ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHAN NGUYEN HUYNH

Sur la topologie de l'espace des systèmes linéaires hamiltoniens anti symétriques accessibles

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 3 (1994), p. 967-985

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_3_967_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 3 (1993), 967–985

SUR LA TOPOLOGIE DE L'ESPACE DES SYSTÈMES LINÉAIRES HAMILTONIENS ANTISYMÉTRIQUES ACCESSIBLES

par **NGUYEN HUYNH PHAN**

I. Introduction.

Une classe des systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles, qui est notée $HA_{n,m,p}$ et qui a été aussi abordée dans [32], est étudiée dans cet article. La définition de ces systèmes sera rappelée ultérieurement, mais nous rappelons tout d'abord qu'une matrice réelle

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

d'ordre $2n$ est dite *hamiltonienne* si $(JA)^T = JA$, où J est la structure complexe standard

$$J = \begin{bmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{bmatrix}$$

et $(JA)^T$ est la transposée de JA.

Si A est hamiltonienne et si S est une matrice symplectique, c'est-à-dire si $(S^TJS) = J$, alors SAS^{-1} est aussi hamiltonienne. Nous identifions l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ avec $\mathbb{R}^{2n}$ par l'isomorphisme réel

$$(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n) \longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

On sait encore qu'une matrice réelle A est hamiltonienne antisymétrique si et seulement si $A_{11} = A_{22}$, $A_{12} = -A_{21}$ et que la matrice complexe

---

Mots-clés : Forme normale – Stratification – Décomposition cellulaire – Fibré principal – Homotopie – Homologie – Système linéaire hamiltonien accessible.
Classification A.M.S. : 70H05 – 55N10.

$X = A_{11} + iA_{12}$ est antihermitienne, i.e. $X = -X^*$. On trouve ainsi que A est une matrice orthogonale symplectique si et seulement si X est une matrice unitaire et $A_{12} = -A_{21}$, $A_{11} = A_{22}$ (voir [28]).

Une classe importante de systèmes dynamiques linéaires de dimension n, d'entrée m et de sortie p, donnés par les équations d'états

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

ou donnés par des applications entrée-sortie

$$\text{(II)} \qquad y(t) = C(A - zI_n)^{-1}Bu(t),$$

est l'ensemble $L_{n,m,p}$ des *systèmes accessibles*, c'est-à-dire des systèmes donnés par (I) ou (II) avec

$$\operatorname{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n,$$

où A, B, C sont des matrices dans $\mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathbb{F}^{n\times m}$, $\mathbb{F}^{p\times n}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) respectivement, i.e. $(A, B, C) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m} \times \mathbb{F}^{p\times n}$; $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Nous considérons maintenant une sous-classe spéciale de $L_{n,m,p}$; dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, c'est la classe des systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles. On dit qu'un système linéaire donné par (I) ou (II) est un système *linéaire hamiltonien antisymétrique* si

$$(A, B, C) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m} \times \mathbb{C}^{pxn},$$

c'est-à-dire si A, B, C sont des matrices complexes, si A est antihermitienne, i.e. $A = -A^*$, et si rang $[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n$.

Un changement de base $x(t) \mapsto Sx(t) := \bar{x}(t)$, avec $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ dans l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ transforme (I) en l'équation équivalente :

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = SAS^{-1}\bar{x}(t) + SBu(t), \\ y(t) = CS^{-1}\bar{x}(t). \end{cases}$$

Si (I) est un système antisymétrique et si S est une matrice unitaire, on a des résultats analogues. Ces transformations induisent des actions analytiques (elles s'appellent *actions semblables*) du groupe linéaire général $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et du groupe unitaire $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ sur les ensembles $\widetilde{L}_{n,m,p}$ et $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ suivants :

- $\widetilde{L}_{n,m,p} = \big\{(A, B, C) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m} \times \mathbb{C}^{p\times n}$;

  $\operatorname{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n\big\}$;

  action de $\mathrm{GL}(n, C) : S \cdot (A, B, C) = (SAS^{-1}, SB, CS^{-1})$.

- $\widetilde{HA}_{n,m,p} = \{(A,B,C) \in \widetilde{L}_{n,m,p} \,;\, A = -A^*\}$;
  action de $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$: $S\cdot(A,B,C) = (SAS^{-1}, SB, CS^{-1})$.

Parce que deux triplets de matrices semblables définissent la même application entrée-sortie (II), en théorie du contrôle, on identifie l'espace des systèmes linéaires accessibles $L_{n,m,p}$ (resp. systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles $HA_{n,m,p}$) avec l'espace des orbites $\widetilde{L}_{n,m,p}/\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ (resp. l'espace des orbites $\widetilde{H}A_{n,m,p}/\,\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$) ;

$$L_{n,m,p} \equiv \widetilde{L}_{n,m,p}/\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}), \qquad HA_{n,m,p} \equiv \widetilde{H}A_{n,m,p}/\,\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$$

(cf. [17], [18], [19] ou [21]).

La structure topologique de $L_{n,m,p}$ a été beaucoup étudiée et on a déjà obtenu des résultats très subtils et profonds. Brockett dans [6] et Brunovsky dans [7] donnent les systèmes complets des invariants de l'action du groupe linéaire général $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sur $\widetilde{L}_{n,m,p}$. Dans [14] et [15], Hazewinkel trouve les formes normales des systèmes linéaires accessibles. Du point de vue de la géométrie algébrique, les résultats de Brockett [6], Brunovsky [7], Hazewinkel [15], Helmke [17], Hinrichsen [12] et Popov [33] ont permis de progresser dans l'étude de la topologie de $L_{n,m,p}$. Toutefois, nous verrons plus loin que $L_{n,m,p}$ est homotopiquement équivalent à $HA_{n,m,p}$. C'est pourquoi — du point de vue de la théorie d'homotopie — pour étudier la topologie de $L_{n,m,p}$, il suffit d'étudier celle de $HA_{n,m,p}$ qui est moins encombrante que $L_{n,m,p}$.

Le but de cet article est d'étudier la toplogie de $HA_{n,m,p}$. Il comprend deux paragraphes. Dans le premier paragraphe nous présentons des formes normales des systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles et une stratification de $HA_{n,m,p}$. Dans le deuxième paragraphe, nous donnons ensuite une décomposition cellulaire analytique, et nous examinons l'homologie et l'homotopie de $HA_{n,m,p}$.

