ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ÉTIENNE GHYS
JULIO C. REBELO

Singularités des flots holomorphes. II

Annales de l'institut Fourier, tome 47, nº 4 (1997), p. 1117-1174
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_4_1117_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 4 (1997), 1117–1174

SINGULARITÉS DES FLOTS HOLOMORPHES. II

par E. GHYS et J.-C. REBELO

1. INTRODUCTION

Cet article est la suite de [Reb] dans lequel le deuxième auteur démontre, en particulier, qu'un champ de vecteurs holomorphe complet sur une surface complexe ne peut posséder une singularité isolée dont le deuxième jet est nul. Nous nous proposons ici d'étudier de plus près les champs de vecteurs complets qui possèdent une singularité isolée dont le *premier* jet est nul.

Rappelons que [Reb] introduit la notion de champ de vecteurs holomorphe *semi-complet* qui généralise celle de champ complet et qui a l'avantage d'être locale : la restriction d'un champ semi-complet à un ouvert est un champ semi-complet.

THÉORÈME A. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphe semi-complet défini sur une surface complexe M. Soit p une singularité isolée de X où le premier jet de X s'annule. Alors il existe un voisinage $U \subseteq M$ de p dans lequel le champ X est holomorphiquement conjugué à l'un des champs ci-dessous :*

1. $f[x^2\partial/\partial x \; - \; y(nx-(n+1)y)\partial/\partial y]$ *où n est un entier positif ou nul.*

2. $f[x(x-2y)\partial/\partial x \; + \; y(y-2x)\partial/\partial y]$

3. $f[x(x-3y)\partial/\partial x \; + \; y(y-3x)\partial/\partial y]$

4. $f[x(2x-5y)\partial/\partial x \; + \; y(y-4x)\partial/\partial y]$

où f est une fonction holomorphe définie dans U et non nulle à l'origine.

Mots clés : Singularités – Flot– Champ de vecteurs.
Classification math. : 34A20.

En fait, nous obtiendrons un résultat plus précis décrivant les singularités isolées dont le premier jet est nilpotent (voir (3.16)).

En combinant le théorème A et la classification des surfaces complexes d'Enriques-Kodaira, nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME B. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphe sur une surface complexe compacte M. Si X possède une singularité isolée où le premier jet de X s'annule, alors M est la surface F_n de Hirzebruch, $n \geqslant 0$ (en particulier $F_0 = \overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}}$). De plus, à automorphisme de F_n près, le champ X est unique et donné en coordonnées locales autour de la singularité par*

$$x^2 \partial/\partial x \; - \; y(nx - (n+1)y)\partial/\partial y.$$

Les démonstrations des théorèmes A, B seront données dans les paragraphes 2, 3 et 4. Au cours de ces démonstrations nous trouverons naturellement quelques résultats "secondaires" intéressants. Par exemple, nous obtiendrons le résultat suivant, valable sans supposer que la singularité est isolée :

THÉORÈME C. — *Soit X le germe d'un champ de vecteurs semi-complet (non identiquement nul) au voisinage d'un point d'une surface complexe et possédant une singularité (non nécessairement isolée) en ce point. Soit X^k la première composante homogène non nulle (de degré k) du développement de X en série entière dans une carte locale au voisinage du point singulier. Supposons $k \geqslant 2$. Alors, à changement de variables linéaire près, X^k est de l'une des formes suivantes :*

1. *$X^k = y^a f(x,y)\partial/\partial x$ où a est un entier positif ou nul et f est un polynôme homogène de degré inférieur ou égal à 2.*

2. *$X^k = x[x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y]$ avec n entier.*

3. *$X^k = x^2\partial/\partial x - y(nx - (n+1)y)\partial/\partial y$ où n est un entier positif ou nul.*

4. *$X^k = x^i y^j(my\partial/\partial x - nx\partial/\partial y)$ où m, n sont des entiers strictement positifs. De plus, ou bien $ni - mj = 0$ (dans ce cas $x^i y^j$ est une intégrale première du champ) ou bien $ni - mj = \pm 1$.*

5. *$X^k = [xy(x-y)]^a[x(x-2y)\partial/\partial x + y(y-2x)\partial/\partial y]$ où a est un entier positif ou nul.*

6. $X^k = [xy(x-y)^2]^a[x(x-3y)\partial/\partial x + y(y-3x)\partial/\partial y]$ *où* a *est un entier positif ou nul.*

7. $X^k = [xy^2(x-y)^3]^a[x(2x-5y)\partial/\partial x + y(y-4x)\partial/\partial y]$ *où* a *est un entier positif ou nul.*

Dans une prépublication récente [Ce Sc], D. Cerveau et B. Scardua ont étudié les flots holomorphes sur $\mathbf{C}^2$ d'un point de vue global. Nous voulons les remercier pour nous avoir communiqué une version préliminaire de leur article, ainsi que pour l'intérêt apporté à notre travail.

2. LE PREMIER JET D'UN CHAMP SEMI-COMPLET

Nous suivons les notations de [Reb] mais, pour la commodité du lecteur, nous rappelons d'abord la définition des champs semi-complets. Soit X un champ de vecteurs holomorphe sur une variété complexe M et U un ouvert de M. On dit que X est *semi-complet* dans U s'il définit un *flot semi-global* dans U, c'est-à-dire une application holomorphe Φ d'un ouvert Ω de $\mathbf{C} \times U$ dans U ayant les propriétés suivantes :

• $\frac{d}{dT}\Phi(T,x)_{|T=0} = X(x)$ pour tout x de U.

• $\Phi(T_1+T_2,x) = \Phi(T_2,\Phi(T_1,x))$ dès que chaque membre est défini.

• Soit x un point de U et T_i une suite telle que (T_i,x) soit dans Ω et converge vers le bord de Ω. Alors, $\Phi(T_i,x)$ quitte tout compact contenu dans U.

La restriction d'un champ complet à un ouvert est un champ semi-complet. Chaque feuille régulière du feuilletage de U défini par le champ X est munie d'une forme différentielle holomorphe notée dT, que nous appelons la *forme temps*, et qui est définie par $dT(X) = 1$. Lorsque le champ X est semi-complet, la forme temps a la propriété suivante. Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin plongé injectivement dans une feuille du feuilletage défini par X. Alors l'intégrale de dT sur γ est non nulle. C'est ce critère qui permet de montrer qu'un champ semi-complet dans un ouvert de $\mathbf{C}^2$ qui possède une singularité isolée à l'origine a un second jet non trivial à l'origine.

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème C.

2.1. Quelques exemples de champs semi-complets.

Nous montrons que les champs définis dans le théorème C sont semi-complets dans $\mathbf{C}^2$ tout entier.

Commençons par observer que si l'on multiplie un champ complet (resp. semi-complet) par une intégrale première (*i.e.* une fonction holomorphe constante sur les orbites), le champ obtenu est encore complet (resp. semi-complet).

1. Un champ de vecteurs sur la droite $\mathbf{C}$ de la forme $f(x)\partial/\partial x$ est semi-complet si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à deux. En effet, un tel champ se prolonge en un champ holomorphe sur la droite projective. Il en résulte qu'un champ de $\mathbf{C}^2$ de la forme $y^a f(x,y)\partial/\partial x$ est semi-complet si a est un entier positif ou nul et f est un polynôme homogène de degré inférieur ou égal à 2.

2. Le cas du champ $x[x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y]$ est facile. On remarque que $x^n y^{-1}$ est constant sur les orbites. Les équations différentielles sont :

$$\frac{dx}{dT} = x^2 \qquad\qquad \frac{dy}{dT} = nxy$$

dont la solution est :

$$x(T) = x(0)/(1 - Tx(0)) \qquad y(T) = y(0)/(1 - Tx(0))^n.$$

Ces formules explicites définissent un flot semi-global dans $\mathbf{C}^2$ comme on s'en convainc aisément.

3. Étudions le cas du champ :

$$X_{n+1,1,-1} = x^2\partial/\partial x - y(nx - (n+1)y)\partial/\partial y.$$

On vérifie d'abord facilement que la fonction (méromorphe) $x^{n+1}y(x-y)^{-1}$ est constante sur les orbites de $X_{n+1,1,-1}$. (La notation choisie pour les champs de vecteurs suggère l'intégrale première et nous verrons plus loin pourquoi $x^{n+1}y(x-y)^{-1}$ est la “bonne” fonction qui conduit à un champ semi-complet). Les courbes intégrales ont donc l'équation :

$$y = \lambda x/(x^{n+1} + \lambda).$$

La première équation différentielle est encore :

$$\frac{dx}{dT} = x^2$$

dont la solution est :

$$x(T) = x(0)/(1 - Tx(0)).$$

Il est inutile d'écrire la seconde équation puisque nous connaissons la solution :

$$y(T) = \lambda x(T)/(x(T)^{n+1} + \lambda)$$

où $\lambda = x(0)^{n+1}y(0)/(x(0) - y(0))$. Ces deux formules expriment les coordonnées $x(T)$ et $y(T)$ en fonction de T et définissent un flot semi-global.

Remarque 2.1. — Nous allons voir plus loin que ces champs se globalisent sur des surfaces compactes. Cela confirmera qu'ils sont semi-complets.

4. Le champ linéaire $X_{n,m} = (mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y)$ est complet dans $\mathbf{C}^2$. Si $im - jn = 0$, alors la fonction $x^i y^j$ est une intégrale première. Le champ $x^i y^j(mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y)$ est donc lui aussi complet dans $\mathbf{C}^2$.

Le cas du champ $x^i y^j X_{n,m}$, avec $im - nj = \pm 1$, est plus délicat, il suffit cependant d'analyser le cas $im - nj = 1$. Nous observons d'abord que l'application $A_{x_0,y_0} : T \in \mathbf{C}/2\pi im\mathbf{Z} \mapsto (x_0 e^T, y_0 e^{-nT/m})$ identifie $\mathbf{C}/2\pi im\mathbf{Z}$ à l'orbite, L, de $X_{n,m}$ qui contient le point (x_0, y_0).

Considérons la restriction $x^i y^j X_{n,m} \mid_L$ du champ $x^i y^j X_{n,m}$ à L. Nous pouvons donc définir sur $\mathbf{C}/2\pi im\mathbf{Z}$ le champ image réciproque $A^*_{x_0,y_0}(x^i y^j X_{n,m} \mid_L)$ (pour tout x_0, y_0). Il est clair que le champ $x^i y^j X_{n,m}$ est semi-complet si et seulement si le champ $A^*_{x_0,y_0}(x^i y^j X_{n,m} \mid_L)$ est semi-complet sur $\mathbf{C}/2\pi im\mathbf{Z}$ (pour tout x_0, y_0). Pour vérifier que c'est effectivement le cas, nous remarquons que $A^*_{x_0,y_0}(x^i y^j X_{n,m} \mid_L) = x_0^i y_0^j e^{(mi-nj)T/m}\partial/\partial T = e^{T/m}\partial/\partial T$ (à une constante multiplicative près). Comme le champ $e^{T/m}\partial/\partial T$ est clairement semi-complet dans $\mathbf{C}/2\pi im\mathbf{Z}$, il résulte que le champ $x^i y^j X_{n,m}$, avec $im - nj = 1$, est semi-complet.

5-6-7. Nous étudions maintenant le cas plus intéressant des trois champs :

$$X_{1,1,1} = x(x - 2y)\partial/\partial x + y(y - 2x)\partial/\partial y,$$

$$X_{1,1,2} = x(x - 3y)\partial/\partial x + y(y - 3x)\partial/\partial y,$$

$$X_{1,2,3} = x(2x - 5y)\partial/\partial x + y(y - 4x)\partial/\partial y.$$

Nous commençons par un lemme de géométrie algébrique élémentaire. L'énoncé ci-dessous est légèrement plus général que ce dont nous avons besoin dans l'immédiat mais il nous sera utile par la suite.

LEMME 2.2. — *Soit P un polynôme homogène de $\mathbf{C}[x, y]$.*

On suppose que la courbe algébrique affine d'équation $P(x, y) = 1$ est irréductible et de genre 0, i.e. isomorphe à $\mathbf{C}P(1)$ moins un ensemble fini de points. Alors, à changement de variables linéaire près, P est de la forme $x^n y^m$ avec m, n entiers positifs ou nuls premiers entre eux.

On suppose que la courbe algébrique affine d'équation $P(x, y) = 1$ est irréductible et de genre 1, i.e. isomorphe à un tore complexe moins un ensemble fini de points. Alors, à changement de variables linéaire près, P est de l'une des formes suivantes :

- $P(x, y) = xy(x - y)$
- $P(x, y) = xy(x - y)^2$
- $P(x, y) = xy^2(x - y)^3$.

Démonstration. — Écrivons P comme un produit : $P = l_1^{k_1} l_2^{k_2} \dots l_\alpha^{k_\alpha}$ où les l_i sont des formes linéaires indépendantes deux à deux et les k_i sont des entiers strictement positifs. Soit k la somme des k_i, c'est-à-dire le degré de P. Le noyau de chaque l_i définit une droite de $\mathbf{C}^2$, et donc un point de $\mathbf{C}P(1)$ que nous noterons encore l_i. La courbe $\mathcal{C}$ d'équation $P = 1$ est un revêtement de degré k de $\mathbf{C}P(1) - \{l_1, \dots, l_\alpha\}$. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donc $k(2 - \alpha)$. Si $\mathcal{C}$ est irréductible, les k_i sont premiers entre eux dans leur ensemble. Soit $\overline{\mathcal{C}}$ le complété de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la courbe obtenue en désingularisant la fermeture de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{C}P(2)$. Les points à l'infini de $\mathcal{C}$ correspondent aux points à l'infini des l_i. En plaçant un tel point à l'origine d'une carte affine convenable, de coordonnées (u, v), la courbe a une équation de la forme :

$$u^{k_i} = v^k F_i(u, v)$$

où F_i n'est pas nul en $(0, 0)$. Par conséquent, le nombre de branches en ce point à l'infini est le plus grand diviseur commun $(k_i \wedge k)$. Pour obtenir la caractéristique d'Euler-Poincaré de la courbe $\overline{\mathcal{C}}$, il suffit d'ajouter une unité par branche à l'infini. On trouve donc :

$$\chi(\overline{\mathcal{C}}) = k(2 - \alpha) + \sum_{i=1}^{\alpha} (k_i \wedge k).$$

On a donc :

$$k(2-\alpha)+\alpha \leqslant \chi(\overline{\mathcal{C}}) \leqslant k(2-\alpha)+\sum_{i=1}^{\alpha} k_i = k(3-\alpha).$$

La courbe $\mathcal{C}$ est de genre 0 si et seulement si $\chi(\overline{\mathcal{C}}) = 2$. C'est le cas exactement lorsque $\alpha = 2$ et que k_1 et k_2 sont premiers entre eux. Dans cette situation, et dans un système de coordonnées convenables, on a $P = x^n y^m$ comme annoncé.

La courbe $\mathcal{C}$ est elliptique si et seulement si $\chi(\overline{\mathcal{C}}) = 0$. La seule possibilité est que $\alpha = 3$ et que $(k_i \wedge k) = k_i$ pour $i = 1, 2, 3$, c'est-à-dire que k_i divise k. Ainsi, l'entier k est la somme de trois de ses diviseurs premiers entre eux dans leur ensemble. Les seules possibilités, à l'ordre près, sont :

$$(k_1, k_2, k_3) = (1,1,1), (1,1,2), (1,2,3).$$

Le lemme est démontré. □

PROPOSITION 2.3. — *Les champs de vecteurs*

$$[xy(x-y)]^a X_{1,1,1}, \qquad [xy(x-y)^2]^a X_{1,1,2}, \qquad [xy^2(x-y)^3]^a X_{1,2,3}$$

sont semi-complets dans $\mathbf{C}^2$.

Démonstration. — Écrivons l'équation différentielle des courbes de niveau de la fonction polynomiale $P_{1,1,1} = xy(x-y)$. On trouve :

$$\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-y}\Big)dx + \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}\Big)dy = 0$$

$$y(y-2x)dx + x(x-2y)dy = 0.$$

Ainsi, $P_{1,1,1} = xy(x-y)$ est une intégrale première du champ $X_{1,1,1}$. De même, on vérifie que $P_{1,1,2} = xy(x-y)^2$ est intégrale première de $X_{1,1,2}$ et que $P_{1,2,3} = xy^2(x-y)^3$ est une intégrale première de $X_{1,2,3}$. Il s'agit donc de montrer que les champs $X_{1,1,1}, X_{1,1,2}, X_{1,2,3}$ sont semi-complets dans $\mathbf{C}^2$. Remarquons tout de suite que ces champs ne sont pas complets : leur restriction à l'axe des x est un multiple du champ non complet $x^2\partial/\partial x$.

Pour montrer que $X_{1,1,1}$ (par exemple) est semi-complet, nous allons construire une surface complexe $\Sigma_{1,1,1}$ contenant un ouvert isomorphe à $\mathbf{C}^2$

et un champ de vecteurs *complet* sur $\Sigma_{1,1,1}$ dont la restriction à l'ouvert est conjuguée à $X_{1,1,1}$.

Nous savons que la courbe d'équation $xy(x-y) = \lambda$ (avec $\lambda \neq 0$) est isomorphe à un tore auquel on a ôté trois points correspondant aux points à l'infini $x = 0$, $y = 0$ et $x = y$. Nous affirmons que le champ $X_{1,1,1}$ (qui est tangent à cette courbe) se prolonge en un champ holomorphe non singulier sur ce tore ou, de manière équivalente, que la forme temps dT se prolonge holomorphiquement au tore en une forme non singulière. Examinons par exemple le cas du point à l'infini de la droite $x = 0$. En changeant de coordonnées projectives par :

$$x = u/v \quad y = 1/v,$$

il s'agit d'étudier la forme temps au voisinage de $u = 0$. Or, on a :

$$\frac{dy}{dT} = y(y-2x).$$

Donc :

$$dT = -\frac{dv}{1-2u}.$$

C'est bien une forme non singulière au voisinage de $u = 0$. Le cas des deux autres points à l'infini se traite de la même manière. La courbe $P_{1,1,1} = 0$ est constituée de trois droites et on vérifie aussi que $X_{1,1,1}$ se prolonge holomorphiquement aux trois droites projectives obtenues en ajoutant aux droites affines leurs points à l'infini. Ainsi, lorsque l'on rajoute trois points à l'une des courbes d'équation $xy(x-y) = \lambda$, on obtient un champ holomorphe complet sur une surface de Riemann. En termes vagues, la surface $\Sigma_{1,1,1}$ que nous allons construire s'obtient à partir de $\mathbf{C}^2$ en ajoutant trois points pour chaque valeur de λ de façon à ajouter les points qui «manquent aux orbites pour qu'elles soient complètes». Puisque toutes ces courbes ont les mêmes points à l'infini, nous allons devoir éclater un certain nombre de fois pour construire cette surface.

Notons d_1, d_2 et d_3 les trois droites projectives de $\mathbf{C}P(2)$ d'équations non homogènes $x = 0, y = 0, x = y$ respectivement. Soit Δ la droite de l'infini de $\mathbf{C}P(2)$. Finalement nous désignons par p_1, p_2 et p_3 les points d'intersection de d_1, d_2 et d_3 avec Δ.

Chacune des cubiques $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation non homogène $xy(x-y) = \lambda$ ($\lambda \neq 0$) est lisse, passe par les trois points p_1, p_2 et p_3 et possède en ces points un contact d'ordre trois avec les droites d_i. La courbe $\mathcal{C}_0$ est la réunion des droites d_i ; c'est une cubique dégénérée.

