ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SAÏD ILIAS

Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 2 (1983), p. 151-165

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_151_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 2 (1983), 151-165.

CONSTANTES EXPLICITES POUR LES INÉGALITÉS DE SOBOLEV SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES COMPACTES

par Saïd ILIAS

INTRODUCTION

Considérons une inégalité de Sobolev du type :

$$(*) \qquad \|f\|_p \leqslant A\|\nabla f\|_q + B\|f\|_q$$

où

$$1 \leqslant q < n \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}.$$

Dans une première partie, nous nous intéresserons à de telles inégalités sur des variétés riemanniennes à courbure de Ricci strictement positive. Nous obtenons alors l'inégalité suivante où les coefficients sont extrêmement simples (théorème 3) :

Si $R(M,g) \geqslant R(S^n_\delta,\mathrm{can}) = \delta(n-1) > 0$, alors :

$$\forall f \in H^2_1(M) : \|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant \frac{4}{n(n-2)\delta} V^{-2/n}\|\nabla f\|^2_2 + V^{-2/n}\|f\|^2_2 .$$

Puis pour le cas limite H^n_1, nous retrouverons dans ce même cadre des inégalités du type ([5]) :

$$(**) \qquad \int_M e^f \, dv_g \leqslant C \exp[\mu\|\nabla f\|^n_n + \nu\|f\|^n_n].$$

Pour la valeur exacte des constantes qu'on trouve, voir le théorème 4.

Dans la deuxième partie, nous traiterons le cas général (sans restriction sur le signe de la courbure de Ricci où les coefficients sont plus compliqués mais ne font intervenir que la courbure de Ricci, le diamètre et le volume). Nous montrerons que la recherche de toute inégalité de Sobolev quantitative sur une variété riemannienne compacte se ramène à la même inégalité sur une boule euclidienne, nous retrouverons ainsi des inégalités du type ($*$) (voir le théorème 5), et du type ($**$) (voir le théorème 6) et pour finir nous traiterons le cas de l'inclusion de H_1^q dans L^∞ pour $q > n$ (voir le théorème 7).

Notre travail, par rapport à ceux de S. Gallot et de P. Li, est nouveau d'abord par l'extrême simplicité des coefficients dans le cas à courbure de Ricci positive, ensuite par une simplification importante dans la démonstration dans le cas général (courbure de Ricci de signe quelconque), où seule est utilisée une symétrisation convenable et où en particulier l'inégalité de Bombieri (voir [12]) n'est plus nécessaire, ni la constante isopérimétrique C_1 (voir [6], [7], [11] et [12]) mais seulement la constante h de Cheeger pour laquelle la borne inférieure donnée par S. Gallot est particulièrement simple.

Afin d'être honnête vis-à-vis du lecteur, nous avons dû alourdir quelque peu notre rédaction en citant intégralement les résultats de M. Gromov et de S. Gallot; en effet celui de M. Gromov n'existe actuellement que sous forme de prépublication et celui de S. Gallot n'est pas encore disponible.

Rappelons enfin qu'il existe de nombreuses motivations de géométrie pour des bornes explicites riemanniennes dans les inégalités de Sobolev; voir par exemple les travaux de P. Li [12], S. Gallot ([6] et [7]), D. Hulin [10] et D. Meyer [13].

Je tiens à remercier vivement S. Gallot pour ses indications et son encouragement qui m'ont permis de faire ce travail.

I. PRÉLIMINAIRES

Soient (M,g) une variété riemannienne compacte à bord ∂M ($\partial M = \emptyset$ si M est sans bord), de dimension n ($n \geqslant 2$), dv_g son élément de volume riemannien, V son volume, d son diamètre, r sa courbure de Ricci,

$R(M,g) = \inf\{r(u,u) : u \in UM\}$ où UM est le fibré tangent unitaire; $\mathfrak{C}^\infty(M)$ l'espace des fonctions numériques $\mathfrak{C}^\infty$ sur M, $\mathfrak{C}_0^\infty(M)$ le sous-espace constitué par les fonctions à support compact inclus dans $M \backslash \partial M$ (si $\partial M \neq \varnothing$), $L^p(M)$ (pour p réel $\geqslant 1$) l'espace des fonctions numériques mesurables f sur M telles que :

$$\|f\|_p^p = \int_M |f|^p \, dv_g < \infty .$$

Si $f \in \mathfrak{C}^\infty(M)$, $|\nabla f|^2$ le carré du module du gradient de f, est la fonction numérique d'expression locale :

$$|\nabla f|^2 = \nabla^i f \nabla_i f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