2. Forme normale et stratification.

Tout d'abord on trouve que par l'accessibilité, l'ensemble $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ est un sous-ensemble ouvert de Zariski de l'espace vectoriel réel de tous les triplets (A,B,C) dans $\mathbb{C}^{n\times n}\times\mathbb{C}^{n\times m}\times\mathbb{C}^{p\times n}$ tels que $A=-A^*$, car un triplet (A,B,C) n'appartient pas à $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ si et seulement si tous les déterminants des mineurs d'ordre n de la matrice $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ s'annulent. Donc $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ est une variété analytique réelle naturelle de dimension $n^2+2nm+2pn$.

En calculant directement, on peut montrer que le groupe de Lie $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ agit sur $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ librement, analytiquement et que le graphe de l'action, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(S \cdot x, x)\ ; S \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \text{ et } x \in \widetilde{HA}_{n,m,p}\},$$

est une sous-variété analytique fermée de $\widetilde{HA}_{n,m,p} \times \widetilde{HA}_{n,m,p}$. Dans ce cas, (cf. [11] et [28]), la structure variété de l'espace des orbites $HA_{n,m,p}$ est définie comme suit :

PROPOSITION 1. — *La projection canonique* $P : \widetilde{HA}_{n,m,p} \to HA_{n,m,p}$ *est un fibré principal de groupe structural* $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$. *En outre,* $HA_{n,m,p}$ *est une variété analytique de dimension* $2n(m + p) = \dim \widetilde{HA}_{n,m,p} - \dim \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$.

On construit maintenant les formes normales des systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles qui seront employées pour calculer le groupe d'homologie de $HA_{n,m,p}$ plus loin. On rappelle tout d'abord la définition, donnée par Birkhoff et Maclane, reconnue standard dans la théorie des systèmes.

DÉFINITION 2 (voir [2]). — Soit G un goupe topologique qui agit sur l'espace topologique X. On dit qu'une application $N : X \to X$ est une *forme normale* (pour l'action de G) si :

(i) $x \sim N(x)$ (x et $N(x)$ sont dans une même orbite) ;

(ii) $x \sim y$ si et seulement si $N(x) = N(y)$. On dit que $N(x)$ est la *forme normale* de x.

Si N est une application continue, on dit que N est une *forme normale continue*.

Par exemple, la forme normale de Jordan dans l'algèbre linéaire est une forme normale en sens de cette définition, mais elle n'est pas continue. Remarquons que si N est une forme normale, elle induit une application $\widetilde{N} : X/G \to X$ telle que le schéma suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "N"] \arrow[dr, "P"'] & & X \\ & X/G, \arrow[ur, "\widetilde{N}"'] & \end{tikzcd}$$

où X/G est l'espace des orbites ; P est la projection canonique ; $\widetilde{N}$ est définie par la $[G\text{-orbite de } x] \mapsto N(x)$. Naturellement, N est continue si et seulement si $\widetilde{N}$ l'est. Par conséquent, l'existence des formes normales continues sur X tout entier a un rapport avec la structure topologique de X/G.

Pour construire une forme normale de $(A, B, C) \in \widetilde{HA}_{n,m,p}$, nous les associerons avec une base unitaire spéciale de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ et nous présenterons A, B, C dans cette base. A cet effet, soit $B = [b_1 b_2 \dots b_m]$, où b_j est la j-ième colonne de B. Nous allons de gauche à droite dans le système de nm vecteurs :

$$\begin{aligned}\{b_1, Ab_1, A^2b_1, \dots, A^{n-1}b_1,&\\ b_2, Ab_2, A^2b_2, \dots, A^{n-1}b_2, \dots,&\\ b_m, Ab_m, A^2b_m, \dots, A^{n-1}b_m\}.&\end{aligned}$$

Nous effaçons tous les vecteurs qui dépendent linéairement des vecteurs qui les précèdent. Par l'accessibilité de triplet (A, B, C), i.e. le rang de système des vecteurs ci-dessus est égal à n, les vecteurs restants forment une base de $\mathbb{C}^n$. Ils sont ordonnés ainsi

$$\begin{aligned}H(A, B) = \big[b_1, Ab_1, \dots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{k_2-1}b_2, \dots,&\\ b_m, Ab_m, \dots A^{k_m-1}b_m\big],&\end{aligned}$$

où les k_j sont des nombres entiers non-négatifs et $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$. On note :

$$k(A, B) = (k_1, k_2, \dots, k_m).$$

Il est clair que $k(A, B)$ est un invariant de similitude car $k(A, B) = k(SAS^{-1}, SB)$ pour tous les $S \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$. On pose :

$$K_{n,m} = \Big\{(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m\ ;\ k_j \text{ entier} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{m} k_j = n\Big\}.$$

Alors $k(A, B)k \in K_{n,m}$ maintenant chaque $k \in K_{n,m}$, on pose :

$$\widetilde{H}(k) = \big\{(A, B, C) \in \widetilde{HA}_{n,m,p}\ ;\ k(A, B) = k\big\}.$$

On peut montrer que :

Proposition 3. — *La collection* $\{\widetilde{H}(k)\ ; k \in K_{n,m}\}$ *est une partition de* $\widetilde{HA}_{n,m,p}$, *c'est-à-dire satisfait les trois conditions suivantes :*

(i) $\widetilde{H}(k) \neq \emptyset$;

(ii) $\widetilde{H}(k) \cap \widetilde{H}(\ell) = \emptyset$ *si* $k \neq \ell$;

(iii) $\widetilde{HA}_{n,m,p} = \bigcup\{\widetilde{H}(k)\ ; k \in K_{n,m}\}$.

Soit $S(A,B)$ une matrice unitaire obtenue par le procédé d'orthogonormalisation de Gram-Schimidt de matrice $H(A,B)$. On pose :

$$(A_k, B_k, C_k) = \big(S(A,B)AS(A,B)^{-1}, S(A,B)B, CS(A,B)^{-1}\big).$$

Nous arrivons au résultat suivant :

Théorème 4. — *L'application* $(A,B,C) \mapsto (A_k,B_k,C_k)$ *est une forme normale continue (pour action semblable de* $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$*) sur chaque sous-ensemble* $\widetilde{H}(k)$. *En outre,* A_k *et* B_k *ont les formes spéciales suivantes :*

$$A_k = \mathrm{diag}[N_1, N_2, \ldots, N_m], \quad B_k = [b_1^k, b_2^k, \ldots, b_m^k]$$

où

$$N_j = \begin{bmatrix} x_{j1} & -a_{j2} & & & \\ a_{j2} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -a_{jk_j} \\ & & & a_{jk_j} & x_{jk_j} \end{bmatrix}, \quad b_j^k = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ a_{j1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k_1+\cdots+k_{j-1}+1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

et $j = 1, 2, \ldots m$.

