ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNADETTE PERRIN-RIOU

Fonctions L p-adiques d'une courbe elliptique et points rationnels

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 4 (1993), p. 945-995

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_4_945_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 4 (1993), 945-995

FONCTIONS L p-ADIQUES D'UNE COURBE ELLIPTIQUE ET POINTS RATIONNELS

par Bernadette PERRIN-RIOU

Dans [R92], Rubin construit, pour E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$ à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire, un élément x de $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})$, d'ordre infini dès que $E(\mathbb{Q})$ est de rang ≥ 1. Cet élément est construit à partir des unités elliptiques. Il est connu depuis longtemps que ces mêmes unités elliptiques permettent de construire la fonction L p-adique de E, ou plutôt **les** fonctions L p-adiques (par différentes spécialisations de la fonction L p-adique à 2 variables de E). Rubin établit alors un lien entre les valeurs de ces fonctions L ou de leurs dérivées et divers invariants de x (de manière rapide, son "logarithme", sa hauteur p-adique...).

Il est alors naturel de se demander ce qu'il en est pour une courbe elliptique sans multiplication complexe. Prenons-la définie sur $\mathbb{Q}$ et modulaire. Dans la situation actuelle, lorsqu'elle est de plus ordinaire en p, une seule fonction L p-adique est connue. Par contre, lorsque E est supersingulière en p, il est construit deux fonctions L p-adiques ([MTT86], [V76]). Le but premier de ce texte est d'expliquer comment on pourrait réparer cette injustice faite aux courbes elliptiques ordinaires et sans multiplication complexe et donner des formules analogues aux formules de Rubin dans ce cas-là en utilisant les résultats locaux de [P92c], [Pa].

Mots-clés : Courbe elliptique – Fonctions L – Hauteur p-adique – Théorie d'Iwasawa – Représentations p-adiques.
Classification A.M.S. : 11G05 – 11G40 – 11R23 – 11R42 – 11S25.

Ces mêmes résultats locaux permettent de revoir les conjectures principales classiques et de les généraliser au cas des courbes elliptiques supersingulières en p. On définit un module sur l'algèbre d'Iwasawa Λ, noté $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ dans le texte, qui joue le rôle de la limite projective $\mathcal{E}_\infty$ des unités globales le long de la $\mathbb{Z}_p$-extension de la théorie classique. A l'aide des homomorphismes Ω_V à la Coleman définis dans [Pa], on associe à tout élément de $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ un élément $\mathcal{L}_\omega$ de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}(V)$ où $\mathbf{D}(V)$ est le module de Dieudonné de E sur $\mathbb{Q}_p$ et où $\mathcal{H}(G_\infty)$ est une algèbre contenant Λ. En tenant compte d'autre part de $H^2_{\infty,S}(\mathbf{T})$, on peut alors définir une fonction L p-adique "arithmétique" à une unité près de l'algèbre d'Iwasawa et énoncer une "conjecture principale".

On espère d'autre part que *pour un choix "naturel" de* ω (analogue des unités cyclotomiques), *la fonction* $\mathcal{L}_\omega$ *mérite le nom de "fonction L p-adique de la courbe elliptique E"* (*cf.* §3). Des annonces de Kato vont dans ce sens. La fonction L p-adique de Mazur-Swinnerton-Dyer pourrait alors s'obtenir comme une projection convenable d'un tel $\mathcal{L}_\omega$.

De telles spéculations permettent d'aboutir à une formule qui a un sens concret (c'est-à-dire dont les termes sont bien définis) dans le cas où E est supersingulière en p, formule dans l'esprit de [Ru92], theorem 10.4 : il s'agit, lorsque $E(\mathbb{Q})$ est de rang 1, de donner une expression du carré du logarithme p-adique d'un générateur de $E(\mathbb{Q})$ en termes des fonctions L p-adiques de Amice-Vélu-Vishik-Mazur-Swinnerton-Dyer. On peut en fait placer cette formule dans le cadre général des "conjectures de Birch-Swinnerton-Dyer pour les fonctions L p-adiques" notées $BSD(V)$. Nous reprenons ces conjectures qui sont nouvelles dans le cas supersingulier. On énonce aussi les conjectures p-adiques de Bloch-Kato (en un entier non critique) notées $BK(V,j)$. Pour la fonction L p-adique arithmétique, on démontre les conjectures $BSD(V)$ et $BK(V,j)$ pour $j \neq 0$ à une unité près sous des hypothèses de non-dégénérescence.

Donnons le plan du texte. Dans le paragraphe 1, on introduit les modules étudiés et on énonce dans le cas des courbes elliptiques les théorèmes et conjectures de [Pa] dont on aura besoin. Dans le paragraphe 2, nous démontrons des formules concernant la fonction $\mathcal{L}_\omega$. Nous sommes alors amenés à parler de hauteur p-adique. Dans le paragraphe 3.1, nous définissons la fonction L p-adique analytique $L_{p,MSD}$ (à valeurs dans $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$) à partir des fonctions de Mazur-Swinnerton-Dyer et als. Dans le paragraphe 3.2, nous expliquons succintement le lien qu'il devrait y avoir entre $L_{p,MSD}$, nos $\mathcal{L}_\omega$ et les éléments de Beilinson-

Kato. Dans le paragraphe 3.3, nous énonçons les conjectures pour les valeurs en χ^j de $L_{p,MSD}$ pour $j \in \mathbb{Z}$. On obtient dans ce paragraphe la formule "à la Rubin". Dans le paragraphe 3.4, nous définissons le module arithmétique des fonctions L p-adiques, nous donnons plusieurs versions de la conjecture principale et nous montrons l'analogue des conjectures $BSD(V)$ et $BK(V,j)$ sur la fonction arithmétique à une unité près.

Pour finir, remarquons que les résultats de ce texte auraient pu être écrits sans grande modification dans le cas de la représentation p-adique associée à une forme modulaire primitive pour $\Gamma_O(N)$ et de poids $k \geq 2$. On aurait pu aussi introduire dans les formules des caractères de Dirichlet de conducteur premier à p...

Plan

1. Préliminaires.

1.1. Donnons quelques notations et définitions, exprimées "à la Bloch-Kato", c'est-à-dire en termes de la représentation p-adique associée à E (*cf.* par exemple [BK90], [FP91], [FP92], [P92a]; *cf.* [P92b] pour une traduction en termes classiques). Nous nous limitons volontairement dans ce texte au cas des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$.

Si X est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel (resp un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, un $\mathbb{Z}_p$-module), on pose $X^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(X, \mathbb{Q}_p)$ (resp $X^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X, \mathbb{Z}_p)$,

$X^\wedge = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))$. Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Si F est un corps de nombres contenu dans $\overline{\mathbb{Q}}$, on pose $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$. On choisit une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$. Si v est une place de F, on note G_{F_v} un sous-groupe de décomposition de v. On note $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ où $\mu_{p^{n+1}}$ est le groupe des racines p^{n+1}-ièmes de l'unité, $\mathbb{Q}_\infty = \cup \mathbb{Q}_n$ la $\mathbb{Z}_p^\times$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois G_∞, $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}_0)$, $G_n = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q})$, $\Delta = G_0 = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_0/\mathbb{Q})$, $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]$, $\Lambda_\Gamma = \mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]$. On désigne par γ un générateur topologique de Γ. Pour tout entier r, on note $\mathbb{Q}_p(r)$ le r-ième twist de Tate : si $\chi : G_\infty \to \mathbb{Z}_p^\times$ est le caractère cyclotomique donnant l'action sur les racines p^n-ièmes de l'unité pour tout n, l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}_p(r)$ est donnée par χ^r.

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathbf{T} = T_p(E)$ la limite projective des points de p^n-torsion E_{p^n} de $E(\overline{F})$ et $V = V_p(E) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(E)$. On pose

$$V^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p(1)) \ , \quad \mathbf{T}^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}, \mathbb{Z}_p(1)) \subset V^*(1).$$

Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V (resp. le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbf{T}$) est muni d'une action linéaire continue de $G_{\mathbb{Q}}$.

Soit S un ensemble fini de places de $\mathbb{Q}$ contenant p, ∞ et les places de mauvaise réduction de V (ou ce qui revient au même de E); on note S_f l'ensemble des places finies de S. Soit $G_{S,\mathbb{Q}_n}$ le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}_n$ de la plus grande extension galoisienne de $\mathbb{Q}_n$ (ou de $\mathbb{Q}$) non ramifiée en dehors de S. Pour $i \geq 0$, on note $H^i(G_{S,\mathbb{Q}_n}, -)$ les groupes de cohomologie continue et $H^i(G_{S,\mathbb{Q}_\infty}, -)$ la limite inductive des $H^i(G_{S,\mathbb{Q}_n}, -)$ pour les applications de restriction. On pose

$$H^i_{\infty,S}(\mathbf{T}) = \varprojlim H^i(G_{S,\mathbb{Q}_n}, \mathbf{T}).$$

Si w est une place de $\mathbb{Q}_\infty$, on note $Z^i_{\infty,w}(\mathbf{T})$ la limite projective relative aux applications de corestriction (norme) des $H^i(\mathbb{Q}_{n,w}, \mathbf{T})$. On pose $Z^i_{\infty,S}(\mathbf{T}) = \oplus_{v \in S_f}(\oplus_{w|v} Z^i_{\infty,w}(\mathbf{T}))$, $Z^i_{\infty,p}(\mathbf{T}) = Z^i_{\infty,w_p}(\mathbf{T})$ si w_p est l'unique place de $\mathbb{Q}_\infty$ au-dessus de p.

1.2. Notons $\mathbf{D}_p(V) = (B_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ le module de Dieudonné de E en p. Il est muni d'un endomorphisme de Frobenius φ bijectif et d'une filtration décroissante $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{D}_p(V)$ de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels :

$$\mathbf{D}_p(V) = \mathrm{Fil}^{-1}\,\mathbf{D}_p(V) \supset \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V) \supset \mathrm{Fil}^1\,\mathbf{D}_p(V) = 0$$

avec $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ de dimension 1. Si K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, soit $\exp_V = \exp_{K,V} : \mathbf{D}_p(V) \to H^1(K, V)$ l'application exponentielle de Bloch-Kato ([BK90], 3.10, [FP91], I). L'image de $\exp_{K,V}$ est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel

$H^1_f(K,V) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim E(K)/p^n E(K)$ et $H^1_f(K,\mathbf{T}) = \varprojlim E(K)/p^n E(K)$ est l'image réciproque de $H^1_f(K,V)$ dans $H^1(K,\mathbf{T})$.

Posons $\tau \cdot (1+T) = (1+T)^{\chi(\tau)}$ pour $\tau \in G_\infty$. On fait agir Λ sur $1+T$ par prolongement par linéarité (ici, T est une indéterminée). Si $f \in \Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V)$, soit $G(T)$ la solution dans $\mathbb{Q}_p[\![T]\!] \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$ de l'équation $(1-\varphi)G = f \cdot (1+T)$ où φ est l'endomorphisme $\mathbb{Q}_p$-linéaire tel que $\varphi(\alpha(T) \otimes d) = \alpha((1+T)^p - 1) \otimes \varphi(d)$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}_p[\![T]\!]$ et $d \in \mathbf{D}_p(V)$. Choisissons $\varepsilon = (\zeta_n)$ un système compatible de racines p^{n+1}-ièmes de l'unité. On pose

$$\Xi_{n,V}(f) = \Xi^\varepsilon_{n,V}(f) = (1 \otimes p\varphi)^{-(n+1)}(G)(\zeta_n - 1) \in \mathbb{Q}_{n,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V).$$

Si $V(j) = V \otimes \mathbb{Q}_p(j)$, on définit de même $\mathbf{D}_p(V(j))$, $H^1_f(K,V(j))$, l'exponentielle $\exp_{V(j)} = \exp_{K,V(j)} : \mathbf{D}_p(V) \to H^1(K,V)$ et $\Xi_{n,V(j)}(f)$ pour $f \in \Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V(j))$ (rappelons que $\mathbf{D}_p(V(j)) = \mathbf{D}_p(V) \otimes \mathbb{Q}_p[-j]$ où $\mathbb{Q}_p[-j]$ admet une base e_{-j} telle que $\varphi e_{-j} = p^{-j} \otimes e_{-j}$ et $\mathbb{Q}_p[-j] = \mathrm{Fil}^{-j}\,\mathbb{Q}_p[-j] \supset \mathrm{Fil}^{-j+1}\,\mathbb{Q}_p[-j] = 0$; on a alors un isomorphisme canonique $\mathbf{D}_p(V(j)) \to \mathbf{D}_p(V(j+1))$ donné par $e \mapsto e \otimes e_{-1}$). Notons $Tw^\varepsilon_{1,V(j)}$ l'opérateur de twist $Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}(j)) \simeq Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}(j)) \otimes \mathbb{Z}_p(1) = Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}(j+1))$ donné par $x \mapsto x \otimes \varepsilon$.

Soit $\mathcal{H}(\Gamma)$ l'ensemble des $h(\gamma - 1)$ où $h \in \mathbb{Q}_p[\![X]\!]$ est un $o(\log^r)$ au bord du disque unité pour un entier r et $\mathcal{H}(G_\infty) = \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\Delta]$. Notons $Tw : \mathcal{H}(G_\infty) \to \mathcal{H}(G_\infty)$ l'opérateur de twist induit par $\gamma \mapsto \chi(\gamma) \cdot \gamma - 1$ (qui respecte Λ).

1.3. THÉORÈME. — *Pour h entier supérieur ou égal à 1, il existe une unique famille d'homomorphismes injectifs de Λ-modules pour $j \in \mathbb{Z}$*

$$\Omega^\varepsilon_{V(j),h+j} : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{D}_p(V(j)) \to \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}(j))$$

telle que

i) *pour tout entier $j \geq 1-h$, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^\varepsilon_{V(j),h+j} : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{D}_p(V(j)) & \longrightarrow & \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}(j)) \\
{\scriptstyle \Xi_{n,V(j)}} \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Q}_{n,p} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{D}_p(V(j)) & \underset{(h+j-1)! \cdot \exp_{\mathbb{Q}_{n,p},V(j)}}{\longrightarrow} & H^1(\mathbb{Q}_{n,p}, V(j))
\end{array}$$

où l'application verticale de droite se déduit de la projection naturelle (si $\omega \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})$, on note ω_n son image dans $H^1(\mathbb{Q}_{n,p}, V)$);

ii) *pour tout entier j, on a*

$$Tw^\varepsilon_{1,V(j)} \circ \Omega^\varepsilon_{V(j),h+j} \circ Tw \otimes e_1 = -\Omega^\varepsilon_{V(j+1),h+j+1}\,.$$

Le lien entre les $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ lorsque h varie est : $\Omega^{\varepsilon}_{V,h+1} = \ell_h \cdot \Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ où $\ell_h = \log(\chi(\gamma)^h \cdot \gamma^{-1})/\log\chi(\gamma)$ (pour γ un élément quelconque d'ordre infini de G_∞). Enfin, $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ se prolonge en un $\mathcal{H}(G_\infty)$-homomorphisme de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$ dans $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})$. Ce théorème s'obtient comme application de [Pa], théorème 3.2.3 à notre cas particulier (voir aussi [P92c]).

1.4. Plongeons $Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})$ dans un Λ-module libre de rang 2 avec un indice fini, par exemple son bidual $Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})^{**}$. Si (d_1, d_2) est une base de $\mathbf{D}_p(V)$ et (z_1, z_2) une base de $Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})^{**}$, $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ est alors déterminé dans $(1\otimes d_1, 1\otimes d_2)$ et (z_1, z_2) par une matrice $\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathcal{H}(G_\infty)$.

Supposons que E a *bonne réduction ordinaire* en p. Alors, V admet une filtration $\mathrm{Fil}^1 V \subset V$ en tant que $G_{\mathbb{Q}_p}$-module tel que le sous-groupe d'inertie en p agisse sur $V/\mathrm{Fil}^1 V$ par l'identité et sur $\mathrm{Fil}^1 V$ par χ. Il est facile de voir que $Z^1_{\infty,p}(\mathrm{Fil}^1 \mathbf{T})$ s'injecte dans $Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})$ et que le conoyau de l'application naturelle $Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}/\mathrm{Fil}^1 \mathbf{T})$ est fini (ce dernier fait se déduit de ce que $Z^2_{\infty,p}(\mathrm{Fil}^1 \mathbf{T})$ est fini). Choisissons alors z_1 et z_2 de manière à ce que z_1 soit une base de $Z^1_{\infty,p}(\mathrm{Fil}^1 \mathbf{T})^{**}$.

D'autre part, soient $D_{[-1]} = \mathbf{D}_p(V)_{[-1]}$ (resp $D_{[0]} = \mathbf{D}_p(V)_{[0]}$) le sous-espace propre de $\mathbf{D}_p(V)$ de φ associé à la valeur propre de valuation -1 (resp 0) et $e_{[-1]}$ (resp $e_{[0]}$) une base de $D_{[-1]}$ (resp $D_{[0]}$). Remarquons que l'on a $\mathbf{D}(\mathrm{Fil}^1 V) = D_{[-1]}$. Choisissons $e_{[-1]} \in D_{[-1]}$, $e_{[0]} \in D_{[0]}$ de la manière suivante : l'image de $\mathbb{Z}_p e_{[-1]}$ (resp $\mathbb{Z}_p e_{[0]}$) dans $B_{dR} \otimes \mathrm{Fil}^1 \mathbf{T}$ (resp $B_{dR} \otimes \mathbf{T}/\mathrm{Fil}^1 \mathbf{T}$) est contenue dans $\mathbb{C}_p \cdot t \otimes \mathrm{Fil}^1 \mathbf{T}$, (resp $\mathbb{C}_p \otimes \mathbf{T}/\mathrm{Fil}^1 \mathbf{T}$) où $\mathbb{C}_p$ est la complétion p-adique de $\overline{\mathbb{Q}}_p$, B_{dR} le corps des périodes de Fontaine et t un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ dans B_{dR} ; on choisit $e_{[-1]}$ (resp $e_{[0]}$) de manière à ce que son image engendre le $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-module $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \cdot t^{-1} \otimes \mathrm{Fil}^1 \mathbf{T}$ (resp $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \otimes \mathbf{T}/\mathrm{Fil}^1 \mathbf{T}$) où $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$. La matrice de $\Omega^{\varepsilon}_{V,1}$ dans les bases $(1 \otimes e_{[-1]}, 1 \otimes e_{[0]})$ et (z_1, z_2) est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \ell_0.d' \end{pmatrix}$$

où a, d' appartiennent à $\Lambda^\times$ et où b appartient à $\mathcal{H}(G_\infty)$ (et est plus précisément un $O(\log)$) (cela résulte des travaux de Coleman [Co79], voir [Pa], § 3.4 et [P92c]).

De manière générale (supersingulière ou ordinaire), on peut montrer que $(\ell_0)^{-1} \cdot \det(\Omega^{\varepsilon}_{V,1})$ appartient à $p^{\mathbb{Z}} \cdot \Lambda$ et on *conjecture* que $(\ell_0)^{-1} \cdot \det(\Omega^{\varepsilon}_{V,1})$ appartient à $p^{\mathbb{Z}}\Lambda^\times$ (et même à $\Lambda^\times$ pour un choix de la base de $\mathbf{D}_p(V)$ convenable par rapport à $\mathbf{T}$: une base de $\mathbf{D}_p(V)$ détermine un élément de $\det_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$, l'accouplement de Weil donne un isomorphisme de $\det_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V))$ sur $\mathbb{Q}_p$ et de $\det_{\mathbb{Q}_p} V$ sur $\mathbb{Q}_p(1) \simeq \mathbb{Q}_p$, on demande que les images de la base de $\mathbf{D}_p(V)$ donnée et de $\det_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{T}$ dans $\mathbb{Q}_p$ soient les mêmes; dans le cas ordinaire, le choix de $(e_{[-1]}, e_{[0]})$ fait précédemment convient). La première conjecture est notée $\delta(V)$ dans [Pa], 3.4; la conjecture plus précise est notée $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$. Comme cela a été écrit au paragraphe précédent, la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ est démontrée pour V ordinaire en p.

1.5. Conjecture (Leop(V)) : $H^2_{\infty,S}(\mathbf{T})$ **est un Λ-module de torsion.**

Cette conjecture est équivalente à la conjecture connue sous le nom de conjecture faible de Leopoldt : $H^2(G_{S,\mathbb{Q}_\infty}, V/\mathbf{T}) = 0$. Leop($V$) est aussi équivalent à ce que $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ soit un Λ-module de rang 1.

Rappelons que l'on sait montrer dans certains cas cette conjecture. Par exemple, Coates et Mc Connell ([CM]) ont montré que *si $E(\mathbb{Q})$ est de rang* 1 *et si la composante p-primaire du groupe de Shafarevich-Tate est finie, la conjecture* Leop(V) (relativement au caractère trivial de Δ) *est vraie.* La condition dont on a réellement besoin est que l'application de localisation $H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1)) \to H^1_f(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$ soit injective, ce qui est vrai sous les conditions précédentes car $E(\mathbb{Q})$ s'injecte dans $E(\mathbb{Q}_p)$. Rappelons rapidement la démonstration.

