ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

B. CANDELPERGHER
JEAN-CLAUDE NOSMAS
FRÉDÉRIC PHAM

Premiers pas en calcul étranger

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 1 (1993), p. 201-224
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_1_201_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 1 (1993), 201–224

PREMIERS PAS EN CALCUL ÉTRANGER

par B. CANDELPERGHER,
J.-C. NOSMAS
et F. PHAM

0. Introduction.

C'est pour comprendre et approfondir l'étude des "développements semi-classiques exacts" (*résurgence de Voros* [V]) que nous avons entrepris il y a six ans d'apprendre la théorie de la résurgence d'Écalle. Nos efforts d'apprentissage nous ont conduits à la rédaction d'un livre [CNP], dans lequel on pourra trouver exposés en détail — et dans le style linéaire traditionnel en mathématiques — les démonstrations que Écalle ne s'est pas donné la peine de rédiger en détail, faute de temps et de goût pour ce genre d'exercice.

Mais tandis que mûrissait notre compréhension, il nous apparaissait que la richesse de la théorie d'Écalle, qui requiert un long apprentissage pour qui veut la maîtriser dans tous ses détails, va de pair avec une beauté et une simplicité qui devraient pouvoir être perceptibles dès les premiers contacts, à condition d'adopter une perspective convenable, laissant délibérément dans l'ombre certains détails et en reléguant d'autres au second plan — comme aime à le faire Écalle lui-même.

C'est un tel souci de "mise en perspective" qui inspire la rédaction de ces "premiers pas..." : premiers pas en *calcul étranger* et non en théorie de la résurgence. De même que la pratique du calcul différentiel usuel ne requiert pas la maîtrise de toutes les finesses de l'analyse infinitésimale, de même nous pensons qu'on peut apprendre à se débrouiller en *calcul*

Mots-clés : Sommation de Borel – Phénomène de Stokes – Méthode du col – Calcul étranger – Résurgence.
Classification A.M.S. : 30E15 – 40G10 – 33C10.

différentiel étranger en ne connaissant de la théorie de la résurgence que les grandes lignes directrices. Cet objectif justifie le style informel de notre exposé, qui reflète l'expérience accumulée dans nos nombreuses “causeries” devant des publics très divers.

Si certains énoncés paraissent miraculeux, tant mieux : ils le sont en effet, dans la mesure où la technique qui sert à les démontrer peut être oubliée par qui veut les utiliser. Cependant le lecteur qu'un souci de compréhension approfondie aura conduit à étudier notre livre pourra constater, à la relecture, que le présent exposé contient, sous une forme dense et précise, l'essentiel des résultats de ce livre. Sous la forme compacte où ils sont présentés ici, ces résultats sont les seuls prérequis nécessaires à la lecture de [DDP], qui résume notre compréhension de la *résurgence de Voros.*

Nous remercions nos auditeurs à Nice, Dijon, Paris, Kyoto, Guanajuato, dont l'intérêt actif a été pour nous une constante source d'encouragement.

Les *fonctions résurgentes* dont il sera question ici sont ce que dans la théorie générale d'Écalle on appelle les *fonctions résurgentes simples* (§ 1) : elles forment une sous-algèbre de $\mathbb{C}[[x^{-1}]]$, munie de dérivations appelées *dérivations étrangères* qui sont indexées par $\omega \in \mathbb{C}^*$, et notées Δ_ω. Pour comprendre la notion de dérivation étrangère il est commode de sortir de l'algèbre des fonctions résurgentes pour travailler dans l'algèbre des *symboles résurgents* (§ 2), combinaisons linéaires d'exponentielles $e^{-x\omega}$ avec pour coefficients des fonctions résurgentes (ω parcourant une partie discrète de $\mathbb{C}$). L'algèbre des symboles résurgents est munie d'automorphismes appelés *automorphismes de passage* (§ 3), définis en comparant les *sommations de Borel latérales* dans les différentes directions du plan complexe. Les logarithmes des automorphismes de passage définissent les *dérivations étrangères*, outils de base du *calcul différentiel étranger* (§ 4). Enfin les §§ 5 et 5′ proposent une lecture résurgente des *phénomènes de Stokes*, plus proche de l'idée originelle de Stokes que la lecture des “analystes modernes”.

1. Fonctions résurgentes simples.

1.0. *L'exemple d'Euler.*

Pour résoudre l'équation d'Euler $\varphi' + \varphi = \dfrac{1}{x}$, on peut essayer un développement en puissances inverses de x. Mais la série ainsi obtenue

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,!}{x^{n+1}} \tag{0}$$

est divergente.

Essayons de résoudre l'équation par une intégrale de Laplace :

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x\xi} \boldsymbol{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ devra vérifier l'équation (transformée de Laplace de celle d'Euler)

$$(-\xi + 1)\boldsymbol{\varphi} = 1,$$

d'où l'on tire $\boldsymbol{\varphi} = 1/(1-\xi)$.

Remarquons que la série de Taylor de $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$, à savoir $1 + \xi + \xi^2 + \cdots$, se déduit formellement de (0) par la substitution formelle

$$\frac{1}{x^{n+1}} \longmapsto \frac{\xi^n}{n\,!}$$

(appelée *transformation de Borel*).

1.1. *L'algèbre des fonctions résurgentes simples.*

Commençons par énoncer quelques définitions.

(i) *Séries de classe Gevrey 1.* — On appelle ainsi une série formelle

$$\varphi = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots \in \mathbb{C}[[x^{-1}]]$$

telle que $a_n/n\,!$ soit majorée par une suite géométrique.

(ii) *Mineur d'une série de classe Gevrey 1.* — C'est le germe de fonction analytique $\boldsymbol{\varphi}$ déduit de φ par les opérations suivantes :

$$\begin{gathered}
\varphi = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots \in \mathbb{C}[[x^{-1}]] \\
\downarrow \\
\textit{oubli du terme constant} \\
\downarrow \\
\textit{transformation de Borel} \\
\downarrow \\
\boldsymbol{\varphi}(\xi) = \quad a_1 + a_2 \frac{\xi}{1!} + a_3 \frac{\xi^2}{2!} + \cdots \in \mathbb{C}\{\xi\}.
\end{gathered}$$

(iii) *Prolongeabilité sans fin.* — Un germe $\boldsymbol{\varphi}$ est dit *se prolonger sans fin sur* $\mathbb{C}$ si pour tout $L > 0$, il existe un ensemble fini $\Omega_L \subset \mathbb{C}$ tel que $\boldsymbol{\varphi}$ se prolonge analytiquement le long de tout chemin λ de longueur $< L$ qui évite Ω_L ; intuitivement, cela signifie que les singularités de la fonction "prolongement analytique multiforme de $\boldsymbol{\varphi}$" sont "isolées" sur sa surface de Riemann (ce qui ne les empêche pas d'éventuellement s'accumuler en projection sur $\mathbb{C}$).

Cette définition du prolongement sans fin est un peu plus restrictive que celle de [CNP], mais elle lui est équivalente dans le cas des singularités simples (déf. (iv) ci-après) ; dans le cas général toutes les démonstrations de [CNP] restent valides avec cette définition simplifiée. Écalle, quant à lui, travaille avec une définition un peu moins restrictive que celle de [CNP], qu'il appelle *prolongeabilité sans coupure.*

(iv) *Singularités simples.* — Un germe à prolongement sans fin est dit n'avoir que des *singularités simples* si pour tout chemin λ comme ci-dessus aboutissant à un point singulier ω, le prolongement de $\boldsymbol{\varphi}$ au voisinage de ω est localement de la forme

$$(\lambda\boldsymbol{\varphi})(\xi) = \frac{a_\lambda}{2\pi i(\xi - \omega)} + \boldsymbol{\varphi}_\lambda(\xi - \omega)\frac{\operatorname{Log}(\xi - \omega)}{2\pi i} + \text{fct. hol.},$$

où a_λ est une constante et $\boldsymbol{\varphi}_\lambda$ un germe de fonction holomorphe.