Les nombres $a_{j2}, \ldots a_{jk_j}$ *sont des nombres réels positifs;* a_{j1} *est un nombre positif si* $k_j > 0$ *et* $a_{j1} = 0$ *si* $k_j = 0$. *Les nombres* $x_{j1}, \ldots, x_{jk_j}$ *sont des nombres imaginaires (leurs parties réelles sont nulles). Les éléments notés* $*$ *dans* b_j^k *sont des nombres complexes. La matrice* C_k *n'est pas de la forme spéciale.*

Soit $N(k) = k_1 + (k_1 + k_2) + \ldots + (k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1})$. On trouve ainsi que le nombre des paramètres réels indépendants de A_k, de B_k et de C_k est égal à $2n + 2N(k) + 2np$.

En utilisant ce résultat on peut prouver :

COROLLAIRE 5.

(i) *$\widetilde{H}(k)$ est une sous-variété analytique de $\widetilde{HA}_{n,m,p}$.*

(ii) *$\widetilde{H}(k) \approx \mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{2n+2N(k)+2np}$ (homéomorphisme analytique) par l'application $(A,B,C) \mapsto (S(A,B),(A_k,B_k,C_k))$.*

(iii) *$\widetilde{H}(k)$ est invariante par l'action de $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ et l'espace des orbites $H(k) := \widetilde{H}(k)/\mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \approx R^{2n+2N(k)+2np}$ (homéomorphisme analytique). C'est-à-dire que $H(k)$ est une cellule de dimension $2n+2N(k)+2np$.*

DÉFINITION 6 (voir [23], [36]). — Soit X un ensemble sous-analytique. Soit $\{(X_i)\ ; i \in I\}$ une famille localement finie de sous-ensembles sous-analytique non singuliers connexes de X. On dit que la famille $\{X_i\ ; i \in I\}$ est une *stratification sous-analytique* de X si :

(i) La famille $\{X_i\ ; i \in I\}$ est une partition de X.

(ii) La fermeture $\overline{X}_i$ de X_i dans X et le bord $\overline{X}_i \backslash X_i$ de X_i sont des sous-ensembles sous-analytiques de X. Les sous-ensembles X_i sont appelés les *strates de la stratification.*

(iii) On dit qu'une stratification de X satisfait la *propriété de la frontière* si, chaque fois que $\overline{X}_i \cap X_j \neq \emptyset$, on a $\overline{X}_i \supseteq X_j$. Dans ce cas la fermeture $\overline{X}_i$ et le bord $\overline{X}_i \backslash X_i$ de X_i sont des réunions des X_j qui ont des dimensions plus petites que celle de X_i. Nous poserons :

$$\mathcal{H} = \{H(k) = \widetilde{H}(k)/\mathrm{U}(n,\mathbb{C})\ ; k \in K_{n,m}\}.$$

La collection $\mathcal{H}$ a un caractère topologique très important.

THÈOREME 7. — *La collection $\mathcal{H} = \{H(k)\ ; k \in K_{n,m}\}$ forme une stratification finie satisfaisant la propriété de la frontière de $HA_{n,m,p}$.*

La démonstration que $\mathcal{H}$ satisfait la condition de la frontière est un peu compliquée. Nous allons donc présenter quelques techniques pour la prouver (cf. [31] ou [32]) :

(1) Soit $(A,B) \in \widetilde{H}(\ell) \cap \overline{\widetilde{H}}(k)$, c'est-à-dire $\widetilde{H}(\ell) \cap \overline{\widetilde{H}}(k) \neq \emptyset$. Alors (A,B) est une limite d'une suite $\{(\widetilde{A},\widetilde{B})\} \subset \widetilde{H}(k)$. Soit $B = [b_1, b_2, \ldots, b_m]$ et soit $\widetilde{B} = [\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m]$ où b_j (resp. $\tilde{b}_j$) est la j-ème colonne de B (resp. $\widetilde{B}$). Comme nous avons, pour tout $0 \leq j \leq m$,

$$\operatorname{rang}\left[b_1, Ab_1, A^2b_1, \ldots, A^{n-1}b_1, \ldots, b_j, Ab_j, A^2b_j, \ldots, A^{n-1}b_j\right] \\ = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_j$$

et comme les fonctions rang sont semi-continues supérieurement, il en résulte que si $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ approche (A, B), on a, pour tout $0 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}[\tilde{b}_1, \widetilde{A}\tilde{b}_1, \ldots, \widetilde{A}^{n-1}\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_j, \widetilde{A}\tilde{b}_j, \ldots, \widetilde{A}^{n-1}\tilde{b}_j] \\ = k_1 + k_2 + \cdots + k_j \geq \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_j\,. \end{aligned}$$

(2) Soit $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in K_{n,m}$. Pour chaque $1 \leq j \leq m$, posons :

$$N_j(k) = k_1 + k_2 + \cdots + k_j.$$

On démontre alors que l'ensemble $K_{n,m}$ muni de l'ordre $\leq$ défini par $\ell \leq k$ si $N_j(\ell) \leq N_j(k)$ pour tout $1 \leq j \leq m$, forme un réseau (voir [1]). En vertu de la remarque précédente, si $\widetilde{H}(\ell) \cap \overline{\widetilde{H}}(k) \neq \emptyset$, on a $\ell \leq k$. Comme $(K_{n,m}, \leq)$ est un réseau, on déduit dans ce cas (voir [1]), qu'il existe des éléments $p_1, p_2, \ldots, p_t$ dans $K_{n,m}$ tels que $\ell = p_1 < p_2 < \cdots < p_{t-1} < p_t = k$ où p_i est successeur de p_{i+1} (c'est-à-dire qu'il n'existe pas $q \in K_{n,m}$ tel que $p_i < q < p_{i+1}$). Vu la définition de l'ordre $\leq$, il est clair que l'élément k est le successeur de $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m)$ si et seulement si k est de la forme $k = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_i + 1, \ell_{i+1} - 1, \ldots, \ell_m)$ pour un quelconque $\ell_{i+1} \geq 1$ (voir [1] et cf. [17], [18]). Si ℓ et k sont comme cela et $(A_\ell, B_\ell, C_\ell) \in \widetilde{H}(\ell)$, en utilisant les formes normales données dans le théorème 4, on peut trouver dans $\widetilde{H}(k)$ une suite (A_n, B_n, C_n) qui converge vers (A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ).