Il s'agit de montrer que le dual de Pontryagin $X^2_{\infty,S}(\mathbf{T}^*(1))^\Delta$ de $H^2(G_{S,\mathbb{Q}_\infty}, V/\mathbf{T})^\Delta$ est de torsion. En effet, $H^1(G_\infty, H^2(G_{S,\mathbb{Q}_\infty}, V/\mathbf{T})) = 0$, ce qui implique que $X^2_{\infty,S}(\mathbf{T}^*(1))$ n'a pas de torsion. On sait que $\mathrm{rg}_{\Lambda_\Gamma} X^1_{\infty,S}(\mathbf{T}^*(1))^\Delta - \mathrm{rg}_{\Lambda_\Gamma} X^2_{\infty,S}(\mathbf{T}^*(1))^\Delta = 1$ où $X^1_{\infty,S}(\mathbf{T}^*(1))$ est le dual de Pontryagin de $H^1(G_{S,\mathbb{Q}_\infty}, V/\mathbf{T})$. On montre facilement la suite exacte (G_∞ est de dimension cohomologique 1) :

$$0 \to H^1(G_\infty, (V/\mathbf{T})^{G_{\mathbb{Q}_\infty}}) \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V/\mathbf{T}) \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}_\infty}, V/\mathbf{T})^{G_\infty} \to 0.$$

Il s'agit donc de montrer que $H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V) = \mathbb{Q}_p \otimes H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V/\mathbf{T})$ est de dimension 1. Pour cela, on considère la suite exacte de Poitou-Tate ([P92a], 4.1.1, [FP92]), chapitre 2) :

$$\begin{aligned} 0 \to H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V)^* \to H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1)) \to H^1_f(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \\ \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V)^* \to H^1_f(\mathbb{Q}, V)^* \to 0. \end{aligned}$$

L'hypothèse faite implique que $H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V) = 0$. On sait d'autre part (théorème de Tate sur la caractéristique d'Euler) que

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V) - \dim_{\mathbb{Q}_p} H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V) = -\dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(\mathbb{R}, V^*(1)) = -1.$$

Donc, $\dim_{\mathbb{Q}_p} H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V) = 1$ et $\mathrm{Leop}(V)$ est vraie.

1.6. Soit ω un élément non nul de $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$. On pose

$$L_\omega = -\ell_0 \cdot (\Omega^\varepsilon_{V,1})^{-1}(\omega) = -(\Omega^\varepsilon_{V,0})^{-1}(\omega).$$

Sous la *conjecture* $\delta(V)$: $\det(\Omega_{V,1}) \in p^{\mathbb{Z}} \cdot \ell_0 \cdot \Delta^\times$ *que nous supposons*, il est facile de vérifier que L_ω appartient à $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$.

Pour tout caractère continu η de G_∞ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$, $\eta(L_\omega)$ appartient à $\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$. On obtient ainsi une fonction $\mathcal{L}_\omega$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_\infty, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ définie par $\mathcal{L}_\omega(\eta) = \eta(L_\omega)$.

Si η est un caractère d'ordre fini de G_∞, on pose

$$\mathcal{L}'_\omega(\eta) = \lim_{s\to 0}(\mathcal{L}_\omega(\eta \cdot \widetilde{\chi}^s) - \mathcal{L}_\omega(\eta))/s$$

(où $\widetilde{\chi}$ est le composé de χ avec la projection naturelle : $\mathbb{Z}_p^\times \to 1+p\mathbb{Z}_p$). C'est la dérivée en η de $\mathcal{L}_\omega$ dans la direction $\widetilde{\chi}$. Nous allons dans le paragraphe suivant démontrer des formules reliant $\mathcal{L}_\omega(\eta \cdot \chi^j)$, $\mathcal{L}'_\omega(\eta)$ (pour η caractère d'ordre fini de G_∞ et j entier) à des invariants associés à ω.

La fonction $\mathcal{L}_\omega$ est à valeurs dans un $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel de dimension 2. Ses coordonnées relativement à une base donnent donc deux fonctions. Certains choix de bases peuvent paraître plus judicieux que d'autres, par exemple dans le cas d'une courbe elliptique ordinaire la base $(e_{[-1]}, e_{[0]})$. Il faut cependant se méfier. Ainsi, lorsque l'on sort du cadre des courbes elliptiques et que l'on se place dans la catégorie des représentations pseudo-géométriques, cristallines en p, il est naturel de demander que les choix faits soient fonctoriels (il s'agit essentiellement de choisir un sous-espace de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d^+ = \dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(\mathbb{C}/\mathbb{R}, V)$ et un supplémentaire). En copiant la situation complexe, il est alors tentant de *choisir* une conjugaison complexe c, d'étendre les scalaires à B_{cris}, d'utiliser l'isomorphisme de comparaison $B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \simeq B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$ et l'image de $V^+ = V^{c=1}$. Ce point de vue est considéré dans [Pb]. Ici, nous restons dans le cadre des courbes elliptiques, nous ne faisons pas de choix de bases et regardons la fonction $\mathcal{L}_\omega$ comme à valeurs dans $\mathbb{C}_p \otimes \mathbf{D}_p(V)$.

2. Quelques formules sur $\mathcal{L}_\omega$.

2.1. Valeur de $\mathcal{L}_\omega$ en un caractère d'ordre fini.

2.1.1. Donnons quelques définitions. Si K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on note $t_V(K) = K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)/\operatorname{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$ l'espace tangent de V sur K; si $P \in H^1_f(K,V)$, on note $\log_V P$ ou $\log_{V,K} P \in t_V(K)$ le logarithme de P : $\log_{V,K}$ est l'application réciproque de l'exponentielle $\exp_{V,K} : t_V(K) \to H^1_f(K,V)$. L'application duale de l'exponentielle $\exp_{V^*(1),K}$ induit une application

$$\lambda_V = \lambda_{V,K} : H^1(K,V)/H^1_f(K,V) \to K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V).$$

Pour $n \geq 0$, on note $R_{V,n} : H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to \mathbb{Q}_{n,p} \otimes \operatorname{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$ l'application composée de $(\#G_n)^{-1} \cdot \lambda_{V,\mathbb{Q}_{n,p}}$ avec la projection naturelle

$$H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to H^1(\mathbb{Q}_{n,p}, \mathbf{T}) \to H^1(\mathbb{Q}_{n,p}, \mathbf{T})/H^1_f(\mathbb{Q}_{n,p}, \mathbf{T}).$$

On a alors $\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_{n+1,p}/\mathbb{Q}_{n,p}}(R_{V,n+1}(\omega)) = R_{V,n}(\omega)$. Pour tout caractère η de G_∞ d'ordre fini et de conducteur p^{n+1} (c'est-à-dire se factorisant par G_n et non par G_{n-1}), on pose

$$R_V^{(\eta)} = \sum_{\tau \in G_n} \eta(\tau)^{-1} \cdot \tau(R_{V,n}) \ ;$$

on pose

$$R_V = \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_p)/\mathbb{Q}_p} \circ R_{V,0} : H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to \operatorname{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V).$$

On note $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{G_\infty}$ le caractère trivial.

2.1.2. Notons $[\ ,\ ]_{\mathbf{D}_p(V)}$ la forme bilinéaire naturelle $\mathbf{D}_p(V) \times \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$; elle vérifie $[\varphi a, \varphi b]_{\mathbf{D}_p(V)} = p^{-1}[a,b]_{\mathbf{D}_p(V)}$. On l'étend par linéarité à $\mathbb{Q}_{n,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V) \times \mathbb{Q}_{n,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V^*(1))$ ou à $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V) \times \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))$ en gardant la même notation. D'autre part, on note $\langle\ ,\ \rangle_n$ l'application de dualité :

$$H^1(\mathbb{Q}_{n,p}, V) \times H^1(\mathbb{Q}_{n,p}, V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

et $\langle\ ,\ \rangle_\infty : Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}) \times Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T}^*(1)) \to \Lambda$ l'application définie par

$$\langle x, y\rangle_\infty = \Big(\sum_{\tau \in G_n} \langle \tau^{-1} \cdot x_n, y_n \rangle_n \cdot \tau \Big)_n$$

que l'on prolonge à $\mathcal{H}(G_\infty)$ par sesquilinéarité (pour l'automorphisme ι : $\mathcal{H}(G_\infty) \to \mathcal{H}(G_\infty)$ induit par $\tau \mapsto \tau^{-1}$ pour $\tau \in G_\infty$).

On fait la conjecture ([Pa], § 3.6, [P92c]) :

CONJECTURE (Réc(V)). — *Si $f \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$ et $g \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V^*(1))$, alors*

$$\langle \Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g)\rangle_\infty = [f, \iota(g)]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

En particulier, cela implique que si $f \equiv \sum_{\tau \in G_n} f_\tau \cdot \tau$ modulo $(\gamma^{p^n} - 1)$ et $g \equiv \sum_{\tau \in G_n} g_\tau \cdot \tau$ modulo $(\gamma^{p^n} - 1)$ pour $n \geq 0$, si l'image $\Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f)_n$ de $\Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f)$ dans $H^1(\mathbb{Q}_{n,p}, V)$ est définie, on aurait

$$\langle \Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f)_n, \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g)_n\rangle_n = \sum_{\tau \in G_n} [f_\tau, g_\tau]_{\mathbf{D}_p(V)}$$

et

$$\left\langle \sum_{\tau \in G_n} \eta(\tau)^{-1} \cdot \tau \Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f)_n, \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g)_n \right\rangle_n = [\eta(f), \eta^{-1}(g)]_{\mathbf{D}_p(V)}$$

pour η caractère de G_n.

2.1.3. PROPOSITION. — Réc(V) *implique* $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$. *Si V est ordinaire en p, la conjecture* Réc(V) *est vraie. Si V est supersingulière en p, la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ implique que la conjecture* Réc(V) *est vraie à un élément de $\Lambda^\times$ près, c'est-à-dire qu'il existe $h \in \Lambda^\times$ tel que*

$$\langle \Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g)\rangle_\infty = h[f, \iota(g)]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

Démonstration. — Le fait que Réc(V) implique $\delta(V)$ est démontrée dans [Pa], proposition 3.6.7.

On a une application bilinéaire alternée de V à valeurs dans $\mathbb{Q}_p(1)$ (accouplement de Weil) qui induit un isomorphisme de V avec $V^*(1)$ et de $\mathbf{T}$ avec $\mathbf{T}^*(1)$. On en déduit facilement en procédant comme dans [Pa] que Réc(V) implique $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$. Faisons la réciproque. L'accouplement de Weil (et l'identification de $\mathbf{D}_p(V)$ avec $\mathbf{D}_p(V^*(1))$ et de V avec $V^*(1)$) permet d'obtenir deux applications bilinéaires alternées non nulles (et dont les composantes selon Δ sont non nulles) de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$ dans $\mathrm{Frac}(\mathcal{H}(G_\infty))$: $(f, g) \to \langle \Omega^{\varepsilon}_{V,0}(g), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g)\rangle_\infty$ et $(f, g) \to [f, \iota(g)]_{\mathbf{D}_p(V)}$. Elles sont donc proportionnelles avec $h \in \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(G_\infty))^\times$. D'autre part, l'image de $Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})$ par $\langle\ ,\ \rangle_\infty$ est Λ. On peut choisir un réseau M engendré par une base comme en 1.4 et tel que $M \simeq M^*(1)$ et l'image de $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$ par $[\ ,\ ]_{\mathbf{D}_p(V)})$ est Λ. On en déduit que si $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ est vraie, h appartient à $\Lambda^\times$.

Supposons maintenant que V est *ordinaire* en p. Pour montrer $\mathrm{Réc}(V)$, il suffit de montrer que $\langle \Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g)\rangle_\infty = [f, \iota(g)]_{\mathbf{D}_p(V)}$ pour $f \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{[0]}$ et $g \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{[-1]}$. Avec les notations de 1.4 pour z_1 et z_2, on a

$$\Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f) = \ell_0^{-1} \cdot b_\varepsilon \cdot z_1 + d'_\varepsilon \cdot z_2, \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g) = a_{\varepsilon^{-1}} \cdot z_1.$$

D'où

$$\langle \Omega^{\varepsilon}_{V,0}(f), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g)\rangle_\infty = \langle d'_\varepsilon \cdot z_2, a_{\varepsilon^{-1}} \cdot z_1\rangle_\infty.$$

On remarque alors que $V_1 = V/\mathrm{Fil}^1 V \simeq (\mathrm{Fil}^1 V)^*(1)$. On peut définir $\Omega^{\varepsilon}_{V_1}$, $\Omega^{\varepsilon}_{V_1^*(1)}$ ([Pa]) et par fonctorialité des Ω, on a

$$\langle d'_\varepsilon \cdot z_2, a_{\varepsilon^{-1}} \cdot z_1\rangle_\infty = \langle \Omega^{\varepsilon}_{V_1,0}(f), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V_1^*(1),1}(g)\rangle_{\infty, V_1}$$

en identifiant $\mathbf{D}_p(V_1)$ avec $D_{[0]}$ et $\mathbf{D}_p(\mathrm{Fil}^1 V)$ avec $D_{[-1]}$. La loi de réciprocité pour V_1 (qui est un twist de $\mathbb{Q}_p$) est démontrée (*cf.* [Pa], 3.6.8) et implique que cela est égal à $[f, \iota(g)]_{\mathbf{D}_p(V_1)} = [f, \iota(g)]_{\mathbf{D}_p(V)}$, ce qui termine la démonstration.

2.1.4. PROPOSITION. — *On suppose* $\mathrm{Réc}(V)$ *vrai. Soit* $\omega \in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$. *Alors, on a la formule*

$$(1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathcal{L}_\omega(\mathbb{1}) = R_V(\omega).$$

Si η est un caractère d'ordre fini non trivial de G_∞ de conducteur p^{n+1}, on a

$$(p \cdot \varphi)^{-(n+1)} \cdot \mathcal{L}_\omega(\eta) = G(\eta^{-1}, \zeta_n)^{-1} \cdot R_V^{(\eta)}(\omega)$$

avec $G(\eta^{-1}, \zeta_n) = \sum_{\tau \in G_n} \eta(\tau)^{-1} \cdot \tau(\zeta_n)$.

Remarques. — i) On prolonge ici φ à $\mathbb{Q}_{n,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$ de manière $\mathbb{Q}_{n,p}$-linéaire. Remarquons que 1 et p^{-1} ne sont pas valeurs propres de φ et donc que $1-\varphi$ et $1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}$ sont des endomorphismes bijectifs de $\mathbf{D}_p(V)$.

ii) Les deux formules peuvent s'écrire en une en *posant* $\eta(\varphi) = 0$ si η est non trivial et $\eta(\varphi) = 1$ si η est le caractère trivial et en posant $G(\mathbb{1}, \zeta_{-1}) = 1$: si η est un caractère de G_∞ d'ordre fini de conducteur p^{n+1}, on a donc

$$\begin{aligned}(1-\eta)(\varphi) \cdot \varphi)^{-1} \cdot (1 - \eta(\varphi) \cdot p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot (p \cdot \varphi)^{-(n+1)} \cdot \mathcal{L}_\omega(\eta) \\ = G(\eta^{-1}, \zeta_n)^{-1} \cdot R_V^{(\eta)}(\omega).\end{aligned}$$

iii) En particulier pour le caractère trivial, on a

$$(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathcal{L}_\omega(\mathbb{1})\in \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$$

et si $R_V(\omega)=0$, $\mathcal{L}_\omega(\mathbb{1})=0$.

iv) Si l'on sait uniquement que $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ est vrai, la même démonstration prouve que la formule de la proposition est vraie à une unité près grâce à la proposition 2.1.3.

2.1.5. *Démonstration de la proposition* 2.1.4. — Soit η un caractère de conducteur p^{n+1}. Soit e_0 une base de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$. Posons

$$e_0'=(1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\cdot e_0(\text{resp. } e_0'=(p\cdot\varphi)^{(n+1)}\cdot e_0)$$

et soit e_1' un élément de $\mathbf{D}_p(V)$ tel que (e_0',e_1') soit une base de $\mathbf{D}_p(V)$. Posons

$$\Omega^\varepsilon_{V,1}(e_0')=a\cdot z_1+c\cdot z_2,\Omega^\varepsilon_{V,1}(e_1')=b\cdot z_1+d\cdot z_2$$

avec $a,b,c,d\in\mathcal{H}(G_\infty)$. Sous la conjecture $\delta(V)$ qui est impliquée par $\mathrm{Réc}(V)$ (prop. 2.1.3), on a $a\cdot d-b\cdot c=\ell_0\cdot\mu$ avec $\mu\in p^{\mathbb{Z}}\cdot\Lambda^\times$. Un calcul élémentaire montre que si $\omega=x_\omega\cdot z_1+y_\omega\cdot z_2$, on a

$$L_\omega=\mu^{-1}\big((x_\omega\cdot d-y_\omega\cdot b)e_0'+(-x_\omega\cdot c+y_\omega\cdot a)e_1'\big).$$

D'autre part, on a

$$\mathrm{Tr}_\Delta\left(\Omega^\varepsilon_{V,1}(e_0')_0\right)=\exp_V\left((1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot e_0'\right)=\exp_V(e_0)=0$$

(resp. pour $n\geq 0$ et η caractère de conducteur p^{n+1},

$$\begin{aligned}&\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau(\Omega^\varepsilon_{V,1}(e_0')_n)\\&=\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau(\exp_V((\zeta_n-1)\cdot(p\cdot\varphi)^{-(n+1)}\cdot e_0')\\&=\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau(\exp_V((\zeta_n-1)\cdot e_0))=0).\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{1}(a)=\mathbb{1}(c)=0$ (resp. $\eta(a)=\eta(c)=0$). Il est alors clair que

$$(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathbb{1}(L_\omega)\in\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$$
$$(\text{resp. }\ (p\varphi)^{-(n+1)}\cdot\eta(L_\omega)\in\mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)\,).$$

Calculons maintenant leurs valeurs exactes. Soit y_n un élément quelconque de $\mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(V^*(1))$. Choisissons $f\in\Lambda\otimes\mathbf{D}_p(V^*(1))$ tel que $\Xi^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),n}(f)=y_n$ (n est ici fixé). On a alors

$$\exp_{V^*(1),\mathbb{Q}_{n,p}}(y_n)=\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(f)_n.$$

On déduit des formules

$$\mathrm{Tr}_\Delta\left(\Xi^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),0}(f)\right) = (1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot \mathbb{1}(f)$$

et

$$\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)\cdot\tau\left(\Xi^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),n}(f)\right) = (p\cdot\varphi)^{-(n+1)}\cdot\eta^{-1}(f)\cdot G(\eta,\zeta_n^{-1})$$

pour $n\geq 0$ que

$$\mathrm{Tr}_\Delta(y_0) = (1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathbb{1}(f)$$

et

$$\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)\cdot\tau y_n = (p\cdot\varphi)^{-(n+1)}\cdot\eta^{-1}(f)\cdot G(\eta,\zeta_n^{-1})\quad\text{pour}\quad n\geq 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&[(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathbb{1}(L_\omega),\mathrm{Tr}_\Delta(y_0)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&=[\mathbb{1}(L_\omega),(1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\cdot\mathrm{Tr}_\Delta(y_0)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&=[\mathbb{1}(L_\omega),\mathbb{1}(f)]_{\mathbf{D}_p(V)} = \langle\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^{\varepsilon}_{V,0}(L_\omega)_0),\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(f)_0\rangle_0
\end{aligned}$$

(grâce à Réc(V))

$$\begin{aligned}
&=\langle\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0),\exp_{V^*(1)}(y_0)\rangle_0\\
&=\langle\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0),\exp_{V^*(1)}(\mathrm{Tr}_\Delta(y_0))\rangle_{-1}\\
&=[\lambda_V(\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0)),\mathrm{Tr}_\Delta(y_0)]_{\mathbf{D}_p(V)}
\end{aligned}$$

(par définition de λ_V). On en déduit que

$$(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathbb{1}(L_\omega) = \lambda_V(\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0)) = R_V(\omega).$$

De même, si $n\geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
&[\varphi^{-(n+1)}\cdot\eta(L_\omega),\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)\cdot\tau(y_n)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&=[\eta(L_\omega),(p\varphi)^{n+1}\cdot\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)\cdot\tau(y_n)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&=G(\eta,\zeta_n^{-1})[\eta(L_\omega),\eta^{-1}(f)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&=G(\eta,\zeta_n^{-1})\cdot\left\langle\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau\Omega^{\varepsilon}_{V,0}(L_\omega)_n,\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(f)_n\right\rangle_n
\end{aligned}$$

(grâce à (Réc(V))

$$\begin{aligned}
&=G(\eta,\zeta_n^{-1})\cdot\left\langle\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau\omega_n,\exp_{V^*(1)}(y_n)\right\rangle_n\\
&=G(\eta,\zeta_n^{-1})\cdot(\#G_n)^{-1}\cdot\left[\lambda_{V,n}\Big(\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau\omega_n\Big),\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)\cdot\tau y_n\right]_{\mathbf{D}_p(V)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\varphi^{-(n+1)} \cdot \eta(L_\omega) = G(\eta, \zeta_n^{-1}) \cdot (\# G_n)^{-1} \cdot \lambda_{V,n}\Big(\sum_{\tau \in G_n} \eta(\tau)^{-1} \cdot \tau\omega_n\Big)$$
$$= G(\eta, \zeta_n^{-1}) \cdot R_V^{(\eta)}(\omega).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $G(\eta, \zeta_n^{-1}) \cdot G(\eta^{-1}, \zeta_n) = p^{n+1}$ pour finir la démonstration de la proposition.