Nous éclatons $\mathbf{C}P(2)$ (trois fois) aux points p_i $(i = 1,2,3)$ et appelons la surface obtenue $S^{(1)}$. Nous notons $E_i^{(1)}$ le diviseur exceptionnel obtenu par l'éclatement de $\mathbf{C}P(2)$ en p_i et $d_i^{(1)} \subset S^{(1)}$ la transformée stricte de d_i. De même, nous notons $\mathcal{C}_\lambda^{(1)}$ la transformée stricte de $\mathcal{C}_\lambda$. Soit $p_i^{(1)}$ le point d'intersection de $d_i^{(1)}$ et $E_i^{(1)}$. Les courbes $\mathcal{C}_\lambda^{(1)}$ $(\lambda \neq 0)$ coupent $d_i^{(1)}$ en point $p_i^{(1)}$ avec contact d'ordre 2. Naturellement les courbes $\mathcal{C}_\lambda^{(1)}$ $(\lambda \neq 0)$ sont encore de tores. Nous faisons trois nouveaux éclatements de $S^{(1)}$ aux points $p_i^{(1)}$ et appelons $S^{(2)}$ la surface qui en résulte. Soit $E_i^{(2)}$ le diviseur exceptionnel sur le point $p_i^{(1)}$ obtenu par l'éclatement. Nous choisissons des notations analogues aux précédentes (quitte à remplacer (1) par (2)). Si $p_i^{(2)}$ est l'intersection de $d_i^{(2)}$ avec $E_i^{(2)}$, nous remarquons que les courbes $C_\lambda^{(2)}$ coupent $d_i^{(2)}$ au point $p_i^{(2)}$ avec contact d'ordre 1. D'autre part les courbes $C_\lambda^{(2)}$ $(\lambda \neq 0)$ sont encore de tores. Finalement nous éclatons $S^{(2)}$ en $p_i^{(2)}$ $(i = 1,2,3)$ et utilisons encore des notations analogues. Il se trouve que les feuilles (distinctes de $d_i^{(3)}$) du feuilletage résultant sur $S^{(3)}$ sont devenues transverses au diviseur exceptionnel $E_i^{(3)}$ ajouté. Bien sûr, les courbes $C_\lambda^{(2)}$ $(\lambda \neq 0)$ sont des tores. Le complémentaire dans $S^{(3)}$ du diviseur exceptionnel total qui est donné par $(\Delta \cup \bigcup_{j=1}^{3} E_j^{(1)} \cup \bigcup_{k=1}^{3} E_k^{(2)})$ est une surface ouverte, $\Sigma_{1,1,1}$. Nous avons construit sur $\Sigma_{1,1,1}$ un feuilletage qui possède un unique point singulier p, trois feuilles (qui correspondent aux droites d_i $(i = 1,2,3)$ fixées au début) qui sont des droites complexes, et dont les autres feuilles sont des tores. La surface $\Sigma_{1,1,1}$ contient une copie de $\mathbf{C}^2$ et le feuilletage induit est celui donné par le champ de vecteurs holomorphe $X_{1,1,1}$. D'après ce que nous avons vu, ce champ se prolonge en un champ holomorphe, encore noté $X_{1,1,1}$ sur $\Sigma_{1,1,1}$, qui est bien sûr complet : ses orbites non singulières sont des tores sauf trois d'entre elles qui sont des droites projectives complexes. On remarquera que chacune de ces trois courbes rationnelles est d'auto-intersection -2 puisqu'elles sont obtenues à partir d'une droite du plan projectif sur laquelle on effectue trois éclatements.

Ceci achève la démonstration du fait que $X_{1,1,1}$ est semi-complet dans $\mathbf{C}^2$.

Le cas de $X_{1,1,2}$ (resp. $X_{1,2,3}$) est tout à fait analogue. On éclate les trois points à l'infini un nombre suffisant de fois de façon à rendre disjointes les transformées strictes des courbes $P_{1,1,2} = Cst$ (resp. $P_{1,2,3}$). On construit ainsi une surface complexe $\Sigma_{1,1,2}$ (resp.$\Sigma_{1,2,3}$) munie d'un flot complet qui induit $X_{1,1,2}$ (resp. $X_{1,2,3}$) sur un ouvert isomorphe à $\mathbf{C}^2$. $\square$

Remarque 2.4. — Les surfaces $\Sigma_{1,1,1}$, $\Sigma_{1,1,2}$ et $\Sigma_{1,2,3}$ contiennent chacune trois copies de $\mathbf{C}P(1)$ dont il est facile de calculer les auto-intersections. Nous venons de voir que dans le cas de $\Sigma_{1,1,1}$, ces trois diviseurs sont d'auto-intersection -2. Pour $\Sigma_{1,1,2}$, les auto-intersections sont -3, -3 et -1. Enfin, pour $\Sigma_{1,2,3}$, on obtient -5, -2 et -1. Par conséquent, dans les deux derniers cas, on peut imploser l'un de ces diviseurs et on obtient un champ holomorphe, complet, sur une surface lisse. Il n'est pas difficile de calculer les expressions des champs ainsi obtenus. Nous considérons dans $\Sigma_{1,1,2}$ (resp. $\Sigma_{1,2,3}$) un système de coordonnées autour du point singulier du champ quadratique tel que : l'axe $\{x = 0\}$ soit contenu dans le diviseur d'auto-intersection -3 (resp. -5) ; l'axe $\{y = 0\}$ soit contenu dans le diviseur d'auto-intersection -3 (resp. -2) ; la droite $\{x = y\}$ soit contenue dans le diviseur d'auto-intersection -1 (resp. -1). Finalement nous implosons ces singularités en implosant la droite $\{x = y\}$. On trouve les champs suivants :

- $Y_{1,1,2} = (2y - x^2)\partial/\partial x + 2xy\partial/\partial y$ dont une intégrale première est $y(y - x^2)$ et les deux séparatrices sont $y = 0$ et $y = x^2$.
- $Y_{1,2,3} = (3y - x^2)\partial/\partial x + 4xy\partial/\partial y$ dont une intégrale première est $y(y - x^2)^2$ et les deux séparatrices sont $y = 0$ et $y = x^2$.

On remarquera que le premier jet de ces deux champs est nilpotent non trivial.

Nous observons encore que, dans le cas du champ $Y_{1,2,3}$, le diviseur associé à la séparatrice d'équation $y = x^2$ est d'auto-intersection -1. Il peut donc être implosé une nouvelle fois.

Pour rendre les calculs "plus visibles", nous considérons le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (x, y+x^2)$. Dans ces nouvelles coordonnées le champ $Y_{1,2,3}$ s'écrit $(3y + 2x^2)\partial/\partial x - 2xy\partial/\partial y$. De plus le diviseur d'auto-intersection -1 est donné simplement par $y = 0$. Maintenant nous implosons cette singularité en implosant la droite $y = 0$. Après une permutation des axes, on trouve le champ suivant :

$$Z_{1,2,3} = 2y\partial/\partial x - 3x^2\partial/\partial y\,,$$

dont une intégrale première est $x^3 + y^2$ et la séparatrice est $x^3 + y^2 = 0$. Encore une fois, on remarquera que le premier jet de ce champ est nilpotent non trivial.

2.2. Fermeture de l'espace des champs semi-complets.

Pour étudier la première composante homogène non nulle d'un champ semi-complet, nous allons montrer que celle-ci est nécessairement un champ semi-complet dans $\mathbf{C}^2$ tout entier. Ce fait sera un corollaire de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.5. — *Soit X_i une suite de champs de vecteurs holomorphes définis dans $B(r)$, la boule de $\mathbf{C}^N$ de centre en l'origine et de rayon $r > 0$. Supposons que chaque X_i admette une extension continue à $\overline{B}(r)$ (la boule fermée de centre en l'origine et de rayon $r > 0$). Supposons que X_i converge uniformément dans $B(r)$ vers un champ X (qui est donc holomorphe et défini sur $B(r)$), et de plus que chaque X_i est semi-complet dans $B(r)$. Alors X est lui aussi semi-complet dans $B(r)$.*

Démonstration. — Évidemment nous pouvons supposer $r = 1$ et, pour alléger les notations, nous écrivons $B = B(1)$. Pour démontrer que X est semi-complet dans B nous allons construire une application $\Phi : \Omega \subseteq \mathbf{C} \times B \to B$ (où Ω est un ensemble ouvert) qui sera le flot semi-global associé à X. Soit $\Phi_i : \Omega_i \subseteq \mathbf{C} \times B \to B$ le flot semi-global associé à X_i dans B. Quitte à remplacer Ω_i par sa composante connexe contenant $\{0\} \times B$, on peut toujours supposer Ω_i connexe.

On pose :

$$\Omega = \bigcup_{j \geqslant 1} \left(\mathrm{Int} \left(\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i \right) \right),$$

où $\mathrm{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i\big)$ désigne *l'intérieur* de $\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i$. Évidemment Ω est ouvert. De plus nous avons l'affirmation ci-dessous :

AFFIRMATION 1. — *$\{0\} \times B \subseteq \Omega$, en particulier Ω n'est pas vide.*

Il suffit de montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que si $B_\delta(p)$ est la boule de $\mathbf{C}^n$ de centre en p et de rayon δ, alors pour tout q de $B_\delta(p)$, tout $T \in \mathbf{C}$ avec $\mid T \mid < \varepsilon$ et tout $i \in \mathbf{N}$, on a que (T, q) appartient à Ω_i. Ceci résulte immédiatement de la semi-complétude de X_i dans B et du fait que les normes des X_i sont uniformément majorées. □

Quitte à remplacer Ω par sa composante connexe contenant $\{0\} \times B$, on peut supposer Ω connexe.

Maintenant nous fixons un $j \in \mathbf{N}$ et considérons l'ensemble $\mathrm{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i\big)$. Pour tout $n > j$, il est clair que $\mathrm{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i\big)$ est contenu dans Ω_n, nous pouvons donc considérer la restriction de Φ_n à $\mathrm{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i\big)$. Nous appelons cette restriction $\Phi_n^{(j)}$.

Grâce au théorème de Montel, pour tout j fixé, la suite d'applications (définie pour $n > j$) $\Phi_n^{(j)} : \mathrm{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i\big) \to B$, forme une famille normale.

Affirmation 2. — *Pour tout j fixé la suite d'applications $\Phi_n^{(j)}$: $\mathrm{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i\big) \to B$ est en fait convergente.*

En effet, comme la suite X_i converge vers X, toute limite d'une sous-suite définit un flot local pour le champ X. Deux limites coïncident donc sur leur domaine de définition. □

Maintenant nous allons définir l'application Φ. Soit (T,p) un point appartenant à Ω. Il existe donc $j_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que (T,p) appartienne à $\mathrm{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j_0} \Omega_i\big)$, en particulier pour tout $n > j_0$ nous pouvons considérer le point $\Phi_n(T,p)$. Nous posons alors :

$$\Phi(T,p) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(T,p) \quad \text{pour } n > j_0. \tag{1}$$

Cette limite existe; c'est une application holomorphe car l'affirmation 2 nous assure que Φ_n converge uniformément sur tout compact de $\mathrm{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j} \Omega_i\big)$. Pour achever la preuve de la proposition, il ne reste qu'à démontrer l'affirmation ci-dessous.

Affirmation 3. — *Φ est le flot semi-global associé à X.*

Démonstration de l'affirmation. — Soit T_i une suite de nombres complexes telle que : $(T_i,p) \in \Omega$, (T_i,p) converge vers un point $(\hat{T},p) \in \mathbf{C} \times B$ et de plus $\Phi(T_i,p)$ converge vers un point $\hat{p}$ appartenant à B. Nous voulons démontrer que $(\hat{T},p)$ appartient à Ω.

Nous choisissons i_0 assez grand pour que pour tout $i'_0 > i_0$ on ait $\mid T_{i'_0} - T_{i_0} \mid < \mathrm{dist}(\hat{p}, \partial B)/10Cst$ (où Cst est la borne uniforme de tous les champs de vecteurs dans $\overline{B}(r)$). En particulier $\mid \hat{T} - T_{i_0} \mid <$

$\operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B)/5Cst$. Nous choisissons j_0 assez grand pour que (T_{i_0}, p) appartienne à $\operatorname{Int}\big(\bigcap_{i \geqslant j_0} \Omega_i\big)$. Finalement nous choisissons $k_0 > \max\{i_0, j_0\}$ assez grand pour que si $i > k_0$ alors $\mid \Phi_i(T_{i_0}, p) - \Phi_{k_0}(T_{i_0}, p) \mid < \operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B)/5$ (ce qui est possible d'après l'affirmation 2). Pour démontrer l'affirmation il suffit alors de montrer que $(\hat{T}, p)$ appartient à $\operatorname{Int}\big(\bigcap_{i > k_0} \Omega_i\big) \subseteq \Omega$.

Nous affirmons que pour tout $i > k_0$ on a : $\operatorname{dist}(\hat{p}, \Phi_i(T_{i_0}, p) < \frac{3}{5}\operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B)$.

En effet, soit $\Phi_n(T_n, p)$ $((T_n, p) \in \Omega_n)$ une suite qui converge vers $\hat{p}$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}|\Phi_n(T_n,p)-\Phi_i(T_{i_0},p)| &\leqslant |\Phi_n(T_n,p)-\Phi_n(T_{i_0},p)|+|\Phi_n(T_{i_0},p)-\Phi_i(T_{i_0},p)| \\ &\leqslant Cst \mid T_n - T_{i_0} \mid + \frac{2\operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B)}{5} \leqslant \frac{3}{5}\operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B).\end{aligned}$$

On en déduit (2.2).

Supposons par l'absurde que $(\hat{T}, p)$ n'appartienne pas à $\operatorname{Int}\big(\bigcap_{i > k_0} \Omega_i\big) \subseteq \Omega$. Alors il existe $i_1 > k_0$ tel que $(\hat{T}, p)$ n'appartienne pas à Ω_{i_1}. Comme Φ_{i_1} est un flot semi-global, il résulte qu'il existe $t \in (0,1]$ tel que $\Phi_{i_0}(T_{i_0} + t(\hat{T} - T_{i_0}), p) \in \partial B$ et pour tout $0 \leqslant s < t$ on a $\Phi_{i_0}(T_{i_0} + s(\hat{T} - T_{i_0}), p) \in B$.

Cependant, le théorème des accroissement finis nous assure que :

$$\mid \Phi_{i_1}(T_{i_0}+t(\hat{T}-T_{i_0}),p)-\Phi_{i_1}(T_{i_0},p) \mid \leqslant \sup_B \left|\frac{d\Phi_{i_1}}{dT}\right| t \mid \hat{T}-T_{i_0} \mid \leqslant \frac{1}{5}\operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B).$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B) &\leqslant \mid \Phi_{i_1}(T_{i_0} + t(\hat{T} - T_{i_0}), p) - \Phi_{i_1}(T_{i_0}, p) \mid + \mid \Phi_{i_1}(T_{i_0}, p) - \hat{p} \mid \\ &\leqslant \frac{1}{5}\operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B) + \frac{3}{5}\operatorname{dist}(\hat{p}, \partial B),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les estimations (2.2) et (2). Il en résulte une contradiction qui démontre l'affirmation 3. □

La démonstration de la proposition 2.5 est terminée. □

COROLLAIRE 2.6. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphe, non identiquement nul, défini au voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine de $\mathbf{C}^n$. Soit X^k le champ de vecteurs homogène (défini dans $\mathbf{C}^n$ tout entier) formé par la* *première composante homogène non nulle du développement de Taylor de X. Supposons que X soit semi-complet dans $\mathcal{U}$. Alors X^k est semi-complet dans $\mathbf{C}^n$.*

Démonstration du corollaire. — D'abord nous démontrons que le champ X^k est semi-complet dans toute boule $B(r)$ $(0 < r < \infty)$ de centre en l'origine et de rayon r. Soit alors $\varepsilon > 0$ si petit que la boule $B(\varepsilon)$ de centre en l'origine et de rayon ε soit contenue dans $\mathcal{U}$. Soit encore i_0 le plus petit entier positif tel que $r/2^{i_0} < \varepsilon$. Pour chaque $i \geqslant i_0$, nous définissons dans $B(r)$ le champ de vecteurs X_i par :

$$X_i(z_1, \ldots, z_n) = 2^{ik} X\left(\frac{z_1}{2^i}, \ldots, \frac{z_n}{2^i}\right).$$

Nous remarquons que lorsque i converge vers l'infini la suite de champs de vecteurs X_i converge uniformément dans $B(r)$ vers X^k.

De plus les champs X_i sont semi-complets dans $B(r)$ car ils sont conjugués par une homothétie à la restriction de X à un ouvert. La proposition (2.5) s'applique pour démontrer que X^k est semi-complet dans toute boule $B(r)$.

Pour démontrer le corollaire, il faut maintenant montrer que ceci entraîne la semi-complétude sur $\mathbf{C}^n$ tout entier. Pour chaque $r = 1, 2, \ldots$, nous considérons le flot semi-global $\Phi_r : \Omega_r \subseteq \mathbf{C} \times B(r) \to B(r)$. Nous pouvons supposer que chaque Ω_r est connexe. Alors nous définissons l'ouvert connexe Ω par $\Omega = \bigcup_{r \geqslant 1} \Omega_r$. Ensuite nous définissons l'application $\Phi : \Omega \subseteq \mathbf{C} \times \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ de la manière suivante : si $(T, p) \in \Omega$, il existe r_0 tel que $(T, p) \in \Omega_{r_0}$, nous posons alors $\Phi(T, p) = \Phi_{r_0}(T, p)$. L'application Φ est bien définie puisque si r_0 et r_0' sont tels que $(T, p) \in \Omega_{r_0} \cap \Omega_{r_0'}$ alors $\Phi_{r_0}(T, p) = \Phi_{r_0'}(T, p)$.

Il est alors facile de vérifier que Φ est le flot semi-global associé à X^k dans $\mathbf{C}^n$. □

2.3. La première composante homogène.

Dans cette section, nous allons décrire tous les champs homogènes semi-complets. Ceci, combiné au corollaire (2.6), entraînera le théorème C. Sauf mention explicite du contraire, toutes les singularités de champs de vecteurs seront supposées non dicritiques. Autrement dit, nous supposons qu'après un éclatement, le feuilletage défini par le champ ne possède qu'un nombre fini de singularités situées sur le diviseur exceptionnel et que ce diviseur, privé des points singuliers, est une feuille du feuilletage. Nous fixons un champ de vecteurs holomorphe non nul X^k, homogène de degré k et semi-complet dans $\mathbf{C}^2$.

Puisque les champs linéaires sont tous complets, *nous supposerons dans toute la suite que le champ X^k n'est pas linéaire, c'est-à-dire que* $k \geqslant 2$. Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage dont les feuilles sont les orbites de X^k, singulier le long des zéros de X^k, c'est-à-dire sur la réunion d'un nombre fini de droites passant par l'origine. Nous fixons une feuille régulière L de $\mathcal{F}$ qui n'est pas une droite passant par l'origine.

Comme X^k est semi-complet, il définit un flot semi-global Φ sur L. Choisissons un point p de L. Soit $\Omega \subseteq \mathbf{C} \times \mathbf{C}^2$ le domaine de définition du flot semi-global Φ. Alors nous posons $\Omega_p = \{T \in \mathbf{C}\,;\, (T,p) \in \Omega\}$. En restreignant Φ à Ω_p, nous obtenons une application, notée Φ_p, définie par :$\Phi_p : T \in \Omega_p \subseteq \mathbf{C} \mapsto \Phi(T,p) \in L$.

LEMME 2.7. — *L'application $\Phi_p : \Omega_p \to L$ est un revêtement de Ω_p sur L.*

Démonstration. — L'application Φ_p est évidemment un difféomorphisme local. Pour voir que Φ_p est une application de revêtement, il suffit de voir qu'elle a la propriété de relèvement des chemins. Soit alors $c : [0,1] \to L$ un chemin tel que $c(0) = p$. Nous voulons définir un chemin $\overline{c} : [0,1] \to \Omega_p$ qui relève c. On définit $\overline{c}(t) \in \mathbf{C}$ comme l'intégrale de la forme temps sur $c([0,t])$ et il reste à vérifier que $\overline{c}([0,1])$ est bien contenu dans Ω_p. Soit t_0 la borne supérieure de l'ensemble des t tels que $\overline{c}(t)$ est dans Ω_p. Si t_0 est différent de 1, la courbe $\overline{c}([0,t_0[)$ tend vers le bord de Ω_p et par définition d'un flot semi-global, $\Phi_p(\overline{c}(t)) = c(t)$ tend vers le bord de $\mathbf{C}^2$, c'est-à-dire vers l'infini. C'est bien sûr une contradiction qui montre que le chemin c se relève sur $[0,1]$ tout entier. □

Le lemme suivant montre que ce revêtement est un revêtement galoisien de groupe abélien.