Il en résulte $\overline{\widetilde{H}}(k) \supseteq \widetilde{H}(\ell)$. On en déduit que

$$\overline{H}(k) = \overline{H}(p_{t-1}) \supseteq \cdots \supseteq \overline{H}(p_2) \supseteq H(p_1) = H(\ell)$$

parce que $P : \widetilde{HA}_{n,m,p} \to HA_{n,m,p}$ est un fibré principal et alors

$$P(\widetilde{H}(k)) = H(k), \quad P(\overline{\widetilde{H}}(k)) = \overline{H}(k).$$

Par conséquent :

$$\overline{K}(k) = \bigcup \{ K(\ell)\,; \ell \leq k,\ \ell \in K_{n,m} \}.$$

Ensuite, nous remarquons que (A, B, C) appartient à $\overline{\widetilde{H}}(k)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}\bigl[b_1, Ab_1, A^2b_1, \ldots, A^{n-1}b_1, \ldots, b_j, Ab_j, A^2b_j, \ldots, A^{n-1}b_j\bigr] \\ \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_j \end{aligned}$$

pour $1 \leq j \leq m$. Il en résulte que $\overline{\widetilde{H}}(k)$ est un sous-ensemble algébrique de $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ et que $\overline{\widetilde{H}}(k) \backslash \widetilde{H}(k)$ est la différence de deux sous-ensembles algébriques de $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ (cf. [22]). Donc $\overline{H}(k)$ et $\overline{H}(k)\backslash H(k)$ sont des sous-espaces analytiques de l'espace des orbites $HA_{n,m,p}$.

On sait que l'on a $\overline{H}(k) = \bigcup\{H(\ell)\,;\ell \leq k\}$; en particulier

$$\overline{H}\big((n,0,\dots,0)\big) = \bigcup\big\{H(\ell), \ell \leq (n,0,\dots,0)\big\} = HA_{n,m,p}$$

car $(n,0,\dots,0)$ est l'élément maximal du réseau $(K_{n,m},\leq)$. C'est pourquoi $HA_{n,m,p}$ est une variété connexe. De plus, $H((0,\dots,0,n))$ est fermé dans $HA_{n,m,p}$ car $(0,\dots,0,n)$ est l'élément minimal du réseau $(K_{n,m},\leq)$, $HA_{n,m,p}$ n'est donc pas compact parce que $HA_{n,m,p}$ contient le sous-ensemble fermé $H((0,\dots,0,n))$ qui n'est pas compact.

3. Décomposition cellulaire, homologie et homotopie.

Nous rappelons (voir [3]) :

DÉFINITION 8. — Une stratification qui satisfait la propriété de la frontière de la variété analytique X est appelée une *décomposition cellulaire analytique* de X si ses strates sont des sous-variétés analytiques de X et si elles sont C^∞-homéomorphes aux quelconques $\mathbb{R}^{m_j}$. Dans ce cas, les strates sont appelées les *cellules*.

En utilisant la corollaire 5 et le théorème 7, on a :

COROLLAIRE 9. — *La collection* $\{H(k) := H(k)/U(n,\mathbb{C})\,; k \in K_{n,m}\}$ *forme une décomposition cellulaire analytique de* $HA_{n,m,p}$

Nous allons maintenant calculer le groupe d'homologie de $HA_{n,m,p}$. En effet, en utilisant le théorème 6 et le théorème de Borel et Haefliger (voir [3], [24]) sur l'homologie d'une variété analytique qui est décomposable en cellulaires analytiques et en comparant avec l'homologie d'une grassmannienne (voir [27]), nous arrivons au :

THÉORÈME 10. — *Soit*

$$t_i = \mathrm{cardinal}\big\{k \in K_{n,m} \text{ tel que } \operatorname{codim} H(k) = i\big\}.$$

Pour tout $i \geq 0$, *on a alors*

$$H_i(HA_{n,m,p}\,;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{t_i} \cong H_i(G_{n,n+m-1}(\mathbb{C})\,;\mathbb{Z}),$$

où $G_{n,n+m-1}(\mathbb{C})$ *est la variété de Grassmann des* n*-plans dans* $\mathbb{C}^{n+m-1}$ *et* $\mathbb{Z}$ *l'anneau des entiers.*

Concernant l'homotopie de $HA_{n,m,p}$, nous avons le résultat :

THÉORÈME 11. — *On a* $\pi_i(HA_{n,m,p}) \cong \pi_{i-1}(\mathrm{U}(n,\mathbb{C}))$ *pour* $i \leq 2m-2$.

Le théorème 11 est démontré grâce au lemme suivant :

LEMME 12. — *Pour* $i \leq 2m-2$, *on a* $\pi_i(\widetilde{HA}_{n,m,p}) \cong \{0\}$.

En effet, comme $P : \widetilde{HA}_{n,m,p} \to HA_{n,m,p}$ est un $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$-fibré principal, on a la suite exacte longue d'homotopie

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \pi_i\big(\mathrm{U}(n,\mathbb{C})\big) &\longrightarrow \pi_i(\widetilde{HA}_{n,m,p}) \longrightarrow \pi_i(HA_{n,m,p}) \\ &\longrightarrow \pi_{i-1}\big(\mathrm{U}(n,\mathbb{C})\big) \longrightarrow \pi_{i-1}(\widetilde{HA}_{n,m,p}) \longrightarrow \pi_{i-1}(HA_{n,m,p}) \longrightarrow \cdots.\end{aligned}$$

En vertu du lemme 12, on obtient le théorème 11.

Comme le théorème 11 a un rapport avec une application pour la démonstration du théorème de périodicité de Bott (voir [4], [5], [26]), que nous aborderons à la fin de l'article, nous voulons donc présenter en détail la démonstration du lemme 12. Nous aurons besoin pour la démonstration de ce lemme, des quelques résultats algébriques géométriques suivants.

LEMME 13. — *Soit*

$$\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p} = \big\{(A,B,C) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m} \times \mathbb{C}^{p\times n}\,; A = -A^*\big\}.$$

Pour chaque $0 \leq r \leq n$, *on pose :*

$$\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r) = \big\{(A,B,C) \in \widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}\,; \mathrm{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = r\big\}.$$

Alors $\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r)$ *est une sous-variété analytique de* $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$ *de dimension* $n^2 + 2mr + 2pn$.