Définition. — *On appelle* fonction résurgente simple *une série de classe Gevrey* 1 *dont le mineur est à prolongement sans fin avec seulement des singularités simples.*

Théorème. — *Les fonctions résurgentes simples forment une sous-algèbre de* $\mathbb{C}[[x^{-1}]]$, *ici notée* $\mathcal{R}$.

1.2. *Petites fonctions résurgentes.*

La donnée d'une fonction résurgente simple φ équivaut à la donnée de son mineur $\boldsymbol{\varphi}$ et du coefficient a_0, que nous appellerons son *coefficient résiduel.* Si le coefficient résiduel est nul nous dirons que φ est une *petite* fonction résurgente. Une petite fonction résurgente est donc entièrement déterminée par son mineur $\boldsymbol{\varphi}$, et nous la noterons ${}^\flat\boldsymbol{\varphi}$, le "bémol" $\flat$ désignant ainsi la transformation de Borel inverse.

THÉORÈME. — *En substituant une petite fonction résurgente* ${}^\flat\boldsymbol{\varphi}$ *à l'indéterminée* u *d'une série convergente* $f \in \mathbb{C}\{u\}$, *on obtient une fonction résurgente* $f({}^\flat\boldsymbol{\varphi})$.

Ainsi par exemple $\exp{}^\flat\boldsymbol{\varphi}$, $\mathrm{Log}(1 + {}^\flat\boldsymbol{\varphi})$, $(1 - {}^\flat\boldsymbol{\varphi})^{-1}$ sont des fonctions résurgentes. Il en résulte notamment que *les éléments inversibles de l'algèbre des fonctions résurgentes simples sont ceux dont le coefficient résiduel est* $\neq 0$ (autrement dit ceux qui sont inversibles dans $\mathbb{C}[[x^{-1}]]$).

1.3. *(Pré)sommations de Borel latérales.*

Soit α une direction du plan des ξ. Les (pré)sommations de Borel latérales de directions α, que nous noterons $s_{\alpha+}$ et $s_{\alpha-}$, sont définies par les formules

$$(s_{\alpha\pm}\varphi)(x) = a_0 + \int_{0\alpha\pm} \mathrm{e}^{-x\xi}\,\boldsymbol{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

où a_0 est le coefficient résiduel et $\boldsymbol{\varphi}$ le mineur de φ; $0\alpha+$ (resp. $0\alpha-$) désigne le chemin sans fin d'origine 0 longeant la demi-droite 0α en évitant les singularités de $\boldsymbol{\varphi}$ du côté $\operatorname{Arg}\xi > \operatorname{Arg}\alpha$ (resp. $\operatorname{Arg}\xi < \operatorname{Arg}\alpha$) (cf. figure 1).

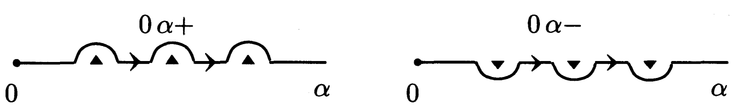


Figure 1.

Si $\boldsymbol{\varphi}$ est à croissance au plus exponentielle à l'infini, de type exponentiel τ (c'est-à-dire majorée en module par $c\,\mathrm{e}^{\tau'|\xi|}$ pour tout $\tau' > \tau$) l'intégrale ci-dessus converge et définit une fonction analytique de x dans le demi-plan $\mathrm{Re}(x\,\mathrm{e}^{i\operatorname{Arg}\alpha}) > \tau$. On peut dans ce cas parler de *sommation* de Borel latérale, et définir ainsi une algèbre de *fonctions résurgentes sommables*, que $s_{\alpha+}$ et $s_{\alpha-}$ envoient homomorphiquement dans l'algèbre des fonctions de x (analytiques dans des voisinages sectoriels de l'infini de la forme indiquée ci-dessus).

Dans le cas général le membre de droite de la formule ci-dessus ne peut être défini (au prix d'une construction nullement évidente) que *modulo les fonctions exponentiellement évanescentes*, c'est-à-dire les fonctions de type exponentiel $\tau = -\infty$. Les applications $s_{\alpha+}$ et $s_{\alpha-}$ définissent ainsi des homomorphismes dits de *présommation*, de l'algèbre des fonctions résurgentes dans l'algèbre quotient $\mathcal{E}^0(\perp\alpha^*)/\mathcal{E}^{-\infty}(\perp\alpha^*)$, où $(\mathcal{E}^\tau(\perp\alpha^*))_{\tau\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}}$ désigne l'algèbre (filtrée par le "type exponentiel τ") des germes à l'infini de fonctions analytiques de type exponentiel dans des demi-plans $\mathrm{Re}(x\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Arg}\,\alpha}) \gg 0$.

(Pré)sommation de Borel dans une direction non singulière. — Dans le cas où le mineur $\boldsymbol{\varphi}$ n'a aucune singularité le long de 0α, on écrit $s_\alpha\varphi := s_{\alpha+}\varphi = s_{\alpha-}\varphi$: c'est la *(pré)somme de Borel de φ dans la direction α.*

Exemple. — La série (0) d'Euler est une petite fonction résurgente, de mineur $\boldsymbol{\varphi}(\xi) = 1/(1-\xi)$. Cette fonction résurgente est évidemment sommable, mais la singularité du mineur en $\xi = 1$ crée une obstruction à la sommabilité de Borel dans la direction réelle positive. En notant $\alpha = (0)$ cette direction, on a d'après le théorème des résidus :

$$s_{(0)+}\varphi - s_{(0)-}\varphi = 2\pi i\,\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Symboles résurgents.

2.1. Un *symbole résurgent élémentaire* est un objet formel, produit d'une fonction résurgente par une exponentielle :

$$\dot{\varphi}^\omega = \varphi\,\mathrm{e}^{-x\omega} \qquad (\varphi = \text{ fonction résurgente}).$$

Le point $\omega \in \mathbb{C}$ est le *support* du symbole.

On appellera *mineur* de $\dot{\varphi}^\omega$ le germe en ω déduit du mineur de φ par translation :

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}^\omega(\xi) := \boldsymbol{\varphi}(\xi - \omega).$$

La donnée d'un symbole résurgent élémentaire (simple) équivaut donc à la donnée de son mineur et du coefficient résiduel a_0.

Convention. — Nous identifierons désormais les fonctions résurgentes aux symboles résurgents élémentaires de support 0.

Symboles élémentaires vus comme singularités. — Soit $\boldsymbol{\Phi}$ une fonction analytique à prolongement sans fin, ou plus exactement une *détermination d'une telle fonction au voisinage d'un point* ω ; le point ω pourra être singulier, ce qui fait que la notion de *détermination au voisinage de* ω requiert quelques précautions oratoires : de même qu'un *germe en* ω *de fonction analytique* est une fonction analytique dans un disque de centre ω dont on omet de préciser le rayon, on appellera *germe sectoriel en* ω une fonction analytique dans un *voisinage sectoriel* de ω de direction angulaire fixée mais dont on omet de préciser la taille (disons, un disque fendu selon une direction α fixée, le rayon du disque n'étant pas précisé). Par *singularité* en ω d'un germe sectoriel $\boldsymbol{\Phi}$ nous entendons sa classe modulo $\mathbb{C}\{\xi-\omega\}$, notée $\operatorname{sing}^{\omega} \boldsymbol{\Phi}$. Si $\boldsymbol{\Phi}$ est localement de la forme