$H_1^q(M)$ est le complété de $\mathfrak{C}^\infty(M)$ pour la norme :

$$\|f\|_{1,q} = \|f\|_q + \|\nabla f\|_q,$$

et $\mathring{H}_1^q(M)$ est l'adhérence de $\mathfrak{C}_0^\infty(M)$ dans $H_1^q(M)$ (si $\partial M \neq \varnothing$). Soit $\mathfrak{M}_0(M)$ le sous-espace de $\mathfrak{C}_0^\infty(M)$ constitué des fonctions ayant des points critiques non dégénérés et en nombre fini à l'intérieur de leur support (on le notera $\mathfrak{M}(M)$ si $\partial M = \varnothing$). Dans la suite ω_n désignera le volume euclidien de la sphère canonique $\mathbf{S}^n$, et $K(n,q)$ la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev euclidienne (cas d'inclusion de $H_1^q(\mathbf{R}^n)$ dans $L^p(\mathbf{R}^n)$, où $1 \leqslant q < n$ et $\left.\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right)$ i.e.

$$K(n,q) = \sup_{\substack{f \in H_1^q(\mathbf{R}^n) \\ f \neq 0}} \left[\frac{\|f\|_p}{\|\nabla f\|_q} \right].$$

Pour sa valeur exacte voir [2].

1.1. Symétrisation et inégalité isopérimétrique de Gromov.

1.1.1. Inégalité isopérimétrique de Gromov [9].

Soient (M,g) une variété riemannienne complète sans bord, de dimension n, et N une sous-variété compacte à bord de M (de bord

∂N) de dimension n (munie de la métrique induite). On suppose que $R(M,g)$ est minoré par une constante strictement positive (donc, par le théorème de Myers M est compacte); modulo une normalisation on se ramène au cas : $R(M,g) \geqslant R(S^n,\mathrm{can}) = n-1$. Soit $\beta = \dfrac{\mathrm{vol}\ (M,g)}{\mathrm{vol}\ (S^n,\mathrm{can})}\cdot$ Considérons alors une boule géodésique N^* de (S^n,can) de même volume relatif que N, i.e. $\beta = \dfrac{\mathrm{vol}\, N}{\mathrm{vol}\, N^*}\cdot$ Alors :

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial N) \geqslant \beta\, \mathrm{vol}_{n-1}(\partial N^*), \tag{1}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si les triplets (M,N,g) et (S^n,N^*,can) sont isométriques.

1.1.2. Symétrisation associée à (1) (voir aussi [4]).

Les hypothèses sur (M,g) étant celles de 1.1.1., soit f une fonction $\geqslant 0$ de $\mathfrak{M}(M)$, et notons :

$$A(t) = \mathrm{vol}_n(f^{-1}(]t,\infty[))$$
$$L(t) = \mathrm{vol}_{n-1}(f^{-1}(t))$$

(ceci pour presque tout t, par le théorème de Sard).

Définissons une fonction $f^* : S^n \to \mathbf{R}$, ne dépendant que de la distance géodésique à un point de S^n, par la relation $A(t) = \beta A^*(t)$, où nous posons :

$$A^*(t) = \mathrm{vol}_n(f^{*-1}(]t,\infty[)) \quad \text{et} \quad L^*(t) = \mathrm{vol}_{n-1}(f^{*-1}(t)).$$

Nous avons alors :

$$A(t) = \int_t^{\mathrm{Sup} f}\left[\int_{f^{-1}(t)} \frac{d\sigma}{|\nabla f|}\right] ds$$

(où $d\sigma$ est la mesure induite sur $f^{-1}(s)$ par g; pour plus de détails voir [2] et [4]). Donc :

$$A'(t) = -\int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{-1}\, d\sigma.$$

D'autre part pour q réel $\geqslant 1$, on a par l'inégalité de Hölder :

$$\int_{f^{-1}(s)} |\nabla f|^{q-1}\, d\sigma \geqslant \frac{(\mathrm{L}(s))^q}{(-\mathrm{A}'(s))^{q-1}} = \frac{(\mathrm{L}(s))^q}{\beta^{q-1}(-\mathrm{A}^{*\prime}(s))^{q-1}}.$$

Or l'inégalité (1) nous donne : $\mathrm{L}(s) \geqslant \beta \mathrm{L}^*(s)$. Par suite, comme $|\nabla f^*|$ est constant sur $(f^*)^{-1}(s)$:

$$\int_{f^{-1}(s)} |\nabla f|^{q-1}\, d\sigma \geqslant \frac{\beta(\mathrm{L}^*(s))^q}{(-(\mathrm{A}^*)'(s))^{q-1}} = \beta \int_{(f^*)^{-1}(s)} |\nabla f^*|^{q-1}\, d\sigma^*.$$

Et, en intégrant par rapport à s, on obtient :

(2) $$\|\nabla f\|_q^q \geqslant \beta \|\nabla f^*\|_q^q.$$

D'autre part, pour p réel $\geqslant 1$ on a :

$$\|f\|_p^p = -\int_0^{\operatorname{Sup} f} t^p \mathrm{A}'(t)\, dt = -\beta \int_0^{\operatorname{Sup} f^*} t^p (\mathrm{A}^*)'(t)\, dt$$

d'où :

(3) $$\|f\|_p^p = \beta \|f^*\|_p^p.$$

De même :

(4) $$\int_{\mathrm{M}} e^f\, dv_g = \beta \int_{\mathrm{S}^n} e^{f^*}\, dv_{\mathrm{can}}.$$

Et par construction :

(5) $$\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty.$$

1.1.3. Sur une autre symétrisation.

Le résultat fondamental de ce paragraphe est un résultat non publié de S. Gallot exposé au séminaire « Géométrie et théorie spectrale » (Chambéry-Grenoble, décembre 1981).