Preuve. — Si $r = n$, le résultat est clair car $\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(n) = \widetilde{HA}_{n,m,p}$ est un sous-ensemble ouvert de Zariski dans $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$. On va donc considérer le cas $r < n$. Soit

$$\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m} = \big\{(A,B) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}\,; A = -A^*\big\}.$$

Pour $0 \leq r \leq n$, on pose :

$$\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m}(r) = \big\{(A,B) \in \widetilde{\mathbb{A}}_{n,m}\,; \mathrm{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = r\big\}.$$

Alors $\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r) \cong \widetilde{HA}_{n,m}(r) \times \mathbb{C}^{pxn}$. On en déduit :

$$\dim \widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r) = \dim \widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m}(r) + 2pn.$$

Soit $\widetilde{\mathbb{SA}}_{n,m}(r)$ le sous-ensemble de tous les $(A, B) \in \widetilde{\mathbb{A}}_{n,m}$ de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ O \end{bmatrix},$$

où $A_2 = -A_2^*$ et $(A_1, B_1) \in \widetilde{\mathbb{HA}}_{r,m}(r)$, ce qui signifie que

$$\operatorname{rang}[B_1, A_1B_1, A_1^2B_1, \ldots, A_1^{r-1}B_1] = r.$$

Puisque $\widetilde{\mathbb{HA}}_{r,m}(r)$ est une sous-variété ouverte de l'espace vectoriel réel $\widetilde{\mathbb{A}}_{r,m}$, $\widetilde{\mathbb{SA}}_{n,m}(r)$ est une sous-variété réelle de $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m}$ de dimension $r^2 + 2rm + (n-r)^2$. Soit

$$D(r, n-r) := \mathrm{U}(r, \mathbb{C}) \times \mathrm{U}(n-r, \mathbb{C})$$

le sous-groupe du $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ de toutes les matrices unitaires de la forme :

$$\begin{bmatrix} S_1 & O \\ O & S_2 \end{bmatrix}, \quad (S_1, S_2) \in \mathrm{U}(r, \mathbb{C}) \times \mathrm{U}(n, r, \mathbb{C}).$$

Nous considérons une action du groupe de Lie $D(r, n-r)$ sur $\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \times \widetilde{\mathbb{SA}}_{n,m}(r)$ donnée par

$$P \cdot \big(S, (A, B)\big) \longmapsto \big(SP^{-1}, P \cdot (A, B)\big),$$

avec $P \cdot (A, B) = (PAP^{-1}, PB)$. On peut vérifier (cf. N.H. Phan [31], [32]) que cette action est libre, analytique et que son graphe est une sous-variété fermée de

$$\big(\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \times \widetilde{\mathbb{SA}}_{n,m}(r)\big) \times \big(\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \times \widetilde{\mathbb{SA}}_{n,m}(r)\big).$$

On en déduit (voir Dieudonné [11], Mneimné et Testard [28]) que l'espace des orbites $\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \times \widetilde{\mathbb{SA}}_{n,m}(r)/D(r, n-r)$ est une variété de dimension :

$$\dim(\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \times \widetilde{\mathbb{SA}}_{n,m}(r)) - \dim D(r, n-r) = n^2 + 2rm.$$

Ensuite, on trouve que l'espace des orbites $\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \times \widetilde{\mathbb{SA}}_{n,m}(r)/D(r, n-r)$ est analytiquement isomorphe à $\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m}(r)$ par l'application :

$$\big[D(r, n-r) \text{ orbite de } (S, (A, B))\big] \longmapsto (SAS^{-1}, SB).$$

Le lemme est donc démontré.

Le résultat suivant est clair.

COROLLAIRE 14. — *Le sous-ensemble*

$$X = \widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p} \backslash \widetilde{HA}_{n,m,p} = \bigcup \{\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r) \,; 0 \leq r \leq n-1\}$$

est une réunion des sous-variétés différentiables de $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$ *dont le minimum de ses codimensions est* $2m$.

Démonstration du lemme 12. — Soit $f : \mathbb{S}^i \longrightarrow \widetilde{HA}_{n,m,p}$ une application continue de la sphère $\mathbb{S}^i$ de dimension i dans $\widetilde{HA}_{n,m,p}$. Nous allons prouver que f équivaut homotopiquement à l'application constante $c : \mathbb{S}^i \mapsto \{*\} \in \widetilde{HA}_{n,m,p}$.

Puisque f est continue et $\mathbb{S}^i$ est compacte, il existe une C^∞-application $f_0 : \mathbb{S}^i \to \widetilde{HA}_{n,m,p}$ telle que $tf(x) + (1-t)f_0(x) \in \widetilde{HA}_{n,m,p}$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui signifie que f est homotopiquement équivalente à la C^∞-application f_0 (voir exemple Narasimhan [29], Hirsh [20]). Soit

$$\mathrm{in} : \widetilde{HA}_{n,m,p} \to \widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$$

l'inclusion naturelle. Posons $\tilde{f} = \mathrm{in} \circ f$ et $\tilde{f}_0 = \mathrm{in} \circ f_0$.

Comme $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$ est un espace vectoriel, f_0 est homotopiquement équivalente à l'application constante $c : \mathbb{S}^i \mapsto \{*\}$ par l'homotopie $H : \mathbb{S}^i \times [0,1] \to \widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$ définie par $H(x,t) = t\tilde{f}_0(x) + (1-t)*$. De plus, nous avons

$$\tilde{f}_0(\mathbb{S}^i) \cap \widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r) = \emptyset \quad \text{et} \quad \{*\} \notin \widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r)$$

pour tout $0 \leq r \leq n-1$. Il en résulte que les deux applications $\tilde{f}_0$ et c sont transverses à toutes les sous-variétés $\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r)$ de $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$ $(0 \leq r \leq n-1)$ (voir Narasimhan [29]). D'après le théorème de transversalité de Thom (voir Guillemin et Pollack [13], Narasimhan [29]), il existe une C^∞-application $\widetilde{H} : \mathbb{S}^i \times [0,1] \to \widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$ qui satisfait les deux conditions :

(i) $\widetilde{H} \equiv H$ sur le sous-ensemble $\mathbb{S}^i \times \{0,1\}$ de $\mathbb{S}^i \times [0,1]$.