2.2. Valeur de $\mathcal{L}'_\omega$ en un caractère d'ordre fini.

2.2.1. Nous allons maintenant calculer la dérivée d'ordre 1 de $\mathcal{L}_\omega$ en un caractère d'ordre fini η de G_∞ lorsque $\mathcal{L}_\omega(\eta) = 0$.

Lorsque $R_V(\omega) = 0$ (resp. $R_V^{(n)}(\omega) = 0$ pour $n \geq 0$, $R_V^{(\eta)}(\omega) = 0$), on pose $P(\omega) = \mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0) \in H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbf{T})$ (resp. $P_n(\omega) = \omega_n \in H^1_f(\mathbb{Q}_n, \mathbf{T})$, $P^{(\eta)}(\omega) = \sum_{\tau \in G_n} \eta(\tau)^{-1} \cdot \tau P_n(\omega)$ pour η caractère de conducteur p^{n+1}).

2.2.2. Proposition. — *Soient $\omega \in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ et η un caractère d'ordre fini de G_∞ de conducteur p^{n+1} tel que $\mathcal{L}_\omega(\eta) = 0$ (ou ce qui est équivalent tel que $R_V^{(\eta)}(\omega) = 0$), alors*

$$(1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot (1 - \varphi)^{-1} \cdot \mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1}) \equiv \log_V(P(\omega)) \;\; \text{modulo } \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$$

si η est trivial et

$$(p \cdot \varphi)^{-(n+1)} \cdot \mathcal{L}'_\omega(\eta) \equiv G(\eta^{-1}, \zeta_n)^{-1} \cdot \log_V(P^{(\eta)}(\omega)) \qquad \text{modulo } \mathbb{Q}_{n,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$$

si η est non trivial.

Ainsi, avec les conventions de la remarque du 2.1.4,

$$(1 - \eta(\varphi) \cdot p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot (1 - \eta(\varphi)\varphi)^{-1} \cdot (p \cdot \varphi)^{-(n+1)} \cdot \mathcal{L}'_\omega(\eta)$$
$$\equiv G(\eta^{-1}, \zeta_n)^{-1} \cdot \log_V(P^{(\eta)}(\omega)) \;\; \text{modulo } \mathbb{Q}_{n,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V).$$

Démonstration. — Ecrivons $\eta = \eta_\Delta \cdot \eta_\Gamma$ avec η_Δ caractère de Δ et η_Γ caractère de Γ. Posons

$$g = \eta_\Delta((\nu_n)^{-1} L_\omega)) = -\eta_\Delta((\nu_n)^{-1} \ell_0 (\Omega^\varepsilon_{V,1})^{-1}(\omega)) \in \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$$

où $\nu_n = (\gamma^{p^n} - 1)/(\gamma^{n-1} - 1)$ pour $n \geq 1$ (resp. $\nu_{-1} = \nu_0 = \gamma - 1$). Sous l'hypothèse que $R_V^{(\eta)}(\omega) = 0$, g appartient à $\mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$. On a alors

$$\eta_\Delta((\Omega^\varepsilon_{V,1})^{-1}(\omega)) = -\nu_n \cdot (\ell_0)^{-1} \cdot g,$$

d'où

$$\sum_{\tau\in G_n} \eta(\tau)^{-1}\cdot\tau\omega_n) = -\eta_\Gamma(\nu_n\cdot(\ell_0)^{-1})\cdot \sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}_0)} \eta_\Gamma(\tau)^{-1}\cdot \exp_V(\Xi_{n,V}(g)).$$

Donc, pour $n=-1$

$$\begin{aligned}\log_V P(\omega) &= \log_V(\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0))\\ &\equiv \log\chi(\gamma)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot \mathbb{1}(g) \ \text{ modulo } \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)\end{aligned}$$

et pour $n\geq 0$,

$$\sum_{\delta\in G_n} \eta(\delta)^{-1}\cdot\delta(\log_V P_n(\omega)) \equiv -\eta_\Gamma(\nu_n\cdot(\ell_0)^{-1})\cdot(p\cdot\varphi)^{-(n+1)}\cdot\eta(g)\cdot G(\eta^{-1},\zeta_n)$$

$$\text{modulo } \mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V).$$

D'autre part, par définition de L_ω, on a $\eta_\Delta(L_\omega)=\nu_n\cdot g$. Donc,

$$\mathcal{L}'_\omega(\eta) = p^n\cdot\log\chi(\gamma)\cdot\eta_\Gamma(\gamma^{p^{n-1}}-1)^{-1}\cdot\eta(g) \ \text{ si } n\geq 1$$

et $\mathcal{L}'_\omega(\eta)=\log\chi(\gamma)\cdot\eta(g)$ si $n\leq 0$. En remarquant que $-\eta_\Gamma(\nu_n\cdot(\ell_0)^{-1}) = p^n\cdot\log\chi(\gamma)\cdot\eta_\Gamma(\gamma^{p^{n-1}}-1)^{-1}$ pour $n>0$ et que $-\eta_\Gamma(\nu_0\cdot(\ell_0)^{-1})=\log\chi(\gamma)$, on en déduit que

$$(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1})\equiv \log_V P(\omega) \ \text{ modulo } \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$$

et que si η est un caractère non trivial de conducteur p^{n+1}, on a

$$(p\cdot\varphi)^{-(n+1)}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\eta)\equiv G(\eta^{-1},\zeta_n)^{-1}\cdot\log_V P^{(\eta)}(\omega)$$

$$\text{modulo } \mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V),$$

d'où la proposition.

2.2.3. Nous allons calculer la projection de $\mathcal{L}'_\omega(\eta)$ sur $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ parallèlement à un supplémentaire N de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$. Notons β_N la projection sur $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ parallèlement à N. Pour commencer, supposons que V est *ordinaire* en p et que $N=D_{[-1]}$. Définissons une application $\delta_V : \ker R_V \to \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ (resp. $\delta_{V,n} : \ker R_{V,n}\to \mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$, $\delta_V^{(\eta)} : \ker R_V^{(\eta)}\to\mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$) de la manière suivante : si $\omega\in\ker R_V$ (resp. $\ker R_{V,n}, \ker R_V^{(\eta)}$ pour $n\geq 0$), il existe un élément ξ de $Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ tel que $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega)-(\gamma-1)\xi$ (resp. $\omega-(\gamma^{p^n}-1)\xi$, $\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau(\omega-(\gamma^{p^n}-1)\xi)$) appartienne à $\mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Z}_p}Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T})$ avec $Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T})=\varprojlim H^1_f(\mathbb{Q}_{n,p},\mathbf{T})$; $\mathrm{Tr}_\Delta(\xi)$ (resp. ξ, $\sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau(\xi)$) est déterminé modulo $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T})$ et $R_V(\xi)$ (resp. $R_{V,n}(\xi)$, $R_V^{(\eta)}(\xi)$) ne dépend que de ω : on le note $\delta_{V,\gamma}(\omega)$ (resp. $\delta_{V,n,\gamma}(\omega)$, $\delta^{(\eta)}_{V,\gamma}(\omega)$). On pose

$$\delta_{V,D_{[-1]}}(\omega)=\delta_V(\omega)=\log\chi(\gamma)\cdot\delta_{V,\gamma}(\omega)\,,\text{etc. }.$$

Dans le *cas général*, soit N un supplémentaire de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ dans $\mathbf{D}_p(V)$. On définit l'application $\delta_{V,N} : \ker R_V \to \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ de la manière suivante : si $\omega \in \ker R_V$, on peut écrire

$$-(\gamma-1)^{-1}\cdot \ell_0 \cdot \mathrm{Tr}_\Delta(\omega) = \Omega^\varepsilon_{V,1}(r) + \Omega^\varepsilon_{V,1}(m)$$

avec

$$m \in \mathcal{H}(G_\infty)\otimes(1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\cdot N$$

et

$$r \in \mathcal{H}(G_\infty)\otimes_{\mathbb{Q}_p}(1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\cdot \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)\ ;$$

alors, $\Omega^\varepsilon_{V,1}(r)$ est divisible par $(\gamma-1)$. Soit $\xi_0 = ((\gamma-1)^{-1}\cdot\log\chi(\gamma)\cdot\Omega^\varepsilon_{V,1}(r)))_0$. On pose $\delta_{V,N,\gamma}(\omega) = \lambda_V(\xi_0)$ et $\delta_{V,N}(\omega) = \log\chi(\gamma)\cdot\delta_{V,N,\gamma}(\omega)$. On définit de manière similaire les applications $\delta_{V,N,n}, \delta^{(\eta)}_{V,N}$. Elles ne dépendent pas de γ. Il est facile de vérifier que les deux définitions coïncident lorsque V est ordinaire et $N = D_{[-1]}$.

2.2.4. Proposition. — *Supposons* $\mathrm{Réc}(V)$ *vraie. Soient* $\omega \in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ *et* η *un caractère d'ordre fini de* G_∞ *de conducteur* p^{n+1} *tel que* $\mathcal{L}_\omega(\eta)=0$. *Si* $\eta = \mathbb{1}$, *la projection de* $(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1})$ *sur* $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ *parallèlement à* N *est égale à* $\delta_{V,N}(\omega)$. *Si* η *est non trivial, la projection de* $(p\cdot\varphi)^{-(n+1)}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\eta)$ *sur* $\mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ *parallèlement à* $\mathbb{Q}_{n,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} N$ *est*

$$G(\eta^{-1},\zeta_n)^{-1}\cdot\delta^{(\eta)}_{V,N}(\omega).$$

Démonstration. — Par paresse, on ne regarde que le cas du caractère trivial. On écrit comme dans la démonstration de la proposition 2.2.2

$$\mathbb{1}_\Delta(L_\omega) = (\gamma-1)\cdot g$$

avec $\quad g = -\mathbb{1}_\Delta((\gamma-1)^{-1}\cdot\ell_0\cdot(\Omega^\varepsilon_{V,1})^{-1}(\omega)) \in \mathcal{H}(\Gamma)\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(V)$.

Notons e_0 une base de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ et e_1 une base de N ; on pose $e'_i = (1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\cdot e_i$ pour $i\in\{0,1\}$. Ecrivons $\mathbb{1}_\Delta(L_\omega) = A_\omega\cdot e'_0 + B_\omega\cdot e'_1$. Alors, $(\gamma-1)$ divise $\mathbb{1}_\Delta(A_\omega)$, $\mathbb{1}_\Delta(B_\omega)$ et $\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,1}(e'_0))$ (voir démonstration de 2.2.2, on pose $\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,1}(e'_0)) = (\gamma-1)\cdot s_\gamma(e'_0))$. En désignant toujours par β_N la projection de $\mathbf{D}_p(V)$ dans $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ parallèlement à N, on a d'une part,

$$\beta_N((1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1})) = \log\chi(\gamma)\cdot\mathbb{1}((\gamma-1)^{-1}\cdot A_\omega)\cdot e_0,$$

d'autre part,

$$-\ell_0\cdot\mathrm{Tr}_\Delta(\omega) \equiv (\gamma-1)\cdot\mathbb{1}_\Delta((\gamma-1)^{-1}\cdot A_\omega)\cdot\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,1}(e'_0)) + B_\omega\cdot\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,1}(e'_1)).$$

On en déduit que

$$\xi_0 = \log\chi(\gamma)\cdot \mathbb{1}((\gamma-1)^{-1}\cdot A_\omega)\cdot S_\gamma(e_0')_0.$$

La proposition se déduit alors du lemme suivant (qui admet un analogue dans le cas d'un caractère η quelconque) :

2.2.5. LEMME. — *Soit $x \in \mathcal{H}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(V)$ tel que $\mathbb{1}(x) \in \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$, si l'on pose*

$$x' = (1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}x \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,1}(x')) = (\gamma-1)\cdot s_\gamma(x'),$$

alors $R_V(s_\gamma(x')) = (\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot\mathbb{1}(x)$.

En particulier, $R_V(s_\gamma(e_0')) = (\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot e_0$.

Démonstration. — On procède comme en 2.1.5. On remarque que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\Delta((\gamma-1)^{-1}\cdot\Omega^\varepsilon_{V,1}(x'))_0 &= -(\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot[(\ell_0)^{-1}\cdot\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,1}(x')]_0\\ &= (\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,0}(x'))_0.\end{aligned}$$

D'où, si $y\in\mathbf{D}_p(V^*(1))$ et f tel que $\Xi_{0,V^*(1)}(f) = y$,

$$\begin{aligned}[R_V(s_\gamma(x')),y]_{\mathbf{D}_p(V)} &= (\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot\langle\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,0}(x'))_0,\exp_{V^*(1)}(y)\rangle_{-1}\\ &= (\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot\langle(\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,0}(x'))_0,\mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V^*(1)}(f))_0\rangle_{-1}\\ &= (\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot[\mathbb{1}(x'),\mathbb{1}(f)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &= (\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot[\mathbb{1}(x),y]_{\mathbf{D}_p(V)}.\end{aligned}$$

On en déduit le lemme.

2.2.6. *Remarques.* — i) La démonstration donne aussi la formule suivante : si

$$(\gamma-1)^{-1}\cdot\ell_0\cdot\mathrm{Tr}_\Delta(\omega) = -\Omega^\varepsilon_{V,1}(f),$$

posons

$$\mathbb{1}(f) - (1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\cdot n \in (1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\cdot\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$$

avec $n\in N$; on a

$$\delta_{V,N}(\omega) = \log\chi(\gamma)\cdot((1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathbb{1}(f) - n).$$

Notons $\log^N P(\omega)$ l'élément de N dont la classe modulo $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ est $\log_V P(\omega)$; comme $\log\chi(\gamma)\cdot n$ est congru à $\log_V P(\omega)$ modulo $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$, on a $\log^N P(\omega) = \log\chi(\gamma)\cdot n$ et la formule devient :

$$\delta_{V,N}(\omega) = \log\chi(\gamma)\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathbb{1}(f) - \log^N P(\omega).$$

ii) De nouveau, si l'on sait uniquement que $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ est vraie, on montre de la même manière que les formules sont vraies à une unité près.

2.3. Hauteurs p-adiques.

2.3.1. Pour simplifier, on ne regarde désormais que le caractère trivial. Soit N un supplémentaire de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ dans $\mathbf{D}_p(V)$ et β_N la projection sur $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ parallèlement à N.

LEMME. — *Supposons* $\mathrm{Réc}(V)$ *vraie. Si* $\omega \in \ker R_V$ *et* $\omega^* \in \ker R_{V^*(1)}$, *on a les formules*

i)

$$[\beta_N((1-p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi^{-1})^{-1}\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1})),(1-p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi)^{-1}\mathcal{L}'_{\omega^*}(\mathbb{1})]_{\mathbf{D}_p(V)} = [\delta_{V,N}(\omega),\log_{V^*(1)} P(\omega^*)]_{\mathbf{D}_p(V)}\ ;$$

ii)

$$[(1-p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi)^{-1}\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1}),(1-p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi)^{-1}\mathcal{L}'_{\omega^*}(\mathbb{1})]_{\mathbf{D}_p(V)} = [\delta_{V,N}(\omega),\log_{V^*(1)} P(\omega^*)]_{\mathbf{D}_p(V)} + [\log_V P(\omega),\delta_{V^*(1),N^\perp}(\omega^*)]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

Démonstration. — Posons
$z=(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1}), z^*=(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_{\omega^*}(\mathbb{1})$. Notons $s_N : N \to t_V(\mathbb{Q}_p)$ l'isomorphisme induit par l'inclusion de N dans $\mathbf{D}_p(V)$ et la projection de $\mathbf{D}_p(V)$ sur $t_V(\mathbb{Q}_p)$, $N^\perp$ l'orthogonal de N dans $\mathbf{D}_p(V^*(1))$ et $s_{N^\perp} : N^\perp \to t_{V^*(1)}(\mathbb{Q}_p)$. Les propositions 2.2.2 et 2.2.3 signifient que

$$z = s_N^{-1}(\log_V P(\omega)) + \delta_{V,N}(\omega)\,,$$
$$z^* = s_{N^\perp}^{-1}(\log_{V^*(1)} P(\omega^*)) + \delta_{V^*(1),N^\perp}(\omega^*).$$

En remarquant que $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V^*(1))$ (resp. N et $N^\perp$) sont orthogonaux, on obtient

$$\begin{aligned}
&[z,z^*]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&= \left[s_N^{-1}(\log_V P(\omega)),\delta_{V^*(1),N^\perp}(\omega^*)\right]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&\quad + \left[\delta_{V,N}(\omega), s_{N^\perp}^{-1}(\log_{V^*(1)} P(\omega^*))\right]\mathbf{D}_{p(V)}\\
&= \left[\log_V P(\omega),\delta_{V^*(1),N^\perp}(\omega^*)\right]_{\mathbf{D}_p(V)} + \left[\delta_{V,N}(\omega),\log_{V^*(1)} P(\omega^*)\right]_{\mathbf{D}_p(V)}.
\end{aligned}$$

De même,

$$[\beta_N(z),z^*]_{\mathbf{D}_p(V)} = [\delta_{V,N}(\omega),z^*]_{\mathbf{D}_p(V)} = [\delta_{V,N}(\omega),\log_{V^*(1)} P(\omega^*)]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

2.3.2. On désire réinterpréter les formules du lemme 2.3.1 en termes de l'accouplement de hauteur p-adique. Rappelons d'abord quelques définitions.

Si F est un corps de nombres, on note $H^1_f(F,V)$ l'ensemble des éléments de $H^1(F,V)$ dont l'image dans $H^1(F_v,V)$ appartient à $H^1_f(F_v,V)$ pour toute place v divisant p (remarquons que si $H^1_f(F_v,V) = H^1(G_v/I_v, V^{I_v})$, I_v le sous-groupe d'inertie en v pour v ne divisant pas p, alors $H^1_f(F_v,V)=0$ dans la situation où nous sommes). On définit une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_{V,N,\chi}$

$$H^1_f(F,V)\times H^1_f(F,V^*(1))\to \mathbb{Q}_p$$

dépendant du choix de N de la manière suivante (*cf.* par exemple, [N92]). Soient $x\in H^1_f(F,V)$ et $y\in H^1_f(F,V^*(1))$. Soit V_y l'extension de V par $\mathbb{Q}_p(1)$ définie par y. On a alors la suite exacte ([Ne], lemma 2.3 ou [FP92], II, 2.2.3)

$$0\to H^1_f(F,\mathbb{Q}_p(1))\to H^1_f(F,V_y)\to H^1_f(F,V)\to 0$$

et, pour v divisant p, le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^1_f(F_v,\mathbb{Q}_p(1)) & \to & H^1_f(F_v,V_y) & \to & H^1_f(F_v,V) & \to & 0\\ & & \uparrow\simeq & & \uparrow\simeq & & \uparrow\simeq & & \\ 0 & \to & F_v\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) & \to & F_v\otimes_{\mathbb{Q}_p} t_{V_y}(\mathbb{Q}_p) & \to & F_v\otimes_{\mathbb{Q}_p} t_V(\mathbb{Q}_p) & \to & 0.\end{array}$$

On définit une section de $t_{V_y}(\mathbb{Q}_p)\to t_V(\mathbb{Q}_p)$ de la manière suivante.

Remarquons d'abord que, 1 n'étant pas valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_p(V^*(1))$, la suite exacte

$$0\to \mathbf{D}_p(V^*(1))\to \mathbf{D}_p(V_y^*(1))\to \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p)\to 0$$

admet un scindage respectant l'action de φ donné par $\mathbf{D}_p(V_y^*(1))^{\varphi=1}\simeq \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p)$. D'où une section σ de $\mathbf{D}_p(V_y)\to\mathbf{D}_p(V)$. Le composé

$$t_V(\mathbb{Q}_p)\xrightarrow{\simeq} N\to \mathbf{D}_p(V)\xrightarrow{\sigma}\mathbf{D}_p(V_y)\to t_{V_y}(\mathbb{Q}_p)$$

est une section σ_N de l'application $t_{V_y}(\mathbb{Q}_p)\to t_V(\mathbb{Q}_p)$. Par transport, on obtient une application $s_{v,N,y}: H^1_f(F_v,V)\to H^1_f(F_v,V_y)$. Notons $\ell_\chi : H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbb{Q}_p(1))\to\mathbb{Q}_p$ l'application composée

$$H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbb{Q}_p(1))\simeq \mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\varprojlim \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times p^n}\xrightarrow{\log}\mathbb{Q}_p.$$

Si $s_{\mathrm{glob},y}(x)$ est un relèvement quelconque de x dans $H^1_f(\mathbb{Q},V_y)$, on pose

$$\langle x,y\rangle_{V,N,\chi}=\ell_\chi(s_{\mathrm{glob},y}(x)-s_{p,N,y}(x)).$$

C'est la hauteur p-adique associée à N.

2.3.3. *Remarques.* — i) Lorsque V est *ordinaire* en p, le choix "usuel" pour N est $N=D_{[-1]}$. On obtient alors la hauteur p-adique canonique de E. On note simplement $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi}=\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,D_{[-1]}}$.

ii) En utilisant le fait que $V \simeq V^*(1)$, on en déduit une forme bilinéaire que l'on note encore $\langle\ ,\ \rangle_{V,N,\chi}$

$$H^1_f(\mathbb{Q}, V) \times H^1_f(\mathbb{Q}, V) \to \mathbb{Q}_p.$$

On vérifie que $\langle x, y\rangle_{V,N,\chi} = \langle y, x\rangle_{V,N^\perp,\chi}$. En particulier, si V est ordinaire en p, $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi}$ est symétrique.