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi)=\frac{a_0}{2\pi i(\xi-\omega)}+\boldsymbol{\varphi}(\xi-\omega)\frac{\operatorname{Log}(\xi-\omega)}{2\pi i}+\text{fct. hol.},$$

la donnée de $\operatorname{sing}^{\omega} \boldsymbol{\Phi}$ équivaut évidemment à la donnée de a_0 ($=2\pi i$ fois le résidu en ω de la partie polaire de $\boldsymbol{\Phi}$) et de $\boldsymbol{\varphi}(\xi-\omega)=\boldsymbol{\Phi}^{\omega}_{+}(\xi)-\boldsymbol{\Phi}^{\omega}_{-}(\xi)$ (différence des prolongements analytiques de $\boldsymbol{\Phi}$ par la droite et par la gauche : cf. figure 2). Supposant que $\boldsymbol{\Phi}$ est à prolongement sans fin, on peut ainsi convenir d'identifier $\operatorname{sing}^{\omega} \boldsymbol{\Phi}$ au symbole résurgent élémentaire de coefficient résiduel $a_0=\operatorname{res}^{\omega} \boldsymbol{\Phi}$ et de mineur $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\omega}(\xi)=\boldsymbol{\Phi}^{\omega}_{+}(\xi)-\boldsymbol{\Phi}^{\omega}_{-}(\xi)$.

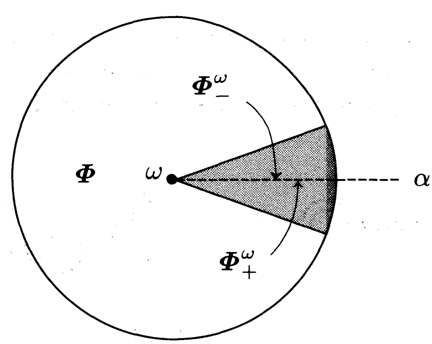


Figure 2. Comment un majeur $\boldsymbol{\Phi}$ *détermine le mineur* $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\omega}=\boldsymbol{\Phi}^{\omega}_{+}-\boldsymbol{\Phi}^{\omega}_{-}$.

Tout symbole résurgent élémentaire $\dot{\varphi}^{\omega}$ *peut ainsi être considéré comme la singularité en* ω *d'un germe sectoriel* $\boldsymbol{\Phi}$*, appelé* majeur *de* $\dot{\varphi}^{\omega}$.

Cette remarque fournit l'idée de départ de la notion générale de fonction résurgente : une fonction résurgente (resp. un symbole résurgent élémentaire de support ω) peut être défini(e) comme la singularité en 0 (resp. en ω) d'un germe sectoriel $\boldsymbol{\Phi}$ à prolongement sans fin (sans hypothèse sur la nature de la singularité).

Par exemple la fonction $\varphi(x) = x^{\nu}$ (avec $\nu \in \mathbb{C}$) pourra être définie comme la singularité en $\xi = 0$ du majeur

$$\boldsymbol{\Phi}_{\nu}(\xi) = \begin{cases} \xi^{-\nu-1}/2\pi i\,\Gamma(-\nu) & \text{si } -\nu \notin \mathbb{N}^*, \\ \xi^{n-1}\operatorname{Log}\xi/2\pi i(n-1)\,! & \text{si } -\nu = n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Remarquons que l'opération de multiplication par x peut se traduire *dans tous les cas* sur les majeurs par l'opération de dérivation $\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$.

Nous ne développerons pas davantage ici ce point de vue plus général.

(Pré)sommations des symboles résurgents élémentaires. — Elles sont définies de façon évidente par :

$$\dot{s}_{\alpha\pm}(\varphi\,\mathrm{e}^{-x\omega}) = (s_{\alpha\pm}\varphi)\,\mathrm{e}^{-x\omega}.$$

Il est instructif d'en écrire aussi des représentations intégrales

$$(\dot{s}_{\alpha\pm}\dot{\varphi}^{\omega})(x) = a_0\,\mathrm{e}^{-x\omega} + \int_{\omega\alpha\pm} \mathrm{e}^{-x\xi}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\omega}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.1}$$

$$= \int_{C_{\omega\alpha\pm}} \mathrm{e}^{-x\xi}\,\boldsymbol{\Phi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.1'}$$

La première formule est une réécriture de celle du § 1. La seconde, plus générale et plus compacte, fait intervenir un *majeur* $\boldsymbol{\Phi}$ de $\dot{\varphi}^{\omega}$ (les chemins d'intégration $C_{\omega\alpha\pm}$ sont représentés sur la figure 3).

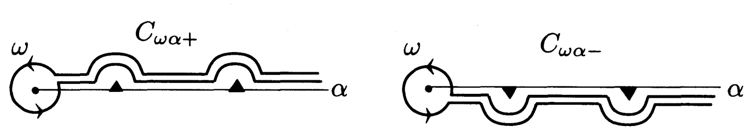


Figure 3.

2.2. Un *symbole résurgent* est une somme de symboles résurgents élémentaires

$$\dot{\varphi} = \sum_{\omega} \dot{\varphi}^{\omega}.$$

La somme pourra éventuellement être infinie mais sera toujours *discrète*, c'est-à-dire que les ω parcourront un ensemble discret $\Omega \subset \mathbb{C}$ (le *support* de $\dot{\varphi}$), astreint de plus à être contenu dans un secteur angulaire (affine) d'ouverture $< \pi$. Plus précisément, on dira que $\dot{\varphi}$ est un *symbole résurgent dans la codirection* α (où α désigne une direction de $\mathbb{C}$) si son support $\Omega(\dot{\varphi})$ est contenu dans une intersection de demi-plans affines dont les directions bissectrices parcourent un voisinage A de α (on dira alors, plus précisément, que $\dot{\varphi}$ est un *symbole résurgent dans la codirection* A).

Cette condition garantit que parmi toutes les familles finies

$$(\omega_i \in \Omega(\dot{\varphi})),$$

seules un nombre fini ont une somme $\sum \omega_i$ qui reste dans un compact de $\mathbb{C}$ fixé à l'avance. Le produit de deux symboles résurgents de même codirection est ainsi défini de façon évidente, de sorte que l'ensemble des symboles résurgents dans la codirection α (resp. A) forme une algèbre que nous noterons $\dot{\mathcal{R}}_\alpha$ (resp. $\dot{\mathcal{R}}(A)$) : nous avons ainsi défini sur le cercle un faisceau d'algèbres $\dot{\mathcal{R}}$, dont $\dot{\mathcal{R}}_\alpha$ est la fibre en α.

Exemple : inversion des symboles résurgents à support fini. — Un symbole résurgent à support fini appartient à $\dot{\mathcal{R}}_\alpha$ pour tout α. Posons nous la question d'inverser un tel symbole, par exemple le symbole $1 - \mathrm{e}^{-\omega x}$ ($\omega \neq 0$). Notons α_0 la direction de ω. Dans le demi-cercle $\perp\alpha_0$ des directions α formant un angle aigu avec α_0 la réponse est donnée par :

$$(1 - \mathrm{e}^{-\omega x})^{-1} = 1 + \mathrm{e}^{-\omega x} + \mathrm{e}^{-2\omega x} + \cdots$$

Par contre, dans le demi-cercle opposé la réponse est donnée par :

$$(1 - \mathrm{e}^{-\omega x})^{-1} = -\,\mathrm{e}^{\omega x}(1 - \mathrm{e}^{\omega x})^{-1} = -\,\mathrm{e}^{\omega x}(1 + \mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{2\omega x} + \cdots).$$

Enfin, dans les directions α orthogonales à α_0, $1 - \mathrm{e}^{-\omega x}$ n'est pas inversible.