LEMME 2.8. — *La feuille L s'identifie au quotient Ω_p/Γ où Γ est un groupe discret de translations de $\mathbf{C}$ préservant Ω_p.*

Démonstration. — Soit $\Gamma \subset \mathbf{C}$ l'ensemble des éléments T de Ω_p tels que $\Phi_p(T) = p$. Il résulte de la définition d'un flot semi-global que Γ est un sous-groupe additif de $\mathbf{C}$, que les translations par Γ préservent Ω_p et que $\Phi_p(T_1) = \Phi_p(T_2)$ si et seulement si $T_1 - T_2$ est dans Γ. □

Quitte à multiplier le champ par une constante, Γ ne peut être que l'un des trois types ci-dessous :

A : Γ est trivial

B : $\Gamma = 2\pi i\mathbf{Z}$

C : Γ est un réseau.

Nous étudions maintenant la projection radiale de L sur $\mathbf{C}P(1)$. Nous appelons $d_1, \ldots, d_l$ les droites qui sont des séparatrices de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire les droites passant par l'origine et invariantes par X^k (en particulier $l \geqslant 1$) (certaines d'entre elles peuvent être contenues dans le lieu singulier de X^k). Soit η la projection canonique de $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ sur $\mathbf{C}P(1)$. Nous considérons les homothéties de rapport $\lambda \in \mathbf{C}^*$ de $\mathbf{C}^2$ et nous nous intéressons à celles qui fixent la feuille L. Nous désignons simplement par λ l'homothétie de $\mathbf{C}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$. Nous définissons :

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{C}^* \,;\, \lambda(L) = L\}\,.$$

C'est évidemment un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$.

LEMME 2.9. — *La restriction de η à L est un revêtement sur $\mathbf{C}P(1)$ moins les l points $d_1, \ldots, d_l$. Le groupe Λ opère librement et proprement sur L et le quotient L/Λ est isomorphe à $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, \ldots, d_l\}$.*

Démonstration. — La première assertion est bien connue. D'après l'homogénéité du champ X^k, si L est une feuille de $\mathcal{F}$ et $\lambda(L) \cap L \neq \varnothing$, alors $\lambda(L) = L$. Par conséquent deux points de L ont la même projection par η sur $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, \ldots, d_l\}$ si et seulement si l'un est l'image de l'autre par un élément de Λ. Le revêtement η apparaît donc comme un revêtement galoisien de groupe Λ. □

A priori, Λ ne peut être que l'un des trois types ci-dessous :

1. Λ n'est pas discret dans $\mathbf{C}^*$.

2. Λ est infini discret et contient des éléments de modules différents de 1.

3. Λ est un groupe fini.

Notons : $\Phi_p(T) = (x(T), y(T))$. Nous nous proposons de montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.10. — *Le groupe Λ est fini. L'ouvert Ω_p est le complémentaire d'un nombre fini d'orbites de points sous l'action de Γ par translations sur $\mathbf{C}$. En choisissant convenablement les coordonnées dans $\mathbf{C}^2$, on peut supposer que :*

$\dfrac{y(T)}{x(T)} = (T-1)^n$ *(où n est un entier strictement positif) dans le cas A.*

$\dfrac{y(T)}{x(T)} = \exp(T)$ *ou* $\exp(T) + \exp(-T)$ *dans le cas B.*

$\dfrac{y(T)}{x(T)} = F(T)$ *où F est une fonction elliptique de périodes Γ dans le cas C.*

Démonstration. — Nous remarquons d'abord que $\Omega_p \subseteq \mathbf{C}$ possède une 1-forme holomorphe naturelle qui est invariante par translations. Puisque L est isomorphe à Ω_p/Γ, où Γ est un groupe de translations, il résulte que cette 1-forme définit une 1-forme dT sur L qui est bien sûr la forme temps. Si $\lambda \in \Lambda$, alors $(\lambda)^*\, dT = \lambda^{1-k}\, dT$ (car X^k est homogène de degré k). Autrement dit, Λ agit en multipliant la forme dT par une constante.

Nous allons étudier les cas **A**, **B**, **C** successivement en considérant toutes les combinaisons possibles avec les cas **1**, **2**, **3** qui correspondent aux différents types possibles pour Λ.

Cas A : On suppose que Γ est trivial (*i.e.* $\Omega_p = L$).

Comme $\lambda \in \Lambda$ agit sur $L \simeq \Omega_p$ en multipliant la forme temps par λ^{1-k}, l'action de Λ sur $\Omega_p \subset \mathbf{C}$ est par similitudes.

Cas A.1 : Puisque Λ est infini, les λ^{1-k} ne peuvent tous être égaux à 1 et cette action de Λ n'est donc pas une action par translations. On déduit que Λ est un sous-groupe abélien du groupe de similitudes de $\mathbf{C}$ non contenu dans le groupe des translations; il est donc conjugué au groupe des transformations qui à $z \in \mathbf{C}$ associent $\lambda^{1-k}z \in \mathbf{C}$. Cette action n'est pas discrète si Λ est un sous-groupe non discret de $\mathbf{C}^*$: le cas **A.1** est donc impossible.

Cas A.2 : Le quotient de $\mathbf{C}^*$ par l'action d'un groupe discret d'homothéties de centre 0 et contenant une contraction est conformément isomorphe à un tore. Le quotient de Ω_p par l'action de Λ est donc conformément isomorphe à un ouvert d'un tore. Or, ce quotient est isomorphe à la sphère trouée $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, \dots, d_l\}$. Pour montrer que le cas **A.2** est lui aussi impossible, il suffit donc de montrer qu'une sphère trouée n'est pas isomorphe, comme surface de Riemann, à un ouvert d'un tore. Pour cela, on considère un plongement holomorphe ι d'un disque épointé $\mathbf{D}^2\setminus\{0\}$ dans un tore T (*i.e* une courbe elliptique). Nous affirmons d'abord que ι est homotopiquement trivial dans T. Ceci résulte du fait que le module de l'anneau $\mathbf{D}^2\setminus\{0\}$ est infini. Par conséquent, ι se relève dans le revêtement universel de T, c'est-à-dire $\mathbf{C}$. Le théorème d'extension de Riemann montre donc que ι se prolonge holomorphiquement au disque $\mathbf{D}^2$. S'il existait un plongement holomorphe de $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, \dots, d_l\}$ dans T, celui-ci se prolongerait donc à $\mathbf{C}P(1)$ et, par simple connexité de $\mathbf{C}P(1)$, on obtiendrait une application holomorphe non constante de $\mathbf{C}P(1)$ vers $\mathbf{C}$, ce qui est bien sûr impossible.

Cas A.3 : Dans ce cas, Λ agit sur $\mathbf{C}$ comme un groupe fini de rotations de même centre qui préservent l'ouvert Ω_p. Comme 0 est dans Ω_p et que Λ agit librement sur Ω_p, ce centre n'est pas 0 et on peut toujours supposer que c'est le point 1, quitte a multiplier le champ par une constante. Le quotient de $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ par un groupe fini de rotations à n éléments est isomorphe à $\mathbf{C}^*$ avec la coordonnée $(T-1)^n$. Le quotient de Ω_p par Λ est donc isomorphe à un ouvert de $\mathbf{C}^*$ c'est-à-dire à un ouvert de la sphère de Riemann. Par ailleurs, nous savons que le revêtement η réalise un isomorphisme entre ce quotient et $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, \dots, d_l\}$. Un ouvert de la sphère ne peut être conformément équivalent à une sphère privée d'un nombre fini de points que s'il est le complémentaire d'un ensemble fini de points. Autrement dit, Ω_p est le complémentaire d'un nombre fini de points de $\mathbf{C}$. D'autre part, puisque les automorphismes de $\mathbf{C}P(1)$ sont projectifs, quitte à choisir une coordonnée projective convenable sur $\mathbf{C}P(1)$, on peut supposer que $\eta(\Phi_p(T)) = (T-1)^n$.

En résumé, dans le cas **A**, nous avons bien montré que :

$$\frac{y(T)}{x(T)} = (T-1)^n.$$

Maintenant nous passons au deuxième type possible pour Γ.

Cas B : On suppose que $\Gamma = 2i\pi\mathbf{Z}$ (*i.e.* $L = \Omega_p/2i\pi\mathbf{Z}$).

L'action de Λ sur L donne lieu à une action d'un certain groupe $\tilde{\Lambda}$ sur Ω_p. Ce groupe $\tilde{\Lambda}$ est une extension du groupe des translations $2i\pi\mathbf{Z}$ par Λ et agit sur Ω_p par similitudes pour la même raison que précédemment. Ce groupe de similitudes doit normaliser le groupe des translations $2i\pi\mathbf{Z}$; il est donc contenu dans le groupe diédral des transformations du type $T \mapsto \pm T + \tau$ avec $\tau \in \mathbf{C}$. Autrement dit, Λ est un sous-groupe du groupe diédral du cylindre $\mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$ constitué de transformations $T \in \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z} \mapsto$

$\pm T + \tau \in \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$. Puisque Λ est abélien et agit proprement sur l'ouvert invariant $\Omega_p/2i\pi\mathbf{Z}$ du cylindre, quatre cas sont possibles :

- ou bien Λ est le groupe monogène engendré par une translation d'ordre infini $T \mapsto T + \tau$. Le quotient du cylindre par cette translation est un tore de sorte que dans ce cas la sphère trouée $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, \ldots, d_l\}$ est isomorphe, comme surface de Riemann, à un ouvert d'un tore complexe. Ceci est impossible ;

- ou bien Λ est le groupe monogène engendré par une translations d'ordre fini $T \mapsto T + \tau$. Le quotient du cylindre par cette translation est un autre cylindre $\mathbf{C}/2i\pi n\mathbf{Z}$. La sphère trouée $\mathbf{C}P(1)\setminus\{d_1, \ldots, d_l\}$ s'identifie alors à un ouvert de $\mathbf{C}/2i\pi n\mathbf{Z}$ par le revêtement η. Cet ouvert est donc le complémentaire d'une partie finie et, en choisissant une coordonnée projective convenable dans $\mathbf{C}P(1)$, on a :

$$\frac{y(T)}{x(T)} = \exp(nT).$$

  On peut bien sûr se débarrasser du facteur n en multipliant le temps par n, ce qui revient à multiplier le champ par une constante ou encore à le conjuguer par une homothétie convenable ;

- ou bien Λ est trivial. Identifions le cylindre à $\mathbf{C}^*$ par l'application exponentielle $z = \exp(T)$. La sphère trouée $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, \ldots, d_l\}$ s'identifie alors à un ouvert de $\mathbf{C}^*$ par le revêtement (trivial) η. Cet ouvert est donc le complémentaire d'une partie finie et, en choisissant une coordonnée projective convenable dans $\mathbf{C}P(1)$, on a :

$$\frac{y(T)}{x(T)} = \exp(T);$$

- ou bien Λ n'a que deux éléments et agit sur le cylindre par $T \mapsto \pm T$ (en choisissant convenablement l'origine de ce cylindre). Identifions encore le cylindre à $\mathbf{C}^*$ par l'application exponentielle $z = \exp(T)$. Le groupe Λ agit par $z \mapsto z^{\pm 1}$. Le quotient de $\mathbf{C}^* \setminus \{\pm 1\}$ par cette involution s'identifie à $\mathbf{C} \setminus \{\pm 2\}$ par l'application $z \mapsto z + z^{-1}$. L'ouvert $L = \Omega_p/\Gamma \subset \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z} \simeq \mathbf{C}^*$ ne contient pas les deux points fixes $\{\pm 1\}$ de l'action de Λ sur $\mathbf{C}^*$ et on peut donc identifier la sphère trouée $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, \ldots, d_l\}$ à un ouvert de $\mathbf{C} \setminus \{\pm 2\}$. Ici encore, on peut conclure que cet ouvert est le complémentaire d'un ensemble fini et qu'en choisissant convenablement les coordonnées linéaires dans $\mathbf{C}^2$, on a :

$$\frac{y(T)}{x(T)} = \exp(T) + \exp(-T).$$

Finalement nous arrivons au cas **C**.

Cas C : On suppose que Γ est un réseau (*i.e.* $L = \Omega_p/\Gamma$ est un ouvert d'un tore complexe).

L'action de Λ sur L donne lieu à une action d'un certain groupe $\tilde{\Lambda}$ sur Ω_p. Ce groupe $\tilde{\Lambda}$ est une extension du groupe des translations Γ par Λ et agit sur Ω_p par similitudes pour la même raison que précédemment. Ce groupe de similitudes est donc contenu dans le groupe des similitudes de $\mathbf{C}$ qui préservent le réseau Γ. Autrement dit Λ agit sur le tore complexe $\mathbf{C}/\Gamma$ par automorphismes, en préservant l'ouvert $L = \Omega_p/\Gamma$. En particulier, Λ est fini (et donc cyclique). Si un groupe fini opère sur un tore complexe et si on ôte les points où le stabilisateur est non trivial, le quotient par l'action est une surface de Riemann isomorphe à une surface de Riemann compacte à laquelle on ôte un ensemble fini. Puisque Λ agit librement sur L, la sphère trouée $\mathbf{C}P(1)\setminus\{d_1, \ldots, d_l\}$ s'identifie à un ouvert d'une surface de Riemann compacte. Comme précédemment, c'est que L est le complémentaire dans $\mathbf{C}/\Gamma$ d'un ensemble fini. De plus, en choisissant des coordonnées linéaires convenables dans $\mathbf{C}^2$, on a :

$$\frac{y(T)}{x(T)} = F(T)$$

où F est une fonction elliptique relative à Γ.

Ceci termine la démonstration de la proposition. □

PROPOSITION 2.11. — *La feuille L est contenue dans une courbe algébrique affine de genre 0 ou 1.*

Démonstration. — Nous savons déjà que L rencontre toutes les droites passant par l'origine de $\mathbf{C}^2$ en un nombre fini de points puisque Λ est fini. Ceci n'est cependant pas suffisant pour conclure que L est algébrique. Les coordonnées $x(T), y(T)$ sont des fonctions holomorphes définies sur l'ouvert Ω_p qui est le complémentaire d'un ensemble discret de points ; il nous faut en particulier montrer que ces fonctions ne présentent en ces points que des pôles et pas de singularités essentielles.

Ces fonctions vérifient les équations différentielles :

$$\frac{dx}{dT} = R(x(T), y(T))$$

$$\frac{dx}{dT} = S(x(T), y(T))$$

où R et S sont des polynômes homogènes de degré k. Plaçons-nous d'abord dans le cas **A** et utilisons la proposition 2.10. On obtient :

$$\frac{dx}{dT} = x^k R(1, \frac{y}{x}) = x^k R(1, (T-1)^n).$$

Il en résulte que $x(T)^{1-k}$ est une fonction polynomiale de T. Puisque $k \geqslant 2$ et que nous savons que $x(T)$ est une fonction uniforme de T définie sur le complémentaire d'une partie finie dans $\mathbf{C}$, c'est que $x(T)$ est en fait l'inverse d'un polynôme en T. Puisque $y(T) = (T-1)^n x(T)$ les deux fonctions $x(T)$ et $y(T)$ sont des fonctions rationnelles de T et L est bien (contenue dans) une courbe unicursale, *i.e.* de genre 0.

Nous allons procéder de la même façon dans le cas **B**. Si on considère le premier sous-cas, on a :

$$\frac{dx}{dT} = x^k R\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^k R(1, \exp(T))$$

de sorte que x^{1-k} est une fonction polynomiale de la variable $z = \exp(T)$. Comme précédemment, on conclut que $x(T)$ et $y(T)$ dépendent rationnellement de z. Il s'agit encore d'une courbe unicursale.

Dans le deuxième sous-cas, on a :

$$\frac{dx}{dT} = x^k R\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^k R(1, \exp(T) + \exp(-T))$$

de sorte que x^{1-k} est une fonction polynomiale de la variable $z = \exp(T) + \exp(-T)$. Comme précédemment, on conclut que $x(T)$ et $y(T)$ dépendent rationnellement de z. Il s'agit encore d'une courbe unicursale.

Enfin, dans le cas **C**, on a :

$$\frac{dx}{dT} = x^k R\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^k R(1, F(T))$$

où F est une fonction elliptique. Toujours de la même manière, on conclut que x^{1-k} est la primitive d'une fonction elliptique de T. Nous savons que $x(T)$ est une fonction holomorphe Γ-invariante définie sur le complémentaire d'un nombre fini d'orbites de Γ mais *a priori* $x(T)$ pourrait présenter des singularités essentielles en ces points. Cependant, le fait que x^{1-k} soit méromorphe montre qu'il n'en est rien et que $x(T)$ est une fonction elliptique de la variable T. Il en est évidemment de même de $y(T)$. Nous avons bien démontré que L est une courbe elliptique.

Ceci achève la preuve de la proposition. □

PROPOSITION 2.12. — *À changement de variables linéaire près, l'équation des feuilles de $\mathcal{F}$ est l'une des suivantes :*

$x^n y^m = Cst$ *(avec m et n entiers positifs ou nuls)*

$yx^{-n} = Cst$ *(avec n entier strictement positif)*

$x^n y(x-y)^{-1} = Cst$ *(avec n entier)*

$xy(x-y) = Cst$

$xy(x-y)^2 = Cst$

$xy^2(x-y)^3 = Cst.$

Démonstration. — Nous savons que L est (contenue dans) une courbe algébrique : soit $Q=0$ une équation irréductible de L. Puisque le champ est homogène, toute courbe homothétique de L doit être disjointe de L ou bien coïncider avec L. Il est facile de s'assurer que ceci entraîne que Q est de la forme $Q_0 - Q_1$ où Q_0 et Q_1 sont des polynômes homogènes. Autrement dit, l'équation des feuilles de $\mathcal{F}$ est de la forme :

$$l_1^{k_1} l_2^{k_2} \cdots l_\alpha^{k_\alpha} = Cst$$

où les l_i sont des formes linéaires indépendantes et les k_i sont des entiers *relatifs* non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Quitte à changer tous les signes, on peut supposer que la somme δ des k_i est positive ou nulle.

Nous allons distinguer deux cas.

Si la courbe L ne contient pas l'origine dans son adhérence, cela signifie que tous les k_i sont strictement positifs. Alors, la proposition résulte de 2.2 puisque nous avons établi que les courbes L sont unicursales ou elliptiques.

Le cas plus délicat à étudier est celui où L contient l'origine dans son adhérence. Cela signifie que L est une séparatrice sur laquelle le champ est non nul (puisque L est une orbite régulière). Nous avons vu que ceci n'est possible que si cette séparatrice est lisse et que le champ est nécessairement d'ordre 2 le long de cette séparatrice. Ainsi, nous savons que $k = 2$, c'est-à-dire que le champ étudié est quadratique.

Un champ quadratique laisse invariant au plus trois droites passant par l'origine (s'il est non dicritique, ce que nous supposons). Par conséquent, nous savons que l'équation du feuilletage étudié contient au plus trois facteurs *i.e.* trois formes linéaires indépendantes (dont les exposants sont des entiers relatifs).

Cette équation ne peut pas contenir qu'un seul facteur puisque nous savons qu'au moins deux exposants sont de signes différents.

Si elle contient deux facteurs, elle s'écrit :

$$(a_1x + b_1y)^{k_1}(a_2x + b_2y)^{-k_2} = Cst$$

où k_1 et k_2 sont strictement positifs et premiers entre eux. Ces courbes ne sont lisses à l'origine que si l'un des deux exposants est égal à 1. Dans une coordonnée convenable, on trouve donc l'équation :

$$yx^{-n} = Cst$$

avec n entier strictement positif.

Examinons maintenant le cas de trois facteurs

$$(a_1x + b_1y)^{k_1}(a_2x + b_2y)^{k_2} = Cst(a_3x + b_3y)^{k_3}$$

où les k_i sont des entiers strictement positifs. On remarque qu'une droite générique passant par l'origine coupe cette courbe en $n = \mid k_1 + k_2 - k_3 \mid$ points distincts de l'origine.