2.3.4. PROPOSITION. — *Supposons V ordinaire en p. Soient $y \in H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))$ et $\omega \in \ker R_V$. Alors, on a*

$$\langle P(\omega), y\rangle_{V,\chi} = [\delta_V(\omega), \log_{V^*(1)} y]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

Sans restriction sur V, on a :

2.3.4 (bis) PROPOSITION. — *Soit N un supplémentaire de* $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ *dans $\mathbf{D}_p(V)$. Soient $y \in H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))$ et $\omega \in \ker R_V$. Alors, on a*

$$\langle P(\omega), y\rangle_{V,\chi,N} = [\delta_{V,N}(\omega), \log_{V^*(1)} y]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

Si l'on note $\mathrm{Loc}_p = \mathrm{Loc}_{p,V}$ l'application de localisation de $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ dans $H^1_f(\mathbb{Q}_p, V)$ (on a donc $\mathrm{Loc}_{p,V}(x) = x_p$ avec les notations utilisées précédemement, $P(\omega)$ appartient à l'orthogonal de $\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$.

La démonstration se trouve en 2.3.6 et paragraphes suivants.

2.3.5. La proposition 2.3.4 et le lemme 2.3.1 mis ensemble donnent les propositions suivantes :

PROPOSITION. — *Supposons V ordinaire, soient $\omega \in \ker R_V$, $\omega^* \in \ker R_{V^*(1)}$. On a*

$$[\beta_{D_{[-1]}}((1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1})), (1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_{\omega^*}(\mathbb{1})]_{\mathbf{D}_p(V)} = \langle P(\omega), P(\omega^*)\rangle_{V,\chi}$$

$$[(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1})), (1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_{\omega^*}(\mathbb{1})]_{\mathbf{D}_p(V)} = \langle P(\omega), P(\omega^*)\rangle_{V,\chi} + \langle P(\omega^*), P(\omega)\rangle_{V^*(1),\chi} = 2\langle P(\omega), P(\omega^*)\rangle_{V,\chi}.$$

Sans restriction sur V, on a :

PROPOSITION (bis). — *Supposons* $\mathrm{Réc}(V)$ *vraie. Soit N un supplémentaire de* $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ *dans $\mathbf{D}_p(V)$. Soient $\omega \in \ker R_V$, $\omega^* \in \ker R_{V^*(1)}$. Alors*

$$[\beta_N((1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1})), (1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_{\omega^*}(\mathbb{1})]_{\mathbf{D}_p(V)} = \langle P(\omega), P(\omega^*)\rangle_{V,\chi,N}.$$

2.3.6. Nous donnons d'abord la démonstration lorsque V est ordinaire et $N = D_{[1-]}$ (avec le grain de sable que l'on suppose que l'on n'est pas dans la situation suivante : $P(\omega) \in \ker \mathrm{Loc}_p$, $P(\omega) \neq 0$ et $H^1_f(\mathbb{Q}, V) \neq \ker \mathrm{Loc}_p$ et que si $P(\omega) = 0$, Leop(V) est vrai). On utilise alors certains résultats de [P92a]. Le cas où V est ordinaire et N quelconque s'en déduit facilement. Nous donnons ensuite une autre démonstration dans le cas général indépendante de la première qui est plus concise, mais plus sophistiquée!

Si F est un corps de nombres, on note $H^1_f(F, V/\mathbf{T})$ le noyau de l'application

$$H^1(F, V/\mathbf{T}) \to \oplus_v H^1(F_v, V/\mathbf{T})/[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p H^1_f(F_v, \mathbf{T})]$$

(lorsque v ne divise pas p, $H^1_f(F_v, \mathbf{T})$ est en fait le sous-module de torsion de $H^1(F_v, \mathbf{T})$) et $H^1_f(\mathbb{Q}_\infty, V/\mathbf{T})$ la limite inductive des $H^1_f(\mathbb{Q}_n, V/\mathbf{T})$ pour les applications de restriction.

Supposons V *ordinaire*. Pour alléger les notations, identifions V et $V^*(1)$ par l'accouplement de Weil ainsi que $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}^*(1)$. Si on pose $X_{\infty,f}(\mathbf{T}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^1_f(\mathbb{Q}_\infty, V/\mathbf{T}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, il est montré dans [P92a], §4 qu'il existe un homomorphisme naturel surjectif

$$\lambda_\chi : H^1_f(F, V) \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{G_\infty}$$

tel que le composé de λ_χ avec l'application

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X_{\infty,f}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(H^1_f(F, V), \mathbb{Q}_p)$$

soit la hauteur p-adique $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi}$ et tel que $\lambda_\gamma = \log \chi(\gamma)^{-1} \cdot \lambda_\chi$ rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V/\mathbf{T})^\wedge & \to & H^1_f(F, \mathbf{T}) & \to & H^1_f(\mathbb{Q}_p, \mathbf{T}) \\
\downarrow & & \downarrow \lambda_\gamma & & \uparrow \simeq \\
0 \to X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty} & \to & X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{G_\infty} & \to & Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T})_{G_\infty}
\end{array}$$

(ici, $X^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) = H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})^\wedge$; on utilise [Ne92], proposition 7.11 pour montrer que la hauteur définie dans [P92a] est bien celle dont la définition est rappelée précédemment.

2.3.7. LEMME. — *Soit x un élément de $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ et appartenant à l'image de $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$. Alors, x appartient à l'orthogonal de* $\ker \mathrm{Loc}_p$ *relativement à* $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout entier k, $p^{-k} \otimes x$ appartient à $(\gamma - 1) \cdot H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$. Or, on a $x = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}}(x_n)$ pour

$x_n \in H^1(G_{S,F_n}, \mathbf{T})$. On en déduit que

$$p^{-k} \otimes x = p^{-k} \otimes \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}}(x_n) \equiv (p-1) \cdot p^{-k+n} \otimes x_n \qquad \text{modulo}(\gamma - 1) \cdot H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T}),$$

et donc en prenant n assez grand que $p^{-k} \otimes x \in (\gamma - 1) \cdot H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$.

2.3.8. Soit $\xi \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})$ tel que $(\gamma - 1) \cdot \xi = \mathrm{Tr}_\Delta(\omega) - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T})$. Soit g_ξ l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^1_f(\mathbb{Q}_\infty, V/\mathbf{T}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ défini par $y \in H^1_f(\mathbb{Q}_m, V/\mathbf{T}) \mapsto \langle \xi_m, \mathrm{Loc}_p(y)\rangle_{V,p}$. Comme

$$\langle \xi_m, (\gamma - 1) \cdot \mathrm{Loc}_p(y)\rangle_{V,p} = \langle (\gamma - 1) \cdot \xi_m, \mathrm{Loc}_p(y)\rangle_{V,p} = 0,$$

(en effet,

$$\langle \mathrm{Tr}_\Delta(\omega)_m, \mathrm{Loc}_p(y)\rangle_{V,p} = \sum_v \langle \mathrm{Tr}_\Delta(\omega)_m, y\rangle_{V,v} = 0$$

et
$$\langle \alpha_m, \mathrm{Loc}_p(y)\rangle_{V,p} = 0 \ ),$$

g_ξ appartient à $X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{G_\infty}$. Soit $Q(\xi)$ un élément de l'image réciproque de g_ξ par λ_γ (on conjecture en fait que λ_χ est un isomorphisme, mais nous ne nous en servons pas ici). Il est clair que $Q(\xi)$ appartient à $(\ker \mathrm{Loc}_p)^\perp$. D'autre part, remarquons que l'application

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})/H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) + Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T}))^{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T})_{G_\infty} \simeq H^1_f(\mathbb{Q}_p, V)$$

est donnée par

$$(\xi \mapsto \text{ classe de } (\gamma - 1)\xi \mapsto \mathrm{Loc}_p(\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0)) = \mathrm{Loc}_p(P(\omega))\ ).$$

En utilisant la commutativité du premier carré de 2.3.6, on en déduit que l'image de $Q(\xi)$ dans $H^1_f(\mathbb{Q}_p, V)$ est $\mathrm{Loc}_p(P(\omega))$.

Ainsi $Q(\xi) - P(\omega)$ appartient à $\ker \mathrm{Loc}_p \cap (\ker \mathrm{Loc}_p)^\perp$. Il s'agit maintenant de montrer que $Q(\xi) - P(\omega)$ appartient au noyau de la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_{V,\xi}$, ce qui implique en effet que

$$\langle P(\omega), y\rangle_{V,\chi} = \langle Q(\xi), y\rangle_{V,\chi} = \langle \xi_p, y_p\rangle_{V,p}.$$

Considérons les deux cas suivants :

a) $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ est égal à $\ker \mathrm{Loc}_p$: il est clair que $Q(\xi) - P(\omega)$ appartient au noyau de $\langle\ ,\ \rangle_{V,\xi}$ (remarquons que ce cas est fort improbable à moins que $H^1_f(\mathbb{Q}, V) = 0$; en effet, il implique que $E(\mathbb{Q})$ est fini, car $E(\mathbb{Q})$ s'injecte dans $E(\mathbb{Q}_p)$ et donc que si $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ était non nul, la composante p-primaire du groupe de Shafarevich-Tate serait infinie);

b) $H^1_f(\mathbb{Q},V)$ n'est pas égal à $\ker \mathrm{Loc}_p$: si $P(\omega)$ est non nul dans $H^1_f(\mathbb{Q},V)/\ker \mathrm{Loc}_p$, la remarque que $\langle P(\omega)-Q(\xi),P(\omega)\rangle_{V,\chi}=0$ (puisque $P(\omega)-Q(\xi)\in\ker\mathrm{Loc}_p$) implique que $Q(\xi)-P(\omega)$ appartient au noyau de $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi}$. Si $P(\omega)$ est nul dans $H^1_f(\mathbb{Q},V)$ et si $\mathrm{Leop}(V)$ est vraie, on peut écrire $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega)=(\gamma-1)\xi$ avec $\xi\in\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ (on a en effet alors le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}Z^{G_\infty} & \to & \mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to & \mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\simeq\\
0 & \to & H^2(G_{S,F},V)^* & \to & H^1(G_{S,F},V) & \to & H^1(\mathbb{Q}_p,V)\ ;
\end{array}$$

ici, Z est le conoyau de l'application $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})\to Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$, la première flèche se déduit de l'injection $Z^{G_\infty}\to X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty}\simeq H^2(G_{S,F},V/\mathbf{T})^\wedge$ et $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}$ s'injecte dans $H^1(G_{S,F},V)$). Le lemme 2.3.9 qui suit implique alors que $\delta_V(\omega)=R_V(\xi)=0$. Les deux membres de la formule à montrer sont donc nuls.

2.3.9. LEMME. — *Si $H^1_f(\mathbb{Q},V)\neq\ker\mathrm{Loc}_p$, alors $H^1(G_{S,\mathbb{Q}},V)=H^1_f(\mathbb{Q},V)$. Ainsi, s'il existe $\omega\in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ tel que $R_V(\omega)\neq 0$, alors $H^1_f(\mathbb{Q},V)\neq\ker\mathrm{Loc}_p$ et si $E(\mathbb{Q})$ est infini, $R_V(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}))$ est nul.*

Ce lemme est vrai sans *hypothèse d'ordinarité.*

Démonstration. — L'hypothèse $H^1_f(\mathbb{Q},V)\neq\ker\mathrm{Loc}_p$ implique que l'application $H^1_f(\mathbb{Q},V)\to H^1_f(\mathbb{Q}_p,V)$ est surjective. On déduit alors de la suite exacte de Poitou-Tate déjà citée en 1.5

$$0\to H^2(G_{S,\mathbb{Q}},V)^*\to H^1_f(\mathbb{Q},V^*(1))\to H^1_f(\mathbb{Q}_p,V^*(1))\to H^1(G_{S,\mathbb{Q}},V)^*$$
$$\to H^1_f(\mathbb{Q},V)^*\to 0$$

que $H^1(G_{S,\mathbb{Q}},V)=H^1_f(\mathbb{Q},V)$. La dernière assertion se déduit des premières et du fait que $E(\mathbb{Q})$ s'injecte dans $E(\mathbb{Q}_p)$.

2.3.10. Nous venons de montrer la proposition 2.3.4 pour V ordinaire et $N=D_{[-1]}$. Supposons toujours V ordinaire; pour montrer la proposition pour N quelconque, calculons $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,N}-\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,M}$ et $\delta_{V,N}(\omega)-\delta_{V,M}(\omega)$ pour deux supplémentaires N et M de $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$.

Ecrivons

$$\log_V(x)\equiv\log^N(x)\ \text{modulo}\ \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)\quad\text{avec}\ \log^N(\omega)\in N,$$
$$\log_V(x)\equiv\log^M(x)\ \text{modulo}\ \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)\quad\text{avec}\ \log^M(\omega)\in M,$$

et posons $\log^N(x) - \log^M(x) = r \in \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$. Alors, on a

$$s_{p,N,y}(x) - s_{p,M,y}(x) = \exp_{V_y}(\sigma(r)).$$

Comme $\sigma(r) - [r, \log_{V^*(1)} y]_{\mathbf{D}_p(V)} \cdot e \in \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V_y)$ où e est la base de $\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) \simeq H^1_f(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1))$ telle que $\ell_\chi(e) = 1$, on a

$$\begin{aligned}\ell_\chi(-s_{p,N,y}(x) + s_{p,M,y}(x)) &= -[r, \log_{V^*(1)} y]_{\mathbf{D}_p(V)} \\ &= [\log^M(x) - \log^N(x), \log_{V^*(1)} y]_{\mathbf{D}_p(V)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\langle x, y\rangle_{V,\chi,N} - \langle x, y\rangle_{V,\chi,M} = [\log^M(x) - \log^N(x), \log_{V^*(1)} y]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

Calculons maintenant $\delta_{V,N,\chi}(\omega) - \delta_{V,M,\chi}(\omega)$. On écrit

$$(\gamma - 1)^{-1} \cdot \ell_0 \cdot \omega = -\Omega^\varepsilon_{V,1}(f) \text{ avec } f \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V) \;;$$

on a

$$(1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathbb{1}(f) \equiv \log^N(x) \equiv \log^M(x) \text{ modulo } \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V).$$

D'où, en utilisant la remarque 2.2.6,

$$\begin{aligned}\delta_{V,N}(\omega) &= \log\chi(\gamma) \cdot (1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathbb{1}(f) - \log^N(x), \\ \delta_{V,M}(\omega) &= \log\chi(\gamma) \cdot (1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathbb{1}(f) - \log^M(x) \;;\end{aligned}$$

d'où

$$\delta_{V,N}(\omega) - \delta_{V,M}(\omega) = \log^M(x) - \log^N(x).$$

On en déduit que

$$\langle P(\omega), y\rangle_{V,\chi,N} - \langle P(\omega), y\rangle_{V,\chi,M} = [\delta_{V,N}(\omega), y]_{\mathbf{D}_p(V)} - [\delta_{V,M}(\omega), y]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

2.3.11. Faisons maintenant le *cas général* : V n'est donc plus supposé ordinaire. Supposons d'abord que $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ *est égal* à $\ker \mathrm{Loc}_p$. Il suffit alors de montrer que $P(\omega)$ est orthogonal à $\ker \mathrm{Loc}_p$: on le montre comme en 2.3.7 en remarquant que l'application $y \in \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} \mapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle_{V,\chi,N})$ ne dépend pas de N et se factorise par

$$\begin{aligned}\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} \simeq H^2(G_{S,F}, V)^* &\to \mathbb{Q}_p \otimes (H^1(G_{S,\mathbb{Q}_\infty}, V/\mathbf{T})_{G_\infty})^\wedge \\ &\to \mathbb{Q}_p \otimes \big(H^1(G_{S,\mathbb{Q}_\infty}, V/\mathbf{T})^\wedge\big)_{G_\infty} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(H^1_f(\mathbb{Q}, V), \mathbb{Q}_p).\end{aligned}$$

On suppose maintenant que $\ker \mathrm{Loc}_p$ *est différent de* $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$. On en déduit par le lemme 2.3.9 que $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0) \in H^1_f(\mathbb{Q}, V)$. Remarquons que $\langle \omega_n, y\rangle_{V,v}$ est nul dans $H^1(\mathbb{Q}_{n,v}, \mathbb{Q}_p(1))$ pour toute place v car $y \in H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))$. Donc, le cup-produit de ω_n et de y est nul dans $H^1(\mathbb{Q}_n, \mathbb{Q}_p(1))$. Comme $H^1(\mathbb{Q}_n, \mathbb{Z}_p(1))$ est sans torsion et s'injecte dans

$H^1(\mathbb{Q}_n, \mathbb{Q}_p(1))$, le cup-produit de ω_n et de y est nul dans $H^1(\mathbb{Q}_n, \mathbb{Z}_p(1))$ pour tout n. On en déduit qu'il existe $\omega_y \in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}_y)$ relevant ω. On peut choisir ω_y de manière à ce que $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_{y,0}) \in H^1_f(\mathbb{Q}, V_y)$. En effet, on sait qu'il existe $x \in H^1_f(\mathbb{Q}, V_y)$ relevant $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_{y,0})$. D'autre part, comme $-p$ est une norme universelle, l'application $H^1_{\infty,S}(\mathbb{Z}_p(1)) \to H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p(1))/H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p(1))$ est surjective (le deuxième module est libre de rang 1); on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbb{Z}_p(1))$ tel que $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_{y,0}) - x - \mathrm{Tr}_\Delta(\alpha_0) \in H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(1))$; $\omega_y - \alpha$ convient alors. On peut donc supposer que $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_{y,0}) \in H^1_f(\mathbb{Q}, V_y)$. Prenons

$$s_{\mathrm{glob},y}(\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0)) = \mathrm{Tr}_\Delta(\omega_y)_0 \in H^1_f(\mathbb{Q}, V_y).$$

D'autre part, écrivons comme en 2.2.5

$$-(\gamma-1)^{-1} \cdot \ell_0 \cdot \mathrm{Tr}_\Delta(\omega) = \Omega^\varepsilon_{V,1}(\delta) + \Omega^\varepsilon_{V,1}(\mu)$$

avec $$d' = 1\!\!1(\delta) \in (1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\,\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$$

et $$1\!\!1(\mu) \in (1-\varphi)\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})^{-1}\cdot N.$$

On a alors

$$s_{p,N,y}(\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0)) = \log\chi(\gamma)\cdot \mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V,1}(\sigma(\mu)))_0$$

où σ est la section naturelle de $\mathbf{D}_p(V) \to \mathbf{D}_p(V_y)$ compatible à φ et

$$\log\chi(\gamma))^{-1}\cdot\delta_{V,N}(\omega) = d \underset{\text{déf}}{=} (1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot 1\!\!1(d') \in \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V).$$

Comme

$$-(\gamma-1)^{-1}\cdot\ell_0\cdot\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_y) - \mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V_y,1}(\sigma(\mu+\delta))) \in \mathcal{H}(G_\infty)\otimes Z^1_{\infty,p}(\mathbb{Z}_p(1))^\Delta$$

et que ℓ_χ est nul sur l'image de $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes_\Lambda Z^1_{\infty,p}(\mathbb{Z}_p(1))$ dans $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1))$, on obtient

$$\ell_\chi(s_{\mathrm{glob},y}(\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0)) - s_{p,N,y}(\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0))) = \log\chi(\gamma)\cdot\ell_\chi(\exp_{V_y}(\sigma(d))).$$

On remarque alors que

$$\sigma(d) \equiv [d, \log_{V^*(1)} y]e \text{ modulo } \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V_y)$$

où e est la base de $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(1))$ telle que $\ell_\chi(e) = 1$. On en déduit que

$$\langle P(\omega), y\rangle_{V,N,\chi} = [\delta_{V,N}(\omega), \log_{V^*(1)} y]_{\mathbf{D}_p(V)},$$

ce qui termine la démonstration.

2.4. Etude de $\mathcal{L}_\omega$ en χ^j pour $j \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

2.4.1. Si $\omega \in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$, $Tw^\varepsilon_j(\omega) = \omega \otimes \varepsilon^{\otimes j}$ est un élément de $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(j))$; on pose $P(\omega \otimes \varepsilon^{\otimes j}) = \mathrm{Tr}_\Delta(Tw^\varepsilon_j(\omega)_0) \in H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, \mathbf{T}(j))$ où $Tw^\varepsilon_j(\omega)_0$ désigne la projection de $Tw^\varepsilon_j(\omega)$ dans $H^1(G_{S,\mathbb{Q}_0}, \mathbf{T}(j))$.

Rappelons que si j est un entier strictement positif, pour toute extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\log_{V(j),K}$ est un isomorphisme de $H^1(K, V(j))$ sur $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V(j))$.

PROPOSITION. — *Soit j un entier > 0. Alors, on a :*

$$[(1 - p^{j-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot (1 - p^{-j} \cdot \varphi)^{-1} \cdot \mathcal{L}_\omega(\chi^{-j})] \otimes e_{-j}$$
$$= -\Gamma^*(-j+1) \cdot \log_{V(j)}(P(\omega \otimes \varepsilon^j)$$

dans $\mathbf{D}_p(V(j))$ avec $\Gamma^*(-j+1) = (-1)^{j-1} \cdot ((j-1)!)^{-1}$.