(Pré)sommations des symboles résurgents. — Soit

$$\dot{\varphi} = \sum_\omega \dot{\varphi}^\omega = \sum_\omega \varphi_\omega \,\mathrm{e}^{-x\omega}$$

un symbole résurgent dans la codirection A et soit $\alpha \in A$. Pour x grand, d'argument $\operatorname{Arg} x \in A^*$ (complexe conjugué de A), on définira :

$$(\dot{s}_{\alpha\pm}\dot{\varphi})(x) = \sum_\omega (\dot{s}_{\alpha\pm}\dot{\varphi}_\omega)(x) = \sum_\omega (s_{\alpha\pm}\varphi_\omega)(x)\,\mathrm{e}^{-x\omega}.$$

La condition sur $\operatorname{Arg} x$ assure que les parties réelles des exposants $-x\omega$ (pour $\omega \in \Omega(\dot{\boldsymbol{\varphi}})$) forment une famille discrète bornée supérieurement. En fait on peut montrer que cette condition implique la convergence de la série "modulo les fonctions exponentiellement évanescentes". Elle impliquera la convergence tout court sur une sous-algèbre convenable de $\dot{\mathcal{R}}(A)$ (algèbre de *symboles résurgents sommables*).

2.3. *Fonctions résurgentes étendues.*

Cette terminologie, proposée dans [CNP], désigne les fonctions (ou classes d'évanescence exponentielle) obtenues par présommation de symboles résurgents (en fait [CNP] en donne une définition directe). Elles forment un faisceau d'algèbres sur le cercle, que nous notons $\hat{\dot{\mathcal{R}}}$. Pour tout $a \in A$ (arc de cercle) on a des isomorphismes

$$\dot{\sigma}_{\alpha+} : \hat{\dot{\mathcal{R}}}(A) \longrightarrow \dot{\mathcal{R}}(A) \quad \left(\text{resp. } \dot{\sigma}_{\alpha-} : \hat{\dot{\mathcal{R}}}(A) \longrightarrow \dot{\mathcal{R}}(A)\right)$$

(symbole latéral *droit* (resp. *gauche*)) inverses des présommations latérales $\dot{s}_{\alpha+}$ et $\dot{s}_{\alpha-}$.

Une fonction résurgente étendue est dite *pure à droite* (resp. *à gauche*) dans la direction α si son symbole latéral droit (resp. gauche) dans la direction α est un symbole élémentaire.

3. Automorphismes de passages.

Soit A un arc du cercle des directions du plan, et $\alpha \in A$.

3.0. Proposition. — *Il existe un unique automorphisme $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$ de $\dot{\mathcal{R}}(A)$, appelé automorphisme de passage de la direction α, tel que :*

$$\dot{s}_{\alpha+}\underline{\mathfrak{S}}_\alpha = \dot{s}_{\alpha-}.$$

Cet automorphisme peut être défini ainsi, par son action sur un symbole résurgent élémentaire

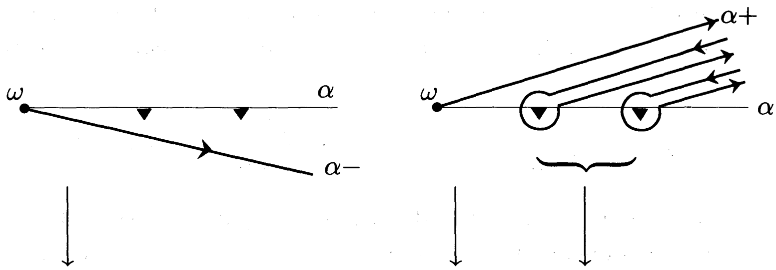
$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{\varphi}^\omega = \dot{\varphi}^\omega + \underline{S}_{\alpha+}\dot{\varphi}^\omega$$

où $\underline{S}_{\alpha+}\dot{\varphi}^\omega$ est le symbole dont les composantes élémentaires sont définies par les *singularités*, le long de $\omega\alpha$, des prolongements par la droite de $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^\omega$.

De même l'inverse $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha^{-1}$ est défini par

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha^{-1} \dot{\varphi}^\omega = \dot{\varphi}^\omega - \underline{S}_{\alpha-}\dot{\varphi}^\omega$$

où $\underline{S}_{\alpha-}\dot{\varphi}^\omega$ désigne cette fois la somme des singularités des prolongements analytiques *par la gauche* de $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^\omega$.



$$\dot{s}_{\alpha-}\dot{\varphi}^\omega \quad = \quad \dot{s}_{\alpha+}(\dot{\varphi}^\omega \; + \; \dot{\underline{S}}_{\alpha+}\dot{\varphi}^\omega)$$

Figure 4.

Idée de la démonstration. — En utilisant le théorème de Cauchy, déformer le contour d'intégration pour le pousser à travers la "coupure" $\omega\alpha$ (cf. figure 4), et interpréter les intégrales de contour comme des sommations latérales en utilisant les formules (2.1), (2.1').

3.1. *Constantes de résurgence.*

Une *constante de résurgence* (dans la direction A) est un symbole vérifiant $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha\dot{\varphi} = \dot{\varphi}$ pour tout $\alpha \in A$ (on omet la mention "dans la direction..." si la propriété est vraie dans toutes les directions). D'après la définition de $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$ cela revient à dire que les mineurs $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^\omega$ n'ont pas de singularités dans les directions considérées.

Pour une fonction résurgente simple les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) φ est une série *convergente* (i.e. $\varphi \in \mathbb{C}\{x^{-1}\}$) ;

(ii) φ est une constante de résurgence *sommable.*

3.2. *Exemple d'équation de résurgence.*

Soit $\varphi = 1 + {}^b\boldsymbol{\varphi}$ une fonction résurgente simple, de coefficient résiduel 1, vérifiant "l'équation de résurgence"

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha\varphi = (1 + \mathrm{e}^{-x\omega})\varphi \qquad (\omega \in]\,0\,\alpha).$$

Un exemple d'une telle fonction sera construit au § 4.4. Pour le moment nous nous proposons d'expliciter la signification de l'équation en question. Le fait que le membre de droite ne contienne qu'une seule exponentielle $\mathrm{e}^{-x\omega}$ signifie que le mineur $\boldsymbol{\varphi}$ de φ, prolongé analytiquement en longeant 0α *par la droite*, a le point ω pour seule singularité. Le fait que le coefficient de l'exponentielle soit φ signifie que la singularité du mineur en ω "reproduit, à translation près", celle donnée par φ en 0 : plus précisément, au voisinage de ω,

$$\boldsymbol{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2\pi i(\xi - \omega)} + \boldsymbol{\varphi}(\xi - \omega)\frac{\operatorname{Log}(\xi - \omega)}{2\pi i} + \text{fct. hol.}$$

Autrement dit la singularité donnée en 0 par φ "resurgit" comme singularité du mineur en ω, et c'est ce type de propriété qui motive la terminologie "fonctions résurgentes" d'Écalle. Remarquons qu'elle donne des informations très riches sur la structure de la surface de Riemann de $\boldsymbol{\varphi}$: de la relation $\boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{+}(\xi) - \boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{-}(\xi) = \boldsymbol{\varphi}(\xi - \omega)$, et du fait que $\boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{+}$ se prolonge analytiquement sans singularités le long de $]\,\omega\,\alpha$, on déduit (cf. fig. 5) que $\boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{-}$ est singulière en 2ω, et que son prolongement analytique $\boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{-+}$ n'a aucune singularité au delà de 2ω ; de même, $\boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{--}$ est singulière en 3ω, et son prolongement analytique $\boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{--+}$ n'a aucune singularité au delà de 3ω ; etc. par récurrence.

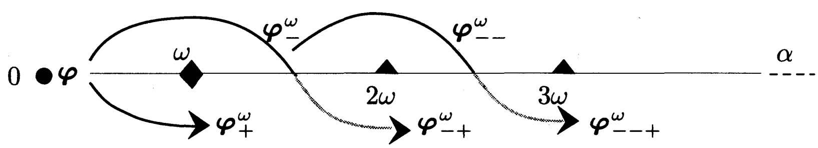


Figure 5.