Remarquons qu'un champ quadratique semi-complet au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ est conjugué au champ $x^2\partial/\partial x$ et son flot semi-global est celui d'un groupe à 1 paramètre parabolique dans le groupe projectif de $\mathbf{C}P(1)$. Il suffit en effet de s'assurer, par exemple par un calcul explicite du flot, que la forme normale $(x^2 + kx^3)\partial/\partial x$ ne peut être semi-complète que pour $k = 0$. Par conséquent, l'application «temps» que nous avons notée précédemment Φ_p est injective, c'est-à-dire que nous sommes dans le cas **A**. Nous avons vu que dans ce cas, on peut choisir le temps T et les coordonnées dans $\mathbf{C}^2$ de sorte que : $y(T)/x(T) = (T-1)^n$ Écrivons à nouveau l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dT} = x^2R\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^2R(1, (T-1)^n)$$

où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. En intégrant, on trouve que la fonction $x(T)$ est de la forme :

$$x(T) = 1/((T-1)g((T-1)^n))$$

où g est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Nous allons maintenant chercher dans quels cas une courbe unicursale de la forme :

$$T \mapsto (1/((T-1)g((T-1)^n)), (T-1)^{n-1}/g((T-1)^n))$$

peut satisfaire une équation à trois facteurs. En substituant, il vient :

$$((T-1)g((T-1)^n))^{-k_1-k_2+k_3}(a_1+b_1(T-1)^n)^{k_1}(a_2+b_2(T-1)^n)^{k_2} \\ \cdot(a_3+b_3(T-1)^n)^{-k_3} = Cst.$$

Supposons d'abord $k_1+k_2 > k_3$. On obtient l'identité polynomiale :

$$(a_1+b_1(T-1)^n)^{k_1}(a_2+b_2(T-1)^n)^{k_2} \\ = Cst((T-1)g((T-1)^n))^n(a_3+b_3(T-1)^n)^{k_3}.$$

Puisque les trois facteurs sont indépendants deux à deux, $(a_3+b_3(T-1)^n)$ ne peut diviser le premier membre que s'il s'agit d'une constante, c'est-à-dire si $b_3 = 0$. Puisque $(T-1)$ divise le membre de droite, l'un des deux facteurs $(a_1+b_1(T-1)^n)$ ou $(a_2+b_2(T-1)^n)$ est divisible par $(T-1)$. On peut toujours supposer que c'est le second, *i.e.* $a_2 = 0$. On obtient :

$$(a_1+b_1(T-1)^n)^{k_1}(T-1)^{nk_2} = Cst((T-1)^n g((T-1)^n)^n).$$

En changeant de variables $u = (T-1)^n$, on obtient :

$$(a_1+b_1u)^{k_1}u^{k_2} = Cst(ug(u)^n).$$

Le polynôme g est de degré au plus 2 et il ne peut clairement pas être constant. Les seuls facteurs qui peuvent diviser g sont u et (a_1+b_1u). À une constante près, g ne peut être que u, (a_1+b_1u), u^2, $(a_1+b_1u)^2$ ou $u(a_1+b_1u)$. La seule solution est $g(u) = (a_1+b_1u)$, ce qui donne $k_1 = n$ et $k_2 = 1$ et finalement $k_3 = 1$ car $n = k_1+k_2-k_3$. Ainsi, nous sommes arrivés à l'équation du feuilletage :

$$(a_1x+b_1y)^n y = Cst.x.$$

À changement linéaire de variables près, on a $x^n y(x-y)^{-1} = Cst$ comme dans l'énoncé de la proposition. Il faut encore étudier le cas où

$k_1 + k_2 < k_3$. En procédant exactement de la même manière, on obtient l'identité polynomiale :

$$((T-1)g((T-1)^n))^n(a_1 + b_1(T-1)^n)^{k_1}(a_2 + b_2(T-1)^n)^{k_2}$$
$$= Cst(a_3 + b_3(T-1)^n)^{k_3}$$

qui est impossible. Ceci termine la démonstration de la proposition. □

Il résulte de la proposition précédente que le champ X^k est de la forme $f.X$ où f est un polynôme homogène et X est l'un des champs décrits dans le théorème :

- $X_{n,m} = (my\partial/\partial x - nx\partial/\partial y)$ où m, n sont des entiers positifs.
- $X_{n,-1} = x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y$ où n est un entier positif.
- $X_{n+1,1,-1} = x^2\partial/\partial x - y(nx - (n+1)y)\partial/\partial y$ où n est un entier.
- $X_{1,1,1} = x(x-2y)\partial/\partial x + y(y-2x)\partial/\partial y$.
- $X_{1,1,2} = x(x-3y)\partial/\partial x + y(y-3x)\partial/\partial y$.
- $X_{1,2,3} = x(2x-5y)\partial/\partial x + y(y-4x)\partial/\partial y$.

Il reste à déterminer les polynômes homogènes f tels que $f.X$ soit semi-complet.

LEMME 2.13. — *Soit f un polynôme homogène. Le champ $f.X_{1,1,1}$ (resp. $f.X_{1,1,2}$, $f.X_{1,2,3}$) est semi-complet si et seulement si f est de la forme $[xy(x-y]^a$ (resp. $[xy(x-y)^2]^a$, $[xy^2(x-y)^3]^a$).*

Démonstration. — Soit p un point générique et identifions l'orbite de p par $X = X_{1,1,1}$ (resp. $X_{1,1,2}$, $X_{1,2,3}$) à un tore complexe $\mathcal{T}$ moins une partie finie $\mathcal{S}$. Dans cette identification, le flot semi-global Φ de X agit par translations de ce tore.

Le flot semi-global Ψ de $f.X$ permet aussi d'identifier l'orbite de Ψ qui passe par p au complémentaire d'une partie finie $\mathcal{S}'$ dans un tore $\mathcal{T}'$. Puisqu'une orbite de $f.X$ est *a priori* le complémentaire d'une partie finie d'une orbite de X, on a un plongement holomorphe de $\mathcal{T}' \setminus \mathcal{S}'$ dans $\mathcal{T} \setminus \mathcal{S}$. Il en résulte que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont isomorphes. Puisqu'un tore complexe ne possède qu'un champ de vecteurs holomorphe à multiple constant près, la fonction f est constante sur les orbites de X. Il en résulte que f a bien la forme annoncée. □

De même, on a le résultat suivant :

LEMME 2.14. — *Soient m et n deux entiers strictement positifs et premiers entre eux. Soit f un polynôme homogène non constant. Supposons que le champ $fX_{n,m}$ soit semi-complet. Alors nous avons l'alternative :*

(i) *f est une intégrale première holomorphe de $X_{n,m}$, c'est-à-dire que f est de la forme $[x^n y^m]^a$.*

(ii) *$f(x,y) = x^i y^j$ et $im - jn = \pm 1$.*

Démonstration. — D'abord nous observons que les orbites (distinctes des axes) du champ $X_{n,m}$ sont des cylindres. De plus si L est l'orbite qui contient le point (x_1, y_1) $(x_1 y_1 \neq 0)$, alors L admet le paramétrage (injectif) $A_1 : T \in \mathbf{C}/2\pi i m\mathbf{Z} \mapsto (x_1 e^T, y_1 e^{-nT/m})$. Nous remarquons aussi que L est isomorphe à $\mathbf{C}P(1)$ moins deux points via l'application $T \in \mathbf{C}/2\pi i m\mathbf{Z} \mapsto \exp(T/m)$.

Nous supposons alors que le champ $fX_{n,m}$ est semi-complet dans $\mathbf{C}^2$. Si p est un point générique, alors l'orbite de p par $fX_{n,m}$ s'identifie encore à $\mathbf{C}P(1)$ moins une partie finie (correspondant aux zéros de f). Le flot semi-global de $fX_{n,m}$ sur $\mathbf{C}P(1)$ moins une partie finie, se prolonge évidemment en un flot global sur $\mathbf{C}P(1)$. Il résulte que la restriction de $fX_{n,m}$ à L est la restriction d'un champ holomorphe globalement défini sur $\mathbf{C}P(1)$.

La restriction de $fX_{n,m}$ à L s'écrit, dans la coordonnée $T \in \mathbf{C}/2\pi i m\mathbf{Z}$ sous la forme : $f(x_1 e^T, y_1 e^{-nT/m})\partial/\partial T$. Dans la coordonnée $z = \exp(T/m) \in \mathbf{C}P(1)$, ce champ s'écrit : $m^{-1} z f(x_1 z^m, x_2 z^{-n})\partial/\partial z$. Un tel champ est complet sur $\mathbf{C}P(1)$ si et seulement si il est un multiple constant de $\partial/\partial z$, de $z\partial/\partial z$ ou de $z^2\partial/\partial z$. Ceci n'est possible que si $f(x_1 z^m, x_2 z^{-n})$ est constant ou un multiple constant de $z^{\pm 1}$. Nous écrivons $f = x^i y^j (c_1 x - d_1 y)^{k_1} \cdots (c_l x - d_l y)^{k_l}$. Comme m et n sont positifs, on déduit que $k_1 = k_2 = \cdots = k_l = 0$, c'est-à-dire que $f = x^i y^j$. De plus, $mi - nj = 0$, -1 ou 1. Le lemme est démontré. □

Lorsque m ou n est nul, le feuilletage $\mathcal{F}$ engendré par $X_{m,n}$ est non singulier; il est constitué des droites parallèles à l'un des axes (des x par exemple). Le lemme suivant règle ce cas.

LEMME 2.15. — *Soit f un polynôme homogène tel que $f\partial/\partial x$ soit semi-complet. Alors, f est le produit d'un monôme y^a et d'un polynôme du second degré.*

Démonstration. — Ceci résulte de la description des champs polynomiaux semi-complets en dimension 1 : nous savons que ce sont précisément les champs de degré 2. □

LEMME 2.16. — *Soit f un polynôme homogène tel que $f.X_{n,-1}$ soit semi-complet. Si $n > 1$, c'est-à-dire si $X_{n,-1}$ n'est pas dicritique, f est nécessairement une constante ou un multiple constant de x.*

Démonstration. — Nous savons que l'équation d'une orbite de $f.X_{n,-1}$ est $y = \lambda x^n$. L'équation différentielle donne :

$$\frac{dx}{dT} = f(x,y)x = xf(x, \lambda x^n).$$

Pour qu'il s'agisse d'un champ semi-complet, il faut que, pour tout λ, le second membre soit de degré 1 ou 2 en x. Si $n > 1$, ceci n'est possible que si f est une constante ou un multiple de x. □

LEMME 2.17. — *Soit f un polynôme homogène tel que $f.X_{n+1,1,-1}$ soit semi-complet. Alors, f est une constante.*

Démonstration. — Nous savons que l'équation d'une orbite de $f.X_{n+1,1,-1}$ est $y = \lambda x/(x^{n+1} + \lambda)$. L'équation différentielle donne :

$$\frac{dx}{dT} = f(x,y)x^2 = x^2 f(x, \lambda x/(x^{n+1} + \lambda)).$$

Pour qu'il s'agisse d'un champ semi-complet, il faut que, pour tout λ, le second membre soit d'ordre 2 en x. On vérifie que ceci n'est possible que si f est une constante. □

Pour compléter la description des champs homogènes semi-complets, il faut aussi traiter le cas dicritique que nous avons exclu depuis le début de ce paragraphe. Le seul feuilletage homogène dicritique est le feuilletage radial par droites. Un champ homogène dicritique est donc de la forme :

$$f(x,y)[x\partial/\partial x + y\partial/\partial y]$$

où f est un polynôme homogène. Pour qu'un tel champ soit semi-complet, il faut et il suffit que la restriction de f à chaque droite soit de degré au plus 2, autrement dit que f soit de degré au plus 1. À conjugaison près, on trouve donc un seul champ homogène (non linéaire) semi-complet et dicritique à savoir le champ $x[x\partial/\partial x + y\partial/\partial y]$.

En résumé, nous avons montré que les seuls champs homogènes semi-complets sont ceux qui sont décrits dans le théorème C. Le théorème est ainsi établi puisque nous avons montré dans 2.6 que le premier jet non nul d'un germe de champ de vecteurs semi-complet est un champ homogène semi-complet.

3. LES SINGULARITÉS ISOLÉES D'ORDRE 2

Nous nous proposons de démontrer le théorème A de l'introduction qui décrit les champs semi-complets à singularité isolée dont le premier jet est nul.

Soit X un germe de champ de vecteurs holomorphe semi-complet possédant à l'origine de $\mathbf{C}^2$ une singularité isolée dont le premier jet est nul.

D'après [Reb], nous savons que X est d'ordre 2, c'est-à-dire que la première composante homogène non nulle est quadratique. D'après le théorème C, à changement de variables linéaire près, nous pouvons supposer que cette première composante homogène X^2 est de l'une des formes suivantes :

a. $X^2 = f(x,y)\partial/\partial x$ où f est un polynôme homogène de degré égal à 2.

b. $X^2 = x[x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y]$ où n est un entier non nul.

c. $X^2 = x^2\partial/\partial x - y(nx-(n+1)y)\partial/\partial y$ où n est un entier positif ou nul.

d. $X^2 = x(x-2y)\partial/\partial x + y(y-2x)\partial/\partial y$.

e. $X^2 = x(x-3y)\partial/\partial x + y(y-3x)\partial/\partial y$.

f. $X^2 = x(2x-5y)\partial/\partial x + y(y-4x)\partial/\partial y$.

Nous allons montrer que les cas **a**, **b** sont impossibles et que dans les cas **c**, **d**, **e**, **f**, le champ X est conjugué (comme feuilletage) à X^2.

Avant d'aborder l'étude de chaque cas, nous dégageons un lemme général très simple qui nous servira à plusieurs reprises. Rappelons que dans [Reb], il est établi que toutes les séparatrices de X sont lisses.

LEMME 3.1. — *L'holonomie d'une séparatrice de X est triviale.*

Démonstration. — Nous pouvons supposer que la séparatrice étudiée est l'axe des x. D'autre part, comme nous avons rappelé au cours de la preuve de 2.12 nous pouvons supposer également que le champ X restreint à cet axe est $x^2\partial/\partial x$. Soit $r > 0$ petit et considérons le lacet $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (r\exp(2i\pi t), 0)$ contenu dans la séparatrice. Pour $\mid y \mid$ assez petit, ce lacet se relève en un chemin contenu dans une feuille : $\gamma_y : t \in [0,1] \mapsto (r\exp(2i\pi t), h_y(t))$. L'intégrale de la forme temps est nulle sur γ car la forme dx/x^2 est exacte. Supposons que l'holonomie soit non triviale, c'est-à-dire que γ_y ne soit pas un lacet pour $y \neq 0$ petit. Alors l'intégrale de la forme temps sur γ_y est petite et on peut compléter le chemin plongé γ_y par un petit arc pour construire un autre chemin plongé sur lequel l'intégrale de la forme temps est nulle. Ceci est en contradiction avec le fait que X est semi-complet. □

3.1. Les cas «elliptiques».

Nous considérons ici les cas **d, e, f**, et nous proposons de montrer que le champ X est conjugué à $f.X^2$ pour un certain germe de fonction holomorphe f (non nul en l'origine). Pour cela, il suffit de montrer que le feuilletage $\mathcal{F}$ engendré par X est conjugué au feuilletage homogène $\mathcal{F}^2$ engendré par X^2. Pour fixer les idées, nous considérons d'abord le cas où $X^2 = X_{1,1,1}$.

Éclatons une fois les champs X et X^2 ; on obtient des champs (semi-complets) $\tilde{X}$ et $\tilde{X}^2$ sur un voisinage du diviseur exceptionnel $\mathbf{C}P(1)$, nuls sur ce diviseur. Les feuilletages engendrés se prolongent en des feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^2$ sur un voisinage du diviseur exceptionnel $\mathbf{C}P(1)$ présentant l'un et l'autre trois singularités d_1, d_2, d_3 sur ce diviseur.

Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ possède une singularité d'ordre 1 en chaque d_i (ainsi que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^2$). Soit $\tilde{\omega}_i$ (resp. $\tilde{\omega}_i^2$) la forme différentielle qui définit le germe de $\tilde{\mathcal{F}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{F}}^2$) en d_i ($i = 1,2,3$). Il se trouve que les parties linéaires de $\tilde{\omega}_i$ et de $\tilde{\omega}_i^2$ en d_i coïncident et possèdent deux directions propres dont les vecteurs propres associés sont non nuls (et de rapport positif). En particulier $\tilde{\mathcal{F}}$ possède une séparatrice *lisse* transverse au diviseur exceptionnel (cf. [Ma-Mo]).

Au voisinage de chacune des singularités d_i, on peut introduire des coordonnées (u, v) telles que :

- le point singulier d_i a pour coordonnées (0,0) et le diviseur exceptionnel a pour équation $v = 0$.

- la séparatrice lisse de $\tilde{\mathcal{F}}$ qui est transverse au diviseur exceptionnel a pour équation $u = 0$.

Nous remarquons que, dans ces coordonnées et en chaque point d_i, les parties linéaires de $\tilde{\omega}_i$ et $\tilde{\omega}_i^2$ (coïncident et) sont données par $v\,du + 3u\,dv$.

LEMME 3.2. — *Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est holomorphiquement conjugué au feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^2$ au voisinage de chaque point singulier d_i.*

Démonstration. — La séparatrice $u = 0$ correspond à une séparatrice de $\mathcal{F}$ et nous avons vu dans 3.1 que son holonomie est triviale (et donc linéarisable). Comme le rapport entre les valeurs propres de la forme $v\,du + 3u\,dv$ est positif, on déduit que cette forme est linéarisable (cf. [Ma Mo] ou [Mat]). Cela démontre le lemme. □

Le groupe fondamental Π de $\mathbf{C}P(1)\setminus\{d_1, d_2, d_3\}$ est engendré par trois éléments $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soumis à la relation $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$ et qui correspondent à des lacets autour des singularités d_1, d_2, d_3.

Comparons les holonomies de la feuille $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, d_2, d_3\}$ pour les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^2$ et $\tilde{\mathcal{F}}$. Soit G le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes de $\mathbf{C}$ au voisinage de 0. L'holonomie de la feuille $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, d_2, d_3\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ est un homomorphisme :

$$H : \Pi \to G\,.$$

Puisque le champ X^2 est homogène, l'holonomie de $\tilde{\mathcal{F}}^2$ commute aux homothéties, c'est-à-dire qu'elle est constituée d'homothéties. Le morphisme correspondant :

$$H^2 : \Pi \to \mathbf{C}^* \subset G$$

envoie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sur des racines cubiques de l'unité.

Nous avons vu que l'holonomie de $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, d_2, d_3\}$ le long des lacets $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ est constituée d'éléments d'ordre 3. Autrement dit, H s'écrit $\overline{H} \circ \sigma$ où σ est la projection canonique de Π sur le groupe $\Pi_{3,3,3}$ dont la présentation est :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1, \alpha_1^3 = 1, \alpha_2^3 = 1, \alpha_3^3 = 1)$$

et $\overline{H}$ est un homomorphisme de $\Pi_{3,3,3}$ dans G.

Ce groupe $\Pi_{3,3,3}$ est bien connu. On considère le groupe engendré par les symétries par rapport aux trois côtés d'un triangle équilatéral dans le plan euclidien. Le sous-groupe d'indice deux formé des isométries directes est isomorphe à $\Pi_{3,3,3}$. Il existe donc une injection τ de $\Pi_{3,3,3}$ dans le groupe affine complexe formé des applications $z \mapsto az + b$ défini par :

$$\tau(\alpha_1)(z) = jz$$

$$\tau(\alpha_2)(z) = j(z-1)+1$$

$$\tau(\alpha_1)(z) = j(z-(1+j)/2)+(1+j)/2$$

où $j = \exp(2i\pi/3)$. Autrement dit, τ envoie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sur des rotations d'angle $2\pi/3$ autour de trois points formant un triangle équilatéral. En particulier, le groupe $\Pi_{3,3,3}$ est résoluble.