Démonstration. — Identifions $\mathbf{D}_p(V(j))$ et $\mathbf{D}_p(V)$ pour simplifier. En utilisant la caractérisation des $\Omega^\varepsilon_{V,h}$, on trouve que

$$Tw^{-j}(\mathcal{L}_\omega) = (-1)^j \cdot \ell_j \cdot (\Omega^\varepsilon_{V(j),j+1})^{-1}(Tw^j(\omega)).$$

Posons $f = (\Omega^\varepsilon_{V(j),j+1})^{-1}(Tw^j(\omega))$. Alors,

$$j! \cdot \exp_{V(j)}((1 - p^{-j} \cdot \varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{j-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathbb{1}(f))$$
$$= \mathrm{Tr}_\Delta(\Omega^\varepsilon_{V(j),j+1}(f)_0) = P(\omega \otimes \varepsilon^{\otimes j}).$$

Comme $\mathcal{L}_\omega(\chi^{-j}) = Tw^{-j}(\mathcal{L}_\omega)(\mathbb{1})$, on en déduit la proposition.

2.4.2. Si j est un entier strictement négatif, $\mathbf{D}_p(V(j))$ est égal à $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V(j))$. Pour toute extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, l'application $\lambda_{V,j),K}$ est un isomorphisme de $H^1(K, V(j))$ sur $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{D}_p(V(j))$. On note

$$R_{V(j)} : H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(j)) \to \mathbf{D}_p(V(j))$$

l'application composée de la projection $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(j)) \to H^1(\mathbb{Q}_p, V(j))$ et de $\lambda_{V(j),\mathbb{Q}_p}$.

PROPOSITION. — *Supposons* Réc(V) *vraie. Soit j un entier < 0. Alors, on a*

$$[(1-p^{j-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-p^{-j}\cdot\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}_\omega(\chi^{-j})]\otimes e_{-j} = -\Gamma(-j+1)\cdot R_{V(j)}(\omega\otimes\varepsilon^{\otimes j}).$$

Démonstration. — On a :

$$\mathcal{L}_\omega(\chi^{-j}) = Tw^{-j}(\mathcal{L}_\omega)(\mathbb{1}) = (-1)^{j-1} \cdot \mathbb{1}((\Omega^\varepsilon_{V(j),j})^{-1}(Tw^\varepsilon_j(\omega))).$$

Posons $L = (-1)^{j-1}\cdot(1-p^{j-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-p^{-j}\cdot\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}_\omega(\chi^{-j})$. Si $y\in\mathbf{D}_p(V^*(1-j))$ avec $y=\Xi_{V^*(1-j),0}(f)$, on a

$$[L,\mathrm{Tr}_\Delta(y)]_{\mathbf{D}_p(V)} = -[\mathbb{1}((\Omega^\varepsilon_{V(j),j})^{-1}(Tw^\varepsilon_j(\omega))),\mathbb{1}(f)]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

Rappelons que Réc(V) implique une “loi de réciprocité” du même type pour $V(j)$ ([Pa]). On en déduit que

$$\begin{aligned}[L,\mathrm{Tr}_\Delta(y)]_{\mathbf{D}_p(V)} &= \langle \mathrm{Tr}_\Delta(Tw^\varepsilon_j(\omega)_0),\Omega^\varepsilon_{V^*(1-j),1-j}(f)_0\rangle_0\\ &= \langle \mathrm{Tr}_\Delta(Tw^\varepsilon_j(\omega)_0),(-j)!\exp_{V^*(1-j)}(\mathrm{Tr}_\Delta(y))\rangle_{-1}\\ &= (-j)![\lambda_{V(j),\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Tr}_\Delta(Tw^\varepsilon_j(\omega)_0)),\mathrm{Tr}_\Delta(y)]_{\mathbf{D}_p(V)}.\end{aligned}$$

D’où

$$L = -(-j)!\lambda_{V(j),\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Tr}_\Delta(Tw^\varepsilon_j(\omega)_0)) = -\Gamma(-j+1)\cdot R_{V(j)}(\omega\otimes\varepsilon^{\otimes j}).$$

2.4.3. Des formules de même type sont encore vraies pour la valeur de $\mathcal{L}_\omega$ en $\chi^j\cdot\eta$ où $j\in\mathbb{Z}-[0]$ et η est un caractère d’ordre fini de G_∞ de conducteur $n+1$ avec $n\geq 0$. Enonçons-les sans démonstration :

– si $j>0$, on pose $P^{(\eta)}(\omega\otimes\varepsilon^{\otimes j}) = \sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau((\omega\otimes\varepsilon^{\otimes j})_n)$; on a

$$\begin{aligned}&(p^{1-j}\cdot\varphi)^{n+1}\cdot\mathcal{L}_\omega(\eta\cdot\chi^{-j})\otimes e_{-j}\\ &\qquad = -\Gamma^*(-j+1)\cdot G(\eta^{-1},\zeta_n)^{-1}\cdot\log_{V(j)}P^{(\eta)}(\omega\otimes\varepsilon^{\otimes j}))\ ;\end{aligned}$$

– si $j<0$, on pose $R^{(\eta)}_{V(j)}(\omega\otimes\varepsilon^{\otimes j}) = \sum_{\tau\in G_n}\eta(\tau)^{-1}\cdot\tau R_{V(j),n}$ où $R_{V(j),n}$ est le composé de la projection $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(j))\to H^1(\mathbb{Q}_{n,p},V(j))$ et de $(\#G_n)^{-1}\cdot\lambda_{V(j),\mathbb{Q}_{n,p}}$; si Réc(V) est vrai, on a

$$(p^{-1j}\cdot\varphi)^{n+1}\cdot\mathcal{L}_\omega(\eta\cdot\chi^{-j})\otimes e_{-j} = -\Gamma(-j+1)\cdot G(\eta^{-1},\zeta_n)^{-1}\cdot R^{(\eta)}_{V(j)}(\omega\otimes\varepsilon^{\otimes j}).$$

3. Fonctions L p-adiques.

3.1. Fonction L p-adique de Mazur et Swinnerton-Dyer.

3.1.1. Supposons que E soit une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, de conducteur N, telle qu’il existe un morphisme non nul $\pi : X_0(N)\to E$. Si ω_E est une forme différentielle de Néron de E sur $\mathbb{Q}$, on a donc $\pi^*\omega_E = c\cdot f(z)(2i\pi\cdot dz)$ où f est une forme modulaire pour $\Gamma_0(N)$, fonction propre des opérateurs de Hecke et normalisée : $f=\sum a_nq^n$, $a_1=1$. Si

$L(f,s)=\sum a_n\cdot n^{-s}$ (ou plutôt son prolongement analytique), la fonction $L(V,s)$ associée à la représentation p-adique V vérifie $L(V,s)=L(f,s+1)$; pour fixer les notations, $L(V,s)$ est définie par

$$L(V,s)=\prod_v L_v(V,s)$$

avec

$$L_v(V,s)=\begin{cases}\det(1-\mathrm{Frob}_v^{-1}p^{-s}|V)^{-1} & \text{si } v\neq p\\ \det(1-\varphi\cdot p^{-s}|\mathbf{D}_p(V))^{-1} & \text{si } v=p.\end{cases}$$

Rappelons que $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\cdot L(f,s)$ (resp. $\Gamma_{\mathbb{C}}(s+1)\cdot L(V,s)$), avec $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)=(2\pi)^{-s}\cdot\Gamma(s)$, vérifie une équation fonctionnelle lorsqu'on change $s\mapsto 1-s$ (resp. $s\mapsto -s$). Si η est un caractère de Dirichlet à valeurs dans $\mathbb{C}$ de conducteur m, on pose $L(f,\eta,s)=\sum_{(n,m)=1}\eta(n)\cdot a_n\cdot n^{-s}$ et $L(V,\eta,s)=L(f,\eta,s-1)$. On identifie comme usuellement les caractères de $G_{\mathbb{Q}}$ d'ordre fini avec les caractères de Dirichlet (en utilisant la normalisation que $\chi(n)=n$ pour $(n,p)=1$).

Soit $H^0(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des formes différentielles invariantes de E définies sur $\mathbb{Q}$ et $\mathrm{Lie}(E)$ l'algèbre de Lie de E. On a une suite exacte

$$0\to H^0(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})\to H^1_{dR}(E)\to \mathrm{Lie}(E)\to 0\,,$$

un accouplement canonique $H^1_{dR}(E)\times H^1_{dR}(E)\to\mathbb{Q}$ pour lequel le dual de $\mathrm{Lie}(E)$ est isomorphe à $H^0(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})$. Notons $\mathbf{D}_{dR}(E)$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^1_{dR}(E)^*\simeq H^1_{dR}(E)$ muni de la filtration $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_{dR}(E)=\mathrm{Lie}(E)^*\simeq H^0(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})$. On sait définir un isomorphisme de comparaison

$$\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbf{D}_{dR}(E)\to\mathbf{D}_p(V)$$

compatible à la filtration ([I90], rappelons que l'on a choisi une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$), les isomorphismes de dualité $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Lie}(E),\mathbb{Q})\simeq H^0(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})$ et $t_V(\mathbb{Q}_p)^*\simeq\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ étant compatibles. Cet isomorphisme nous permet de considérer $\mathbf{D}_{dR}(E)$ comme contenu dans $\mathbf{D}_p(V)$. Si w est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_{dR}(E)$, on pose $\Omega^{w,\pm}=\int_{E(\mathbb{C})^{c=\pm1}}w\in\mathbb{C}$ où l'orientation est choisie de manière à ce que $\Omega^{w,\pm}\in\mathbb{R}^+$ ou $i\cdot\mathbb{R}^+$ et où c est la conjugaison complexe.

3.1.2. Rappelons la caractérisation de la fonction L p-adique de Mazur et Swinnerton-Dyer. On fixe un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, on prend $\varepsilon=\left(e^{2i\pi/p^{n+1}}\right)_n$ et on pose $G(\eta)=G\left(\eta,e^{2i\pi/p^{n+1}}\right)$ pour η caractère de conducteur p^{n+1}. Posons

$$1-a_p\cdot X+p\cdot X^2=(1-\alpha_p\cdot X)\cdot(1-\beta_p\cdot X)\,,$$

$$L_p(V,s) = (1 - a_p \cdot p^{-1-s} + p^{-1-2s})^{-1}$$

où α_p est, dans le cas ordinaire, choisi être une unité p-adique.

THÉORÈME ([MSD74], [MTT86], [V76]). — *Il existe un unique élément $L^w_{p,\alpha_p} \in \mathcal{H}(G_\infty)$ (dans Λ si E est ordinaire en p et $o(\log)$ sinon) tel qu'on ait*

$$\mathbb{1}(L^w_{p,\alpha_p}) = (1 - \alpha_p^{-1})^2 \cdot [(\Omega^{w,+})^{-1} \cdot L(f,1)]$$

et

$$\eta(L^w_{p,\alpha_p}) = (p/\alpha_p)^{n+1} \cdot G(\eta^{-1})^{-1} \cdot [(\Omega^{w,\varepsilon(\eta)})^{-1} \cdot L(f,\eta^{-1},1)]$$

pour tout caractère η de G_∞ d'ordre fini non trivial de conducteur p^{n+1} de signe $\varepsilon(\eta) \in \{\pm\}$.

3.1.3. On peut exprimer la formule-définition du théorème précédent d'une autre manière. Introduisons la fonction L incomplète

$$\begin{aligned} L_{\{p\}}(V,s-1) = L_{\{p\}}(f,s) &= (1 - a_p \cdot p^{-s} + p^{1-2s}) \cdot L(f,s) \\ &= L_p(V,s-1)^{-1} \cdot L(f,s). \end{aligned}$$

La formule pour le caractère trivial $\mathbb{1}$ est équivalente à

$$\begin{aligned} \mathbb{1}(L^w_{p,\alpha_p}) &= (1-\alpha_p^{-1})^2 \cdot (1-p^{-1}\cdot\alpha_p)^{-1} \cdot (1-p^{-1}\cdot\beta_p)^{-1} \cdot [(\Omega^{w,+})^{-1} \cdot L_{\{p\}}(f,1)] \\ &= (1 - \alpha_p^{-1}) \cdot (1 - \beta_p)^{-1} \cdot [(\Omega^{w,+})^{-1} \cdot L_{\{p\}}(f,1)]. \end{aligned}$$

Si e est une base de l'espace propre D_{α_p} de φ associé à la valeur propre α_p^{-1} (si E est supersingulière, cela oblige à étendre les scalaires au corps $K = \mathbb{Q}_p(\alpha_p)$), posons $L^w_{p,MSD,e} = L^w_{p,\alpha_p} \cdot e$. En remarquant que φ agit sur e par α_p^{-1}, on déduit des formules précédentes que

$$(1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathbb{1}(L^w_{p,MSD,e}) = ((\Omega^{w,+})^{-1} \cdot L_{\{p\}}(f,1)) \cdot e \ ;$$

$$(p\varphi)^{-(n+1)} \cdot \eta(L^w_{p,MSD,e}) = G(\eta^{-1})^{-1} \cdot [(\Omega^{w,\varepsilon(\eta)})^{-1} \cdot L_{\{p\}}(f,\eta^{-1},1)] \cdot e$$

si η est un caractère non trivial de G_∞ de conducteur p^{n+1}.

3.1.4. Lorsque E est supersingulière en p, on peut, si e est n'importe quel élément de $\mathbf{D}_p(V)$ (ou de $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$), définir par linéarité $L^w_{p,MSD,e}$. Par contre, lorsque E est ordinaire, cela n'est pas encore possible. A la lumière des constructions locales faites dans [Pa] et exploitées dans ce texte, il serait intéressant de voir si en utilisant plus de valeurs de $L(f,s)$, il ne serait pas possible de définir L^w_{p,β_p}.

Enfin, lorsque cela est possible (et on espère que cela l'est toujours!), on pose

$$L_{p,MSD} = L^{w}_{p,MSD,w} \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$$

où w est une base de $\mathrm{Fil}^0\, \mathbf{D}_p(V)$ et

$$\mathcal{L}_{p,MSD}(\eta) = \eta(L_{p,MSD}) \quad \text{pour } \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_\infty, \mathbb{C}_p^\times).$$

Il est facile de voir que $L_{p,MSD}$ et $\mathcal{L}_{p,MSD}$ sont indépendants de la base choisie de $\mathrm{Fil}^0\, \mathbf{D}(V)$; d'après les formules précédentes, on a

$$(1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathcal{L}_{p,MSD}(\mathbb{1}) = [(\Omega^{w,+})^{-1} L_{\{p\}}(f, \mathbb{1}, 1)] \cdot w\,,$$

$$(p\varphi)^{-(n+1)} \cdot \mathcal{L}_{p,MSD}(\eta) = G(\eta^{-1})^{-1} \cdot [(\Omega^{w,\varepsilon(\eta)})^{-1} \cdot L_{\{p\}}(f, \eta^{-1}, 1)] \cdot w.$$

Peut-être ces formules expliquent-elles un peu le "p-adic multiplier" de [MTT86].

3.2. Eléments de Beilinson-Kato.

3.2.1. Compte tenu des formules du paragraphe 2, il est naturel de se demander s'il existe un élément ω de $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ tel que

$$\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}_{p,MSD}.$$

Grâce à la proposition 2.1.4, cela est équivalent à se demander s'il existe un élément $\omega \in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ tel que pour tout caractère η d'ordre fini de G_∞,

$$(\Omega^{w,\varepsilon(\eta)})^{-1} \cdot L_{\{p\}}(f, \eta^{-1}, 1) \cdot w = R_V^{(\eta)}(\omega).$$

Comme $\mathcal{L}_{p,MSD}$ n'est pas défini dans l'état de nos connaissances lorsque E est ordinaire en p, provisoirement on se demande plutôt (dans ce cas) s'il existe un élément $\omega \in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ tel que, si π désigne la projection de $\mathbf{D}_p(V)$ sur $D_{[0]}$ parallèlement à $D_{[-1]}$, on ait

$$\pi(\mathcal{L}_\omega) = \mathcal{L}^{w}_{p,\alpha_p} \cdot \pi(w) \; (= \mathcal{L}^{w}_{p,MSD,\pi(w)}).$$

La construction d'un tel élément ω devrait être naturel et géométrique.

3.2.2. Kato construit à l'aide des éléments de Beilinson (qui vivent dans le K_2 de la courbe $X_0(N)$) un sous-$\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-module $\mathcal{C}_\infty(\mathbf{T}(1))$ de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(1))$. On pose

$$\mathcal{C}_\infty(\mathbf{T}) = \mathbb{Q}_p(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{C}_\infty(\mathbf{T}(1)) \subset \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}).$$

Nous *ne donnons pas* ici la définition de $\mathcal{C}_\infty(\mathbf{T}(1))$, pour cause d'incompétence (voir cependant le paragraphe 3.3.11). Il *semble* (notes personnelles d'un exposé de Kato en juin 1991) que les résultats *très profonds* de Kato devraient pouvoir s'interpréter comme le fait qu'*il existe un élément* $\omega_{\text{Beil-Kato}}$ *de* $\mathcal{C}_\infty(\mathbf{T})$ *tel que*

$$\mathcal{L}_{\omega_{\text{Beil-Kato}}} = \mathcal{L}_{p,MSD}$$

ou au moins dans le cas où E est ordinaire en p tel que

$$\pi(\mathcal{L}_{\omega_{\text{Beil-Kato}}}) = \mathcal{L}^w_{p,\alpha_p} \cdot \pi(w).$$

Cela redonnerait une autre construction de la fonction L p-adique de Mazur et Swinnerton-Dyer et une définition de la composante "fantôme" L^w_{p,β_p} dans le cas où E est ordinaire en p.

3.3. Quelques conséquences hypothétiques, conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer p-adiques, conjectures de Bloch-Kato p-adiques.

3.3.1. Admettons l'existence (nécessairement unique si Leop(V) est vrai) d'un élément $\omega_?$ de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ tel que $\mathcal{L}_{\omega_?} = \mathcal{L}_{p,MSD}$ ou dans le cas ordinaire tel que $\pi(\mathcal{L}_{\omega_?}) = \mathcal{L}^w_{p,\alpha_p} \cdot \pi(w)$ et notons $\mathcal{C}_{\infty,?}(\mathbf{T})$ le sous-Λ-module de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ engendré par $\omega_?$.

PROPOSITION. — $L(f,1) = 0$ *si et seulement si* $R_V(\mathcal{C}_{\infty,?}(\mathbf{T})) = 0$, *i.e. si et seulement si* $\mathrm{Tr}_\Delta((\omega_?)_0) \in H^1_f(\mathbb{Q}, V)$.

(Se déduit de l'égalité $\mathcal{L}_{\omega_?} = \mathcal{L}_{p,MSD}$, de la proposition 2.1.4, et de la définition de $\mathcal{L}_{p,MSD}$).

3.3.2. Remarquons que si $R_V(\omega) = 0$, la dérivée de $\mathcal{L}_\omega$ est nulle si et seulement si $\log_V(P(\omega)) = 0$ et $\delta_{V,N}(\omega) = 0$ pour un supplémentaire N de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ ou encore si et seulement si $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega) = (\gamma - 1)\cdot\xi$ avec $\xi \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^\Delta$ et $\xi_0 \in H^1_f(\mathbb{Q}_p, V)$. Sous la conjecture Leop(V), on a nécessairement $\xi \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^\Delta$ (voir 2.3.8). D'autre part, le lemme 2.3.9 implique que si $E(\mathbb{Q})$ est infini et si $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega) = (\gamma-1)\cdot\xi$ avec $\xi \in H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^\Delta$, on a nécessairement $\xi_0 \in H^1_f(\mathbb{Q}_p, V)$. Ainsi, si Leop$(V)$ est vrai et si $E(\mathbb{Q})$ est infini, on obtient un point x_r de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})$ d'ordre infini par son logarithme p-adique :

$$\log_V(x_r) \equiv (1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathcal{L}^{(r)}_{p,MSD}(\mathbb{1}) \text{ modulo } \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$$

où r est le plus petit entier tel que $(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathcal{L}^{(r)}_{p,MSD}(\mathbb{1}) \neq 0$.

CONJECTURE. — *La fonction* $L(f,s)$ *a un zéro d'ordre* > 1 *en 1 si et seulement si* $\mathrm{Tr}_\Delta((\omega_?)_0) = 0$.

3.3.3. Donnons une conséquence hypothétique de la proposition 2.2.2, de la proposition 2.3 et de l'existence de $\omega_?$. Choisissons un élément non nul w de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_{dR}(E)$ et notons w' la base de $t_E(\mathbb{Q}) = \mathbf{D}_{dR}(E)/\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_{dR}(E) = \mathrm{Lie}(E)$ telle que $[w',w]_{\mathbf{D}_p(V)} = 1$. Si $E(\mathbb{Q})$ est de rang 1 et si y est un générateur de $E(\mathbb{Q})/E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}$, la conjecture de Birch et Swinnerton-Syer pour L^w_{p,α_p} dit que

$$(\mathcal{L}^w_{p,\alpha_p})'(\mathbb{1}) = \pm(1-\alpha_p^{-1})^2 \cdot \#\text{Ш}(E)\cdot \mathrm{Tam}_{w'}(E)\cdot(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2}\cdot\langle y,y\rangle_{V,\chi}\,;$$

ici, $\mathrm{Tam}_{w'}(E)$ est le nombre de Tamagawa de E associé à w' ([FP91]), remarquons que dans [Ta66], on voit plutôt ce nombre comme dépendant de $w \in H^0(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})$, nous écrirons alors $\mathrm{Tam}(E,w)$: on a $\mathrm{Tam}_{r.w'}(E) = r\cdot \mathrm{Tam}_{w'}(E)$ et $\mathrm{Tam}(E,r.w) = r^{-1}\cdot\mathrm{Tam}(E,w)$ pour $r\in\mathbb{Q}, >0$) et $\text{Ш}(E)$ est le groupe de Shafarevich-Tate de E. Comme en 3.1.3, cette formule peut s'écrire

$$(1-p^{-1}\cdot\alpha_p)\cdot(1-\alpha_p^{-1})^{-1}(\mathcal{L}^w_{p,\alpha_p})'(\mathbb{1}) = C_w(E)\cdot\langle y,y\rangle_{V,\chi}$$

avec

$$C_w(E) = L_p(V,0)^{-1}\cdot\#\text{Ш}(E)\cdot\mathrm{Tam}(E,w)/(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^2$$

(on a $L_p(V,0)^{-1} = (1-\alpha_p^{-1})\cdot(1-\beta_p^{-1}) = p^{-1}\cdot N_p$ avec $N_p = p+1-a_p = \#\widetilde{E}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$).