(ii) $\widetilde{H}$ est transverse à toutes les sous-variétés $\widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r)$ de $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,m,p}$.

Il en résulte que si

$$\begin{aligned}\dim\big(\mathbb{S}^i \times [0,1]\big) &= i+1 \\ &< \min\big\{\operatorname{codim} \widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r) \,; 1 \leq r \leq n-1\big\} = 2m,\end{aligned}$$

nous aurons

$$\widetilde{H}\big(\mathbb{S}^i \times [0,1]\big) \cap \widetilde{\mathbb{HA}}_{n,m,p}(r) = \emptyset$$

pour tout $0 \leq r \leq n-1$, en vertu du théorème de transversalité de Thom (voir Narasimhan [29]). Donc $\widetilde{H}$ est une application de $\mathbb{S}^i$ dans $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ joignant f et la constante c. Le lemme est démontré.

Revenons maintenant à la théorie des systèmes en appliquant nos résultats à la topologie de $\widetilde{HA}_{n,m,p}$.

Première question. — Pouvons-nous trouver une forme normale continue sur la totalité de $\widetilde{HA}_{n,m,p}$, c'est-à-dire pouvons-nous paramétrer continuellement tous les systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles ?

En appliquant les théorèmes 11 et 12, on a la réponse immédiate suivante :

COROLLAIRE 15. — *Il existe une forme normale continue N : $\widetilde{HA}_{n,m,p} \to \widetilde{HA}_{n,m,p}$ pour l'action semblable du groupe* $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ *si et seulement si $m=1$.*

En effet, si $m=1$, on a $\widetilde{HA}_{n,1,p} = \mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{2n(1+p)}$ et l'application

$$(A,b,C) \mapsto \left(\begin{bmatrix} x_1 & -a_2 & & & \\ a_2 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -a_n \\ & & & a_n & x_n \end{bmatrix}, \ b_j^k = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, CS(A,b)^{-1} \right)$$

est une forme normale continue sur totalité $\widetilde{HA}_{n,1,p}$.

Quand $m > 1$ et N est continue, alors on peut montrer que $\widetilde{HA}_{n,m,p} \cong \mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \times HA_{n,m,p}$. On trouve ainsi que

$$\begin{aligned} H_*(\widetilde{HA}_{n,m,p}\,;\mathbb{Z}) &\cong H_*\big(U(n,\mathbb{C}) \times HA_{n,m,p}\,;\mathbb{Z}\big) \\ &\cong H_*\big(\mathrm{U}(n,\mathbb{C})\,;\mathbb{Z}\big) \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(HA_{n,m,p}\,;\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Nous en concluons que l'on a :

$$\sum_{p+q=i} H_p\big(U(n,\mathbb{C})\,;\mathbb{Z}\big) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(HA_{n,m,p};\mathbb{Z}) = O$$

pour $i \leq 2m-2$, car $H_i(\widetilde{HA}_{n,m,p}; Z) = 0$ pour $i \leq 2m-2$. D'où une contraction d'après le théorème 10.

Bien qu'il n'existe pas de formes normales continues sur la totalité de $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ quand $m > 1$, nous avons trouvé une forme normale continue sur les sous-ensembles $H(k)$ d'une partition contenant $(n+m-1)!/n!(m-1)!$ éléments (nombre égal au cardinal de l'ensemble $K_{n,m}$). Peut-on répartir $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ en des sous-ensembles X_i, $i \in I$ tels que $\operatorname{card} I < \operatorname{card} K_{n,m}$ et tels que sur chaque X_i on trouve les formes normales suffisamment belles ?

DÉFINITION 16. — Une forme normale $N : \widetilde{HA}_{n,m,p} \to \widetilde{HA}_{n,m,p}$ est appelée une *forme normale cellulaire* s'il existe une décomposition cellulaire analytique $\{X_i \; ; i \in I\}$ de l'espace des orbites $HA_{n,m,p}$ telle que la restriction de N sur $P^{-1}(X_i)$ soit une application continue, où $P : \widetilde{HA}_{n,m,p} \to HA_{n,m,p}$ est projection canonique.

La forme normale dans le théorème 4 ci-dessus est une forme normale cellulaire.

Deuxième question. — Existe-t-il une autre forme normale cellulaire telle que le nombre de ses cellules est moindre que celui indiqué dans le théorème 4 ?

La réponse est la suivante :

COROLLAIRE 17. — *Tous les formes normales cellulaires sur $\widetilde{HA}_{n,m,p}$ ont exactement $(n+m-1)!/n!(m-1)!$ cellules. Ce qui signifie que la stratification donnée dans le théorème* 7, *sur les strates de laquelle on a des formes normales continues, est optimale.*

En effet, supposons que $\{X_i \; ; i \in I\}$ est la décomposition cellulaire analytique de $HA_{n,m,p}$ associée une forme normale cellulaire. D'après le théorème de Borel et Haefliger (voir [3], [25]), on a

$$H_*(HA_{n,m,p}; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\operatorname{card} I}.$$

D'autre part, on a :

$$H_*(HA_{n,m,p}; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\operatorname{card} K_{n,m}}.$$

On en déduit $\operatorname{card} I = \operatorname{card} K_{n,m} = (n+m-1)!/n!(m-1)!$.

Nous allons discuter maintenant de la relation d'homotopie entre $HA_{n,m,p}$ et $L_{n,m,p}$ (l'espace des systèmes linéaires accessibles). Nous considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{HA}_{n,m,p} & \xrightarrow{\text{inclusion}} & \widetilde{L}_{n,m,p} \\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ HA_{n,m,p} & \xrightarrow{W} & L_{n,m,p}. \end{array}$$

Nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 18. — *L'inclution W est une équivalence d'homotopie.*

Avant de présenter une application du théorème 18, nous allons répéter les travaux de Guest [12] et de Helmke [17] . Soit $L^{a0}_{n,m,p}$ l'espace des systèmes linéaires complexes accessibles et observables, c'est-à-dire les systèmes donnés par (I) ou (II) avec (A, B, C) satisfaisant les deux conditions :

- rang$[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}] = n$ (condition accessible) ;
- rang$[C^T, (A^T)C^T, (A^T)^2C^T, \dots, (A^T)^{n-1}C^T] = n$ (condition observable).