Les homomorphismes des groupes résolubles dans G sont bien compris. En particulier, à conjugaison près, tout homomorphisme $\overline{H}$ de $\Pi_{3,3,3}$ dans G est de l'un des types suivants (voir [Lor]) :

- ou bien $\overline{H}$ est trivial.
- ou bien $\overline{H}$ a une image finie constituée des rotations d'ordre 3.
- ou bien, $\overline{H}$ est un "revêtement ramifié" de τ. Cela signifie qu'il existe un entier $\nu > 0$ tel que pour α dans $\Pi_{3,3,3}$:

$$\overline{H}(\alpha)(z) = \tau(\alpha)(z^{-\nu})^{-1/\nu}$$

pour un choix convenable de la racine ν-ème. Autrement dit, l'application $z \mapsto z^{-\nu}$ envoie un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ sur un voisinage de l'infini et «semi-conjugue» le morphisme $\overline{H}$ et le morphisme τ.

Après ces considérations générales sur la structure de $\Pi_{3,3,3}$ et de ses représentations, nous pouvons montrer le théorème principal de ce paragraphe :

THÉORÈME 3.3. — *Le feuilletage $\mathcal{F}$ est holomorphiquement conjugué au feuilletage $\mathcal{F}^2$ au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^2$.*

Démonstration. — D'abord nous allons voir qu'il suffit de montrer que l'holonomie de la feuille $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, d_2, d_3\}$ du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est conjuguée à celle du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^2$, c'est-à-dire à un groupe de rotations d'ordre 3. Supposons donc que ce soit le cas. Quitte à faire un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que les trois séparatrices de $\tilde{\mathcal{F}}$ (*i.e.* les séparatrices transverses au diviseur exceptionnel en d_1, d_2 et d_3) sont des droites. Nous considérons aussi la fibration $\eta : \tilde{\mathbf{C}}^2 \to \tilde{\pi}^{-1}(0)$ ($\simeq \mathbf{C}P(1)$) dont les fibres sont des droites.

Nous fixons un voisinage U de d_1 et considérons un difféomorphisme holomorphe h, défini dans U, qui conjugue $\tilde{\mathcal{F}}\ |_U$ (la restriction de $\tilde{\mathcal{F}}$ à U) à la restriction de $\tilde{\mathcal{F}}^2$ à $h(U)$. Naturellement nous pouvons imposer la condition supplémentaire que h préserve les fibres de η. Nous fixons une section Σ transverse au diviseur exceptionnel, contenue dans U et dans une fibre de η (et de sorte que $p = \Sigma \cap \tilde{\pi}^{-1}(0)$, alors $h(p) = p$).

Le difféomorphisme h induit une conjugaison h_Σ^* entre les holonomies (locales autour de d_1) de $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^2$ définies à l'aide de Σ. En utilisant la méthode classique de relèvement des chemins par rapport à η, nous pouvons prolonger h en un difféomorphisme défini au voisinage de toute partie compacte de $\mathbf{C}P(1)\setminus\{d_2, d_3\}$ (de plus cette extension préserve encore η). Finalement, puisque l'holonomie de $\tilde{\mathcal{F}}$ est un groupe de rotations d'ordre 3, il résulte que h_Σ^* conjugue aussi les holonomies locales de $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^2$ autour de d_2 et d_3 définies à l'aide de Σ. Sous ces hypothèses, [Ma Mo] nous assure que le difféomorphisme h se prolonge aux séparatrices de $\tilde{\mathcal{F}}$ transverses au diviseur exceptionnel. Autrement dit, h se prolonge en un difféomorphisme défini au voisinage du diviseur exceptionnel.

Remarque. — La preuve classique de [Ma Mo] utilise une fibration spéciale (qu'ils ont «préparée») alors que nous utilisons la fibration (Hopf) provenant de l'éclatement de $\mathbf{C}^2$. Cependant, dans notre cas, il est évident qu'on peut les conjuguer en préservant les fibrations puisqu'il y a des intégrales premières locales que l'on peut «linéariser» de façon fibrée. Le lecteur peut aussi consulter [Mat] pour voir une démonstration de l'existence d'une conjugaison (fibrée) sans utiliser des fibrations spéciales.

Il ne reste donc qu'à montrer que l'holonomie de $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, d_2, d_3\}$ est un groupe de rotations d'ordre 3. Puisque nous savons que les $H(\alpha_i)$ sont d'ordre trois, il s'agit de montrer que le morphisme $\overline{H}$ n'est pas conjugué à un revêtement ramifié de τ. Supposons donc par l'absurde que ce soit le cas.

Considérons l'action affine de $\tau(\Pi_{3,3,3})$ sur le plan complexe. Il existe un réseau Γ dans $\mathbf{C}$ (engendré par les racines cubiques de l'unité) tel que si z est dans Γ, alors z est un point fixe isolé d'une certaine rotation de $\Pi_{3,3,3}$. On peut préciser ce fait de la façon suivante. Soit D un (grand) disque dans $\mathbf{C}$, et z un point de Γ situé hors de D. On peut alors trouver une suite $z_0, z_1, \ldots, z_l$ de points qui sont tous situés hors de D et tels que :

• $z_0 = z$ et $z_l = z$,

• chaque z_i (pour $i = 1, \ldots, l$) est de la forme $\tau(\beta_i)(z_{i-1})$ où β_i est égal à α_1, α_2 ou α_3,

• le point z est un point fixe isolé de $\beta_l \circ \ldots \circ \beta_1$.

D'autre part, pour tout z hors de D, il existe une suite z_l (pour $l \geqslant 0$) telle que :

• $z_0 = z$; la suite z_l est contenue dans le complémentaire de D et tend vers l'infini,

• chaque z_l ($l > 0$) est l'image du précédent par l'un des générateurs $\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2)$ ou $\tau(\alpha_3)$.

Il convient ici de distinguer le groupe de germes $H(\Pi)$ du pseudogroupe local d'holonomie. Soit B une petite boule autour de l'origine de $\mathbf{C}$ dans lequel l'holonomie des trois générateurs α_i est définie et dans laquelle ces holonomies sont «semi-conjuguées» par $z^{-\nu}$ à l'action affine de Π dans le complémentaire d'un grand disque D de $\mathbf{C}$. L'observation précédente sur les points fixes isolés permet de conclure qu'il existe des z dans B arbitrairement proches de l'origine et qui sont des points fixes isolés d'un élément du pseudogroupe d'holonomie défini en z. Notre deuxième observation concernant la suite de points tendant vers l'infini montre que toutes les orbites du pseudogroupe tendent vers l'origine.

En termes du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, nous avons établi que toutes les feuilles s'accumulent sur le diviseur $\mathbf{C}P(1) \setminus \{d_1, d_2, d_3\}$. Les points fixes correspondent à des lacets dans les feuilles dont l'holonomie est non triviale. Soit $\tilde{\Phi}$ le flot semi-global de $\tilde{X}$. Un lacet dans une feuille passant par un point p correspond à un point fixe :

$$\tilde{\Phi}(T_0, p) = p,$$

où T_0 est l'intégrale de la forme temps sur lacet. Si l'holonomie du lacet est non triviale, la période T_0 est non nulle. L'ensemble analytique formé des points fixes de $\tilde{\Phi}(T_0, -)$ est une réunion de feuilles et contient p. Nous avons vu que toutes les feuilles s'accumulent sur le diviseur exceptionnel. Par conséquent, tous les points voisins de ce diviseur sont fixes. C'est une contradiction avec le fait que le lacet considéré est d'holonomie non triviale. Cette contradiction termine la démonstration du théorème. □

Il faut encore décrire les germes f tels que $X = f.X_{1,1,1}$ est semi-complet. On peut en particulier se demander si on peut toujours supposer que $f = 1$, à conjugaison près. Nous allons montrer qu'il n'en est rien. Nous savons qu'une orbite générique d'un champ semi-complet du type $X = f.X_{1,1,1}$ est un ouvert d'une courbe elliptique et il résulte de notre discussion que les périodes de la forme temps sur cette orbite engendrent un réseau Γ de $\mathbf{C}$. Dans le cas de $X_{1,1,1}$ toutes ces courbes elliptiques sont isomorphes entre elles de sorte que les réseaux ne dépendent pas de l'orbite, à similitude près.

Nous allons décrire une construction qui montre qu'il existe des champs semi-complets pour lesquels ces réseaux dépendent effectivement de l'orbite et ceci établira que la fonction f ne peut pas en général choisie constante. Cette construction est inspirée de la description par Kodaira des fibrations elliptiques [Kod] et elle éclaire la structure des champs que nous étudions.

Soit D un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}$ stable par multiplication par $j = \exp(2i\pi/3)$ et a, b deux fonctions holomorphes sur D telles que $a(0) = 1$, $b(0) = j$ et b/a ne prend pas de valeurs réelles sur D.

On considère l'action holomorphe de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sur $\mathbf{C} \times D$ définie par :

$$((m,n),(x,y)) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{C} \times D \mapsto (x + ma(y) + nb(y), y) \in \mathbf{C} \times D.$$

Le quotient par cette action est une surface complexe S qui fibre au-dessus de D et dont les fibres sont des courbes elliptiques. La fibre au-dessus de 0 est le «tore hexagonal» quotient de $\mathbf{C}$ par le réseau engendré par 1 et j qui possède une symétrie d'ordre 3. Sur $\mathbf{C} \times D$, on considère le flot holomorphe Ψ défini pour $T \in \mathbf{C}$ et $(x,y) \in S$ par :

$$\Psi(T,(x,y)) = (x + Ty, y).$$

Ce flot passe bien sûr au quotient en un flot sur S et nous le notons de la même façon. Considérons enfin le difféomorphisme d'ordre 3 de $\mathbf{C} \times D$ envoyant (x,y) sur (jx, jy). Il commute évidemment au flot Ψ. La condition pour que ce difféomorphisme passe au quotient sur S est la suivante :

$$b(y) = ja(j^2y)$$

$$a(y) + j^2a(jy) + ja(j^2y) = 0.$$

Nous supposerons cette condition vérifiée; elle signifie que les termes du développement en série entière de a dont le rang est congru à 1 modulo

3 sont nuls. Le quotient de S par ce difféomorphisme est une surface $\tilde{S}$ qui possède trois points singuliers qui correspondent aux points fixes du difféomorphisme et qui est munie d'un flot holomorphe $\tilde{\Psi}$.

Il est facile de résoudre ces singularités. Au voisinage d'un point singulier, il s'agit du quotient de $\mathbf{C}^2$ par $(x, y) \simeq (jx, jy)$ et il suffit donc d'un éclatement par point singulier, introduisant au total trois diviseurs exceptionnels $\mathbf{C}P(1)$. On obtient donc une surface lisse $\overline{S}$ munie d'un flot holomorphe $\overline{\Psi}$ et qui contient quatre droites projectives invariantes par le flot : les trois diviseurs introduits par éclatement et le quotient du tore hexagonal $y = 0$ par le difféomorphisme d'ordre 3. Cette dernière droite est formée de points fixes du flot et on calcule que son auto-intersection est égale à -1 (voir [Kod]). On peut donc l'imploser et obtenir finalement une surface complexe lisse Σ munie d'un flot holomorphe Φ, qui possède un unique point fixe et trois séparatrices. Les autres orbites sont des courbes elliptiques dont le module est en général non constant (si b/a n'est pas constant). En considérant le germe de cette action on obtient donc des germes de champs semi-complets au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$.

Lorsque a et b sont des fonctions constantes, on retrouve le champ $X_{1,1,1}$. En effet, dans ce cas on peut prendre $D = \mathbf{C}$ et on peut considérer l'action suivante de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$:

$$(\lambda, (x, y)) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \mapsto (x, \lambda y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}.$$

On remarque que cette action normalise Ψ. Plus précisément :

$$\Psi(T, (x, \lambda y)) = \lambda . \Psi(\lambda T, (x, y)).$$

Cette action passe au quotient et définit, après désingularisation et implosion, une action de $\mathbf{C}^*$ sur Σ qui normalise le flot Φ. Il est clair que l'action obtenue de $\mathbf{C}^*$ sur Σ est conjuguée à l'action standard de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{C}^2$ par homothéties de sorte que le fait que Φ soit normalisé signifie simplement que le champ de vecteurs correspondant est homogène de degré 2. Puisque nous avons décrit les champs homogènes semi-complets au paragraphe précédent, on voit que le champ obtenu est bien conjugué au champ $X_{1,1,1}$.

Lorsque les fonctions a et b ne sont pas constantes, le champ de vecteurs obtenu X a le même jet d'ordre 2 que $X_{1,1,1}$ et d'après le théorème il est conjugué à $f.X_{1,1,1}$ pour une certaine fonction f. Nous affirmons que f ne peut être choisi constant, c'est-à-dire que les germes de X et $X_{1,1,1}$ ne sont pas conjugués au voisinage de l'origine. Remarquons d'abord qu'une orbite de X ou de $X_{1,1,1}$ rencontre un voisinage de l'origine sur un ouvert d'une courbe elliptique tel que toute courbe de cette courbe elliptique est homologue à une courbe de l'ouvert. Si les germes de X et $X_{1,1,1}$ étaient conjugués, les périodes des formes temps pour X et $X_{1,1,1}$, restreintes à des voisinages de l'origine, seraient les mêmes sur les orbites associées par la conjugaison. Il résulterait alors de la remarque précédente que les périodes des formes temps sur les courbes elliptiques toutes entières seraient les mêmes, c'est-à-dire que les courbes elliptiques seraient conformément équivalentes. Puisque toutes les courbes elliptiques qui apparaissent pour X sont isomorphes entre elles, on en déduirait la même propriété pour $X_{1,1,1}$ mais nous avons vu que ce n'est pas le cas si a et b ne sont pas constantes.

Remarque. — Il n'est probablement pas difficile de montrer que tout champ semi-complet dont le 2-jet est $X_{1,1,1}$ est conjugué holomorphiquement à un champ construit comme ci-dessus. De même, il n'est probablement pas difficile de déterminer à quelles conditions (portant sur les fonctions a et b) les champs obtenus sont conjugués.

Pour terminer ce paragraphe, il faut encore examiner les cas des champs de vecteurs $X_{1,1,2}$ et $X_{1,2,3}$. Les preuves sont exactement les mêmes que celles que nous venons de donner et il suffit de faire les changements suivants.

Pour $X_{1,1,2}$, les ordres des holonomies des lacets $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sur le diviseur exceptionnel sont 2,2 et 4 respectivement. Le groupe $\Pi_{3,3,3}$ est remplacé par le groupe $\Pi_{2,2,4}$ engendré par les rotations d'ordre 2,2 et 4 et de centres aux sommets d'un triangle isocèle rectangle. La courbe elliptique correspondante est le quotient de $\mathbf{C}$ par les entiers de Gauss, *i.e.* le réseau engendré par 1 et $i = \sqrt{(-1)}$. La multiplication par i sur le quotient est d'ordre 4, possède un point fixe et deux orbites à deux éléments. Au total, ces trois orbites où l'action de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ n'est pas libre correspondent aux trois séparatrices.

Pour $X_{1,2,3}$, les ordres des holonomies des lacets $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sur le diviseur exceptionnel sont 2, 3 et 6 respectivement. Le groupe $\Pi_{3,3,3}$ est remplacé par le groupe $\Pi_{2,3,6}$ engendré par les rotations d'ordre 2,3 et 6 et de centres aux sommets d'un demi-triangle équilatéral. La courbe elliptique correspondante est le quotient de $\mathbf{C}$ par le réseau engendré par 1 et $j = \exp(2i\pi/3)$ (comme pour $X_{1,1,1}$). La multiplication par $(1+j)/2$ sur le quotient est d'ordre 6, possède un point fixe, une orbite à deux éléments et une orbite à trois éléments. Au total, ces trois orbites où l'action de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ n'est pas libre correspondent aux trois séparatrices.

3.2. Le cas «parabolique».

Nous considérons ici le cas **c** et nous nous proposons de montrer que le champ X est conjugué à fX^2 pour un certain germe de fonction holomorphe f non nul en l'origine. Autrement dit, nous allons démontrer la

PROPOSITION 3.4. — *Soit X un germe de champ de vecteurs holomorphe et bidimensionnel pour lequel l'origine est une singularité isolée d'ordre 2. Soit X^2 le champ homogène engendré par la partie quadratique de X et supposons que $X^2 = x^2\partial/\partial x - y(nx-(n+1)y)\partial/\partial y$, $n \geqslant 0$ (à un changement de coordonnées linéaires près). Supposons de plus que le germe X soit semi-complet. Alors X est holomorphiquement conjugué au champ fX^2 où f est un germe de fonction holomorphe non nul en l'origine.*

Nous considérons les champs X et $X^2 = x^2\partial/\partial x - y(nx-(n+1)y)\partial/\partial y$ et appelons $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^2$ les (germes) de feuilletages holomorphes définis par les orbites de X et de X^2 respectivement. Le feuilletage $\mathcal{F}^2$ possède exactement trois droites invariantes, à savoir les axes $\{x=0\}$ et $\{y=0\}$ et la droite d'équation $\{x-y=0\}$.

Soient $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^2$ les éclatements de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}^2$. Il se trouve que ces feuilletages possèdent exactement trois singularités sur le diviseur exceptionnel. Nous désignons ces singularités par d_1, d_2, d_3 et remarquons qu'elles correspondent aux droites invariantes par $\mathcal{F}^2$.

Nous remarquons encore que d_i est une singularité d'ordre 1 pour $\mathcal{F}$ (ainsi que pour $\mathcal{F}^2$). De plus, si $\tilde{\omega}_i$ (resp. $\tilde{\omega}_i^2$) est la forme différentielle qui définit le germe de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{F}}^2$) au voisinage de d_i, alors les parties linéaires de $\tilde{\omega}_i$ et $\tilde{\omega}_i^2$ en d_i sont les mêmes. Ces parties linéaires possèdent deux directions propres distinctes auxquelles sont associées des valeurs propres non nulles.

Au voisinage de chacune des singularités d_i, on peut introduire des coordonnées (u,v) telles que :

- le point d_i a pour coordonnées $(0,0)$ et le diviseur exceptionnel a pour équation $v=0$.

- la séparatrice lisse de $\tilde{\mathcal{F}}^2$ en d_i transverse au diviseur exceptionnel a pour équation $u=0$.

Soient $\tilde{\omega}_{i(\mathrm{lin})}$ et $\tilde{\omega}^2_{i(\mathrm{lin})}$ les parties linéaires de $\tilde{\omega}_i$ et de $\tilde{\omega}_i^2$ au point d_i (de sorte que $\tilde{\omega}_{1(\mathrm{lin})} = \tilde{\omega}^2_{1(\mathrm{lin})}$). Dans les coordonnées (u,v) ci-dessus, nous avons :

$$\tilde{\omega}_{1(\mathrm{lin})} = -(n+1)u\,dv + v\,du \ , \ \tilde{\omega}_{2(\mathrm{lin})} = u\,dv + v\,du \ ,$$
$$\tilde{\omega}_{3(\mathrm{lin})} = (n+1)u\,dv + v\,du \,.$$

LEMME 3.5. — *Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est holomorphiquement conjugué au feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^2$ au voisinage de chaque point singulier d_i.*

Démonstration. — En les points singuliers d_2 et d_3 les rapports entre les valeurs propres des formes $\tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ sont positifs. En particulier $\tilde{\mathcal{F}}$ admet des séparatrices lisses et transverses au diviseur exceptionnel en d_2 et en d_3. Les holonomies de ces séparatrices sont donc triviales et par conséquent $\tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ sont linéarisables (cf. lemme (3.2)).

Le cas plus délicat est celui de $\tilde{\omega}_1$ puisque le rapport entre ses valeurs propres est un entier négatif.

Considérons d'abord le cas $n = 0$. Alors $\tilde{\omega}_{1(\mathrm{lin})} = v\,du - u\,dv$, c'est-à-dire que $\tilde{\omega}_1$ est *dicritique* et donc *linéarisable.*

Supposons maintenant $n \geqslant 1$. Nous rappelons que dans ce cas $\tilde{\omega}_1$ admet la forme normale de Poincaré-Dulac ci-dessous (cf. [Arn]) :

$$\tilde{\omega}_1 = ((n+1)u + av^{n+1})\,dv - v\,du$$

où $a = 0$ ou $a = 1$.