On remarquera aussi que la formule

$$\underline{\mathfrak{S}}^{-1}\varphi = (1 + \mathrm{e}^{-x\omega})^{-1}\varphi$$

permet de retrouver les singularités (en $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$) des prolongements analytiques *par la gauche* ($\boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{-}, \boldsymbol{\varphi}^{\omega}_{--}, \ldots$), singularités données par :

$$\underline{S}_{\alpha-}\varphi = (\,\mathrm{e}^{-x\omega} - \mathrm{e}^{-2x\omega} + \mathrm{e}^{-3x\omega} - \cdots)\varphi.$$

3.3. *Remarque.*

Les applications $\underline{S}_{\alpha+}$ et $\underline{S}_{\alpha-}$ commutent avec la multiplication par les exponentielles, et peuvent donc être décomposées en *composantes homogènes*

$$\underline{S}_{\alpha\pm} = \sum_{\omega\in]\,0\,\alpha} \dot{S}_{\omega\pm} \quad , \qquad \dot{S}_{\omega\pm} = \mathrm{e}^{-x\omega} S_{\omega\pm},$$

où $\dot{S}_{\omega\pm}$ est *homogène de degré* ω, c'est-à-dire transforme un symbole élémentaire de support ω' en symbole élémentaire de support $\omega' + \omega$ ($S_{\omega\pm}$, quant à lui, est donc homogène de degré zéro). Le fait que $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha = \mathbf{1} + \underline{S}_{\alpha+}$ est un homomorphisme se traduit par la propriété suivante des $\dot{S}_{\omega+}$:

$$\dot{S}_{\omega+}(\varphi\psi) = \sum_{\omega'+\omega''=\omega} (\dot{S}_{\omega'+}\varphi)(\dot{S}_{\omega''+}\psi)$$

où la somme porte sur les $\omega', \omega'' \in 0\alpha$, 0 compris, avec la convention $\dot{S}_{0+} = \mathbf{1}$ (et de même pour les $\dot{S}_{\omega-}$).

4. Calcul différentiel étranger.

4.1. Reprenons la définition de l'automorphisme de passage :

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha = \mathbf{1} + \underline{S}_{\alpha+}.$$

La dérivation étrangère directionnelle $\underline{\Delta}_\alpha$ est la dérivation de l'algèbre $\dot{\mathcal{R}}(A)$ définie par :

$$\underline{\Delta}_\alpha = \operatorname{Log} \underline{\mathfrak{S}}_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\underline{S}_{\alpha+})^n.$$

Commentaire. — Comme $\underline{S}_{\alpha+}$ est défini comme un opérateur de prise de singularité du *mineur*, ses itérés $(\underline{S}_{\alpha+})^n$ font apparaître des singularités dans des feuillets de plus en plus lointains, appelées *singularités entrevues* du mineur de départ.

Définition. — *Soit $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^\omega$ un germe en ω de fonction à prolongement sans fin. Il existe un sous-ensemble discret $\Omega \subset\,]\omega a$ tel que le prolongement analytique de $\dot{\varphi}^\omega$ soit possible le long de tout chemin longeant $\omega\alpha$ en évitant chacun des points de Ω par la droite ou par la gauche, indifféremment (mais sans retour en arrière). Le plus petit de ces ensembles Ω est l'ensemble $\Omega_\alpha(\dot{\boldsymbol{\varphi}}^\omega)$ des points "singuliers entrevus" (de $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^\omega$) dans la direction α. Celui de ces points qui est le plus proche de ω est appelé* point singulier vu *dans la direction α.*

Lemme (conséquence évidente du commentaire ci-dessus). — *Le support du symbole $(\underline{S}_{\alpha+})^n\dot{\varphi}^\omega$ est inclus dans $\Omega = \Omega_\alpha(\dot{\boldsymbol{\varphi}}^\omega)$, et même dans $\Omega(n) =$ ensemble Ω privé de ses $(n-1)$ premiers éléments.*

COROLLAIRE. — *La somme infinie d'opérateurs $(\underline{S}_{\alpha+})^n$, dans la formule de définition de $\underline{\Delta}_\alpha$, a bien un sens, définissant une application linéaire de l'algèbre $\dot{\mathcal{R}}(A)$ dans elle-même.*

Le fait que cette application linéaire soit une *dérivation* est un sorite algébrique général (le logarithme d'un automorphisme est une dérivation : cf. [CNP] pour les détails).

4.2. De même qu'on a décomposé $\underline{S}_{\alpha+}$ en composantes homogènes (cf. 3.3), on peut décomposer $\underline{\Delta}_\alpha$:

$$\underline{\Delta}_\alpha = \sum_{\omega \in]\,0\,\alpha} \dot{\Delta}_\omega, \quad \dot{\Delta}_\omega = \mathrm{e}^{-x\omega} \Delta_\omega.$$

Les Δ_ω (où $\omega \in \mathbb{C}$) sont des dérivations de l'algèbre $\mathcal{R}$, les *dérivations étrangères.* De la formule de définition de $\underline{\Delta}_\alpha$ on déduit par décomposition en composantes homogènes :

$$\dot{\Delta}_\omega = \sum_{\substack{\omega_i \in]\,0\,\alpha \\ \omega_1 + \cdots + \omega_n = \omega}} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\dot{S}_{\omega_1+}) \cdots (\dot{S}_{\omega_n+}).$$

4.3. *Exemple (généralisant 3.2).*

Soit φ une fonction résurgente vérifiant "l'équation de résurgence"

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \varphi = (1 + a\,\mathrm{e}^{-x\omega})\varphi, \qquad \omega \in]\,0\,\alpha,$$

où a est une constante de résurgence dans la direction α : autrement dit,

$$\underline{S}_{\alpha+}\varphi = a\,\mathrm{e}^{-\omega}\varphi \quad \text{et} \quad \underline{S}_{\alpha+} a = 0.$$

De ces deux équations on tire, compte tenu de la remarque 3.3,

$$(\underline{S}_{\alpha+})^n \varphi = (a\,\mathrm{e}^{-x\omega})^n \varphi,$$

donc

$$\Delta_{n\omega}\varphi = \frac{(-1)^{n-1}}{n} a^n \varphi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

4.4. *Exemple de résolution d'équations de résurgence.*

Commençons par résoudre le système d'équations de résurgence

$$(\Delta_\omega \varphi = b_\omega)_{\omega \in \mathbb{C}},$$

où $(b_\omega)_{\omega\in\mathbb{C}}$ est une famille de constantes qui ne diffèrent de 0 que pour un ensemble discret de valeurs de ω. La solution générale de ce système (dans l'algèbre des fonctions résurgentes simples) est

$$\varphi = c + {}^\flat\boldsymbol{\varphi}$$

où $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction méromorphe à pôles simples aux points ω, avec les b_ω comme résidus.