Ecrivons $\log_V(x) = \log^{w'}(x)\cdot w'$ avec $\log_{w'}(x)\in\mathbb{Q}_p$, la proposition 2.2.2 implique que

$$(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}'_\omega(\mathbb{1}) \equiv \log^{w'}P(\omega)\cdot w' \text{ modulo } \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V).$$

On déduit alors de la proposition 2.3.4 et de l'égalité de $\mathcal{L}_{\omega?}$ et de $\mathcal{L}_{p,MSD}$ que

$$C_w(E) = \log^{w'}P(\omega)\cdot(\log^{w'}y)^{-2}.$$

Ainsi, on obtient la formule conjecturale suivante :

3.3.4. FORMULE (non démontrée). — *Si* y *est un générateur de* $E(\mathbb{Q})/E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}$,

$$(\log^{w'}y)^2\cdot w' = \pm C_w(E)^{-1}\cdot(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathcal{L}'_{p,MSD}(\mathbb{1})$$

dans $t_V(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p\otimes t_E(\mathbb{Q})$ *(où* $w\in\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ *et* $[w',w]_{\mathbf{D}_p(V)} = 1$*).*

Cette formule peut aussi s'écrire comme une égalité dans $\mathbb{Q}_p$

$$(\log^{w'}y)^2 = \pm C_w(E)^{-1}\cdot[(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot\mathcal{L}'_{p,MSD}(\mathbb{1}),w]_{\mathbf{D}_p(V)}$$

avec $[w', w]_{\mathbf{D}_p(V)} = 1$. Elle a un sens (non conjecturale!) dans le *cas supersingulier* (mais n'est pas démontrée). Il serait intéressant de la tester numériquement[(1)]. Elle permettrait, comme dans [Ru92], d'avoir un moyen p-adique de trouver un point $z = (\#\,\text{Ш}(E))^{1/2} \cdot y$ de $E(\mathbb{Q})$ par

$$\pm (\log^{w'} z)^2 = L_p(V, 0) \cdot \mathrm{Tam}(E, w)^{-1} \cdot \\ (\# E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^2 \cdot [(1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathcal{L}'_{p,MSD}(\mathbb{1}), w]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

3.3.5. On peut écrire la formule précédente sous forme de "conjecture p-adique de Birch-Swinnerton-Dyer relative à $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$". Rappelons que w est une base de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_{dR}(E)$, que $[w', w]_{\mathbf{D}_p(V)} = 1$.

CONJECTURE. — *Supposons que $E(\mathbb{Q})$ est de rang 1 et soit y un générateur de $E(\mathbb{Q})/E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}$. Alors,*

i)

$$(1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathcal{L}'_{p,MSD}(\mathbb{1}) \\ \equiv L_p(V, 0)^{-1} \cdot \#\,\text{Ш}(E) \cdot \mathrm{Tam}(E, w)(\# E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2} \cdot (\log^{w'} y)^2 \cdot w'$$

modulo $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$

ii) *si N est un supplémentaire de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ et si β_N désigne la projection de $\mathbf{D}_p(V)$ sur $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ parallèlement à N, on a*

$$\beta_N((1-\varphi)^{-1} \cdot (1 - p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathcal{L}'_{p,MSD}(\mathbb{1})) \\ \equiv L_p(V, 0)^{-1} \cdot \#\text{Ш}(E) \cdot \mathrm{Tam}(E, w)(\# E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2} \cdot \langle y, y \rangle_{V,\chi,N} \cdot w.$$

3.3.6. Donnons un début d'explication de ces formules, qui permettra de comprendre la généralisation au cas où le rang de $E(\mathbb{Q})$ est ≥ 1. Dans (ii), lorsque N est un supplémentaire de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$, il faut voir la hauteur comme "associée" à l'application

$$s_N : N \to t_V(\mathbb{Q}_p).$$

Celle-ci est un isomorphisme. Considérons alors la suite

$$(s_{f,N}(V)) \quad 0 \to \ker s_N \to H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))^* \to H^1_f(\mathbb{Q}, V) \to \operatorname{coker} s_N \to 0$$

où la flèche non triviale est induite par la hauteur p-adique $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,N}$ (supposée non dégénérée).

(1) Note ajoutée durant les corrections : voir [BP93].

Dans (i), prenons $N = \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$. Bien sûr, s_N n'est plus un isomorphisme. On considère la suite

$$(s_{f,N}(V)) \quad 0 \to \ker s_N \to H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))^* \to H^1_f(\mathbb{Q}, V) \to \operatorname{coker} s_N \to 0$$

où l'application $H^1_f(\mathbb{Q}, V) \to \operatorname{coker} s_N$ est l'application composée

$$H^1_f(\mathbb{Q}, V) \to H^1_f(\mathbb{Q}_p, V) \xrightarrow{\log_V} t_V(\mathbb{Q}_p) = \operatorname{coker} s_N,$$

où l'application $\ker s_N \to H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))^*$ est l'application

$$\ker s_N = \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) \xrightarrow{(\lambda_V)^{-1}} H^1(\mathbb{Q}_p, V)/H^1_f(\mathbb{Q}_p, V) \\ \to H^1_f(\mathbb{Q}_p, V^*(1))^* \to H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))^*$$

et où l'application $H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))^* \to H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ se factorise par l'application

$$(\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* \to \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$$

induite par la hauteur p-adique

$$\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} \times \ker \mathrm{Loc}_{p,V} \to \mathbb{Q}_p$$

(supposée non dégénérée sur $\ker \mathrm{Loc}_p$, remarquons que les formes $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,N}$ coïncident toutes sur $\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} \times \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$, on les note $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$).

Lorsque la suite $s_{f,N}(V)$ est exacte, elle permet avec la suite exacte tautologique

$$0 \to \ker s_N \to N \to t_V(\mathbb{Q}_p) \to \operatorname{coker} s_N \to 0$$

d'obtenir un isomorphisme

$$\iota_{V,N} : \Delta_{f,N}(V) \to \mathbb{Q}_p$$

où

$$\Delta_{f,N}(V) = (\det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1)))^* \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(\mathbb{Q}, V))^* \otimes N^* \otimes t_V(\mathbb{Q}_p).$$

Lorsque la suite $s_{f,N}(V)$ n'est pas exacte, on pose $(\iota_{V,N})^{-1} = 0$.

Notons β_N la projection de $D_p(V)$ sur $\mathrm{Fil}^0 D_p(V)$ parallèlement à N si $N \neq \mathrm{Fil}^0 D_p(V)$ et la projection de $D_p(V)$ dans $t_V(\mathbb{Q}_p)$ si $N = \mathrm{Fil}^0 D_p(V)$. Notons enfin $\tilde{\beta}_N$ l'application suivante :

i) si $N = \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$

$$\tilde{\beta}_N : \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) \otimes N^* \otimes t_V(\mathbb{Q}_p) \to t_V(\mathbb{Q}_p)$$

est l'application évidente.

ii) si $N \neq \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$,

$$\tilde{\beta}_N : \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) \otimes N^* \otimes t_V(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$$

est induit par l'isomorphisme $\det_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V) \simeq \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) \otimes N$.

3.3.7. CONJECTURE $BSD(V)$. — A) *Supposons que $E(\mathbb{Q})$ est fini.*

i) *Alors, le groupe de Shafarevich-Tate $\text{Ш}(E)$ est fini;*

ii) *$\mathcal{L}_{p,MSD}$ ne s'annule pas en $\mathbb{1}$;*

iii) *pour tout $w \in \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$, on a*

$$(1-\varphi)^{-1} \cdot (1-p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot \mathcal{L}_{p,MSD}(\mathbb{1}) \\ = L_p(V,0)^{-1} \cdot (\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2} \cdot \#\text{Ш}(E) \cdot \mathrm{Tam}(E,w) \cdot w.$$

B) *Supposons que $r = \mathrm{rg}\, E(\mathbb{Q}) \geq 1$.*

i) *La forme*

$$\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi} : \ker \mathrm{Loc}_{p,V} \times \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} \to \mathbb{Q}_p$$

est non dégénérée. Le groupe de Shafarevich-Tate $\text{Ш}(E)$ est fini;

ii) *$\mathcal{L}_{p,MSD}$ a un zéro en $\mathbb{1}$ d'ordre r;*

ii)' *il existe un supplémentaire N de $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$ tel que $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,N}$ soit non dégénérée;*

iii) *pour tout sous-espace N de dimension 1 de $\mathbf{D}_p(V)$, on a*

$$BSD(V,N) : \beta_N((1-\varphi)^{-1} \cdot (1-p^{-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot (r!)^{-1} \cdot \mathcal{L}_{p,MSD}^{(r)}(\mathbb{1})) = \\ L_p(V,0)^{-1} \cdot \#\text{Ш}(E) \cdot \mathrm{Tam}(E,w) \cdot \iota_{V,N}((\det_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}))^{\otimes -2} \otimes x)^{-1} \cdot \tilde{\beta}_N(w \otimes x)$$

pour tout $w \in \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$ et $x \in N^* \otimes t_V(\mathbb{Q}_p)$.

Remarques. — i) Si Y est un générateur du $\mathbb{Z}$-module libre $\det_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})$, $Y^{\otimes 2}$ est indépendant de Y.

ii) Les conditions B,(i) et B,(ii)' impliquent que $H^1_f(\mathbb{Q},V) \neq \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$, que la suite $s_{f,\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)}(V)$ existe et est exacte et que pour tout supplémentaire N de $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$ dans $\mathbf{D}_p(V)$ sauf un, la suite $s_{f,N}(V)$ existe et est exacte (rappelons que l'orthogonal de $\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ pour n'importe laquelle de ces hauteurs p-adiques contient l'image de $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ par projection, ce qui est indépendant de N et que l'on a

$$\langle P,P\rangle_{V,\chi,N} - \langle P,P\rangle_{V,\chi,M} = [\log^M P, \log^N P]_{\mathbf{D}_p(V)}).$$

iii) Remarquons que $\mathrm{Leop}(V)$ implique que $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}$ s'injecte dans $H^1(G_{S,\mathbb{Q}},V)$. L'image de $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ dans $H^1(G_{S,\mathbb{Q}},V)$ ne peut donc être nulle; (i) et le fait que cette image $\mathbb{Z}_p \cdot P$ est orthogonale à $\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ impliquent que $\mathrm{Loc}_{p,V}(P)$ est non nul et que l'on ne peut avoir $\langle P,P\rangle_{V,\chi,N} = 0$ pour tout N. Ainsi, B,(i) *et* Leop(V) *impliquent* B,(ii)'.

iv) Lorsque $E(\mathbb{Q})$ est fini, c'est la suite $s_{f,\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)}(V)$ qui n'est pas exacte et toutes les suites $s_{f,N}(V)$ pour N supplémentaire de $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$ sont exactes. Plus généralement, sans supposer $\text{Ш}(E)(p)$ fini, supposons $H^1_f(\mathbb{Q},V) = \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$. La suite $s_{f,\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)}(V)$ n'est pas exacte. La conjecture $BSD(V,\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V))$ signifierait dans ce cas que l'image de $(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(\mathcal{L}_{p,MSD})^{(r)}(\mathbb{1})$ dans $t_V(\mathbb{Q}_p)$ est nulle. Les suites $s_{f,N}(V)$ sont toutes les mêmes, il n'y aurait donc dans ce cas (d'ailleurs fort improbable) qu'une *seule hauteur* p-adique, qu'une *seule conjecture* $BSD(V,N)$ pour N supplémentaire de $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$ qui, au moins à une unité près, dirait que

$$(1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(\mathcal{L}_{p,MSD})^{(r)}(\mathbb{1})$$
$$\sim L_p(V,0)^{-1}\cdot(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2}\cdot\#\text{Ш}(\mathbf{T})(p)\cdot\mathrm{disc}\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{\mathbf{T},\chi}\cdot\mathrm{Tam}(E,w)\cdot w$$

où $\mathrm{disc}\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{\mathbf{T},\chi}$ désigne le discriminant de $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ sur $\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} \times \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)}$.

Reprenons la *conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer complexe* avec cet éclairage. Je me suis toujours demandée ce qui faisait la différence entre le cas complexe et le cas p-adique et plus précisément pourquoi il y a plusieurs hauteurs p-adiques et une seule hauteur complexe. Une réponse est peut-être la suivante : "$E(\mathbb{Q})$ *est contenu dans le noyau de localisation en l'infini", alors que* $E(\mathbb{Q})$ *n'est jamais contenu dans le noyau de localisation en* p (à moins d'être fini). On est donc dans le cas complexe dans une situation du type de la remarque (iv). Précisons ce que l'on entend par "noyau de localisation en l'infini".

On a une application exponentielle $t_E(\mathbb{C}) \to E(\mathbb{C})$. Cette application n'est pas injective comme dans le cas p-adique. Son noyau est le $\mathbb{Z}$-module $H_1^B(E/\mathbb{C},\mathbb{Z})^{c=1} = H_1^B(E/\mathbb{R},\mathbb{Z})$ où c est la conjugaison complexe. L'application logarithme est donc une application $\log : E(\mathbb{C}) \to t_E(\mathbb{C})/H_1^B(E/\mathbb{C},\mathbb{Z})^{c=1}$. L'involution c se prolonge en une involution $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathbb{C}\otimes H_1^B(E/\mathbb{C},\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}\otimes H_{dR}(E)^* \simeq \mathbb{C}\otimes H_{dR}(E)$ et sur $t_E(\mathbb{C})$. Si x est un élément de $t_E(\mathbb{C})/H_1^B(E/\mathbb{C},\mathbb{Z})^{c=1}$ et $\hat{x}$ un relèvement quelconque de x dans $t_E(\mathbb{C})$, $(1-c)(\hat{x})$ est bien défini dans $t_E(\mathbb{C})$ et ne dépend que de x. Si l'on note abusivement $(1-\varphi)\cdot\log$ l'application $E(\mathbb{C}) \to t_E(\mathbb{C})$ ainsi définie, il est maintenant clair que $E(\mathbb{Q})$ est contenu dans le noyau de $(1-\varphi)\cdot\log$!

3.3.8. Reparlons de [Ru92]. Nous ne faisons pas le lien précis avec les résultats de Rubin, ne travaillant pas avec la même $\mathbb{Z}_p$-extension que lui. Remarquons cependant que les résultats de [P92a] peuvent se démontrer pour une $\mathbb{Z}_p$-extension associée à un groupe formel de Lubin-Tate de hauteur 1 et que le même formalisme que celui développé ici peut être utilisé pour une courbe elliptique à multiplication complexe; on a alors $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) = D_{[0]}$, la projection de notre fonction $\mathcal{L}_\omega$ sur $D_{[-1]}$ parallèlement à $D_{[0]}$ est divisible par ℓ_0 et correspond à $\ell_0 \cdot \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\psi_{\mathcal{P}^*})$ pour ω générateur convenable du module des unités elliptiques. Le régulateur qui intervient dans la conjecture pour $N = \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) = D_{[0]}$ correspond au terme $R^*_{\mathcal{P}}(Y, Y^*)$ de [Ru92].

3.3.9. Enonçons maintenant les conjectures de Bloch-Kato p-adiques pour la fonction $\mathcal{L}_{p,MSD}$. On note $h_1(E)(j)$ le motif (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) dont les réalisations ℓ-adiques sont les $V_\ell(j) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(j)$, munis de leur $\mathbb{Z}_\ell$-structure $T_\ell(j)$ avec $T_\ell = \varprojlim E_{\ell^n}$ pour ℓ premier, et dont la réalisation de Rham $D_{dR}(h_1(E)(j))$ est $D_{dR}(E)$ muni de la filtration

$$\mathrm{Fil}^{-j} D_{dR}(H_1(E)(j)) = \mathrm{Fil}^0 D_{dR}(E).$$

On définit le $\mathbb{Z}$-module $H^1(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$ des extensions de $\mathbb{Z}$ par $h_1(E)(j)$ dans une catégorie convenable ([F92], 11.6). On a pour toute place v de $\mathbb{Q}$ et pour tout nombre premier ℓ une application canonique $H^1(\mathbb{Q}, h_1(E)(j)) \to H^1(\mathbb{Q}_v, T_\ell(j))$ et on note $H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$ le $\mathbb{Z}$-module des éléments de $H^1(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$ dont l'image dans $H^1(\mathbb{Q}_v, T_\ell(j))$ appartient à $H^1_f(\mathbb{Q}_v, T_\ell(j))$ pour tout v et ℓ. Lorsque $j = 0$ et si $\text{Ш}(E)$ est fini, $H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E))$ est simplement $E(\mathbb{Q})$. Lorsque $j < 0$, $H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$ devrait être nul; lorsque $j > 0$, Beilinson a introduit le groupe de cohomologie motivique $H^2_{\mathcal{M}}(E/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}(j+1)) = \mathbb{Q} \otimes K_{2j}(E/\mathbb{Z})^{(j+1)} = \mathbb{Q} \otimes K_{2j}(E/\mathbb{Z})$ qui devrait s'identifier à $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$. On renvoie à [FP91], [F92] pour une "définition" et les conjectures "standard" que l'on suppose ici vérifiées. Par exemple, et c'est essentiellement cela dont nous aurons besoin pour que les formules que nous donnons aient un sens, on conjecture que

i) pour tout ℓ, l'application $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(j)) \to H^1_f(\mathbb{Q}, T_\ell(j))$ est un isomorphisme;

ii) l'application $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\mathbb{Q}, h_1(E)(j)) \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V_\ell(j))$ est un isomorphisme.

On pose

$$\text{Ш}(h_1(E)(j)) = \oplus_\ell \text{Ш}(T_\ell(j))$$

où $Ш(T_\ell(j))$ est le conoyau de l'application

$$\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1_f(\mathbb{Q}, T_\ell(j)) \to H^1_f(\mathbb{Q}, V_\ell(j)/T_\ell(j)).$$

Pour $j \neq 0$, on pose

$$\mathrm{Tam}(h_1(E)(j)) = \prod_\ell \mathrm{Tam}(T_\ell(j), w_0)$$

où w_0 est la base canonique de l'espace vectoriel nul $\mathrm{Fil}^0\, D_{dR}(h_1(E)(j))$ si $j > 0$ et la base de $\mathbf{D}_{dR}(h_1(E)(j)) = \mathbf{D}_{dR}(E)$ dont l'image par l'application canonique $\det_{\mathbb{Q}} D_{dR}(E) \to \det_{\mathbb{Q}} D_{dR}(\mathbb{Q}(1)) \simeq \mathbb{Q}$ est 1. Enfin, on pose

$$\tau(h_1(E)(j)) = (\# H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))_{\mathrm{tor}}) \cdot (\# H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(-j))_{\mathrm{tor}}).$$

3.3.10. Conjecture $(BK(V,j))$. — i) *Si j est un entier strictement positif, $H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$ est un $\mathbb{Z}$-module de rang 1, $H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(-j))$ est fini et $H^1(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$ est un $\mathbb{Z}$-module de rang 1;*

ii) *Si $j > 0$, on a l'égalité dans $\mathbf{D}_p(V(j))$*

$$\begin{aligned}[(1-p^{j-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-p^{-j}\cdot\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}_{p,MSD}(\chi^{-j})]\otimes e_{-j} &= \pm\Gamma^*(-j+1)\cdot L_p(V,-j)^{-1}\\ &\tau(h_1(E)(j))^{-1}\cdot \#\,Ш(h_1(E)(-j))\cdot\tau(h_1(E)(-j))\cdot \log_{V(j)}(P)\end{aligned}$$

où P est un générateur du $\mathbb{Z}$-module $H^1_f(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$ modulo torsion;

ii) *si $j < 0$, on a*

$$\begin{aligned}[(1-p^{j-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(1-p^{-j}\cdot\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}_{p,MSD}(\chi^{-j})]\otimes e_{-j} &= \pm\Gamma(-j+1)\cdot L_p(V,-j)^{-1}\\ &\tau(h_1(E)(j))^{-1}\cdot \#Ш(h_1(E)(-j))\cdot \mathrm{Tam}(h_1(E)(-j))\cdot \lambda_{V(j)}(Q)\end{aligned}$$

où Q est un générateur de $H^1(\mathbb{Q}, h_1(E)(j))$ modulo torsion.