Cette singularité n'est donc pas *a priori* linéarisable. Cependant nous allons voir que l'hypothèse que le champ est semi-complet entraîne la linéarisabilité. Supposons donc par l'absurde que $a = 1$. Nous appelons $\tilde{\mathcal{F}}_1$ le feuilletage défini par $\tilde{\omega}_1$. Nous allons montrer d'abord que le champ $v[((n+1)u + v^{n+1})\partial/\partial u + v\partial/\partial v]$ n'est pas semi-complet.

Nous observons que les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_1$ peuvent être paramétrées par $u(T) = (v_0^{n+1}T + u_0)e^{(n+1)T}$ et $v(T) = v_0 e^T$. Nous considérons, dans une telle feuille fixée, le chemin $c(t) = (u(2\pi it)), v(2\pi it))$ $(t \in [0,1])$. Il s'agit évidemment d'un chemin plongé sur cette feuille.

Soit dT la 1-forme temps définie par $v[((n+1)u+v^{n+1})\partial/\partial u+v\partial/\partial v]$. Nous avons donc

$$\frac{dv}{dT} = v^2 \ \text{ et donc } \ dT = \frac{dv}{v^2}\,.$$

Il résulte que l'intégrale de dT le long de c est égale à l'intégrale de dv/v^2 le long de $t \mapsto v(2\pi it) = e^{2\pi it}$. Comme cette dernière intégrale vaut *zéro*, on déduit que le champ $v[((n+1)u+v^{n+1})\partial/\partial u+v\partial/\partial v]$ n'est pas semi-complet.

Soit $d\tilde{T}$ la 1-forme temps définie par $\tilde{X}$. Nous remarquons que le champ $\tilde{X}$, au voisinage de d_1, s'écrit $f(u,v)[((n+1)u+v^{n+1})\partial/\partial u+v\partial/\partial v]$, où $f(u,v)=v.g(u,v)$ avec $g(0,0)\neq 0$. D'après la discussion ci-dessus, il est facile de voir qu'il existe un chemin plongé dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ le long duquel l'intégrale de $d\tilde{T}$ s'annule. On obtient une contradiction qui prouve que $\tilde{\omega}_1$ est linéarisable.

La démonstration du lemme est terminée. □

Démonstration de la proposition 3.4. — Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que les germes de feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^2$ sont holomorphiquement conjugués. Pour vérifier cela, nous démontrerons que leurs éclatements $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^2$ sont holomorphiquement conjugués au voisinage du diviseur exceptionnel $\tilde{\pi}^{-1}(0)$.

Nous considérons les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^2$. Quitte à faire un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que les séparatrices de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont des droites. Nous fixons un voisinage U de d_1 et un difféomorphisme holomorphe h défini dans U qui conjugue la restriction de $\tilde{\mathcal{F}}$ à U à celle de $\tilde{\mathcal{F}}^2$ à $h(U)$. Nous pouvons supposer en plus que h préserve la fibration $\eta : \tilde{\mathbf{C}}^2 \to \tilde{\pi}^{-1}(0)$ (dont les fibres sont des droites).

Comme dans le théorème 3.3, nous fixons alors une section transversale Σ contenue dans U et dans une fibre de η. Le difféomorphisme h induit alors une conjugaison entre les holonomies locales (par rapport aux feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^2$) du diviseur exceptionnel autour de d_1 (définies à l'aide de Σ).

Maintenant nous prolongeons h par la méthode de relèvements de chemins (par rapport à η). Nous observons que l'holonomie de la feuille $\mathbf{C}P(1)\setminus\{d_1,d_2,d_3\}$ est un groupe cyclique d'ordre $n+1$. Parce que le rapport entre les valeurs propres de $\tilde{\omega}_2$ (resp. $\tilde{\omega}_3$) en d_2 (resp. d_3) est positif, on sait d'après [MaMo] que h s'étend aux séparatrices de $\tilde{\mathcal{F}}$ transverses au diviseur exceptionnel. Autrement dit, h se prolonge en un difféomorphisme défini au voisinage du diviseur exceptionnel.

La proposition est démontrée. □

3.3. Les cas non semi-complets.

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que les cas restants, *i.e.* **a, b**, ne sont jamais semi-complets. Nous commençons par le cas **a**.

Le cas **a**, *i.e.* $X^2 = P(x,y)\partial/\partial x$ avec P un polynôme homogène de degré 2.

Notre but sera de démontrer la proposition 3.6, ci-dessous, qui rend compte du cas **a**.

PROPOSITION 3.6. — *Soit X un germe bi-dimensionnel de champ de vecteurs holomorphe pour lequel l'origine est une singularité isolée d'ordre 2. Soit X^2 le champ homogène engendré par la composante de degré 2 du développement de X en série entière. Supposons $X^2 = P(x,y)\partial/\partial x$, avec P un polynôme homogène de degré 2, alors X n'est pas semi-complet.*

Avant de démontrer cette proposition nous faisons quelques rappels.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe ayant une singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^2$ et soit ω une 1-forme différentielle holomorphe (à singularité isolée) qui définit $\mathcal{F}$. Nous voulons définir la *multiplicité de $\mathcal{F}$ le long d'une séparatrice lisse $\mathcal{C}$*, qui sera notée $\mathrm{mult}_{\mathcal{C}}\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{C}$ une telle séparatrice lisse de $\mathcal{F}$ et considérons des coordonnées (x,y) dans lesquelles $\mathcal{C}$ coïncide avec l'axe $\{y=0\}$. Dans ces coordonnées ω s'écrit $w = A(x,y)\,dy - yB(x,y)\,dx$. Nous posons alors

$$\mathrm{mult}_{\mathcal{C}}\mathcal{F} = \mathrm{ord}\,A(x,0),$$

où $\mathrm{ord}\,A(x,0)$ désigne l'ordre en $0 \in \mathbf{C}$ de la fonction $x \mapsto A(x,0)$. Nous notons $\mathrm{ord}_{(0,0)}\mathcal{F}$ l'ordre du feuilletage $\mathcal{F}$ en $(0,0) \in \mathbf{C}^2$ et remarquons que, pour toute séparatrice lisse $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ on a $\mathrm{mult}_{\mathcal{C}}\mathcal{F} \geqslant \mathrm{ord}_{(0,0)}\mathcal{F}$.

Supposons de plus que $\mathcal{F}$ n'est pas dicritique. Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ l'éclatement de $\mathcal{F}$ et $p_1,\ldots,p_s$ les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ (toutes contenues dans le diviseur exceptionnel). Pour tout $i \in \{1,\ldots,s\}$, la singularité p_i possède une séparatrice lisse contenue dans $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Nous pouvons donc considérer $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(0)}\tilde{\mathcal{F}}_{p_i}$, la multiplicité du germe de feuilletage défini par $\tilde{\mathcal{F}}$ en p_i le long de cette séparatrice. La formule suivante est bien connue (voir par exemple [MaMo]) :

$$\mathrm{ord}_{(0,0)}\mathcal{F} + 1 = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(0)}\tilde{\mathcal{F}}_{p_i}. \tag{2}$$

Soit k l'ordre de $\mathcal{F}$. Nous pouvons aussi considérer l'ordre de $\tilde{\mathcal{F}}$ en p_i. La formule (2) affirme en particulier que s'il existe une singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$ où l'ordre de $\tilde{\mathcal{F}}$ est *strictement* supérieur à k, alors $s = 1$ et $\mathrm{ord}_{p_1}\tilde{\mathcal{F}} = \mathrm{ord}_{(0,0)}\mathcal{F} + 1 = k + 1$. Dans ce cas, quitte à faire un changement de coordonnées, la 1-forme ω s'écrit $y^k\, dy + \omega'$ où l'ordre de ω' en l'origine est *strictement* supérieur à k. En particulier si $\mathcal{F}$ admet une séparatrice lisse $\mathcal{C}$, alors la multiplicité de $\mathcal{F}$ le long de $\mathcal{C}$ est strictement supérieure à l'ordre de $\mathcal{F}$ en l'origine.

D'autre part, considérons une 1-forme différentielle ω, holomorphe, ayant une singularité isolée en l'origine de $\mathbf{C}^2$ et dont la partie linéaire en l'origine s'écrit (à un changement de coordonnées linéaires près) $x\, dy$. Sous ces hypothèses, nous disons que le germe de feuilletage $\mathcal{F}$ défini par ω est un germe de *col-nœud*. Par abus de langage nous dirons aussi que ω est un germe de *col-nœud*. Un tel germe de forme différentielle admet la forme normale :

$$f.([x(1 + \lambda y^p) + yR(x,y)]\, dy - y^{p+1}\, dx)$$

(où f est une fonction holomorphe non nulle à l'origine, $\lambda \in \mathbf{C}$, $p \geqslant 1$ est un entier et l'ordre de R en $(0,0)$ est au moins $p+1$), appelée *forme normale de Dulac* ([Dull]). En particulier, on voit que le germe de col-nœud possède une séparatrice lisse, à savoir l'axe $\{y = 0\}$, appelée la *variété forte* du col-nœud. Par ailleurs, un col-nœud peut aussi avoir une autre séparatrice lisse transverse à la variété forte. Lorsque cette séparatrice existe, elle est appelée *variété faible* du col-nœud (plus loin on donnera plus de détails sur cette variété faible).

La preuve de la proposition 3.6 repose sur l'utilisation de quatre lemmes.

LEMME 3.7. — *Soit X un germe de champ de vecteurs bi-dimensionnel et holomorphe. Supposons que le germe de feuilletage $\mathcal{F}$ défini par X est un germe de col-nœud. De plus, supposons que X n'est pas à singularité isolée et que le lieu singulier de X est contenu dans la variété forte de $\mathcal{F}$. Alors X n'est pas semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$.*

LEMME 3.8. — *Supposons que X soit un champ de vecteurs holomorphe non nul défini et semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Supposons de plus que X s'écrive sous la forme $X = fX^{\mathrm{isol}}$ où*

1. *l'origine de $\mathbf{C}^2$ est une singularité isolée de X^{isol} et la partie linéaire de X^{isol} à l'origine possède deux valeurs propres non nulles.*

2. *f est une fonction holomorphe définie au voisinage de $(0,0) \in \mathbf{C}^2$ et s'annulant sur une séparatrice lisse de X^{isol} (il existe toujours une telle séparatrice).*

Alors X possède deux séparatrices lisses et transverses en $(0,0) \in \mathbf{C}^2$.

LEMME 3.9. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphe (non identiquement nul) défini et semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage (à singularité isolée) associé à X et ω la 1-forme différentielle (à singularité isolée) qui définit $\mathcal{F}$. Supposons que $\mathcal{F}$ possède une séparatrice lisse $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{mult}_{\mathcal{C}}\mathcal{F} = 2$ et que X s'annule identiquement sur $\mathcal{C}$. Supposons en plus que la partie linéaire de ω en l'origine est nilpotente non nulle. Alors $\mathcal{F}$ possède au moins deux séparatrices distinctes.*

LEMME 3.10. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphe (non identiquement nul) défini et semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage (à singularité isolée) associé à X et soit $\tilde{\mathcal{F}}$ l'éclatement de $\mathcal{F}$. Nous supposons que*

1. *$\mathcal{F}$ est d'ordre 2 et possède une séparatrice lisse $\mathcal{C}$ sur laquelle le champ X est identiquement nul. De plus $\mathrm{mult}_{\mathcal{C}}\mathcal{F} = 2$.*
2. *Le lieu singulier de X est contenu dans la réunion des séparatrices de $\mathcal{F}$.*
3. *$\tilde{\mathcal{F}}$ ne possède que des singularités dont la partie linéaire est non nulle.*

Alors $\mathcal{F}$ possède au moins deux séparatrices distinctes.

Nous donnons la preuve de la proposition 3.6 avant de démontrer ces quatre lemmes.

Démonstration de la proposition 3.6. — Soit X un germe de champ comme dans l'énoncé de la proposition en question et soit $X^2 = P(x,y)\partial/\partial x$ sa partie quadratique. Soit $\mathcal{F}$ le germe de feuilletage défini par X et supposons par l'absurde que X soit semi-complet au voisinage de $(0,0) \in \mathbf{C}^2$.

Nous avons déjà établi que toutes les séparatrices de $\mathcal{F}$ sont lisses en l'origine. Soit $\mathcal{C}$ une séparatrice de $\mathcal{F}$ et $v_{\mathcal{C}}$ un vecteur non nul tangent à $\mathcal{C}$ en l'origine. Le vecteur $v_{\mathcal{C}}$ est invariant par la partie quadratique de X, *i.e.* $P(x,y)\partial/\partial x$, de sorte que ou v_C est parallèle à l'axe des abscisses ou $P(x,y)$ s'annule sur la droite définie par v_C. Dans la deuxième possibilité, le champ unidimensionnel induit par X sur $\mathcal{C}$ possède une singularité isolée d'ordre au moins 3 ; il n'est donc pas semi-complet. On déduit que toutes les séparatrices de $\mathcal{F}$ sont tangentes à l'axe des abscisses et que P ne s'annule pas identiquement sur cet axe.

Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ l'éclatement de $\mathcal{F}$. Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ possède ou bien 3 ou bien 2 singularités sur $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Le premier cas se produit lorsque $\{P=0\}$ contient deux droites et le second cas lorsque $\{P=0\}$ n'en contient qu'une.

Considérons d'abord le cas «générique», où $\tilde{\mathcal{F}}$ possède 3 singularités sur $\tilde{\pi}^{-1}(0)$, notées p_1, p_2 et p_3. Parmi ces singularités, il en existe deux, disons p_2 et p_3, telles que le germe de $\tilde{\mathcal{F}}$ en p_2 (resp. p_3) est un germe de col-nœud dont la variété forte est contenue dans $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Il résulte que le germe de $\tilde{X}$ en p_2 (resp p_3) n'est pas semi-complet (cf. lemme 3.7). Cette contradiction montre la proposition dans le cas «générique».

Supposons maintenant que $\tilde{\mathcal{F}}$ ne possède que deux singularités, notées p_1 et p_2, sur $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. L'une de ces singularités, disons p_1, est telle que le germe de feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ en p_1 possède deux valeurs propres non nulles. Pour démontrer la proposition il suffit de démontrer l'affirmation ci-dessous :

AFFIRMATION. — *La singularité p_2 admet au moins deux séparatrices distinctes.*

En effet, dans ce cas, au moins l'une d'entre elles n'est pas contenue dans le diviseur exceptionnel. La projection par $\tilde{\pi}$ de cette séparatrice de $\tilde{\mathcal{F}}$ en p_2 est une séparatrice de $\mathcal{F}$ qui *n'est pas* tangente à l'axe des abscisses. Comme nous avons vu, cela entraîne une contradiction avec l'hypothèse que X est semi-complet et achève la démonstration de la proposition.

Démonstration de l'affirmation. — Puisque $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(0)}\tilde{\mathcal{F}}_{p_2} = 2$, il résulte que p_2 ne peut être que de l'un des trois types suivants :

1. un germe de col-nœud dont la variété faible est contenue dans $\tilde{\pi}^{-1}(0)$;
2. une singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$ d'ordre 2 ;
3. une singularité dont la partie linéaire est nilpotente non nulle.

Cas 1 : Dans le cas 1), la variété forte du col-nœud est transverse à $\tilde{\pi}^{-1}(0)$ et l'affirmation en résulte.

Cas 2 : Supposons alors que l'ordre de $\tilde{\mathcal{F}}$ en p_2 est 2. Pour résoudre ce cas nous allons utiliser une suite d'éclatements à partir de p_2. Comme l'éclatement d'une singularité semi-complète ne peut donner origine qu'à d'autres singularités semi-complètes, dans toute la suite, nous supposerons donc que les singularités sont semi-complètes. De plus nous pouvons supposer aussi que toutes les singularités qui vont apparaître ne sont pas dicritiques, puisque, autrement, la projection de ses (diverses) séparatrices donnerait la séparatrice cherchée de p_2.

Éclatons donc $\tilde{\mathcal{F}}$ en p_2 et désignons par $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ le feuilletage qui en résulte. Nous désignons aussi par $\tilde{\pi}^{(2)}$ l'application d'éclatement qui envoie $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ sur $\tilde{\mathcal{F}}$ et nous désignons par $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$ le diviseur ajouté. Nous considérons les singularités, notées $p_1^{(2)}, \ldots, p_s^{(2)}$ où $s = 2, 3$ (puisque $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(0)} \tilde{\mathcal{F}}_{p_2} = 2$ le cas $s = 1$ est exclu, voir formule (2) et les commentaires qui la suivent) de $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ sur $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$.

Supposons d'abord que $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ ne possède aucune singularité d'ordre 2 sur $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$. Dans ce cas, toutes les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ sur $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$ sont d'ordre 1 et l'affirmation découle du lemme 3.10.

Supposons donc que $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ possède une singularité, disons $p_2^{(2)}$, d'ordre 2 sur $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$. Nous observons que $p_1^{(2)}$ possède donc multiplicité 1 sur $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$ et il en résulte que $p_1^{(2)}$ possède une séparatrice transverse à $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$. En effet, ceci découle du lemme 3.8 si les deux valeurs propres de $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ en $p_1^{(2)}$ sont non nulles. D'autre part, si $p_1^{(2)}$ est un col-nœud avec la variété forte contenue dans $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$ et sans variété faible, alors, puisque le champ de vecteurs correspondant ne s'annule que sur le diviseur exceptionnel (total), le lemme 3.7 donnerait une contradiction avec l'hypothèse de semi-complétude. On déduit que $p_1^{(2)}$ admet une séparatrice transverse à $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$.

D'après l'observation ci-dessus, l'affirmation est réduite à vérifier que $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ possède en $p_2^{(2)}$ une séparatrice non contenue dans $\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)$.

Pour vérifier cela nous allons procéder par récurrence. Nous éclatons $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ en $p_2^{(2)}$ et appelons $\tilde{\mathcal{F}}^{(3)}$ le feuilletage obtenu. De plus, nous appelons $\tilde{\pi}^{(3)}$ l'application d'éclatement qui envoie $\tilde{\mathcal{F}}^{(3)}$ sur $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ et désignons par $\tilde{\pi}^{(3)-1}(p_2^{(2)})$ le diviseur ajouté. Finalement, soient $p_{s'}^{(3)}$ $s' = 2, 3$ (le cas $s' = 1$ est exclu puisque $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{(2)-1}(p_2)} \tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_1^{(2)}} = 2$, voir toujours la formule (2)) les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}^{(3)}$ sur $\tilde{\pi}^{(3)-1}(p_2^{(2)})$. Si $\tilde{\mathcal{F}}^{(3)}$ ne possède sur $\tilde{\pi}^{(3)-1}(p_2^{(2)})$ aucune singularité d'ordre 2, alors l'affirmation découle du lemme 3.10. D'autre part, si $\tilde{\mathcal{F}}^{(3)}$ possède en $p_2^{(3)}$ une singularité d'ordre 2, alors les raisonnements analogues à ceux ci-dessus réduisent l'affirmation à démontrer que $\tilde{\mathcal{F}}^{(3)}$ possède une séparatrice en $p_2^{(3)}$ qui n'est pas contenue dans $\tilde{\pi}^{(3)-1}(p_2^{(2)})$. Dans ce cas nous pouvons éclater $\tilde{\mathcal{F}}^{(3)}$ en $p_2^{(3)}$ et continuer le procédé de récurrence. Le théorème de Seidenberg (cf. [Sei]) nous assure qu'après un nombre fini d'applications de ce procédé, on obtiendra un feuilletage qui ne possède aucune singularité d'ordre 2. La démonstration de l'affirmation dans le cas **2** découlera alors du lemme 3.10.

Cas 3 : Ce cas découle immédiatement du lemme 3.9.

