturellement munies d'une action de $\mathbb{S}^1$; les applications $\pi^\sharp$, $\Pi^\sharp$ et $\imath^\sharp$ sont alors $\mathbb{S}^1$-équivariantes. On munit $\mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}]$ et $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}]$ des structures d'algèbres graduées sur $\mathbb{N}$ qui résultent de poser $\deg(X_i) := -m_i$, de sorte que, dans les deux cas, les fonctions homogènes de degré 0 sont les constantes, et une fonction non nulle f «*est homogène de degré m*», si et seulement si, «$t{\cdot}f = t^m f$ *pour tout* $t \in \mathbb{S}^1$» puisque chaque X_i est semi-invariant de poids $-m_i$ pour l'action de $\mathbb{S}^1$. En particulier, $\Pi^\sharp$ est maintenant un morphisme *gradué*. L'idéal de définition $\mathcal{I}(\boldsymbol{Y}) \subseteq \mathbb{C}[\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}]$ de $\boldsymbol{Y}$ est alors homogène et l'on munit $\mathbb{C}[\boldsymbol{Y}] \equiv \mathbb{C}[\mathbb{C}^n_{\mathcal{A}}]/\mathcal{I}(\boldsymbol{Y})$ de la structure induite d'algèbre graduée sur $\mathbb{N}$. Les morphismes $\Pi^\sharp$ et $\imath^\sharp$ (et donc $\pi^\sharp$) sont donc gradués et l'algèbre $\mathbb{C}[\boldsymbol{Y}]$ est un $\mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}]$-module gradué sur $\mathbb{N}$.

Ceci étant, la version graduée du lemme de Nakayama [(11)] affirme que le $\mathbb{C}[\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}]$-module $\mathbb{C}[\boldsymbol{Y}]$ est *de type fini*, si et seulement si, le quotient $\boldsymbol{M} := \mathbb{C}[\boldsymbol{Y}]/\langle \pi^\sharp(X_1), \ldots, \pi^\sharp(X_s)\rangle$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Or, $\boldsymbol{M}$ s'identifie à l'algèbre des fonctions régulières sur la fibre *schématique* de π au-dessus de $0 \in \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$. Cette fibre est un sous-schéma fermé de $\boldsymbol{Y} \cap \ker(\Pi)$ qui est $\boldsymbol{H}$-stable, et si elle était infinie, elle contiendrait, d'après la proposition 3.2-1, une courbe fermée $\boldsymbol{H}$-stable de cône tangent à l'origine contenu dans $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}} \cap \ker(\Pi)$; mais Π restreinte à $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ est l'identité et l'on aboutit à un absurde. La fibre de π au-dessus de 0 est donc finie, $\boldsymbol{M}$ est

---

[(11)] Ce lemme, de démonstration élémentaire, établit que si $\boldsymbol{A}$ est une algèbre graduée sur $\mathbb{N}$ et si $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}$-module gradué sur $\mathbb{N}$, il y a équivalence entre «$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}$» et «$\boldsymbol{M} = 0$». On en déduit le critère de finitude suivant : «*Le $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ est de type fini, si et seulement si, $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}^0$-module de type fini*».

un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et le morphisme $\pi : \boldsymbol{Y} \to \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ est fini (donc propre).

Lorsque $d := \dim(\boldsymbol{Y}) = \dim(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$, la propreté de π entraîne aussitôt sa surjectivité. Le morphisme π est donc étale sur un ouvert de Zariski $W \subseteq \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$. Comme d'autre part, on a $H_c^{2d}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}};\mathbb{Z}) \equiv H_c^{2d}(W;\mathbb{Z})$ pour des raisons de codimension du complémentaire de W dans $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ (et *mutatis mutandis* pour $\boldsymbol{Y}$), l'assertion (a) découlera de sa vérification sur W. Mais π est étale sur W, et $\pi^* : H_c^{2d}(W,\mathbb{Z}) \to H_c^{2d}(\pi^{-1}(W),\mathbb{Z})$ est alors injective, et la formule d'intégration en résulte immédiatement. Enfin, le passage de la cohomologie non équivariante à la cohomologie équivariante relève de la remarque 1.4-3 et la formule (33) résulte de l'égalité (23).