Considérons maintenant un exemple plus intéressant : le *coefficient de Voros de l'oscillateur harmonique* (coefficient a_λ de [DDP], dans le cas du polynôme $W(q) = q^2 + 1$) est une fonction résurgente sommable $a \in \mathbb{C}[[x^{-1}]]$, de coefficient résiduel 1, qui vérifie les équations de résurgence [DDP], th. 3.1 :

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathfrak{S}}_{i\infty} a = (1 + \mathrm{e}^{-i\pi x})a,\\
&\underline{\mathfrak{S}}_{-i\infty} a = (1 + \mathrm{e}^{i\pi x})^{-1}a, \quad \text{et}\\
&\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha} a = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \notin i\infty, -i\infty.
\end{aligned}$$

Ce sont des équations du type 4.3, dont les deux premières peuvent encore s'écrire

$$\exp(\underline{\Delta}_{i\infty})a = (1 + \mathrm{e}^{-i\pi x})a, \quad \exp(-\underline{\Delta}_{-i\infty})a = (1 + \mathrm{e}^{i\pi x})a,$$

ce qui se traduit en termes de dérivées étrangères par :

$$\begin{cases}
\Delta_{ni\pi} a = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} a, & \text{pour } n \in \mathbb{Z}^* \text{ (entiers positifs ou } \textit{négatifs}\text{)},\\
\Delta_\omega a = 0 & \text{pour } \omega \notin i\pi\mathbb{Z}^*.
\end{cases}$$

Ces équations différentielles étrangères (linéaires homogènes) se résolvent simplement par le changement de fonction inconnue $\varphi = \operatorname{Log} a$ (a est de la forme $1 + {}^\flat\mathbf{a}$ et admet donc un logarithme). On trouve ainsi que la (petite) fonction résurgente φ doit vérifier les équations :

$$\begin{cases}
\Delta_{ni\pi}\varphi = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z}^*,\\
\Delta_\omega \varphi = 0 & \text{si} \quad \omega \notin i\pi\mathbb{Z}^*.
\end{cases}$$

Une solution évidente est $\varphi = {}^\flat\boldsymbol{\varphi}$, où

$$\boldsymbol{\varphi}(\xi) = \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n(\xi - ni\pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\xi^2 + n^2\pi^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi \operatorname{sh}\xi}\Big)$$

d'où l'on déduit $a = \mathrm{e}^{{}^\flat\boldsymbol{\varphi}}$.

Plus généralement, on pourrait rajouter à $\boldsymbol{\varphi}$ une fonction entière de ξ, ce qui reviendrait à multiplier a par une “constante de résurgence sommable”, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{C}\{x^{-1}\}$; mais il se trouve que — dans le problème de Voros — c'est la solution la plus simple qui est la bonne : on le vérifie en calculant la somme de Borel de a dans la direction réelle positive, que l'on sait devoir coïncider avec la “fonction de Jost”, fonction connue explicitement dans le cas de l'oscillateur harmonique. On a, en désignant par s la sommation de Borel dans la direction réelle positive

$$sa = \mathrm{e}^{s^\flat \boldsymbol{\varphi}},$$

où

$$(s^\flat \boldsymbol{\varphi})(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\xi}\Big(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi \operatorname{sh}\xi}\Big)\,\mathrm{d}\xi.$$

L'intégrale se calcule explicitement (cf. [V], § 7) et permet de retrouver la formule

$$(sa)(x) = \frac{(x/2\,\mathrm{e})^{x/2}\sqrt{2\pi}}{\Gamma\big((1+x)/2\big)}$$

qui coïncide avec l'expression connue de la fonction de Jost de l'oscillateur harmonique.

Remarque. — A aucun endroit du calcul (et c'est un trait général de la théorie d'Écalle) nous n'avons travaillé *explicitement* sur les séries formelles en x^{-1} : les objets sur lesquels on travaille sont les *équations de résurgence* et les *mineurs.*

Bien entendu, seules des équations de résurgence très simples peuvent être résolues aussi explicitement que celles du présent exemple : la situation à cet égard est analogue à celle des équations différentielles ordinaires, dont les solutions doivent en général être considérés comme des objets *implicites.*

4.5. *Monômes de résurgence.*

De même qu'on résout des équations différentielles ordinaires par des développements en séries entières, on peut résoudre les équations différentielles étrangères par des développements en séries de *monômes de résurgence* : un monôme de résurgence de degré n est une fonction résurgente vérifiant des équations de résurgence de la forme

$$\Delta_{\omega_n}\cdots\Delta_{\omega_1}\varphi = 1$$

pour une certaine suite finie d'indices $\omega_1,\ldots,\omega_n$, et

$$\Delta_{\omega'_m}\cdots\Delta_{\omega'_1}\varphi = 0$$

si $m > n$ ou si l'un des ω'_i est différent de ω_i.

Par exemple, un monôme de résurgence de degré zéro est une *constante de résurgence*; une fonction résurgente de mineur $(1/2\pi i)(\xi - \omega)$ est un monôme de résurgence de degré 1 ; etc.

Nous n'en dirons pas davantage ici sur ce sujet très riche, point de départ du "calcul intégral étranger".

5. Phénomènes de Stokes.

5.1. *Phénomènes de Stokes sur le cercle des directions.*

Soit φ une fonction résurgente dont le mineur n'a qu'un nombre fini de directions singulières (directions dans lesquelles on "voit" des singularités). Dans toutes les directions non singulières φ est (pré)sommable de Borel, et il résulte du théorème de Cauchy que sa (pré)somme $s_\alpha\varphi$ ne dépend que de l'arc de directions non singulières dans lequel α a été choisie. De plus, pour toute direction singulière α_0, $s_{\alpha_0+}\varphi$ (resp. $s_{\alpha_0-}\varphi$) est égale à la (pré)somme de Borel $s_\alpha\varphi$ pour α choisie "un peu après" (resp. avant) α_0 (pour l'orientation usuelle du cercle des directions). Les mêmes remarques s'appliquent évidemment à un symbole $\dot{\varphi}$ (non nécessairement élémentaire) n'ayant qu'un nombre fini de directions singulières (directions α_0 pour lesquelles $\mathfrak{S}_{\alpha_0}\dot{\varphi} \neq \dot{\varphi}$).

Au lieu de nous donner un symbole, donnons-nous maintenant une *fonction résurgente étendue* ψ, et supposons que la famille de *tous ses symboles* $\dot{\varphi}_{\alpha\pm} = \dot{\sigma}_{\alpha\pm}\psi$ ait en commun un même ensemble *fini* de directions éventuellement singulières. Les $\dot{\varphi}_{\alpha\pm}$ se regroupent alors en une famille finie $(\dot{\varphi}_A)$, indexée par les arcs A de directions non singulières, et le fait que le symbole change quand on passe d'un arc au suivant constitue le *phénomène de Stokes* : $\mathfrak{S}_{\alpha_0}$ s'interprète ainsi comme *l'automorphisme de passage de l'arc précédant* α_0 *à l'arc suivant* α_0.

5.2. *Phénomènes de Stokes dans un espace de paramètres.*

Reprenons la discussion 5.1 dans une situation "relative", avec des symboles et fonctions résurgentes étendues *dépendant analytiquement de paramètres* $w \in \mathbb{C}^n$. Soit donc $\psi(x, w)$ une fonction résurgente étendue en x, dépendant analytiquement de w. On supposera pour simplifier que ses symboles ne présentent aucun phénomène de "confluence" (coïncidence accidentelle de points du support pour des valeurs exceptionnelles de w). *La propriété pour une direction* α *d'être singulière ou non dépend alors de* w*, ce qui permet d'observer des phénomènes de Stokes en* w*, à* α *fixé.*

Choisissons α *génériquement non singulière*, c'est-à-dire non singulière pour ouvert dense de valeurs de w. Les composantes connexes de cet ouvert seront appelées *régions de Stokes.* Notre fonction résurgente étendue ψ sera codée, dans chaque région de Stokes S, par un symbole $\dot{\alpha}_S$ analytique en w dans S, tel que $\dot{s}_\alpha \dot{\varphi}_S = \psi$.