Cela termine la démonstration de l'affirmation. □

La démonstration de la proposition 3.6 est achevée. □

Nous donnons maintenant les démonstrations des lemmes qui ont été utilisés.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe défini au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ et soit ω une 1-forme différentielle (à singularité isolée) qui définit $\mathcal{F}$. Supposons que $\mathcal{F}$ définit un germe de col-nœud, et supposons ω sous la forme normale de Dulac. Alors le germe de forme ω admet encore une forme normale *formelle* donnée par

$$\omega_{p,\lambda} = f.[x(1+\lambda y^p)\,dy - y^{p+1}\,dx].$$

Cela veut dire qu'il existe un difféomorphisme *formel* ϕ (*i.e.* ϕ est donné par une série formelle centrée en l'origine dont la partie linéaire est inversible) qui satisfait (formellement) $\phi^*\omega = \omega_{p,\lambda}$. De plus le difféomorphisme formel ϕ s'écrit $\phi(x,y) = (\varphi(x,y), y)$.

La série formelle qui définit le difféomorphisme ϕ n'est pas convergente en général. Cependant elle est sommable dans des secteurs d'angle plus petit que $2\pi/p$ et de rayon suffisamment petit. Nous considérons un secteur angulaire ouvert $V \subset \mathbf{C}$ de sommet en $0 \in \mathbf{C}$ et d'angle θ. Nous appelons l'intersection de ce secteur avec la boule de centre en $0 \in \mathbf{C}$ et de rayon r un *secteur angulaire d'angle θ et de rayon r*. Nous rappelons le théorème suivant (cf. [HKM]) :

THÉORÈME 3.1 (Hukuara, Kimura, Matuda). — *Soit B_r la boule de centre en $0 \in \mathbf{C}$ et de rayon r et soit V un secteur angulaire d'angle strictement inférieur à $2\pi/p$ et de rayon r. Si r est choisi assez petit (l'angle de V étant fixé), il existe une application holomorphe (bornée) $\phi_V : U \times (V \setminus \{0\}) \to \mathbf{C} \times (V \setminus \{0\})$, (où U est un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$) telle que :*

(i) $\phi_V(x,y) = (\varphi_V(x,y), y)$,

(ii) $\phi_V^* \omega \wedge \omega_{p,\lambda} = 0$,

(iii) φ_V *est asymptote à* φ *en* $(0,0) \in \mathbf{C}^2$*. C'est-à-dire que, étant donné un secteur (de rayon plus petit que* r*) fermé* $\overline{W} \subset V$ *et une boule* $B \subset B_r$*, pour chaque* $i \in \mathbf{N}$ *il existe une constante* $Cst_{\overline{W},B,i} \geqslant 0$ *telle que*

$$| \varphi_V(x,y) - \varphi_i(x,y) | \leqslant Cst_{\overline{W},B,i} \mid (x,y) \mid^{i+1},$$

où φ_i *est le* i*−jet de* φ *en* $(0,0) \in \mathbf{C}^2$*.*

Démonstration du lemme 3.7. — D'après le théorème de la forme normale de Dulac et l'hypothèse sur le lieu singulier de X, quitte à faire un changement de coordonnées, nous pouvons écrire le champ X sous la forme

$$X = f.y^m \left[x(1+\lambda y^p) + yR(x,y)) \frac{\partial}{\partial x} + y^{p+1} \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad \text{avec } m \geqslant 1$$
$$\text{et } f(0,0) \neq 0.$$

Soit $\omega = (x(1+\lambda y^p) + yR(x,y))\, dy - y^{p+1}\, dx$, la 1-forme différentielle qui définit le germe de feuilletage $\mathcal{F}$. Nous savons qu'il existe un difféomorphisme formel $\phi(x,y) = (\varphi(x,y), y)$ tel que $\omega_{p,\lambda} \wedge \phi^* \omega = 0$. Nous fixons un $\varepsilon > 0$ très petit (en particulier tel que $\varepsilon < 2\pi/(p+1)^2$) et appelons V_ε le secteur angulaire de sommet en $0 \in \mathbf{C}$, d'angle $(2\pi - \varepsilon)/p$ et de rayon r assez petit. Choisissons aussi $\overline{W} \subset V_\varepsilon$ un secteur fermé de rayon plus petit que r (et d'angle légèrement plus petit que $(2\pi - \varepsilon)/p$). Soit $\phi_\varepsilon : U \times (V_\varepsilon \setminus \{0\}) \to \mathbf{C} \times (V_\varepsilon \setminus \{0\})$ (où U est un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$) l'application donnée par le théorème 3.11. L'ensemble $\{(0,y); y \in V_\varepsilon\}$ est contenu dans une feuille de $\phi_\varepsilon^* \mathcal{F}$.

Affirmation. — *Le champ* $\phi_\varepsilon^* X(0,y)$ *satisfait*

$$| \phi_\varepsilon^* X(0,y) - cst.y^{j_0} | \leqslant Cst \mid y \mid^{j_0+1}$$

pour certaine $cst \neq 0$ *et* $j_0 \geqslant p+2$ *et tout* $y \in \overline{W}$*.*

Démonstration de l'affirmation. — Il existe $cst_1 \neq 0$, Cst_1 tels que $| \phi_\varepsilon(0,y) - cst_1 y | \leqslant Cst_1 \mid y \mid^2$. Il en découle qu'il existe des constantes cst_2 et Cst_2 telles que $| X(\phi_\varepsilon(0,y)) - cst_2 y^{m+p+1} | \leqslant Cst_2 \mid y \mid^{m+p+2}$.

Par ailleurs $d\phi^{-1}_{\varepsilon \phi_\varepsilon(0,y)} = (d\phi_\varepsilon(0,y))^{-1}$. On déduit que $| d\phi^{-1}_{\varepsilon \phi_\varepsilon(0,y)} - cst_3 | \leqslant Cst_3 \mid y \mid$, pour certaines constantes cst_3 et Cst_3. Finalement il résulte que

$$| \phi_\varepsilon^* X(y) - csty^{m+p+1} | \leqslant Cst \mid y \mid^{m+p+2},$$

pour certaines constantes $cst \neq 0$ et Cst.

Comme m est strictement positif, on a que $m+p+1 \geqslant p+2$. Ceci démontre l'affirmation. □

La démonstration du lemme 3.7 se termine en utilisant le lemme suivant, analogue au lemme fondamental utilisé dans [Reb] pour montrer qu'un champ unidimensionnel d'ordre $p+2$ n'est pas semi-complet dans un secteur d'ouverture supérieure à $2\pi/(p+1)$.

LEMME 3.12. — *Soit p un entier et soit V un secteur angulaire ouvert contenu dans $\mathbf{C}$ de sommet en $0 \in \mathbf{C}$ et dont l'angle est supérieur à $2\pi/(p+1)$. Supposons que f soit une fonction holomorphe définie sur V et qu'il existe une constante Cst satisfaisant*

$$| f(x) - x^j | \leqslant Cst \mid x \mid^{j+1},$$

avec $j \geqslant p+2$ et pour tout $x \in V$ de norme assez petite. Alors, pour tout $r > 0$, il existe un chemin c plongé dans l'intersection de V avec la boule de centre en $0 \in \mathbf{C}$ et de rayon r, sur lequel l'intégrale de la 1-forme $dx/f(x)$ est nulle.

Nous passons à la démonstration du lemme 3.8.

Démonstration du lemme 3.8. — Soit X^k le champ homogène engendré par la première composante homogène non nulle du développement de X en série entière centré en l'origine. Comme $k \geqslant 2$, X^k est semi-complet dans $\mathbf{C}^2$ (corollaire 2.6) et appartient donc à la liste du théorème C. On déduit que la partie linéaire de X^{isol}, notée $X^{\text{isol}}_{\text{lin}}$, s'écrit $X^{\text{isol}}_{\text{lin}} = mx\partial/\partial x + ny\partial/\partial y$ avec m et n entiers non nuls. Si $m/n < 0$, alors X^{isol} possède deux séparatrices lisses et transverses (ceci est toujours valable même sans l'hypothèse de semi-complétude).

Dans le cas où $m/n > 0$, on déduit du théorème C que, quitte à faire un changement de coordonnées, $X^k = y(nx\partial/\partial x + y\partial/\partial y)$, avec $n \in \mathbf{N}^*$. En particulier le lieu singulier de f est une courbe lisse et donc coïncide avec une séparatrice lisse de X^{isol} qui peut être supposée l'axe $y = 0$ (en particulier on peut supposer $f(x,y) = yg(x,y)$ où $g(0,0) \neq 0$). Nous affirmons que le champ X^{isol} est linéarisable (et donc possède deux séparatrices lisses et transverses). En effet, supposons par l'absurde que cela est faux. Alors X^{isol} admet la forme normale de Poincaré-Dulac $X^{\text{isol}} = (nx + y^n)\partial/\partial x + y\partial/\partial y$. Il résulte que le champ X s'écrit $X = yg(x,y).[(nx + y^n)\partial/\partial x + y\partial/\partial y]$. Dans le lemme 3.5, nous avons vu que ce champ X n'est pas semi-complet. Cette contradiction montre que X^{isol} est linéarisable.

La démonstration du lemme 3.8 est terminée. □

Avant de commencer la démonstration du lemme 3.9, nous rappelons une formule très simple qui nous sera utile. Soit comme toujours $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe (à singularité isolée) défini au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ et soit $\tilde{\mathcal{F}}$ l'éclatement de $\mathcal{F}$. Supposons que $\mathcal{F}$ possède une séparatrice lisse $\mathcal{C}$ et désignons par $\tilde{\mathcal{C}}$ la transformée stricte de $\mathcal{C}$. Il existe donc une singularité $\tilde{p}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\tilde{\pi}^{-1}(0)$ pour laquelle $\tilde{\mathcal{C}}$ est une séparatrice lisse. Nous avons alors la formule

$$(3) \qquad \operatorname{mult}_{\tilde{\mathcal{C}}} \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{p}} = \operatorname{mult}_{\mathcal{C}} \mathcal{F} - \operatorname{ord}_{(0,0)} \mathcal{F} + 1,$$

où $\operatorname{ord}_{(0,0)} \mathcal{F}$ désigne l'ordre de $\mathcal{F}$ en l'origine.

Démonstration du lemme 3.9. — Nous considérons l'éclatement $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$. Parce que l'origine est une singularité nilpotente non triviale de $\mathcal{F}$, il résulte que $\tilde{\mathcal{F}}$ possède une unique singularité, notée $\tilde{p}$, sur $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. De plus, puisque $\mathcal{F}$ possède une séparatrice lisse $\mathcal{C}$, l'ordre de $\tilde{\mathcal{F}}$ en $\tilde{p}$ est précisément 2. Dans la suite de la démonstration nous ne ferons pas de distinction entre une courbe et sa transformée stricte.

Nous considérons le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ au voisinage de $\tilde{p}$. Ce feuilletage possède deux séparatrices distinctes en $\tilde{p}$, données par $\tilde{\pi}^{-1}(0)$ et par $\mathcal{C}$ (*i.e.* par la transformée stricte de $\mathcal{C}$), il nous suffit donc de montrer l'existence d'une troisième séparatrice.

Nous savons que $\operatorname{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(0)} \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{p}} = 2$ (cf. formule (2)) et que $\operatorname{mult}_{\mathcal{C}} \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{p}} = \operatorname{mult}_{\mathcal{C}} \mathcal{F} = 2$ (cf. formule (3)). Finalement nous observons que le champ $\tilde{X}$ (l'éclatement de X) est identiquement nul sur $\mathcal{C} \cup \tilde{\pi}^{-1}(0)$.

Nous effectuons un éclatement en $\tilde{p}$. Soient $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ le feuilletage obtenu et $\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})$ le diviseur ajouté (nous ne faisons toujours pas de distinction entre une courbe et sa transformée stricte). Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ possède des singularités $p_1^{(2)} \in \tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p}) \cap \tilde{\pi}^{-1}(0)$ et $p_2^{(2)} \in \tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p}) \cap \mathcal{C}$. L'existence de la troisième séparatrice de $\tilde{\mathcal{F}}$ en $\tilde{p}$ est donc réduite à l'affirmation ci-dessous :

AFFIRMATION. — *Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ possède encore une troisième singularité, $p_3^{(2)} \in \tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})$ qui admet une séparatrice transverse à $\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})$.*

Démonstration de l'affirmation. — Il suffit de montrer que

$$\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})}\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_1^{(2)}} = \mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})}\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_2^{(2)}} = 1.$$

En effet, nous observons que, grâce à la formule (2), on en déduit l'existence d'une troisième singularité $p_3^{(2)} \in \tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})$ de $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$. En plus, on a que $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})}\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_3^{(2)}} = 1$ et ceci entraîne l'existence d'une séparatrice de $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ en $p_3^{(2)}$ non contenue dans $\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})$.

Considérons donc des coordonnées locales (x,t) autour de $p_1^{(2)}$ telles que $\{x=0\}$ est contenu dans $\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})$ et $\{t=0\}$ est contenu dans $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Nous observons que $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{p})}\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_1^{(2)}} = 1$ (cf. formule (3)). Supposons par l'absurde que $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})}\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_1^{(2)}} \geqslant 2$. Alors si $\tilde{X}^{(2)}$ est le champ de vecteurs correspondant, $\tilde{X}^{(2)}$ s'écrit au voisinage de $p_1^{(2)}$ sous la forme $F(x,t)\tilde{X}^{2\mathrm{isol}}$ où $\tilde{X}^{2\mathrm{isol}}$ est un champ à singularité isolée dont la partie linéaire est $(x + cst.t)\partial/\partial x$ (à une constante multiplicative près). Le premier jet non nul de $\tilde{X}^{(2)}$ en $p_1^{(2)}$ s'écrit $(x + cst.t)f(x,t)\partial/\partial x$ où f est un polynôme homogène. Cependant, puisque $\tilde{X}$ est identiquement nul sur $\tilde{\pi}^{-1}(0) \cup \mathcal{C}$ (*i.e.* sur deux courbes lisses transverses), on déduit que F et donc f est divisible par x^2. Il résulte alors du théorème C que le premier jet non nul de $\tilde{X}^{(2)}$ en $p_1^{(2)}$ n'est pas semi-complet. Cette contradiction montre que $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})}\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_1^{(2)}} = 1$.

D'autre part, $\mathrm{mult}_{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_2^{(2)}} = 1$ (cf. formule (3)), donc un raisonnement analogue s'applique et on déduit que $\mathrm{mult}_{\tilde{\pi}^{(2)-1}(\tilde{p})}\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_2^{(2)}} = 1$. L'affirmation est démontrée. □

La démonstration du lemme 3.9 est terminée. □

Finalement il ne reste qu'à montrer le lemme 3.10.

Démonstration du lemme 3.10. — Supposons par l'absurde que $\mathcal{F}$ ne possède qu'une séparatrice sur laquelle X est identiquement nul. Soient $\tilde{X}$ l'éclatement de X et $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_j$ ($j = 2, 3$ puisque $\mathrm{mult}_{\mathcal{C}}\mathcal{F} = 2$) les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Au voisinage de $\tilde{p}_i$ ($i \in \{1, \dots, j\}$) le lieu singulier de $\tilde{X}$ est contenu dans les séparatrices de $\tilde{\mathcal{F}}$ en $\tilde{p}_i$. Grâce aux lemmes 3.8 et 3.7, on déduit que si au moins l'une des valeurs propres de $\tilde{\mathcal{F}}$ en $\tilde{p}_i$ est non nulle, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ admet en $\tilde{p}_i$ une séparatrice transverse à

$\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Comm $j = 2$ ou 3, s'il n'y a pas des singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ dont la partie linéaire est nilpotente (non nulle), cela entraîne le lemme.

Supposons donc qu'il existe une singularité, disons $\tilde{p}_1$, dont la partie linéaire est nilpotente. Alors, puisque $\text{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(0)}\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{p}_1} \geqslant 2$, on déduit que $j = 2$ (cf. formule (2)) et que $\text{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(0)}\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{p}_2} = 1$ (où $\tilde{p}_2$ désigne l'autre singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\tilde{\pi}^{-1}(0)$). Il résulte des lemmes 3.8 et 3.9 que $\tilde{p}_2$ admet une séparatrice transverse à $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Par ailleurs, on sait d'après le lemme 3.9 que $\tilde{p}_1$ admet elle-aussi une séparatrice non contenue dans $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Cela achève la démonstration du lemme 3.10. □

Le cas **b** se divise naturellement en deux sous-cas à savoir celui où $n = 1$ et celui où $n \neq 1$. Si $n = 1$ alors nous sommes dans le cas dicritique qui nous oblige à utiliser une technique adéquate.

Le cas **b** *dicritique i.e.* $X^2 = x(x\partial/\partial x + y\partial/\partial y)$.

Notre but est de démontrer la :

PROPOSITION 3.13. — *Soit X un germe de champ de vecteurs holomorphe bi-dimensionnel pour lequel l'origine est une singularité isolée d'ordre 2. Supposons de plus que X est dicritique. Alors X n'est pas semi-complet.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde que X est semi-complet au voisinage de l'origine. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par les orbites locales de X et soit $\tilde{\mathcal{F}}$ l'éclatement de $\mathcal{F}$. Comme la partie quadratique de X est $y(x\partial/\partial x + y\partial/\partial y)$, il résulte que $\tilde{\mathcal{F}}$ possède au plus une singularité, notée p, sur le diviseur exceptionnel, donnée dans les coordonnées locales par $x = t = 0$. Nous pouvons donc considérer une séparatrice $\mathcal{C}$ de cette singularité (si jamais il ne s'agit pas de point singulier, nous considérons simplement la feuille regulière qui contient ce point). Alors $\tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{C}})$ est une séparatrice de $\mathcal{F}$ qui est tangente à l'axe $\{y = 0\}$. Parce que la partie quadratique de X, $y(x\partial/\partial x + y\partial/\partial y)$, s'annule sur l'axe $\{y = 0\}$, le champ unidimensionnel induit par X sur $\tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{C}})$ possède une singularité isolée d'ordre au moins 3. Ce champ n'est donc pas semi-complet. Cette contradiction prouve la proposition. □

Le cas **b** *générique i.e.* $X^2 = x(x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y)$ avec $n \neq 1$.

Nous finissons cette section en démontrant la :

PROPOSITION 3.15. — *Supposons que X est un germe bi-dimensionnel de champ de vecteurs holomorphe, pour lequel l'origine est une singularité* *isolée d'ordre 2. Soit X^2 le champ homogène engendré par la composante quadratique du développement de X en série entière. Supposons que $X^2 = x(x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y)$ avec $n \neq 1$, alors X n'est pas semi-complet.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde que X est semi-complet. Grâce à [Reb], nous savons que toutes les séparatrices de X sont lisses. Alors, à chaque séparatrice $\mathcal{C}$ de X correspond un vecteur tangent non nul en l'origine qui est invariant par $X^2 = x(x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y)$, c'est-à-dire que ce vecteur est tangent ou bien à $\{y = 0\}$ ou bien à $\{x = 0\}$. Or, si X possède une séparatrice $\mathcal{C}$ dont le vecteur tangent en l'origine est parallèle à $\{x = 0\}$, alors X induit sur cette séparatrice un champ unidimensionnel d'ordre au moins 3 de sorte que X n'est pas semi-complet.

Pour démontrer la proposition il suffit alors de démontrer que X admet une séparatrice tangente à $\{x = 0\}$. D'après la discussion ci-dessus, cela revient à montrer que X admet deux séparatrices transverses (puisque cela oblige l'une d'entre elles à être tangente à $\{x = 0\}$).

Soit alors $\mathcal{F}$ le germe de feuilletage associé à X et $\tilde{\mathcal{F}}$ son éclatement. Il est clair que $\tilde{\mathcal{F}}$ possède exactement deux singularités le long de $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. L'une d'entre elles est linéaire au sens que sa partie linéaire possède deux valeurs propres non nulles (et de rapport positif). En particulier cette singularité possède une séparatrice transverse au diviseur exceptionnel qui se projette par $\tilde{\pi}$ sur une séparatrice de X tangente à $\{y = 0\}$.