Lorsque $\dim(\boldsymbol{Y}) = \dim(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$ et $\deg(\pi) = 1$, le morphisme fini π est birationnel et surjectif, c'est donc un isomorphisme d'après un corollaire du "Main theorem" de Zariski ([EGA], §4.4.9). □

Le théorème 3.1-1, sous une forme renforcée, s'énonce maintenant :

THÉORÈME 3.2.1-2. — *Soit $\boldsymbol{T} := (\mathbb{S}^1)^r \subseteq (\mathbb{C}^*)^r =: \boldsymbol{H}$. On considère une représentation linéaire algébrique de $\boldsymbol{H}$ dans $\mathbb{C}^n$ à poids dans un même demi-espace ouvert, de multiplicité 1 et deux à deux non colinéaires. Soit $\boldsymbol{Y}$ un fermé de Zariski dans $\mathbb{C}^n$, équidimensionnel et $\boldsymbol{H}$-stable. Notons $d_{\boldsymbol{Y}} := \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Y})$, $d_{\mathbb{E}} := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_{\mathbb{E}}}\}$ la liste des poids de $\boldsymbol{T}$ dans $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$.*

a) *Alors, l'énoncé (a) du théorème 3.1-1 s'applique et donc :*

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,\boldsymbol{Y})} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}}\,\frac{P}{\alpha_1\cdots\alpha_{d_{\mathbb{E}}}}\,, \quad \text{avec } P \in H_{\boldsymbol{T}}^{2(d_{\mathbb{E}}-d_{\boldsymbol{Y}})}\,. \tag{34}$$

De plus : $P = 1$, si et seulement si, 0 est un point lisse dans $\boldsymbol{Y}$.

b) *Supposons qu'il existe un plongement $\jmath : \mathbb{C}^* \hookrightarrow \boldsymbol{H}$ tel que les poids α_i restreints à $\mathbb{C}^*$ soient strictement positifs et tel que le quotient $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)$ soit rationnellement lisse et sans cohomologie rationnelle en degrés impairs.*

Alors, l'énoncé (b) du théorème 3.1-1 s'applique et donc :

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0,\boldsymbol{Y})} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}}\,\frac{P}{\alpha_1\cdots\alpha_{d_{\mathbb{E}}}}\,, \quad \text{avec } P \in H_{\boldsymbol{T}}^{2(d_{\mathbb{E}}-d_{\boldsymbol{Y}})}\backslash\{0\} \text{ sans facteur linéaire,} \tag{35}$$

De plus : P est scalaire, si et seulement si, 0 est un point rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$.

Démonstration. — Pour (a), la seule condition à vérifier pour appliquer 3.1-1 (a) est que les orbites minimales du lien $\mathbb{L}(0, \boldsymbol{Y})$ sont des cercles mais ceci est conséquence immédiate de 3.2-1. Nous donnons maintenant un argument communiqué par Brion qui remarque que, à partir du moment où l'on sait que $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(0, \boldsymbol{Y})$ est polynomiale, la formule (34) assure que $\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Y}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$ et donc les conditions d'application de l'assertion (a) de la proposition 3.2.1-1 sont satisfaites. La formule (33) montre alors que $\deg(\pi) = P$, et lorsque $P = 1$, l'assertion (b) de la même proposition permet de conclure.

Réciproquement, lorsque y est lisse dans $\boldsymbol{Y}$, l'espace $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ s'identifie à l'espace tangent $T_y(\boldsymbol{Y})$; le morphisme π de la proposition 3.2.1-1 est alors bijectif et $P = 1$.