La traversée d'une *cloison de Stokes* (hypersurface analytique réelle séparant deux régions de Stokes contigües) peut être décrite génériquement de la façon suivante : quand w franchit transversalement la cloison, une direction singulière mobile $\alpha(w)$ vient balayer la direction fixe α avec une vitesse non nulle ; appelons *sens direct de traversée de la cloison* le sens de traversée pour lequel $\alpha(w)$ balaye α dans le sens anti-trigonométrique (de sorte qu'un observateur regardant dans la direction mobile $\alpha(w)$ verra α balayer l'axe de son regard dans le sens trigonométrique) ; alors *la traversée dans le sens direct fait subir au symbole une "discontinuité de Stokes" donnée par :*

$$\underset{\text{(après)}}{\dot{\varphi}'_S} = \mathfrak{S}_{\alpha(w_0)} \underset{\text{(avant)}}{\dot{\varphi}_S},$$

où w_0 désigne le point de traversée.

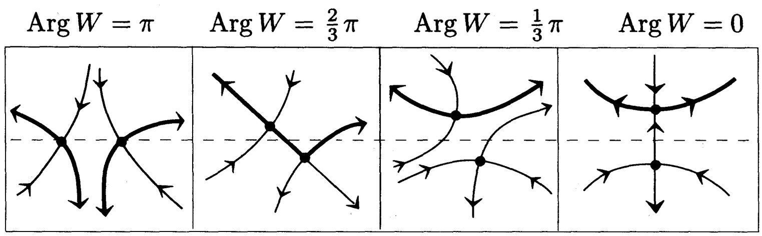
5′. Exemple : la méthode du col.

L'exemple le plus simple de phénomène de Stokes est l'exemple originel de Stokes étudiant la fonction d'Airy :

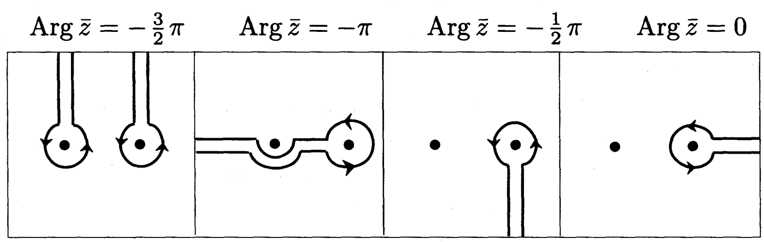
$$\mathrm{Ai}(W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^S \,\mathrm{d}s, \quad S = i\Big(\frac{1}{3} s^3 + Ws\Big).$$

Nous allons indiquer ici comment cet exemple s'insère dans le cadre que nous venons d'esquisser, invitant le lecteur à lire les intéressants commentaires de M.V. Berry [Be] sur le point de vue originel de Stokes.

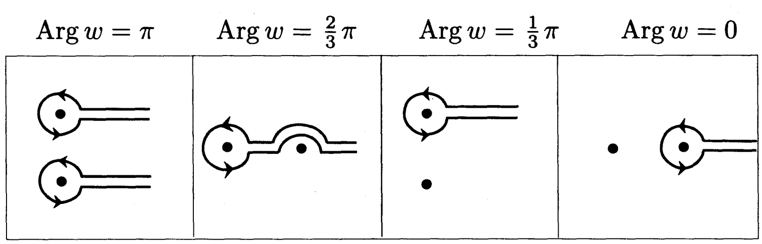
La *méthode du col* consiste à pousser le chemin d'intégration dans $\mathbb{C}$ pour le faire descendre le long des lignes de plus grande pente de la fonction $\mathrm{Re}\, S$. La figure 6 (i) représente les chemins d'intégration pour diverses valeurs de $\mathrm{Arg}\, W$ (à lire en commençant par la droite) : on y voit des lignes de plus grande pente, orientées dans le sens de la descente ; le chemin d'intégration est en gras, et doit être orienté de gauche à droite.



6 (i). Le plan des s.



6 (ii). Le plan des ζ.



6 (iii). Le plan des ξ.

Figure 6. Les chemins d'intégration de la méthode du col pour l'intégrale d'Airy.

Des changements de variable judicieux vont permettre d'interpréter ces intégrales le long de lignes de plus grande pente comme des *sommations de Borel de symboles résurgents.*

5.1. Des considérations de quasi-homogénéité de S suggèrent de poser $z = W^{3/2}$, et de changer la variable d'intégration s en $t = sz^{-1/3}$. On trouve ainsi :

$$\mathrm{Ai}(z^{2/3}) = \frac{z^{1/3}}{2\pi} \int \mathrm{e}^S \,\mathrm{d}t, \quad S = i\,z\Big(\frac{1}{3}t^3 + t\Big).$$

Par le changement de variable $\zeta = -i(t^3/3+t)$, cette intégrale s'écrit encore

$$\mathrm{Ai}(z^{2/3}) = \frac{z^{1/3}}{2\pi} \int \mathrm{e}^{-z\zeta} \mathbb{A}(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta,$$

où $\mathbb{A}(\zeta) = t'(\zeta) = i/(t(\zeta)^2 + 1)$ et où $t(\zeta)$ désigne la fonction réciproque de $\zeta(t)$ (fonction algébrique ayant deux points de branchement d'ordre 2, en $\zeta = \pm 2/3$, images des deux "cols" $t = \pm i$).

Traduite dans le plan complexe de ζ, la méthode du col consiste à pousser le chemin d'intégration vers l'infini dans la direction des lignes de plus grande pente de la fonction linéaire $\mathrm{Re}(-z\zeta)$, c'est-à-dire la direction $\bar{z}\infty$, complexe conjugée de celle de z (cf. figure 6 (ii)) : pour $-\pi < \operatorname{Arg} z < +\pi$ ce chemin d'intégration n'est "accroché" qu'au seul point de branchement $\zeta = +2/3$; quand $\operatorname{Arg} z$ franchit la valeur $+\pi$ (ou $-\pi$) un phénomène de Stokes se produit, et le chemin d'intégration reste ensuite accroché, aux deux points de branchement $\omega_+ = +2/3$ et $\omega_- = -2/3$; on remarquera que le phénomène de Stokes peut aussi se lire dans le plan des s (figure 6 (i)) : il se produit *lorsqu'une ligne de plus grande pente descendant d'un col passe par un autre col* (cf. figure 6 (i)) pour $\operatorname{Arg} W = 2/3\pi$).

Ainsi réécrite avec ζ pour variable d'intégration, $\mathrm{Ai}(z^{2/3})$ s'exprime par une intégrale du type $(2.1)'$ (ou une somme de deux telles intégrales), qu'on peut retraduire sous la forme (2.1) à ceci près que la singularité de $\mathbb{A}(\zeta)$ en $\omega_\pm$ n'est pas du type "pôle + logarithme" mais du type :

$$(\zeta - \omega_\pm)^{-1/2} \times \text{fct. hol.}$$

Tous calculs faits, on trouve ainsi la *décomposition de* $\mathrm{Ai}(z^{2/3})$ *en symboles résurgents dans la direction* $\bar{z}\infty$:

• Pour $-\pi < \operatorname{Arg} z < +\pi$ la fonction $\mathrm{Ai}(z^{2/3})$ est pure dans la direction $\bar{z}\infty$, où le symbole est donné par l'exponentielle décroissante

$$z^{-1/6}\varphi(z)\, \mathrm{e}^{-2z/3},$$

φ étant une fonction résurgente simple (sommable) de la variable z.

• Quand z franchit la ligne de Stokes $\operatorname{Arg} z = \pi$ (resp. $\operatorname{Arg} z = -\pi$) un phénomène de Stokes se produit. Il faut ajouter au symbole précédent, devenu exponentiellement croissant, la correction exponentiellement petite

$$i\, z^{-1/6}\varphi(-z)\, \mathrm{e}^{2z/3}$$

(resp. $-i\, z^{-1/6}\varphi(-z)\, \mathrm{e}^{2z/3}$).

5.2. Une façon équivalente, mais peut-être plus agréable, d'interpréter la méthode du col consiste à poser $W = x^{2/3}w$, où x est un "grand" paramètre réel positif qui va servir de variable de résurgence.