Posons :

$$\widetilde{L}^{a0}_{n,m,p} = \big\{(A, B, C) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m} \times \mathbb{C}^{p\times n} ;\\ (A, B, C) \text{ est accessible et observable}\big\}.$$

Par la même raison que précédemment, $L^{a0}_{n,m,p}$ est identifié à l'espace des orbites de $\widetilde{L}^{a0}_{n,m,p}/G(n, \mathbb{C})$

$$L^{a0}_{n,m,p} \equiv \widetilde{L}^{a0}_{n,m,p}/G(n, \mathbb{C})$$

où $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ agit sur $L^{a0}_{n,m,p}$ par

$$S \cdot (A, B, C) = (SAS^{-1}, SB, CS^{-1}).$$

De l'observabilité, on déduit que $L^{a0}_{n,m,p}$ est une sous-variété ouverte de $L_{n,m,p}$.

Dans [17], Helmke démontre que :

THÉORÈME 19 (Helmke). — *L'inclusion naturelle*

$$\mathrm{in} : \pi_i(L^{a0}_{n,m,p}) \to \pi_i(L_{n,m,p})$$

est un isomorphisme pour $i \leq 2p - 2$.

Comme tous les triplets (A, B, C) dans la même orbite de $\widetilde{L}^{a0}_{n,m,p}/G(n, \mathbb{C})$ définissent la même matrice de transfert $C(zI_n - A)^{-1}B$ (avec (A, B, C) accessible et observable), $L^{a0}_{n,m,p}$ est identifié encore à l'espace des matrices de transfert $G(z) := C(zI_n - A)^{-1}B$, c'est-à-dire :

$$L^{a0}_{n,m,p} \equiv \{\mathbb{C}(zI_n - A)^{-1}B\,;\ (A, B, C) \in \widetilde{L}^{a0}_{n,m,p} \ \text{ et } \ z \in \mathbb{C}\}.$$

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{S}^2; G_{m,m+p}(\mathbb{C}))$ l'espace des applications holomorphes de la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$ dans la grassmanniene $G_{m,m+p}(\mathbb{C})$. Alors Segal [35] (pour le cas $n = 1$), et Mann et Milgrams [24] (pour le le cas $n > 1$) (cf. Byrnes [8]) prouvent que :

$$\mathcal{M}(\mathbb{S}^2\,; G_{m,m+p}(\mathbb{C})) = \{C(zI_n - A)^{-1}B\,; (A, B, C) \in \widetilde{L}^{a0}_{n,m,p} \text{ et } z \in \mathbb{C}\}.$$

Lorsque $n = m = p$, en utilisant la construction des fibrations de drapeaux définis sur une grassmanniene, Guest calcule en détail dans [12] des groupes d'homotopie de $\mathcal{M}(\mathbb{S}^2\,; G_{n,2n}(\mathbb{C}))$. Il a obtenu beaucoup de résultats dont celui-ci.

THÉORÈME 20 (Guest, [12]). — *Pour $i \leq n - 1$, on a :*

$$\pi_i(\mathcal{M}(\mathbb{S}^2; G_{n,2n}(\mathbb{C})) \cong \pi_{i+2}(G_{n,2n}(C)).$$

En vertu du théorème de Helmke, si $n > 1$, on a

$$\pi_i(L_{n,n,n}) \cong \pi_{i+2}(G_{n,2n}(\mathbb{C}))$$

pour $i \leq \min\{n - 1, 2n - 2\} = n - 1$.

De plus, il est bien connu que pour $i \leq 2n - 2$ (voir [26], [27]), on a :

$$\pi_{i+2}(G_{n,2n}(\mathbb{C})) \cong \pi_{i+1}(\mathrm{U}(n, \mathbb{C})).$$

Donc

$$\pi_i(L_{n,n,n}) \cong \pi_{i+1}(U(n, \mathbb{C}))$$

pour $i \leq \min\{n - 1, 2n - 2\} = n - 1$ si $n \geq 1$.

D'autre part, $L_{n,n,n}$ est homotopiquement équivalent à $HA_{n,n,n}$ d'après le théorème 18. En vertu du théorème 11, nous avons alors

$$\pi_{i-1}(\mathrm{U}(n, \mathbb{C})) \cong \pi_{i+1}(\mathrm{U}(n, \mathbb{C}))$$

pour tout $i \leq n - 1$.

En prenant n grand, on sait que les groupes d'homotopie π_i sont stabilisés (voir Bott [5] ou Milnor [26]) dans la suite

$$\mathrm{U}(1,\mathbb{C}) \subset \mathrm{U}(2,\mathbb{C}) \subset \cdots \subset \mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \subset \cdots \subset \mathrm{U}(\mathbb{C}),$$

ce qui signifie que (voir Milnor [26], p. 128), pour tout n, les inclusions

$$\pi_i\big(\mathrm{U}(n,\mathbb{C})\big) \to \pi_i\big(\mathrm{U}(n+1,\mathbb{C})\big) \to \pi_i\big(\mathrm{U}(n+2,\mathbb{C})\big) \to \cdots$$

sont des isomorphismes pour tout $i \leq 2n-1$. Ici, $\mathrm{U}(\mathbb{C})$ est la limite directe homotopie de la suite

$$\mathrm{U}(1,\mathbb{C}) \subset \mathrm{U}(2,\mathbb{C}) \subset \cdots \subset \mathrm{U}(n-1,\mathbb{C}) \subset \mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \subset \cdots$$

(voir Milnor [26], exemple 2, p. 149). On arrive au résultat suivant :

COROLLAIRE 21 (le théorème de périodicité de Bott [4], [5], [26]). — *Pour $i \geq 1$, on a :*

$$\pi_{i-1}\big(\mathrm{U}(\mathbb{C})\big) \cong \pi_{i+1}\big(\mathrm{U}(\mathbb{C})\big).$$

Remerciements. — Je remercie beaucoup le Professeur J.-P. Françoise (Université Paris VI) et le Professeur Lê Dung Trang (Université Paris VII) pour leurs conseils et leurs discussions sur le contenu et la présentation de cet article. Je remercie vivement le referee pour m'avoir indiqué les deux références [14] et [16] et m'avoir donné des conseils judicieux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. AIGNER, Combinatorial theory, Grundlehren der Math. Wissenschaften, 234, Springer, 1979.

[2] G. BIRKHOFF and S. MACLANE, A survey of modern algebra, Macmillan, New–York, 1977.