Dans (b), pour pouvoir appliquer 3.1-1 (b) nous devons justifier que $\mathbb{Y}$ est rationnellement lisse. Or, $\mathbb{C}^*$ opère de manière presque libre et $\mathbb{Y}/\mathbb{S}^1 \equiv (\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)$ est rationnellement lisse. À partir de là, la condition de $\mathbb{C}^*$-trivialité locale, assurée en géométrie algébrique par l'existence de “slices” étales (*cf.* [L]), montre aisément que chaque point de $\mathbb{Y}$ est rationnellement lisse. La formule (35) de même que l'assertion (b) sont donc vérifiées. □

Remarque. — M. Brion propose également une démonstration de l'assertion (b) suivant la même idée d'application de la proposition 3.2.1-1, la voici. Comme nous l'avons déjà dit, l'hypothèse “*P est un scalaire non nul*” implique l'égalité $d_{\boldsymbol{Y}} = d_{\mathbb{E}}$. Le morphisme induit

$$\overline{\pi} : (\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*) \to (\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)$$

est *fini et surjectif* et l'injectivité de

$$H^{2d_{\boldsymbol{Y}}-2}((\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)) \xrightarrow{\overline{\pi}^*} H^{2d_{\mathbb{E}}-2}((\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)),$$

résulte du même argument de la preuve de (a) de 3.2.1-1. Il est alors facile de voir, grâce au fait que $(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)$ est un espace projectif complexe (tordu), et qu'il vérifie donc la dualité de Poincaré, que le morphisme $\overline{\pi}^*$ ci-dessus est en fait *injectif en tout degré cohomologique* et comme la dimension de $H^*(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}/\jmath(\mathbb{C}^*))$ vaut $d_{\mathbb{E}}$, l'égalité $\dim_{\mathbb{Q}}(H^*((\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*))) = d_{\mathbb{E}}$ (‡) équivaut à la bijectivité de $\overline{\pi}^*$. Or, le $\boldsymbol{T}$-espace $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)$ contient exactement $d_{\mathbb{E}}$ points fixes et sa cohomologie est concentrée en degrés pairs, de sorte que, (‡) est vérifiée et $\overline{\pi}^*$ *est bijective.* On conclut alors que le morphisme induit par π entre les cohomologies $\boldsymbol{T}$-équivariantes des liens de l'origine de $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ et $\boldsymbol{Y}$ respectivement, est un isomorphisme (qui n'est autre que (31)). L'argument des suites spectrale d'Eilenberg-Moore termine alors la démonstration.

4. Application aux variétés de Schubert.

Nous reprenons maintenant les conventions et notations de l'introduction et rappelons que sur la variété de drapeaux $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$, la décomposition cellulaire en $\boldsymbol{B}$-orbites possède une unique cellule de dimension maximale que nous notons $\boldsymbol{X}(s)$; c'est un ouvert pour la topologie de Zariski de $\boldsymbol{X}$. D'autre part, nous avons choisi un sous-groupe de Cartan $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H} \equiv (\mathbb{C}^*)^r$, de sous-groupe compact maximal le tore $\boldsymbol{T} \equiv (\mathbb{S}^1)^r$. Les poids de l'action adjointe de $\boldsymbol{H}$ sur $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{G})$ (resp. $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{B})$) constituent le système de racines Δ (resp. Δ_+) ; on a $\Delta = \Delta_- \coprod \Delta_+$, où $\Delta_- = -\Delta_+$. Le groupe de Weyl $\boldsymbol{W} := N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{H})/\boldsymbol{H}$ opère naturellement sur Δ, et pour tout $v \in \boldsymbol{W}$, l'ensemble $vs\boldsymbol{X}(s)$ est un ouvert de Zariski $\boldsymbol{H}$-stable de $\boldsymbol{X}$ qui contient v et qui est isomorphe au $\boldsymbol{H}$-espace $\mathbb{C}_{v\Delta_-}^{\dim(\boldsymbol{X})}$ dont les poids sont ***deux à deux non colinéaires et dans un même demi-espace ouvert*** puisqu'il en est ainsi de Δ_+. *Les considérations de la section 3.2.1, notamment le théorème 3.2.1-2, vont donc s'appliquer à l'étude locale des points fixes d'une variété de Schubert.*