3.3.11. Revenons à $\omega_{\mathrm{Beil-Kato}}$. Soit j un entier > 0. Le régulateur de Beilinson de $h_1(E)(j)$ est dans le cas où nous sommes une application :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} K_{2j}(E/\mathbb{Z}) \to &\mathbb{C}\otimes H^1_{dR}(E)^*/\mathbb{C}\otimes(H^1_B(E/\mathbb{C},\mathbb{Q})^*\otimes(2i\pi)^j\mathbb{Q})^+\\ &\simeq \mathbb{C}\otimes\mathbf{D}(E)/\mathbb{C}\otimes(H_1^B(E/\mathbb{C},\mathbb{Q})\otimes(2i\pi)^j\mathbb{Q})^+\\ &= \mathbb{C}\otimes\mathbf{D}(E)/\mathbb{C}\otimes H_1^B(E/\mathbb{C},\mathbb{Q})^{(-1)^j}.\end{aligned}$$

Notons

$$\log_{h_1(E)(j)} : \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} K_{2j}(E/\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}\otimes\mathbf{D}(E)$$

un relèvement du régulateur de Beilinson. Alors

$$(1-(-1)^j\cdot c)\cdot\log_{h_1(E)(j)} : \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} K_{2j}(E/\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}\otimes\mathbf{D}(E)$$

est bien défini.

Posons $b_j = P(\omega_{\mathrm{Beil-Kato}} \otimes \varepsilon^{\otimes j})$. L'élément b_1 est construit à partir d'un élément B_1 de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K_2(E/\mathbb{Z})$. Il est probable que b_j provienne lui aussi d'un élément B_j de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K_{2j-2}(E/\mathbb{Z})$ où B_j est l'un des éléments définis par Beilinson (avec par exemple $\log_{V(j)} B_j = \log_{V(j)} b_j$). A moins que je ne prenne mes désirs pour des réalités, l'élément B_j vérifie la propriété suivante (on rappelle que $\Lambda(V, -j)$ est la valeur en $s = -j$ de $(2\pi)^{-s-1} \cdot \Gamma(s+1) \cdot L(V, s)$ et n'est jamais nul pour $j \neq 0$)

$$[(2\pi)^{-1} \cdot i^j \cdot \Omega_V^{w,(-1)^j}]^{-1} \cdot \Lambda(V, -j) \cdot (1 - (-1)^{j-1}c)(i^j \cdot w) \\ = \pm\Gamma^*(-j+1) \cdot (1 - (-1)^j \cdot c) \cdot \log_{h_1(E)(j)}(B_j)$$

pour w dans $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}(E)$.

Cette formule est à mettre en parallèle avec la formule suivante qui se déduit de la proposition 2.4.1 : pour tout entier $j > 0$, on a

$$(1-p^{j-1}\varphi^{-1})\cdot(1-p^{-j}\cdot\varphi)^{-1}\cdot\mathcal{L}_{\omega_{\mathrm{Beil-Kato}}}(\chi^{-j})\otimes e_{-j} = -\Gamma^*(-j+1)\cdot\log_{V(j)}(b_j)$$

dans $\mathbf{D}_p(V(j)) = \mathbf{D}_p(V) \otimes e_{-j}$, c'est-à-dire, avec l'espoir que $\mathcal{L}_{\omega_{\mathrm{Beil-Kato}}} = \mathcal{L}_{p,MSD}$

$$(1-p^j \cdot \varphi)^{-1}(1-p^{j-1}\varphi^{-1})\mathcal{L}_{p,MSD}(\chi^{-j}) \otimes e_{-j} = -\Gamma^*(-j+1) \cdot \log_{V(j)}(b_j).$$

Ainsi, si l'on sait que $\mathcal{L}_{\omega_{\mathrm{Beil-Kato}}} = \mathcal{L}_{p,MSD}$, les conjectures de Bloch-Kato complexes [BK90] se déduisent des conjectures de Bloch-Kato p-adiques "à une unité près" pour $\mathcal{L}_{\omega_{\mathrm{Beil-Kato}}}$ pour tout nombre premier p (voir 3.4.7).

3.4. Conjecture principale.

3.4.1. Les conjectures qui suivent sont inspirées des "conjectures principales" classiques.

Si M est un Λ-module de type fini, notons $\det_\Lambda(M)$ son déterminant et $\det_\Lambda(M)^{-1}$ le dual du Λ-module libre $\det_\Lambda(M)$. Rappelons que si $\mathcal{K}$ est l'anneau des fractions total de Λ et si M est de torsion, on a une application canonique de $\det_\Lambda(M)$ dans $\mathcal{K}$ (son image est $F(M)^{-1} \cdot \Lambda$ où $F(M)$ est une série caractéristique de M).

Le Λ-module $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ est en fait indépendant de S (contenant p) : cela se déduit par passage à la limite projective de la suite exacte

$$0 \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}_n}, \mathbf{T}) \to H^1(G_{S',\mathbb{Q}_n}, \mathbf{T}) \to \oplus_{v\in S'-S} H^1(\mathbb{Q}_{n,w}, \mathbf{T})/H^1_f(\mathbb{Q}_{n,w}, \mathbf{T})$$

(avec $S' \supset S$) et du fait que pour w ne divisant pas p, $Z^1_{\infty,w}(\mathbf{T}) = \varprojlim H^1_f(\mathbb{Q}_{n,w}, \mathbf{T})$ (voir par exemple [P92a], 2.2.4). On pose donc

$$H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) = H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}).$$

Notons d'autre part

$$H^2_{\infty,S}(\mathbf{T}) = \varprojlim H^2(G_{S,\mathbb{Q}_n}, \mathbf{T})$$

pour S comme précédemment et $H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})$ le noyau de

$$H^2_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to \oplus_{w\in S_f} Z^2_{\infty,w}(\mathbf{T})$$

où $Z^2_{\infty,w}(\mathbf{T}) = \varprojlim H^2(\mathbb{Q}_{n,w}, \mathbf{T})$ (cela est indépendant du choix de S). Sous Leop(V), $H^2_{\infty,S}(\mathbf{T})$ et $H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})$ sont des Λ-modules de torsion et $H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})$ est un Λ-module de rang 1. On dispose alors d'une application Λ-linéaire canonique : $\det_\Lambda H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to \mathcal{K}$. Si ω est un élément de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})$, l'injection de Λ-modules de $\mathcal{C}_{\infty,\omega}(\mathbf{T}) = \Lambda\cdot\omega$ dans $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})$ permet d'obtenir une application

$$\det_\Lambda \mathcal{C}_{\infty,\omega}(\mathbf{T}) \otimes (\det_\Lambda H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))^{-1} \to \mathcal{K}.$$

On en déduit une application Λ-linéaire :

$$CP_\omega(V) : \det_\Lambda \mathcal{C}_{\infty,\omega}(\mathbf{T}) \otimes (\det_\Lambda H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))^{-1} \otimes \det_\Lambda H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to \mathcal{K}.$$

3.4.2. Conjecture ($CP(V)$). — *Il existe un élément $\omega_?$ de $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})$ tel que $\mathcal{L}_{\omega_?} = \mathcal{L}_{p,MSD}$* ; Leop($V$) *est vraie et l'image de $CP_{\omega_?}$ est Λ.*

La première partie de cette conjecture a déjà été énoncée en 3.2.1. La deuxième partie signifie que, si ω est un élément non nul de $H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})$, on a

$$\Lambda F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})) \cdot F(H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})/\Lambda\cdot\omega)^{-1}\cdot\omega = \Lambda\cdot\omega_?\,,$$

(ce qui signifie aussi que $F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))$ est une série caractéristique de $H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})/\mathcal{C}_{\infty,?}$, formulation due à Kato) ou encore

$$\Lambda\cdot\mathcal{L}_{\omega_?} = \Lambda\cdot F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))\cdot F(H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})/\Lambda\cdot\omega)^{-1}\cdot\mathcal{L}_\omega.$$

Il est facile de vérifier que cette conjecture ne dépend pas du choix de $\mathbf{T}$, c'est-à-dire ne dépend que de la courbe elliptique à isogénie près (voir [Pb] pour des calculs similaires).

3.4.3. Ainsi, le Λ-module libre

$$\mathcal{I}_{\mathrm{arith},\{p\}}(\mathbf{T}) = \Lambda\cdot F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))\cdot F(H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})/\Lambda\cdot\omega)^{-1}\mathcal{L}_\omega \subset \mathcal{H}(G_\infty)\otimes\mathbf{D}_p(V)$$

où ω est un élément non nul de $H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$ peut être appelé Λ-module des fonctions L p-adiques *arithmétiques* (incomplètes en p) de E. On peut aussi le définir de la manière plus intrinsèque suivante : l'application $\omega \mapsto \mathcal{L}_\omega$ se prolonge en une application de $\det_\Lambda(H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))$ dans $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ et on a

$$\mathcal{I}_{\mathrm{arith},\{p\}}(\mathbf{T}) = F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})) \cdot \mathcal{L}(\det_\Lambda(H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))).$$

CONJECTURE $(CP'(V))$. — *On a l'égalité des deux Λ-modules*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{arith},\{p\}}(\mathbf{T}) = \Lambda \cdot \mathcal{L}_{p,MSD}.$$

Cette formulation, bien que très liée à la précédente, présuppose l'existence de $\mathcal{L}_{p,MSD}$, mais pas celle de $\omega_?$.

Remarque. — De même que $\mathcal{I}_{\mathrm{arith},\{p\}}(\mathbf{T})$ devrait être lié à la fonction L incomplète en p (avec facteurs à l'infini), le Λ-module $\mathcal{I}_{\mathrm{arith},S}(\mathbf{T}) = \Lambda \cdot F(H^2_{\infty,S}(\mathbf{T})) \cdot \mathcal{L}(\det_\Lambda(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}))$ est lié à la fonction L incomplète en S_f.

3.4.4. Le lien entre $CP(V)$ et la conjecture classique de Mazur dans le cas où E est ordinaire en p se déduit de la proposition suivante : rappelons que $\pi : \mathbf{D}_p(V) \to D_{[0]}$ désigne la projection sur $D_{[0]}$ parallèlement à $D_{[-1]}$.

PROPOSITION. — *Supposons* $\mathrm{Leop}(V)$. *Si V est ordinaire en p, on a*

$$\pi(\mathcal{I}_{\mathrm{arith}}(\mathbf{T})) = \Lambda \cdot F(X_{\infty,f}(\mathbf{T})) \otimes M_{[0],\mathbf{T}}$$

où $M_{[0],\mathbf{T}}$ est le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $D_{[0]}$ dont l'image par l'isomorphisme de comparaison engendre $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \otimes \mathbf{T}/\operatorname{Fil}^1 \mathbf{T}$.

Le Λ-module $X_{\infty,f}(\mathbf{T})$ défini en 2.3.6 est le dual de Pontryagin du groupe de Selmer classique sur $\mathbb{Q}_\infty$ relatif à p^∞.

Démonstration. — Il est facile de voir (1.4 et formule du début de 2.1.5) que $\Lambda \cdot \pi(\mathcal{L}(\det_\Lambda(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}))) = \Lambda \cdot I \cdot d_{[0],\mathbf{T}}$ où I engendre l'idéal caractéristique du conoyau de

$$H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})/Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T}).$$

D'autre part, par passage à la limite projective des suites exactes

$$H^1(G_{S,\mathbb{Q}_n}, \mathbf{T}) \to \oplus_{w|v\in S_f} H^1(\mathbb{Q}_{n,w}, \mathbf{T}) \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}_n}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge$$
$$\to H^2(G_{S,\mathbb{Q}_n}, \mathbf{T}) \to \oplus_{w|v\in S_f} H^2(\mathbb{Q}_{n,w}, \mathbf{T}) \to H^0(G_{S,\mathbb{Q}_n}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge \to 0$$

([P92a], 4.1.1) et en remarquant que si v ne divise pas p, $Z^1_{\infty,v}(\mathbf{T})$ et $Z^1_{\infty,f,v}(\mathbf{T})$ sont égaux, on obtient la suite exacte

$$H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,p}(\mathbf{T})/Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T}) \to X_{\infty,f}(\mathbf{T}) \to H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to 0.$$

On en déduit que la série caractéristique $F(X_{\infty,f}(\mathbf{T}))$ de $X_{\infty,f}(\mathbf{T})$ est le produit de I et de la série caractéristique $F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))$ de $H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})$. La proposition se déduit alors de ce que $\pi(\mathcal{I}_{\text{arith}}(\mathbf{T}))$ est engendré par $I \cdot F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))$.

Remarque. — Supposons que $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V) = D_{[0]}$, ce qui se produit par exemple lorsque E est à multiplication complexe. Supposons d'autre part $\mathrm{Leop}(V)$. Le point $P(\omega)$ ne peut être nul. Si le Λ-module $X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{\Delta}$ n'était pas de torsion, $\pi(1\!\!1_{\Delta}(\mathcal{L}_\omega))$ est identiquement nul. Par 2.1.4, $P(\omega) \in H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbf{T})$. Par 2.2.2, on a $\langle P(\omega), P(\omega)\rangle_{V,\chi,N} = 0$ pour tout supplémentaire de $D_{[0]}$, ce qui implique que $\log_V P(\omega) = 0$. Nous verrons d'autre part au paragraphe suivant que la non dégénérescence de $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ implique que $\mathrm{Leop}(V)$ est vraie. Cela aboutit à une contradiction si $X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{\Delta}$ n'est pas de torsion. On a ainsi montré :

Si $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V) = D_{[0]}$ *et si* $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ *est non dégénérée,* $X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{\Delta}$ *est un Λ-module de torsion.*

On obtient comme corollaire :

Si E est à multiplication complexe et ordinaire en p, si $E(\mathbb{Q})$ est de rang 1 et si $\text{Ш}(E)(p)$ est fini, $X_{\infty,f}(\mathbf{T})^{\Delta}$ est un Λ-module de torsion.

Ce résultat était déjà connu et même sans l'hypothèse de finitude de $\text{Ш}(E)(p)$ grâce à un résultat de transcendance de D. Bertrand qui a prouvé que si E est à multiplication complexe et ordinaire en p, si $P \in E(\mathbb{Q})$ n'est pas de torsion, $\langle P, P\rangle_{V,\chi} \neq 0$.

3.4.5. Proposition. — *Supposons $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ et $CP(V)$ vraies. Si $r = \dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(\mathbb{Q}, V)$, $\mathcal{L}_{p,MSD}$ a un zéro en $1\!\!1$ d'ordre supérieur ou égal à r. Si de plus $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ est non dégénérée, $\mathcal{L}_{p,MSD}$ a un zéro en $1\!\!1$ d'ordre r.*

Remarques. — i) La conjecture $CP(V)$ sert uniquement à transférer des résultats démontrés pour $I_{\text{arith}} = F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})) \cdot \mathcal{L}(\det_\Lambda(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}))$ à $\mathcal{L}_{p,MSD}$.

ii) On montrera aussi que si $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ est non dégénérée (sans autres hypothèses), $\mathrm{Leop}(V)$ est vraie et que si $H^1_f(\mathbb{Q}, V) \neq \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$, $\mathrm{Loc}_{p,V}\, P(\omega)$ est non nul si ω est tel que $1\!\!1(F(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})/\Lambda\cdot\omega)) \neq 0$.

Démonstration. — On choisit ω tel que $1\!\!1(F(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})/\Lambda\cdot\omega)) \neq 0$. Deux cas peuvent se produire :
cas (a) : $H^1_f(\mathbb{Q}, V) \neq \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$ (ce qui est vrai dès que $E(\mathbb{Q})$ est infini) ;
cas (b) : $H^1_f(\mathbb{Q}, V) = \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$.

Dans le cas (a), la fonction $\mathcal{L}_\omega$ s'annule en $\mathbb{1}$ (le lemme 2.3.9 implique que $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega_0) \in H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ et la proposition 2.1.4 permet de conclure). Par des théorèmes classiques sur les Λ-modules, on est donc ramené à montrer que $H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de rang $\geq r-1$ dans le cas (a) et de rang $\geq r$ dans le cas (b), c'est-à-dire que dans tous les cas $H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de rang $\geq \dim\ker \mathrm{Loc}_{p,V} = \dim\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$. On a la suite exacte (déduite des suites exactes de Poitou-Tate classiques)

$$H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to X^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to 0.$$

En prenant la suite de cohomologie pour G_∞ et en tensorisant par $\mathbb{Q}_p$, on en déduit la suite exacte

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to 0$$

qui devient en utilisant des résultats de cohomologie galoisienne (voir par exemple [P92a], 2.1.1, 3.1.3),

$$H^1(\mathbb{Q}_p, V) \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1))^* \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to 0.$$

Ainsi $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty}$ est isomorphe à $H^2(G_{S,F}, V) = (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*$. Ce qui démontre la première assertion.

La forme linéaire $L : \ker \mathrm{Loc}_{p,V} \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*$ déduite de la restriction de $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,N}$ à $\ker \mathrm{Loc}_{p,V} \times \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ se factorise de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\ker \mathrm{Loc}_{p,V} \simeq H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1))^* &\to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty} \\ &\to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}, \mathbb{Q}_p).\end{aligned}$$

On a d'autre part le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty} & \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to & (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty} & \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \xrightarrow{\simeq} & (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*.
\end{array}$$

On en déduit que la forme linéaire L se factorise de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\ker \mathrm{Loc}_{p,V} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty} &\to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty} \\ &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}, \mathbb{Q}_p).\end{aligned}$$

Supposons que $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ *est non dégénérée.* Alors, L est un isomorphisme, l'application $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty}$ est un isomorphisme, ce qui implique (par exemple [P92a], 0.2.3) que $F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))$ a un zéro en $\mathbb{1}$ de multiplicité égale à $\dim\ker \mathrm{Loc}_{p,V}$. Le noyau de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty}$ est nul; il en est de même de celui de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} = H^1(\mathbb{Q}_p, V)$. On en déduit que si $P(\omega)_p$ est nul, on a $\mathrm{Tr}_\Delta(\omega) = (\gamma - 1)\cdot\xi$ avec $\xi \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})$, ce qui est impossible par définition de ω. Donc, $P(\omega)_p \neq 0$. Dans le cas (a), $P(\omega) \in H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ et $\mathcal{L}'_\omega$ ne s'annule pas en $\mathbb{1}$ (proposition 2.2.2). Dans le cas (b), $P(\omega)$ (qui appartient à $H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V)$ n'appartient pas à $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ et $\mathcal{L}_\omega(\mathbb{1})$ est non nul (proposition 2.1.4). Cela termine la démonstration de la proposition. Montrons maintenant la remarque (ii). Le fait que L est un isomorphisme implique que $H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1))^* \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty}$ est un isomorphisme. Comme on a la suite exacte

$$0 \to X^2_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge \to X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty} \to 0\,,$$

on en déduit que $X^2_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}$ est fini et que $X^2_{\infty,S}(\mathbf{T})$ étant sans torsion est nul.

3.4.6. PROPOSITION. — *Supposons $CP(V)$ et* Réc(V) *(ou $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$) vraies. On suppose de plus que* Ш(E) *est fini et que $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ est non dégénérée. Si N est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbf{D}_p(V)$, la conjecture $BSD_N(V)$ est vraie à une unité près.*

Remarques. — i) On peut faire la même remarque qu'en 3.4.3. Ce que nous montrons réellement est que si Réc(V) (ou $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$) est vraie, si $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ est non dégénérée, on a, avec I_{arith} un générateur de $\mathcal{I}_{\mathrm{arith},\{p\}}(\mathbf{T})$,

$$\beta_N((1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\cdot(r!)^{-1}\cdot I^{(r)}_{\mathrm{arith}}(\mathbb{1}) \sim$$
$$L_p(V,0)^{-1}\cdot \#\text{Ш}(E)\cdot \mathrm{Tam}(E,w)\cdot \iota_{V,N}((\det_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}))^{\otimes -2}\otimes x)^{-1}\cdot \widetilde{\beta}_N(w\otimes x)$$

pour tout N, pour tout $w \in \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ et $x \in N^* \otimes t_V(\mathbb{Q}_p)$ ($\sim$ signifiant à un élément de $\mathbb{Z}_p^\times$ près).

ii) La suite $s_{f,N}(V)$ existe et est exacte si et seulement si $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,N}$ (resp. $\mathrm{Loc}_{V,p}$) est non dégénérée pour $N \neq \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ (resp. est non nulle pour $N = \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$) (voir 3.3.7); cela est vrai pour tout N sauf un. Dans le cas contraire, les deux termes de la formule sont nuls.