[3] A. BOREL et A. HEAFLIGER, La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique, Bull. Soc. Math. France, 89 (1966), 461–513.

[4] R. BOTT, Lecture on Morse Theory, Mathematische Institut der Universität Bonn, 1960.

[5] R. BOTT, The stable homotopy of the classical groups, Annals of Math., 70 (1959), 313–337.

[6] R.W. BROCKETT, Some geometric questions in the theory of linear systems, IEEE Trans. Autom. Control AC., 21 (1976), 449–455.

[7] P. BRUNOVSKY, A classification of linear controllable systemes, Kybernetica, 3 (1970), 173–187.

[8] C.I. BYRNES, Algebraic and Geometric aspects of the analysis of feedback systems, NATO Advanced Study Institutes Series, Series C–Mathematical and Physical Sciences, vol. 62 : Geometrical Methods for the Theory of linear systems, eds C.I. Byrnes and C.Martin (Pro. of NATO Adv. Stu. In. and AMS summer in App. Math., Harvard University, Cambridge, Mass., June 18–29, 1979), D. Reidel Publishing Company, 1980, p. 83–122.

[9] C.I. BYRNES and T.C. DUNCAN, A note on the topology of space of Hamiltonian transfer functions, Lectures in Appl. Math., vol. 18, p. 7–26, 1980, AMS–NASA–NATO Summer Sem., Havard Univ. Cambridge, Mass.

[10] C.I. BYRNES and T.C. DUNCAN, On certain topological invariants arising in system theory, from New Directions in Applied Mathematics 13, P. Hilton, G. Young eds, New–York, Springer, Verlag, 29–71, 1981.

[11] J. DIEUDONNÉ, Foundations of modern analysis, vol. 3, Academic Press, 1972.

[12] M. GUEST, Some relationships between homotopy theory and differential geometry, Ph. D. Thesis, Wolfson college, University of Oxford, 1981.

[13] V. GUILLEMIN and A. POLLACK, Differential topology,. Prentice–Hall, Englewood Cliffs., New Jersey, 1974.

[14] M. HAZEWINKEL, Moduli and canonical forms for linear dynamical systems II, The topological case, Math. Systems Theory, 10 (1976/77), 363–385.

[15] M. HAZEWINKEL, Moduli and canonical forms for linear dynamical systems. III : The algebraic geometry case, Lie Groups : History frontiers and Applications, vol. 7, The 1976 AMES Research Center (NASA) Conference on Geometric Control Theory, C. Martin and R. Hermann eds, p. 291–336, Mat. Sci. Press.

[16] M. HAZEWINKEL, (Fine) Moduli (Space) for linear systems : What are they and What are they good for? NATO Advanced Study Institutes Series, Series C, Mathematical and Physical Sciences, vol. 62 : Geometrical Methods for the Theory of linear systems, C.I. Byrnes and C. Martin eds (Proc. of NATO Adv. Stu. In. and AMS summer in App. Math., Harvard University, Cambridge, Mass., June 18–29, 1979), D. Reidel Publishing Company, 1980, p. 125–193.

[17] U. HELMKE, Zur topologie des Raumes linearer Kontrollsysteme, Ph. D. Thesis, University Bremen, 1982.

[18] D. HINRICHSEN, Metrical and topological aspects of linear control theory., Syst. Anal. Model. Simul., 4 (1987), 1, 3–36.

[19] D. HINRICHEN, D. SALOMON, A.J. PRITCHARD, E.P. CROUCH and al., Introduction to Mathematical system theory, Lecture notes for a joint course at the Universities of Warwick and Bremen, 1983.

[20] M.W. HIRSCH, Differential topology, Graduate Texts in Mathematics, 33, Springer–Verlag, New York, 1976.

[21] R.E. KALMAN, P.L. ARBIB and P.L. FALB, Topics in Mathematical System Theory, McGraw–Hill, 1969.

[22] LÊ DUNG TRANG, Sur un critère d'équisingularité, fonctions de plusieurs variables complexes, Lecture Notes in Math., Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, New York, vol. 409 (1974), 124–160.

[23] LÊ DUNG TRANG et B. TESSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney II, Proc. Symposia Pure Math., vol. 40, part 2 (1983), 65–103.

[24] B.M. MANN and R.J. MILGRAM, Some space of holomorphic maps to complex Grassmann manifolds, J. Differential Geometry, 33 (1991), 301–324.

[25] W.S. MASSEY, Homology and homotopy theory, Marcel Dekker, New York, 1978.

[26] J.W. MILNOR, Morse theory, Princeton University Press, 1963.

[27] J.W. MILNOR and J.D. STASHEFF, Characteristic classes, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[28] R. MNEIMNÉ et F. TESTARD, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Méthodes, Hermann, Paris, 1986.

[29] R. NARASIMHAN, Analysis on real and complex manifold, Masson CIE, Paris, North–Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1968.

[30] NGUYEN HUYNH PHAN, On the topology of the space of reachable symmetric linear systems, Math. J. (TAP CHI TOAN HOC), Ha Noi, XV, I (1987), 16–26.

[31] NGUYEN HUYNH PHAN, On the topology of the space of reachable symmetric linear systems, Lecture Notes in Mathamatics, vol. 1474, 1991, 235–253, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, New York (Proccedings of the International Conference on Algebraic Topology, Poznan, Poland, June 22–27, S.Jackowski, B. OLiver, K. Pawalowski eds).

[32] NGUYEN HUYNH PHAN, On the topology of the space of reachable skew–symmetric Hamiltonian linear systems, Rendiconti di Matematica, Serie VII, vol. 11, Roma 541–558, 1991.

[33] V.M. POPOV, Invariant description of linear time–invariant controllable systems, SIAM J. Control, 10 (1972), 252–264.

[34] E.H. SPANIER, Algebraic topology, McGraw–Hill, New York, 1966.

[35] G. SEGAL, The topology of space of rational funtions, Acta Math., 143 (1979), 39–72.

[36] H. WHITNEY, Tangents to an analytic variety, Ann. of Math., (2), 81 (1965), 496–549.

[37] J.C. WONHAM, Linear multivariable control : A geometric approach, Lecture Notes, Economical and Math. Systems, 101, Springer, 1974.

Manuscrit reçu le 24 mars 1993,
révisé le 15 décembre 1993.

NGUYEN HUYNH PHAN,
Université Paris VII
Laboratoire 213 au CNRS 2 UFR 920
Boîte 172, 5^{e} étage
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France).