D'autre part, à l'aide de la forme de Killing sur $\mathfrak{h}$, on fait correspondre à chaque racine $\gamma \in \Delta$ une réflexion $r_\gamma \in \boldsymbol{W}$; cette correspondance établit une bijection de l'ensemble Δ_+ (et donc aussi de $v\Delta_-$) sur l'ensemble des réflexions de $\boldsymbol{W}$. Lorsque $\gamma \in v\Delta_-$ est le poids de l'espace tangent en u d'une courbe $\boldsymbol{H}$-stable $C \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}(w) \cap vs\boldsymbol{X}(s)$, l'ensemble des points fixes de l'adhérence de Zariski de C dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$ (isomorphe à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_\gamma \oplus \mathbb{C}_0)$) est $\{r_\gamma v, v\} \subseteq \boldsymbol{W}$ et l'on a $r_\gamma v \preceq v$ (*cf.* [C]). On obtient de cette manière une correspondance *bijective* entre l'ensemble des facteurs linéaires du dénominateur de (34) et l'ensemble $\boldsymbol{S}(v, w)$ des réflexions $\sigma \in \boldsymbol{W}$ vérifiant $\sigma{\cdot}v \preceq w$. L'ensemble des poids du $\boldsymbol{H}$-espace $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ du théorème 3.2.1-2 est alors *déterminé* par $\boldsymbol{S}(v, w)$: *c'est l'ensemble* $\mathfrak{s}(v, w)$ *des racines* $\gamma \in v\Delta_-$ *telles que* $r_\gamma \in \boldsymbol{S}(v, w)$.

L'énoncé suivant rassemble les conclusions de ces remarques.

PROPOSITION 4-1. — *Soient $v \preceq w$ deux éléments du groupe de Weyl $\boldsymbol{W}$.*

a) *Les orbites minimales de $\mathbb{L}(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w))$ sont des cercles. Les composantes irréductibles du support du $H_{\boldsymbol{T}}^*$-module $H_{\boldsymbol{T}}^*(\mathbb{L}(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)))$ sont de* *multiplicité* 1 *et sont en correspondance biunivoque avec les éléments de l'ensemble* $\boldsymbol{S}(v,w)$ *des réflexions* $\sigma \in \boldsymbol{W}$ *vérifiant la relation :* $\sigma{\cdot}v \preceq w$. *En particulier, si* v *est rationnellement lisse dans* $\overline{\mathbf{X}}(w)$, *on a*

$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,\big(v,\overline{\mathbf{X}}(w)\big) = \lambda \prod \mathfrak{s}(v,w),$$

où $\prod \mathfrak{s}(v,w)$ *désigne le produit des éléments de* $\mathfrak{s}(v,w)$ *et* $\lambda \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

b) *En général, on a :*

$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,\big(v,\overline{\mathbf{X}}(w)\big) = \frac{\prod \mathfrak{s}(v,w)}{\text{polynôme}}\,.$$

(Réécriture de la formule (34) du théorème 3.2.1-2.)

Remarque 4-2. — L'assertion (b) implique immédiatement la proposition qui suit ; connue encore sous le nom de «conjecture de Deodhar», elle a été prouvée par des méthodes différentes par plusieurs auteurs (*cf.* [C], [Dy], [Ku1], [P]).

Proposition 4-3. — *Soient* $v \preceq w$ *deux éléments de* $\boldsymbol{W}$. *Le cardinal de l'ensemble des réflexions* $\sigma \in \boldsymbol{W}$ *vérifiant la relation* $\sigma{\cdot}v \preceq w$ *est minoré par le nombre* $\ell(w)$.