Démonstration. — On choisit ω tel que $\mathbb{1}(F(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})/\Lambda\cdot\omega)) \neq 0$. On a alors

$$\mathbb{1}(F(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})/\Lambda\cdot\omega)) \sim \#(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}/\mathbb{Z}_p P(\omega)).$$

Notons $\mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} : H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T}) \to H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T})$ l'application de localisation. *Supposons d'abord que $H^1_f(\mathbb{Q},V) \neq \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$.*

On a montré dans le paragraphe précédent que $P(\omega) \in H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T})$ est non nul, de même que $\mathrm{Loc}_{p,V}\,P(\omega)$. Comme $P(\omega)$ est orthogonal à $\ker \mathrm{Loc}_{p,V}$ pour n'importe laquelle des $\langle\ ,\ \rangle_{V,\chi,N}$, cet orthogonal est indépendant de N. Soit P une base de l'orthogonal de $\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}}$ dans $H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T})$ modulo torsion; $\mathbb{Z}_p \cdot P(\omega)$ est contenu dans $\mathbb{Z}_p \cdot P$, l'image de P dans $H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T})/\ker \mathrm{Loc}_{\mathbf{T}} + H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T})_{\mathrm{tor}}$ en est une base et on a

$$H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T}) = \ker \mathrm{Loc}_{\mathbf{T}} \oplus \mathbb{Z}_p \cdot P \oplus H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T})_{\mathrm{tor}}$$

($\ker \mathrm{Loc}_{\mathbf{T}}$ est d'intersection nulle avec le sous-module de torsion $H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T})_{\mathrm{tor}} = E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}(p)$ de $H^1_f(\mathbb{Q},\mathbf{T})$). La suite $s_{f,\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)}(V)$ existe et est exacte. Soit N tel que $s_{f,N}(V)$ *n'est pas exacte*. Le membre de droite est donc nul. La nullité du membre de gauche se déduit de la proposition 2.3.5, de la proposition 2.2.1 et la non nullité de $\log_V P(\omega) \neq 0$. Supposons donc que $s_{f,N}(V)$ *est exacte*. En utilisant les propositions 2.2.2 et 2.3.5, la conjecture $CP(V)$ implique que, si l'on pose $F = F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))$, $BSD(V,N)$ à une unité près est équivalente à

$$\begin{aligned}(r-1)!^{-1} \cdot F^{r-1}(\mathbb{1}) \sim L_p(V,0)^{-1} \cdot \#\text{Ш}(E) \cdot \mathrm{Tam}(E,w) \cdot (\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2} \cdot \\ \mathrm{disc}\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{\mathbf{T},\chi} \cdot (\log^{w'} P)^2 / \log^{w'} P(\omega) \cdot \#(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}/\mathbb{Z}_p P(\omega))\end{aligned}$$

où $\mathrm{disc}\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{\mathbf{T},\chi}$ désigne le discriminant de $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{V,\chi}$ sur $\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} \times \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)}$. Remarquons que $\log^{w'} P(\omega)/\log^{w'} P$ est aussi égal à l'indice de $\mathbb{Z}_p \cdot P(\omega)$ dans $\mathbb{Z}_p \cdot P$ à une unité près. Rappelons d'autre part que l'on a une factorisation

$$\mathrm{Tam}(E,w) \sim \mathrm{Tam}_p(\mathbf{T},w) \cdot \prod_{v \in S_f - \{p\}} \mathrm{Tam}_v(\mathbf{T})$$

(*cf.* [FP92], 1.4, Tam y est noté Tam^0).

Si $f : M \to N$ est une application de $\mathbb{Z}_p$-modules à noyau et conoyau finis, posons $h(f) = \#\mathrm{coker}(f)/\#\ker(f)$. Par un théorème classique sur les Λ-modules, on a

$$\begin{aligned}(r-1)!^{-1} \cdot F^{(r-1)}(\mathbb{1}) &\sim h(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty} \to H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty}) \\ &= h(f) \cdot h(f')^{-1} \cdot \mathrm{disc}\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_{\mathbf{T},\chi}\end{aligned}$$

où

$$f : H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty} \to \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} \text{ et } f' : H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^*$$

(on a en effet

$$\mathrm{disc}\langle\langle\ \rangle\rangle_{\mathbf{T},\chi} = h(\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^*\ ).$$

Soit Y le Λ-module défini par la suite exacte

$$0 \to H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to Y \to 0.$$

On a alors la suite exacte

$$0 \to Y \to X^1_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to 0.$$

Nous avons vu dans la proposition précédente que Y^{G_∞} est fini; comme $X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty} \simeq H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge = \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}}$ n'a pas de $\mathbb{Z}_p$-torsion, Y^{G_∞} est nul. On a alors le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to & X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty} & \to & H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty} & \to & Y_{G_\infty} & \to & X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to & H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to 0 \\
& \downarrow\simeq & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow g' & & \downarrow f' & \\
0 \to & \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} & \to & \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} & \to & (\mathbb{Z}_p \cdot P)^* & \to & H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbf{T}^*(1))^* & \to & (\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^* & \to 0
\end{array}$$

D'où $h(f)/h(f') = h(g)/h(g')$. Calculons d'abord $h(g')$. On a la suite exacte ([P92a], 3.1.3)

$$0 \to X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge \\ \to H^1(G_\infty, (V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^{G_{\mathbb{Q}_\infty}})^\wedge \to 0$$

où le dernier groupe est fini de cardinal

$$\#(E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}(p)) = \#(V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^{G_\mathbb{Q}} = \#(V/\mathbf{T})^{G_\mathbb{Q}}.$$

D'autre part, on a le diagramme commutatif dont les lignes et colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & & & \\
& & \downarrow & & & & \\
& & \oplus_{v \in S_f} H^1_f(\mathbb{Q}_v, \mathbf{T})/\mathbb{Z}_p \cdot P + E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} & & & & \\
& & \downarrow & & & & \\
& & H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge & \to & H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbf{T}^*(1))^* & \to & 0 \\
& & \downarrow & & \| & & \\
0 \to & Ш(E)(p) \to & H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge & \to & H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbf{T}^*(1))^* & \to & 0 \\
& & \downarrow & & & & \\
& & 0 & & & &
\end{array}$$

(rappelons qu'ici, $H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, \mathbf{T}^*(1)) = H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbf{T}^*(1))$). On en déduit que

$$h(g')^{-1} \sim \# Ш(E) \cdot (\# E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2} \cdot m(P)$$

en posant $m(P) = \#(\oplus_{v \in S_f} H^1_f(\mathbb{Q}_v, \mathbf{T}))/\mathbb{Z}_p \cdot P)$. Calculons $h(g)$. On a le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to & Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to & Y_{G_\infty} \to 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to & \oplus_{v \in S_f} H^1(\mathbb{Q}_v, \mathbf{T}) & &
\end{array}$$

où la deuxième flèche verticale est injective. Posons $L = H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}$. L'application g est obtenue comme composé

$$Y_{G_\infty} \to \oplus_{v\in S_f} H^1(\mathbb{Q}_v,\mathbf{T})/L \to \oplus_{v\in S_f} H^1(\mathbb{Q}_v,\mathbf{T})/H^1_f(\mathbb{Q}_v,\mathbf{T}) \xrightarrow{\simeq} H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T}^*(1))^* \to (\mathbb{Z}_p\cdot P)^*.$$

Comme le conoyau de $Z^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} \to \oplus_{v\in S_f} H^1(\mathbb{Q}_v,\mathbf{T})$ est de cardinal

$$\prod_{w\in S_f} \#H^1(G_{\infty,w},(V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^{G_{\mathbb{Q}_{\infty,w}}}) = \prod_{v\in S_f-\{p\}} \mathrm{Tam}_v(\mathbf{T})\cdot \#H^1(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T}^*(1))_{\mathrm{tor}},$$

on en déduit que

$$h(g)\sim m(L)^{-1}\cdot n(P)\cdot \prod_{v\in S_f-\{p\}} \mathrm{Tam}_v(\mathbf{T})\cdot \#H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T}^*(1))_{\mathrm{tor}}$$

où $n(P)$ est l'indice de $\mathbb{Z}_p\cdot P$ dans $H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T}^*(1))/\mathrm{tor}$. On remarque que

$$\#H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T}^*(1))_{\mathrm{tor}}\cdot n(P)\sim L_p(V,0)^{-1}\cdot \mathrm{Tam}_p(V,w)\cdot \log^{w'} P$$

et que

$$m(P)\cdot m(L)^{-1}\sim \log^{w'} P/\log^{w'} P(\omega)\cdot \#(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}/\mathbb{Z}_pP(\omega)).$$

D'où,

$$h(f)/h(f')\sim L_p(V,0)^{-1}\cdot \prod_{v\in S_f}\mathrm{Tam}_v(\mathbf{T})\cdot$$
$$\#\text{Ш}(E)\cdot(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2}\cdot(\log^{w'} P)/\log^{w'} P(\omega)\cdot \#(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}/\mathbb{Z}_pP(\omega)).$$

Ce qui termine la démonstration dans le cas où $H^1_f(\mathbb{Q},V)\neq \ker \mathrm{Loc}_{p,V}$.

Supposons que $H^1_f(\mathbb{Q},V)=\ker\mathrm{Loc}_{p,V}$. Rappelons pour mémoire que cela est fort improbable, sauf si $H^1_f(\mathbb{Q},V)=0$. On a

$$r!^{-1}\cdot F^{(r)}(\mathbb{1})\sim h(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty}\to H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty}) = h(f)\cdot h(f')^{-1}\cdot \mathrm{disc}\langle\langle\ \rangle\rangle_{\mathbf{T},\chi}$$

où

$$f: H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty}\to \ker\mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}}$$

et

$$f': H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty}\to (\ker\mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^*.$$

On a alors le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to & X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})^{G_\infty} & \to & H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})^{G_\infty} & \to & Y_{G_\infty} & \to & X^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to & H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T})_{G_\infty} & \to 0\\
& \downarrow\simeq & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow g' & & \downarrow f' & \\
0 \to & \ker\mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} & \to & \ker\mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}} & \to & Z & \to & H^1(G_{S,\mathbb{Q}},\mathbf{T}^*(1))^* & \to & (\ker\mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^* & \to 0
\end{array}$$

si Z est le noyau de $H^1(G_{S,\mathbb{Q}},\mathbf{T}^*(1))^* \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^*$. On a une flèche $g'' : \oplus_{v\in S_f} H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T}) \to Z$ et on montre comme précédemment que

$$h(g')^{-1} \sim \#\,\text{Ш}(\mathbf{T}) \cdot (\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}})^{-2} \cdot h(g'')^{-1}$$

(on utilise la suite exacte

$$0 \to \oplus H^1_f(\mathbb{Q}_v,\mathbf{T})/E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge \\ \to H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge \to 0\ ).$$

L'application g est obtenue comme "composé"

$$Y_{G_\infty} \to \oplus_{v\in S_f} H^1(\mathbb{Q}_v,\mathbf{T})/L \leftarrow \oplus_{v\in S_f} H^1_f(\mathbb{Q}_v,\mathbf{T}) \to Z$$

avec $L = H^1_{\infty,S}(\mathbf{T})_{G_\infty}$. On en déduit que

$$h(g) \sim h(g'') \cdot \prod_{v\in S_f-\{p\}} \mathrm{Tam}_v(\mathbf{T}) \cdot \#H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T}^*(1))_{\mathrm{tor}} \cdot n'(L)$$

où $n'(L)$ est l'indice de L dans $H^1(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T})/H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T})$. On a

$$\#H^1_f(\mathbb{Q}_p,\mathbf{T}^*(1))_{\mathrm{tor}} \cdot n'(L) \sim L_p(V,0)^{-1} \cdot \mathrm{Tam}_p(V,w) \cdot R^w(\omega) \cdot [L : P(\omega)]$$

où $R^w(\omega)\cdot w = R_V(\omega)$. En utilisant la proposition 2.1.4, on en déduit le dernier cas de la proposition.

Remarque. — On a la suite exacte

$$0 \to H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}) \to H^2_{\infty,S}(\mathbf{T}) \to \big(\oplus_{w\in S_f-\{p\}} \big((V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)\big)^{G_{\mathbb{Q}_{\infty,w}}}\big)^\wedge \\ \to \big((V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)\big)^{G_{\mathbb{Q}_\infty}}\big)^\wedge \to 0$$

où le dernier terme est fini. La valeur de la série caractéristique de $\big(\oplus_{w\in S_f-\{p\}} \big((V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)\big)^{G_{\mathbb{Q}_{\infty,w}}}\big)^\wedge$ en $\mathbb{1}$ vaut

$$\det(1-\mathrm{Frob}_w\,\mathbf{T}^*(1)^{I_w}) = L_v(V^*(1),0)^{-1} = L_v(V,0)^{-1}.$$

On en déduit que si $I_{\mathrm{arith},S}$ est un générateur de $\mathbb{I}_{\mathrm{arith},S}$, on a

$$\beta_N((1-\varphi)^{-1}\cdot(1-p^{-1}\varphi^{-1})(I_{\mathrm{arith},S})^{(r)}(\mathbb{1}) \sim \\ \prod_{v\in S_f} L_p(V,0)^{-1}\cdot\#\text{Ш}(E)\cdot\mathrm{Tam}(E,w)\cdot\iota_{V,N}((\det_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}))^{\otimes -2}\otimes x)^{-1}\cdot\widetilde{\beta}_N(w\otimes x).$$

3.4.7. Pour tout entier j, on pose

$$\tau(\mathbf{T}(j)) = (\#(V(j)/\mathbf{T}(j))^{G_{\mathbb{Q}}})\cdot(\#(V^*(1-j)/\mathbf{T}^*(1-j))^{G_{\mathbb{Q}}}).$$

Proposition. — A) *Soit j un entier positif non nul. On suppose que $H^1_f(\mathbb{Q},V(j))$ et $H^1(G_{S,\mathbb{Q}},V^*(1-j))$ sont de dimension 1, que*

$H^1_f(\mathbb{Q}, V(j))$ *est d'image non nulle par* $\log_{V(j)}$, *alors* I_{arith} *ne s'annule pas en* χ^{-j} *et on a*

$$(1 - p^{j-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot (1 - p^{-j} \cdot \varphi)^{-1} \cdot I_{\mathrm{arith}}(\chi^{-j}) \otimes e_{-j} \sim \Gamma^*(-j+1) \cdot \\ L_p(V, -j)^{-1} \cdot \tau(\mathbf{T}(j))^{-1} \cdot \# \text{Ш}(\mathbf{T}^*(1-j)) \cdot \mathrm{Tam}(\mathbf{T}^*(1-j)) \cdot \log_{V(j)}(P)$$

où P *est un générateur de* $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbf{T}(j))$ *modulo torsion.*

B) *Supposons* Réc(V) *vraie. Soit* j *un entier négatif non nul. On suppose que* $H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1-j))$ *et* $H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V(j))$ *sont de dimension 1, que* $H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V(j))$ *est d'image non nulle par* $\lambda_{V(j)}$, *alors* I_{arith} *ne s'annule pas en* χ^{-j} *et on a*

$$(1 - p^{j-1} \cdot \varphi^{-1}) \cdot (1 - p^{-j} \cdot \varphi)^{-1} \cdot I_{\mathrm{arith}}(\chi^{-j}) \otimes e_{-j} \sim \Gamma^*(-j+1) \cdot \\ L_p(V, -j)^{-1} \cdot \tau(\mathbf{T}(j))^{-1} \cdot \# \text{Ш}(\mathbf{T}^*(1-j)) \cdot \mathrm{Tam}(\mathbf{T}^*(1-j)) \cdot \lambda_{V(j)}(P)$$

où P *est un générateur de* $H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V(j))$ *modulo torsion.*

Remarque. — Si Leop(V) est vraie, *pour presque tout entier* j (c'est-à-dire sauf un nombre fini) le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V(j))$ est de dimension 1, le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V(j))$ est nul.

Démonstration. — On choisit ici ω tel que

$$\mathbb{1}(F(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(j))/\Lambda \cdot \omega \otimes \varepsilon^{\otimes j})) \neq 0.$$

La démonstration est semblable à la précédente. Les propositions 2.4.1 et 2.4.2 impliquent que $\mathcal{L}_\omega(\chi^{-j})$ est non nul sous les hypothèses faites. On montre de nouveau que l'injectivité de $H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V(j)) \to H^1(\mathbb{Q}_p, V(j))$ implique que $H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}(j))_{G_\infty}$ est fini (on a aussi

$$H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V(j)) = 0).$$

Ce qui démontre la première assertion.

Supposons $j > 0$ (la démontration pour $j < 0$ est du même style). On a

$$Tw^{-j}(I_{\mathrm{arith}}) = F\big(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}(j))\big) \cdot F(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(j))/\Lambda \cdot \omega \otimes \varepsilon^{\otimes j})^{-1} \cdot Tw^{-j}(\mathcal{L}_\omega).$$

Soit P un générateur de $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbf{T}(j))$ modulo torsion. On a $P(\omega \otimes \varepsilon^{\otimes j}) = m \cdot P$ et $\log_{V(j)} P(\omega \otimes \varepsilon^{\otimes j}) = m \cdot \log_{V(j)} P$. On reprend les notations de 3.4.6. On a

$$F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}(j)))(\mathbb{1}) \sim \#(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}(j))_{G_\infty}) / \#(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}(j))^{G_\infty})$$

et le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}(j))^{G_\infty} & \to & Y(j)_{G_\infty} & \to & X^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(j))_{G_\infty} & \to & H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}(j))_{G_\infty} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to \oplus_{v\in S_f} H^1(\mathbb{Q}_v,\mathbf{T}(j))/\mathbb{Z}_p\cdot P+\mathrm{tor} & \to & H & \longrightarrow & Ш(\mathbf{T}^*(1-j))^\wedge & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

avec $H = H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1-j)/\mathbf{T}^*(1-j))^\wedge$. On en déduit comme en 3.4.6 que

$$\begin{aligned}
&\#(H^1_{\infty,S}(\mathbf{T}(j))_{G_\infty}/\mathbb{Z}_pP(\omega\otimes\varepsilon^{\otimes j}))^{-1}\cdot F(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}(j)))(\mathbb{1})\cdot \\
&(\#Ш(\mathbf{T}^*(1-j)))^{-1} \sim (\#V^*(1-j)/\mathbf{T}^*(1-j))^{G_\mathbb{Q}})^{-1}\cdot m^{-1}\cdot \\
&(\#V(j)/\mathbf{T}(j))^{G_\mathbb{Q}})^{-1}\cdot L_p(V,-j)^{-1}\cdot \prod_{v\in S}\mathrm{Tam}_v(\mathbf{T}(-j))
\end{aligned}$$

(on remarque que

$$\mathrm{Tam}_p(\mathbf{T}(-j)) \sim \#H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1-j)/\mathbf{T}^*(1-j))_{\mathrm{tor}}\cdot L_p(V,-j)\ ).$$

La formule pour $I_{\mathrm{arith}}(\chi^{-j})$ s'en déduit à l'aide de la proposition 2.4.1.

BIBLIOGRAPHIE

[AV75] Y. AMICE et J. VÉLU, Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, Astérisque, Soc. Math. France, Paris, 24–25 (1975), 119–131.

[BP93] D. BERNARDI et B. PERRIN-RIOU, Variante p-adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (le cas supersingulier), C.R. Acad. Sci. Paris, t. 316 (1993).

[BK90] S. BLOCH et K. KATO, L functions and Tamagawa numbers of motives, dans The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Prog. in Math., Birkhaüser, Boston, 86 (1990), 333–400.

[C79] R.F. COLEMAN, Division values in local fields, Invent. Math., 53 (1979), 91–116.

[Bu] Séminaire sur les périodes p-adiques (tenu à Bures en 1988), actes en préparation, Astérisque.

[CM] J. COATES et G. MC CONNELL, Iwasawa theory of modular elliptic curves of analytic rank ≤ 1, (1993).

[FP91] J.-M. FONTAINE et B. PERRIN-RIOU, Autour des conjectures de Bloch et Kato, C.R. Acad. Sci. Paris, 313, série I (1991), I – Cohomologie galoisienne, 189–196, II – Structures motiviques f-closes, III – Le cas général, 421–428.

[FP92] J.-M. FONTAINE et B. PERRIN-RIOU, Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, prépublication Orsay 1992; à paraître dans Proceedings d'une conférence sur les motifs à Seattle (1992), AMS.

[I90] L. ILLUSIE, Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique (d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.), Séminaire Bourbaki 1989–1990, n° 726, Astérisque 189–190.

[MSD74] B. MAZUR et P. SWINNERTON-DYER, Arithmetic of Weil curves, Invent. Math., 25 (1974), 1–61.

[MTT86] B. MAZUR, J. TATE et J. TEITELBAUM, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math., 84 (1986), 1–48.

[Mi86] J.S. MILNE, Arithmetic duality theorems, Perspectives in Mathematics, Academic Press, vol. 1, (1986).

[Ne92] J. NEKOVAR, On p-adic heights, Séminaire de théorie des nombres de Paris 90/91, Birkhaüser.

[P92a] B. PERRIN-RIOU, Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques, Invent. Math., 109 (1992), 137–185.

[P92b] B. PERRIN-RIOU, Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques : cas des variétés abéliennes, Séminaire de théorie des nombres de Paris 90/91, Birkhaüser.

[P92c] B. PERRIN-RIOU, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques : le cas local, C.R. Acad. Sci. Paris, 315, série I (1992), 629–632.

[Pa] B. PERRIN-RIOU, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local (1992), à paraître dans Invent. Math.

[Pb] B. PERRIN-RIOU, Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, en préparation.

[R92] K. RUBIN, p-adic L functions and rational points on elliptic curves with complex multiplication, Invent. Math., 107 (1992), 323–350.

[R] K. RUBIN, Abelian varieties, p-adic heights and derivatives (janvier 1993).

[So87] C. SOULÉ, p-adic K theory of elliptic curves, Duke Math. Journal, 54 (1987), 249–269.

[Ta66] J. TATE, On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Sém. Bourbaki 1965–1966, exposé 306.

[Ta74] J. TATE, The arithmetic of elliptic curves, Invent. Math., 23 (1974), 179–206.

[V76] M.M. VISIK, Non-archimedian measures connected with Dirichlet series, Math. USSR Sbornik, 28 (1976), 216–228.

Manuscrit reçu le 27 octobre 1992,
révisé le 25 mai 1993.

Bernadette PERRIN-RIOU,
Université Pierre et Marie Curie
LMF, UFR 21
Tour 45–46
4, place Jussieu
F–75252 Paris Cedex 05.
e.mail : bpr@ccr.jussieu.fr