Il suffit alors de montrer que l'autre singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$, notée p_2, possède une séparatrice $\mathcal{C}'$ non contenue dans le diviseur exceptionnel. En effet, la projection de $\mathcal{C}'$ par $\tilde{\pi}$ est une séparatrice lisse de X tangente à l'axe $\{x = 0\}$.

Nous considérons la nature de la singularité p_2. Il n'y a que trois possibilités : ou bien c'est un col-nœud avec la variété faible contenue dans le diviseur exceptionnel ou bien c'est une singularité d'ordre 2 ou bien une singularité dont la partie linéaire est nilpotente non triviale. Dans le premier cas la projection par $\tilde{\pi}$ de la variété forte du col-nœud nous donne la séparatrice tangente à l'axe $\{x = 0\}$ et achève la démonstration de la proposition.

Sous l'hypothèse que p_2 est une singularité d'ordre 2 ou nilpotente non triviale, il ne reste qu'à montrer qu'elle admet une séparatrice non contenue dans $\tilde{\pi}^{-1}(0)$. Nous remarquons que $\operatorname{mult}_{\tilde{\pi}^{-1}(0)} \tilde{\mathcal{F}}_{p_2} = 2$, on est donc dans la même situation de l'affirmation contenue dans la preuve de la proposition 3.6. On déduit que le procédé de «suite d'éclatements» utilisé dans la démonstration de cette affirmation s'applique et assure l'existence de la séparatrice cherchée.

La proposition est démontrée. □

Démonstration du théorème A. — Soit X un germe de champ de vecteurs comme dans l'énoncé de notre théorème. Soit X^2 sa partie quadratique. D'après le théorème C X^2 admet l'une des formes normales **a, b, c, d, e, f** de notre liste. Si X^2 est de la forme **a** ou **b**, la combinaisons des propositions 3.6, 3.13 et 3.14 montre que le champ X n'est pas semi-complet. Il résulte que X^2 admet l'une des formes **c, d, e, f** et dans ce cas la combinaison du théorème 3.3 avec la proposition 3.4 entraîne notre théorème. □

3.4. Application aux surfaces compactes.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème B de l'introduction. Nous rappelons au lecteur que tout champ de vecteurs holomorphe globalement défini sur une surface complexe compacte est complet. On peut penser que la classification de ces champs est un problème «raisonnable» et beaucoup de résultats partiels sont déjà connus. Notre théorème B apparaît donc comme une contribution qui sera peut être utile pour la solution de ce problème.

Nous commençons par quelques préliminaires sur les surfaces de Hirzebruch.

Soit n un entier positif ou nul. Rappelons que la surface de Hirzebruch F_n peut être obtenue en considérant deux copies de $\mathbf{C} \times (\mathbf{C} \cup \{\infty\})$ et en identifiant (pour $x \neq 0$) le point (x, y) de la première copie avec le point $(1/x, x^{-n}y)$ de la seconde copie (en particulier $F_0 = \mathbf{C}P(1) \times \mathbf{C}P(1)$). On note U_1 et U_2 les ouverts de F_n correspondant à ces deux copies de $\mathbf{C} \times (\mathbf{C} \cup \{\infty\})$. On remarque que la projection sur la première coordonnée réalise F_n comme un fibré holomorphe en droites au-dessus de $\mathbf{C}P(1)$. Le groupe d'automorphismes de F_n est décrit en particulier dans [Akh] ; il est de dimension $n + 5$ (dès que $n \geqslant 1$). Notre but immédiat est de décrire explicitement un flot holomorphe Φ^T sur F_n qui possède un unique point fixe et dont le premier jet en ce point est trivial.

Remarquons d'abord que si u est un polynôme en une variable de degré $d \leqslant n$, la bijection

$$(x, y) \in U_1 \longmapsto (x, y + u(x)) \in U_1$$

se prolonge holomorphiquement en un bi-holomorphisme $\mathcal{A}_u$ de F_n. Sur U_2 la transformation $\mathcal{A}_u$ s'écrit

$$(\overline{x},\overline{y}) \in U_2 \longmapsto (\overline{x},\overline{y}+\overline{x}^n u(1/\overline{x})) \in U_2.$$

Considérons maintenant un polynôme v de degré inférieur ou égal à $n+1$. On vérifie facilement que la formule ci-dessous définit un flot holomorphe sur U_1 qui se prolonge en un flot holomorphe sur F_n :

$$\Phi_v^T(x,y) = (x+T, y+v(x+T)-v(x)).$$

On remarque que, pour T fixé, $v(x+T)-v(x)$ est un polynôme de degré au plus n. La fonction $y-v(x)$ est constante sur les orbites du flot.

Avant de décrire ce flot plus précisément, nous remarquons que si on conjugue Φ_v^T par $\mathcal{A}_u$, on trouve le flot $\Phi_{v'}^T$ correspondant au polynôme $v'(x) = v(x)+u(x)$. Ainsi, à automorphisme (holomorphe) de F_n près, on peut toujours supposer que $v(x) = kx^{n+1}$ pour une certaine constante k.

Dans U_1 le flot Φ_v^T n'a pas de points fixes. Cependant, le flot Φ_v^T, dans les coordonnées $(\overline{x},\overline{y})$ de U_2 s'écrit :

$$\Phi_v^T(x,y) = \left[\frac{\overline{x}}{1+T\overline{x}}, (1+T\overline{x})^{-n}\left(\overline{y}+\frac{k}{\overline{x}}((1+T\overline{x})^{n+1}-1)\right)\right].$$

On voit donc que pour $k \neq 0$, le seul point fixe de Φ_v^T est le point de U_2 de coordonnées $(0,\infty)$. Nous pouvons supposer $k=1$. En introduisant les coordonnées ($\mathbf{x} = \overline{x}$ et $\mathbf{y} = 1/\overline{y}$), de sorte que le point fixe ait les coordonnées $(0,0)$, on trouve l'expression du flot :

$$\Phi_v^T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left[\frac{\mathbf{x}}{1+T\mathbf{x}}, (1+T\mathbf{x})^n\mathbf{x}\mathbf{y}(\mathbf{x}+\mathbf{y}[(1+T\mathbf{x})^{n+1}-1])^{-1}\right].$$

Le champ de vecteurs correspondant est (au signe près) :

$$\mathbf{x}^2\partial/\partial\mathbf{x} - \mathbf{y}(n\mathbf{x}-(n+1)\mathbf{y})\partial/\partial\mathbf{y}.$$

On reconnaît alors le champ que nous avons noté $X_{n+1,1,-1}$.

PROPOSITION 3.15. — *Soit F_n la n−ième surface de Hirzebruch. À automorphisme (holomorphe) de F_n près, il existe un seul champ de vecteurs (holomorphe) sur F_n ayant une singularité isolée d'ordre* 2.

Démonstration. — Soit X un champ de vecteurs sur F_n ayant une singularité isolée d'ordre 2. Nous considérons la projection $\pi_1 : F_n \to \mathbf{C}P(1)$ qui réalise F_n comme un fibré au-dessus de $\mathbf{C}P(1)$. D'après un lemme de Blanchard (voir par exemple [Akh, page. 44]), tout flot holomorphe préserve la fibration de sorte que X induit un champ $X_{\mathbf{C}P(1)}$ sur la base $\mathbf{C}P(1)$. Comme X possède une singularité isolée, le champ $X_{\mathbf{C}P(1)}$ n'est pas identiquement nul. De plus comme X possède une singularité d'ordre 2, le champ $X_{\mathbf{C}P(1)}$ possède lui aussi une singularité d'ordre 2. Il résulte que $X_{\mathbf{C}P(1)}$ est conjugué au champ «parabolique» $\partial/\partial x$ sur $\mathbf{C}P(1)$.

Soit Φ le flot engendré par X. D'après ce que nous venons de voir, Φ^T s'écrit :

$$\Phi^T(x,y) = (x+T, a_T(x)y + b_T(x)).$$

La condition que Φ^T se prolonge holomorphiquement en un flot sur U_2 (*i.e.* dans les coordonnées $(\overline{x},\overline{y})$) entraîne $a = Cst$. De plus, si $a \neq 1$, le point fixe de Φ^T serait hyperbolique. On déduit que $a = 1$. Pour chaque T fixé, $b_T(x)$ est un polynôme en x de degré au plus n. Par ailleurs, la condition que Φ^T est un flot impose que $b_{T_1+T_2}(x) = b_{T_1}(x) + b_{T_2}(x+T_1)$, donc $b_T(x) = u(x+T) - u(x)$ où u est un polynôme de degré au plus $n+1$. Il s'agit donc (à automorphisme de F_n près) du flot décrit ci-dessus. La proposition est démontrée. □

Nous passons à la démonstration du théorème B.

Démonstration. — Soit $\tilde{M}$ une surface complexe compacte munie d'un champ de vecteurs holomorphe $\tilde{X}$ ayant une singularité isolée d'ordre 2. Le résultat principal de [CHK] nous assure que nous avons l'alternative :

1. est une surface rationnelle.

2. est une surface de type VII.

Nous divisons notre argument en deux cas :

Cas 1 : $\tilde{M}$ est une surface rationnelle.

Supposons d'abord que $\tilde{M}$ est minimale (*i.e.* sans courbes d'auto-intersection -1). La surface $\tilde{M}$ est donc soit $\mathbf{C}P(2)$, soit $\mathbf{C}P(1)\times\mathbf{C}P(1)$ soit F_n $(n \geqslant 2)$. Sur $\mathbf{C}P(2)$ tous les champs de vecteurs sont projectifs et il n'y a donc pas de champs à singularités isolées d'ordre 2. Sur $\mathbf{C}P(1) \times \mathbf{C}P(1)$ $(= F_0)$ et F_n $(n \geqslant 2)$, nous avons déjà décrit explicitement tous ces champs, qui correspondent à ceux de l'énoncé du théorème.

Supposons maintenant que $\tilde{M}$ n'est pas minimale (*i.e.* $\tilde{M}$ admet des courbes d'auto-intersection -1). Soit $\tilde{X}$ un champ de vecteurs sur $\tilde{M}$ ayant une singularité, notée p, isolée et d'ordre 2. Soit M le modèle minimal de $\tilde{M}$ (*i.e.* la surface obtenue en implosant toutes les courbes d'auto-intersection -1 de $\tilde{M}$). La surface M est donc soit $\mathbf{C}P(2)$, soit $\mathbf{C}P(1) \times \mathbf{C}P(1)$ soit F_n ($n \geqslant 2$). De plus M est munie d'un champ de vecteurs X induit par $\tilde{X}$. La singularité p de $\tilde{X}$ induit une singularité q de X dont la partie linéaire est non nulle (puisque p est une singularité isolée). Par ailleurs, comme p est une singularité d'ordre 2, les deux valeurs propres de X en q doivent être nulles (en particulier p est obtenue à partir de q par exactement un éclatement).

Il ne reste qu'à chercher les champs de vecteurs sur les modèles minimaux qui possèdent une singularité isolée dont la partie linéaire est (non triviale et) nilpotente (*i.e.* les valeurs propres sont nulles). Il existe un tel champ dans $\mathbf{C}P(2)$. L'éclatement de ce champ nous donne alors le flot à singularité isolée quadratique de F_1 (que nous avons déjà décrit).

Finalement nous allons voir qu'il n'existe pas de champs de vecteurs à singularités isolées où la partie linéaire est (non nulle et) nilpotente sur F_n ($n \neq 1$ et $F_0 = \mathbf{C}P(1) \times \mathbf{C}P(1)$). Pour vérifier cela nous allons décrire (à automorphismes près) tous les champs de vecteurs à singularités isolées sur F_n (y compris $n = 1$ même si cela n'est pas nécessaire). Nous remarquons qu'un tel champ induit un champ non identiquement nul sur $\mathbf{C}P(1)$. Or, nous n'avons que deux champs sur $\mathbf{C}P(1)$: le champ «hyperbolique» et le champ «parabolique». On déduit que tous les flots sur F_n sont de l'une des deux formes :

(i) $\Phi_{\imath}^T(x,y) = (x+T, ay + (x+T)^{n+1} - x^{n+1})$.

(ii) $\Phi_{\imath\imath}^T(x,y) = (e^T x, ay + u(e^T x) - u(x))$.

De plus dans le cas (ii), le polynôme u est de degré au plus n, donc, à automorphismes près, nous pouvons le considérer identiquement nul. Maintenant il est facile de voir que les éclatements (en leurs points fixes) des flots $\Phi_{\imath}^T$ et $\Phi_{\imath\imath}^T$ ne donnent pas de flots associés à des champs avec singularités isolées d'ordre 2.

Cela achève la discussion du cas 1.

Cas 2 : $\tilde{M}$ est une surface du type VII.

Supposons donc que M est du type VII et soit X un champ de vecteurs holomorphe sur M ayant une singularité isolée p d'ordre 2.

Supposons d'abord que la dimension algébrique de M soit non nulle. Alors M est une surface de Hopf (voir par exemple [BPV]) c'est-à-dire que son revêtement universel est $\mathbf{C}^2-\{(0,0)\}$. Le champ X relevé au revêtement universel est un champ complet qui possède une singularité isolée d'ordre 2. Il résulte du théorème A que ce champ induit sur sa séparatrice un champ (unidimensionnel) dont le germe en l'origine est $x^2\partial/\partial x$. Parce que la seule surface de Riemann sur laquelle ce germe se globalise en un champ complet est la sphère de Riemann, on déduit que le champ possède des séparatrices qui sont des courbes compactes. Ceci est bien sûr impossible dans $\mathbf{C}^2$.

La dimension algébrique de M est donc nulle. D'après le théorème A, nous savons que X admet, au voisinage de p, l'une des 4 formes normales décrites dans ce théorème. Nous avons déjà vu que les séparatrices donnent lieu à des sphères de Riemann plongées dans M. Les orbites des points proches du point singulier sont telles que la forme temps a deux périodes linéairement indépendantes; ce sont donc nécessairement des tores. Ainsi, M possède une infinité de courbes compactes (des courbes elliptiques ou des $\mathbf{C}P(1)$). Cependant, puisque la dimension algébrique de M est *zéro*, M ne possède qu'un nombre fini de courbes [BPV]. Cela donne une contradiction qui démontre le théorème. □

Nous terminons ce paragraphe par une proposition qui décrit les singularités isolées dont le premier jet est nilpotent, complétant ainsi le théorème A.

Rappelons que nous avons introduit trois champs complets $Y_{1,1,2}$, $Y_{1,2,3}$ et $Z_{1,2,3}$ en (2.4) dont les parties linéaires sont nilpotentes. Nous venons de constater qu'il en existe un quatrième exemple à singularité isolée : un flot holomorphe sur $\mathbf{C}P(2)$ engendré par un groupe à un paramètre unipotent de transformations projectives (à automorphisme près, il n'existe qu'un seul de ces groupes unipotents dont les points fixes sont isolés). Lorsqu'on éclate ce champ, on retrouve le champ $X_{2,1,-1}$ sur la surface de Hirzebruch F_1. Notons P ce champ. Dans un système de coordonnées convenables, ce champ s'écrit :

$$P=(y-2x^2)\partial/\partial x-2xy\partial/\partial y.$$

PROPOSITION 3.16. — *Soit Y un germe semi-complet de champ de vecteurs défini au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ et possédant une singularité isolée à l'origine. On suppose que le premier jet de X est nilpotent non trivial. Alors, X est conjugué à $f.Y_{1,1,2}$ ou $f.Y_{1,2,3}$ ou $f.Z_{1,2,3}$ ou $f.P$ où f ne s'annule pas à l'origine.*

Démonstration. — Éclatons Y. On obtient un champ X défini au voisinage du diviseur exceptionnel, semi-complet dans ce voisinage et présentant une unique singularité. Cette singularité est ou bien de partie linéaire nilpotente non triviale ou bien une singularité d'ordre 2 (en particulier on vérifie facilement que si la singularité nilpotente originale admet une séparatrice lisse, alors elle donne lieu par éclatement à une singularité d'ordre 2). Supposons d'abord que la singularité obtenue par éclatement soit d'ordre 2. Alors il résulte du théorème A que X est conjugué, au voisinage de cette singularité, à l'un de nos modèles. Il s'agit maintenant de montrer que seuls les cas $X_{1,1,2}$ ou $X_{1,2,3}$ ou $X_{2,1,-1}$ peuvent se présenter. Pour cela, on constate que l'indice de X sur la séparatrice constituée par le diviseur exceptionnel est égal à -1 (voir [CaSa]). Les indices des modèles sur leurs séparatrices sont :

- $-2, -2, -2$ pour $X_{1,1,1}$,
- $-3, -3, -1$ pour $X_{1,1,2}$,
- $-5, -2, -1$ pour $X_{1,2,3}$,
- $0, -n$ pour $X_{n+1,1,-1}$.

Ceci montre que X au voisinage de son point singulier, est conjugué à $f.X_{1,1,2}$ ou $f.X_{1,2,3}$ ou $f.X_{2,1,-1}$. Cette conjugaison s'étend à tout un voisinage du diviseur exceptionnel. Par implosion, on obtient la proposition dans ce premier cas.

Considérons maintenant le cas où cette singularité est encore à partie linéaire nilpotente non triviale. Nous éclatons une fois en plus le champ dans cette singularité. On obtient finalement un champ avec une singularité, disons p, isolée d'ordre 2. Au voisinage de p le champ est donc conjugué à l'un de nos modèles. On constate cependant que ce champ possède un diviseur d'auto-intersection -2 et un autre d'auto-intersection -1. On déduit que le modèle en question ne peut être que $X_{1,2,3}$. Par double implosion on obtient la proposition. □

Nous obtenons aussi le théorème suivant :

THÉORÈME 3.17. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphe défini et semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Supposons que l'origine soit une singularité isolée de X et que X admette une séparatrice singulière. Supposons de plus que X n'admette qu'un nombre fini de séparatrices. Alors X est conjugué au champ $f.(2y\partial/\partial x - 3x^2\partial/\partial y)$.*

Démonstration. — La combinaison du théorème principal de [Reb] et du théorème A nous assure que la partie linéaire de X à l'origine est non nulle. Cependant un champ dont la partie linéaire est non nulle et ayant un nombre fini de séparatrices ne peut admettre une séparatrice singulière que si ses deux valeurs propres sont nulles. Le théorème résulte alors de la proposition 3.16. □

BIBLIOGRAPHIE

[Akh] D. AKHIEZER , Lie Group Actions in Complex analysis, Vieweg (1994).

[Arn] V. ARNOLD, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Mir-Moscou, 1980.

[BPV] W. BARTH & C. PETERS & A. VAN de VEN, Compact complex surfaces, Springer, Berlin, 1984.

[Ca Sa] C. CAMACHO & P. SAD, Invariant Varieties through Singularities of Holomorphic Vector Fields, Annals of Math., 115 (1982), 579-595.

[CHK] J. CARREL, A. HOWARD & C. KOSNIOWSKI, Holomorphic Vector Fields on Complex Surfaces, Math. Ann., 204 (1973), 73-81.

[Ce Ma] D. CERVEAU & J.-F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, Astérisque, 97, 1982.

[Ce Sc] D. CERVEAU & B. SCARDUA, On the integration of polynomial vector fields in dimension two, Preprint IRMAR (Rennes), 1996.

[Dul] H. DULAC, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, J. École Polytechnique, 9 (1904), 1-125.

[HKM] H. HUKUARA, T. KIMURA & T. MATUDA, Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, Publ. Math. Soc. of Japan, 1961.

[Kod] K. KODAIRA, On compact analytic surfaces II, Annals of Math., 77 (1963), 563-626.

[Lor] F. LORAY, Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble, Thèse, Univ. Rennes I, 1994.

[Mat] J.-F. MATTEI, manuscrit, 1996.

[Ma Mo] J.-F. MATTEI & R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 16 (1983), 469-523.

[Reb] J.-C. REBELO, Singularités des flots holomorphes, Ann. Inst. Fourier, 46-2 (1996), 411-428.

[Sei] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differentiable equation $A\,dy = B\,dx$, Amer. J. of Math., 90 (1968), 248-269.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1996,
accepté le 25 avril 1997.

E. GHYS et J.-C. REBELO,
École Normale Supérieure de Lyon
UMPA, UMR128 CNRS
46, Allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07 (France).