4.1. Critère de lissité rationnelle sur les variétés de Schubert.

Théorème 4.1-1. — *Soient* $v \preceq w$ *deux éléments du groupe de Weyl. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le point* v *est rationnellement lisse dans* $\overline{\mathbf{X}}(w)$.

b) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,\big(y,\overline{\mathbf{X}}(w)\big) \in H^*_{\boldsymbol{T}}$, *pour tout* $y \in \boldsymbol{W}$ *vérifiant* $v \preceq y \prec w$.

Démonstration. — Comme l'ensemble des points rationnellement lisses de $\overline{\mathbf{X}}(w)$ est un ouvert $\boldsymbol{B}$-stable, son complémentaire est une réunion de variétés de Schubert, il s'ensuit que l'hypothèse «v *rationnellement lisse dans* $\overline{\mathbf{X}}(w)$» entraîne «y *rationnellement lisse dans* $\overline{\mathbf{X}}(w)$ *pour tout* $v \preceq y \preceq w$», d'où l'implication (a)⇒(b).

Pour l'implication (b)⇒(a) nous procédons comme dans l'appendice de [KL1], par récurrence sur la «colongueur» $\ell := \ell(w) - \ell(v)$. Lorsque $\ell = 0$, on a $v = w \in \mathbf{X}(w)$ et l'ensemble des conditions pour vérifier (b) est vide. D'autre part, w appartient à la plus grosse cellule de $\overline{\mathbf{X}}(w)$ et est donc rationnellement lisse.

Supposons $\ell > 0$ et le théorème démontré pour des colongueurs strictement inférieures. Notons s l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl $\boldsymbol{W}$, et considérons, comme dans l'appendice de [KL1], le voisinage ouvert $U_{(v,w)} := \overline{\boldsymbol{X}}(w) \cap vs\boldsymbol{X}(s)$ de v dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$; il est stable sous l'action de $\boldsymbol{H}$ et est canoniquement isomorphe au produit cartésien de $\boldsymbol{H}$-espaces $\boldsymbol{X}(v) \times (s\boldsymbol{X}(sv) \cap \overline{\boldsymbol{X}}(w))$. Notons $\boldsymbol{V}_{(v,w)} := s\boldsymbol{X}(sv) \cap \overline{\boldsymbol{X}}(w)$, on a :

$$U_{(v,w)} \equiv \boldsymbol{X}(v) \times \boldsymbol{V}_{(v,w)}, \tag{36}$$

et $v \in \overline{\boldsymbol{X}}(w)$ est rationnellement lisse, si et seulement si, v est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{V}_{(v,w)}$.

Soit $\jmath : \mathbb{C}^* \hookrightarrow \boldsymbol{H}$ un plongement de groupes tel que l'action induite de $\mathbb{C}^*$ sur $s\boldsymbol{X}(sv)$ est à poids *strictement* positifs. L'hypothèse inductive assure que les points y vérifiant $v \prec y \preceq w$ sont rationnellement lisses dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$. On en déduit que $\boldsymbol{V}_{(v,w)} \backslash v$ est une variété rationnellement lisse, et l'on démontre (*loc. cit.*) que le quotient $\hat{\boldsymbol{V}}_{(v,w)} := (\boldsymbol{V}_{(v,w)} \backslash v)/\jmath(\mathbb{C}^*)$ est une variété rationnellement lisse, compacte, irréductible de dimension complexe $(\ell(w) - \ell(v) - 1)$, et telle que $H^{2i+1}(\hat{\boldsymbol{V}}_{(v,w)}; \mathbb{Q}) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.(12)

Comme nous avons l'inclusion de $\boldsymbol{T}$-espaces $\boldsymbol{V}_{(v,w)} \subseteq s\boldsymbol{X}(sv) \simeq \mathbb{C}^{\ell(s)-\ell(v)}$ et que les poids de $\boldsymbol{T}$ dans $s\boldsymbol{X}(sv)$ appartiennent à un même demi-espace ouvert et sont deux à deux non colinéaires, les hypothèses du théorème 3.2.1-2 sont satisfaites pour $\boldsymbol{V}_{(v,w)}$ et «*v est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{V}_{(v,w)}$*», si et seulement si, «$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(v, \boldsymbol{V}_{(v,w)}) \in H^*_{\boldsymbol{T}}$.» Or, par la multiplicativité des classes d'Euler (2.6.1-1), on a :