Par le changement de variables d'intégration $u = sx^{-1/3}$ on trouve $\mathrm{Ai}(W) = x^{-1/3}\mathcal{A}(w,x)$, où :

$$\mathcal{A}(w,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ix\left(\frac{1}{3}u^3 + wu\right)}\,du.$$

Un raisonnement analogue au précédent conduit au changement de variable d'intégration $\xi = -i(u^3/3 + wu)$. La figure 6 (iii) représente l'image du chemin d'intégration dans le plan des ξ, plan où l'intégrand est ramifié aux deux points $\pm 2/3w^{3/2}$. On trouve ainsi que $\mathcal{A}$ est *une fonction résurgente étendue de x, dépendant analytiquement du paramètre w, et dont le symbole dans la direction réelle positive est donné* :

- dans la région $-2\pi/3 < \operatorname{Arg} w < +2\pi/3$, par

$$w^{-1/4}x^{-1/6}\varphi\,\mathrm{e}^{-\omega x} \qquad \left(\omega = \frac{2}{3}w^{3/2}\right),$$

où φ est la fonction résurgente de x, dépendant analytiquement de w, déduite de celle du § 5.2 par le changement de variable $z = xw^{3/2}$;

- dans la région $|\operatorname{Arg} w| > 2\pi/3$, par la somme des prolongements analytiques du symbole 0) à travers les lignes de Stokes L et L' (cf. figure 7).

Nous renvoyons à [Ji] pour les détails et pour une étude plus générale des fonctions résurgentes "localement du type d'Airy" (cf. aussi [Ph2]).

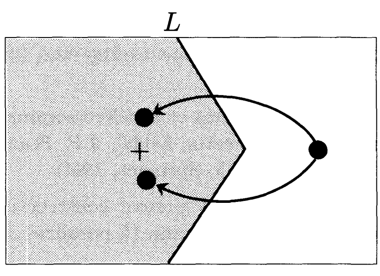


Figure 7.

5.3. *Conclusion : Stokes versus "anti-Stokes".*

Dans son interprétation résurgente (qui se généralise aux intégrales oscillantes en dimension supérieure) la méthode du col ne donne pas seulement un développement asymptotique de l'intégrale étudiée, mais un *codage exact de celle-ci par des symboles.*

Selon ce point de vue, en complet accord avec ce qu'écrivait Stokes [Be], le phénomène de Stokes consiste en *l'apparition, caché derrière le symbole exponentiellement dominant, d'un symbole exponentiellement récessif*, et cette discontinuité du symbole se produit au moment de "dominance maximale du premier sur le second" (pour reprendre l'heureuse expression de Dingle [Di].

Au contraire selon le point de vue des "analystes modernes" le phénomène de Stokes consiste en un "échange de dominance" entre deux exponentielles rivales : c'est que ceux-ci ne comprennent les séries divergentes que comme des "séries asymptotiques" au sens de Poincaré, et sont donc incapables de "voir" une petite exponentielle cachée derrière une grande.

BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE

Écrits d'Écalle :

[E1] J. ÉCALLE, Les fonctions résurgentes, Publ. Math. Université Paris-Sud (3 tomes), 1981.

[E2] J. ÉCALLE, Cinq applications des fonctions résurgentes, (preprint 84 T 62, Orsay), 1984.

[E3] J. ÉCALLE, Finitude des cycles limites et accéléro-sommation de l'application de retour [in Bifurcations of planar vector fields], J.P. Françoise & J.C. Roussarie Ed., Lecture Notes in Maths n° 1455, Springer, 1990.

[E4] J. ÉCALLE, Fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac, Actualités Mathématiques, Hermann (à paraître).

Exégèse niçoise :

[C] B. CANDELPERGHER, Une introduction à la résurgence, Gazette des Mathématiciens (Soc. Math. France), 42 (oct. 89), (peut aider le lecteur dans ses premiers pas).

[CNP] B. CANDELPERGHER, JC. NOSMAS et F. PHAM, Approche de la résurgence, à paraître dans Actualités Mathématiques, Hermann (livre dont le présent exposé constitue un avant-goût).

[Ph1] F. PHAM, Resurgence, Quantized Canonical Transformations, and Multi-Instanton Expansions [in Algebraic Analysis] (paper dedicated to M. Sato), Acad. Press, 1988.

[Ph2] F. PHAM, Résurgence d'un thème de Huygens-Fresnel, Publ. Math. IHES, 68 (volume en l'honneur de R. Thom) (1988).

[Ph3] F. PHAM, Fonctions résurgentes implicites, C.R. Acad. Sci. Paris, 309, Sér. I (1989), 999–1001.

[Ji] A.O. JIDOUMOU, Modèles de résurgence paramétrique (fonctions d'Airy et cylindro-paraboliques), Thèse de Doctorat, Nice, 1990 (à paraître dans J. Math. Pures Appl.).

B. Malgrange a été le premier à populariser les travaux d'Écalle :

[Ma1] B. MALGRANGE, Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, Sém. Bourbaki 1981-82, Astérisque, 92–93, exp. n^0 582 (1982).

[Ma2] B. MALGRANGE, Introduction aux travaux de J. Écalle, L'Enseignement Mathématique, 31 (1985), 261–282.

C'est lui notamment qui a permis à Écalle et Voros de comparer leurs démarches :

[V] A. VOROS, The return of the quartic oscillator (the complex WKB method), Ann. Inst. H. Poincaré, 29, 3 (1983).

Sur le même sujet voir aussi :

[DDP] E. DELABAERE, H. DILLINGER, F. PHAM, Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, Ann. Inst. Fourier, 43, 1 (1993), 163–199.

Avec des motivations qui recoupent celles d'Écalle, Martinet et Ramis ont développé un formalisme sensiblement différent :

[MR1] J. MARTINET, J.P. RAMIS, Problèmes de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre, Publ. Math. IHES, 55 (1982), 117–214.

[MR2] J. MARTINET, J.P. RAMIS, Théorie de Galois différentielle et resommation [in Computer Algebra and Differential Equations], E. Tournier Ed., Acad. Press, 1984.

[MR3] J. MARTINET, J.P. RAMIS, Théorie de Cauchy sauvage (livre en préparation).

Pour ces auteurs, les fonctions résurgentes sont des fonctions analytiques dans des voisinages *infiniment petits* de l'origine (leur variable x étant l'inverse de la nôtre), qu'il s'agit de prolonger analytiquement dans la *partie standard* du plan complexe. Lors de ces prolongements analytiques on prendra garde d'éviter les *singularités infiniment proches* (que la transformation de Borel permet de "regarder à la loupe"). Selon le chemin choisi pour les éviter on obtiendra des prolongements analytiques différents (qui seront les sommations de Borel latérales, et leurs généralisations appelées *accéléro-sommations* d'Écalle, dont nous n'avons pas parlé ici). Dans ce point de vue, les phénomènes de Stokes mesurent donc le défaut de *monodromie autour des singularités infiniment proches.* Très séduisant pour un géomètre, ce point de vue éclaire d'une lumière neuve une question fascinante : *que dire du prolongement analytique d'une fonction qui n'est connue qu'approximativement ?*

A propos des *phénomènes de Stokes*, les références sont innombrables. En voici deux particulièrement instructives :

[Di] R.B. DINGLE, Asymptotic Expansions : their Derivation and Interpretation, Academic Press, 1973.

[Be] M.V. BERRY, Stokes Phenomenon : Smoothing a Victorian Discontinuity, Publ. Math. IHES, 68 (vol. en l'honneur de R. Thom) (1988).

Manuscrit reçu le 13 janvier 1992.

B. CANDELPERGHER,
J.-C. NOSMAS ET
F. PHAM,
Laboratoire de Mathématiques
Université de Nice
Faculté des Sciences
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 2 (France).