$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,\big(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\big) = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(v, \boldsymbol{X}(v)) \cdot \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(v, \boldsymbol{V}_{(v,w)})$$

où $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(v, \boldsymbol{X}(v))$ est le produit des poids de $\boldsymbol{T}$ dans la cellule de Schubert $\boldsymbol{X}(v)$ (v étant rationnellement lisse dans $\boldsymbol{X}(v)$). Mais, l'assertion (b) du théorème 3.2.1-2 affirme que le dénominateur de $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(v, \boldsymbol{V}_{(v,w)})$ *n'a pas de facteur linéaire*, et par conséquent $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,\big(v, \overline{\boldsymbol{X}}(w)\big)$ est polynomiale, si et seulement si, $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\,(v, \boldsymbol{V}_{(v,w)})$ l'est, ce qui termine la démonstration. □

Voici, pour conclure, les critères précédemment connus et leur démonstration à l'aide des résultat de cet article :

---

(12) Ces assertions sont énoncées dans [KL1] dans le contexte de la topologie étale pour les variétés algébriques sur des corps finis et la cohomologie ℓ-adique. Les conjectures de Weil y jouent un rôle fondamental. Le passage de la caractéristique finie à la caractéristique nulle résulte d'arguments de réduction standard.

THÉORÈME 4.1-2. — *Soient $v \preceq w$ deux éléments du groupe de Weyl. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le point v est rationnellement lisse dans $\overline{\mathbf{X}}(w)$.*

b) $\mathrm{Card}(\boldsymbol{S}(y,w)) = \ell(w)$, *pour tout $y \in \boldsymbol{W}$ vérifiant $v \preceq y \prec w$.* ([C])

c) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \overline{\mathbf{X}}(w)\right) = \star \prod \mathfrak{s}(y,w)$, *pour tout $y \in \boldsymbol{W}$ vérifiant $v \preceq y \prec w$, où $\star$ désigne un scalaire non nul.* ([Ku2])

De même que les assertions :

d) *Le point v est lisse dans $\overline{\mathbf{X}}(w)$.*

e) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(v, \overline{\mathbf{X}}(w)\right) = (-1)^{\mathrm{Card}(S(v,w))} \prod \mathfrak{s}(v,w)$.

([Ku2], *voir aussi* [Bri] §6.5*)*

Démonstration. Lorsque (a) est vérifiée, elle l'est également pour tout y vérifiant $v \preceq y \prec w$. Lorsque y est rationnellement lisse, 4-1 (a) donne l'égalité $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\left(y, \overline{\mathbf{X}}(w)\right) = \lambda \prod \mathfrak{s}(y,w)$ qui est équivalente, d'après 4-1 (b), au fait que $\mathrm{Card}(\boldsymbol{S}(y,w)) = \ell(w)$. On a donc (a)⇒(c)⇔(b) et comme (c) implique trivialement l'assertion (b) de 4.1-1, la première partie du théorème est prouvée. L'équivalence (d)⇔(e) est une réécriture de 3.2.1-2 (a).

BIBLIOGRAPHIE

[A1] A. ARABIA, Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$, Inventiones Mathematicae, 85 (1986), 39–52.

[A2] A. ARABIA, Cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kač-Moody, Bull. Soc. Math. France, 117 (1989), 129–165.

[AB] M.F. ATIYAH, R. BOTT, The moment map and equivariant cohomology, Topology, 23, n° 1 (1984), 1–28.

[AP] C. ALLDAY, V. PUPPE, Cohomological Methods in Transformation Groups, Cambridge studies in advanced mathematics 32, Cambridge University Press (1993).

[Bo] A. BOREL et al, Intersection Cohomology, Progress in Mathematics 50, Birkhäuser (1984).

[Bri] M. BRION, Equivariant Chow groups for torus actions, Birkhäuser, Transformation groups, Vol 2, n° 3 (1997), 1–43.

[Bry] J.-L. BRYLINSKI, Equivariant intersection cohomology, Collection : Kazhdan-Lusztig theory and related topics (Chicago, IL, 1989), 5–32. Series : Contemp. Math., 139, American Mathematical Society, (1992).

[C] J.B. CARRELL, The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar, and rational smoothness of Schubert varieties, Algebraic groups and their generalizations : classical methods. University Park, PA, (1991), 53–61, Proc. Sympos. Pure Math., 56 (1994), Part 1.

[Dem] M. DEMAZURE, Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) 7 (1974), 53–88.

[Deo] V. DEODHAR, Local Poincaré duality and non-singularity of Schubert varieties, Communications in Algebra, 13 (1986), 1379–1388.

[Dy] M.J. DYER, The nil-Hecke ring and Deodhar's conjecture on Bruhat intervals, Inventiones Mathematicae, 111 (1993), 571–574.

[EGA] A. GROTHENDIECK, Eléments de géométrie algébrique III. Etude cohomologique des faisceaux cohérents (première partie), Publications Mathématiques de l'I.H.E.S, n° 11 (1961).

[GM] M. GORESKY, R. MACPHERSON, Intersection homology II, Inventiones Mathematicae, 71 (1983), 77–129.

[Ha] H.C. HANSEN, On cycles in flag manifolds, Math. Scand., 33 (1970), 269–274.

[Hs] W.Y. HSIANG, Cohomology Theory of Topological Transformation Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebeite. Band, 85, Springer-Verlag (1970).

[KaL1] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG, Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras, Inventiones Mathematicae, 53 (1979), 165–184.

[KaL2] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG, Schubert varieties and Poincaré duality, Proc. Sympos. Pure Math., A.M.S., 36 (1980), 185–203.

[KuKo] B. KOSTANT, S. KUMAR, The nil-Hecke ring and cohomology of G/P for a Kač-Moody group G, Advances in Math., 62 (1986), 187–237.

[Ku0] S. KUMAR, A connexion of equivariant K-theory with the singularity of Schubert varieties, prépublication (1986–87).

[Ku1] S. KUMAR, The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties, in "Lie Theory and geometry (in honor of Bertram Kostant)", Progress in Math., 123, Birkhäuser, 497–507 (1994).

[Ku2] S. KUMAR, The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties, Inventiones Mathematicae, 123, n° 3 (1996), 471–506.

[M] J. MCCLEARY User's guide to spectral sequences, Publish or Perish, Mathematical lecture series 12 (1985).

[L] D. LUNA, Slices étales, Bulletin Soc. Math. France, Mémoire 33 (1973), 81–105.

[Ma] H. MATSUMURA, Commutative algebra, Benjamin, New York, 1970.

[Mi] J. MILNOR, Construction of universal bundles. I, II, Ann. of Math., (2) 63 (1956), 272–284, 430–436.

[P] P. POLO, On Zariski tangent spaces of Schubert varieties, and a proof of a conjecture of Deodhar, Indagationes Mathematicae, New-Series 5, n° 4 (1994), 483–493.

[Q] D. QUILLEN, The spectrum of an equivariant cohomology ring I, II, Ann. of Math., (2) 94 (1971), 549–572, 573–602.

[R] W. ROSSMANN, Equivariant multiplicities on complex varieties, in "Orbites unipotentes et representations, III", Astérisque, n° 173-174 (1989), 313–330.

Manuscrit reçu le 14 septembre 1997,
révisé le 8 décembre 1997,
accepté le 13 janvier 1998.

Alberto ARABIA,
Université Paris VII
UFR de Mathématiques
Tour 45-55, 5e étage
2, place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05 (France).