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte à bord $\partial\mathrm{M}$, de dimension n, M^* la boule euclidienne de même volume que (M,g). Définissons la constante isopérimétrique :

$$\mathrm{C}(\mathrm{M}) = \operatorname*{Inf}_{\mathrm{D}\subset \mathrm{M}\setminus\partial\mathrm{M}} \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial\mathrm{D})}{(\mathrm{vol}_n \mathrm{D})^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Par l'inégalité isopérimétrique classique, on a :

$$C(M^*) = C^* = \frac{\omega_{n-1}}{(\operatorname{vol} B(1))^{\frac{n-1}{n}}} = [K(n,1)]^{-1}$$

(où $B(1)$ est la boule unité de $\mathbf{R}^n$).

Pour tout élément $f \geqslant 0$ de $\dot{\mathfrak{M}}_0(M)$, on obtient par le même procédé qu'en 1.1.2.

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla f|^q \, dv_g &\geqslant \int_0^{\operatorname{Sup} f} \frac{(L(t))^q}{(-A'(t))^{q-1}} \, dt \\ &\geqslant \int_0^{\operatorname{Sup} f} C^q(M) . \frac{A(t)^{q\left(\frac{n-1}{n}\right)}}{(-A'(t))^{q-1}} . dt.\end{aligned}$$

Sur M^* on définit f^* en posant :

$$\begin{gathered}B^*(t) : \text{boule de volume } A^*(t) = A(t), \\ \text{et } f^*(m) = t \quad \text{si} \quad m \in \partial B^*(t).\end{gathered}$$

On reprend les calculs précédents pour f^*, mais les inégalités deviennent des égalités sur M^* car $|\nabla f^*|$ est constant sur $\partial B^*(t)$. On obtient :

$$\int_{M^*} |\nabla f^*|^q \, dv^* = (C^*)^q \int_0^{\operatorname{Sup} f^*} \frac{(A^*(t))^{q\left(\frac{n-1}{n}\right)}}{(-(A^*)'(t))^{q-1}} dt;$$

et comme $A^*(t) = A(t)$, on a donc :

$$\int_M |\nabla f|^q \, dv_g \geqslant \frac{C(M)^q}{(C^*)^q} . \int_{M^*} |\nabla f^*|^q \, dv^* . \tag{6}$$

D'autre part on a :

$$\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty \tag{7}$$

$$\|f\|_p^p = \|f^*\|_p^p \quad (p \geqslant 1) \tag{8}$$

et

$$\int_M e^f \, dv_g = \int_{M^*} e^{f^*} \, dv^* . \tag{9}$$

1.2. Constantes isopérimétriques et leurs minorations ([6] et [7]).

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte sans bord, de dimension n, de volume V et de diamètre d.

Nous nous intéressons aux deux constantes isopérimétriques suivantes car elles interviendront de manière systématique dans les inégalités que nous allons prouver dans la III^e partie :

$$h(M) = \operatorname*{Min}_{\mathrm{vol}\,\Omega \leqslant \frac{V}{2}} \left[\frac{\mathrm{vol}_{n-1}\,\partial\Omega}{\mathrm{vol}_n\,\Omega} \right]$$

et

$$C_1(M) = \operatorname*{Min}_{\mathrm{vol}\,\Omega \leqslant \frac{V}{2}} \left[\frac{\mathrm{vol}_{n-1}\,(\partial\Omega)}{(\mathrm{vol}_n\,\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \right],$$

où Ω varie parmi les domaines non vides à bord de M.

Les récents travaux de S. Gallot ([6] et [7]) nous donnent des minorations optimales de ces constantes.

Pour $h(M)$ il trouve :

THÉORÈME 1 (S. Gallot). —

(1) *Si* $R(M,g) \geqslant -(n-1)$, *alors* $h(M) \geqslant \left[\int_0^{\frac{d}{2}} (\mathrm{ch}\, t)^{n-1}\, dt \right]^{-1}$

(ii) *Si* $R(M,g) \geqslant 0$, *alors* $h(M) \geqslant \frac{2}{d}$

(iii) *Si* $R(M,g) \geqslant (n-1)$, *alors* $h(M) \geqslant \left[\int_0^{\frac{d}{2}} (\cos t)^{n-1}\, dt \right]^{-1}$.

Quant à $C_1(M)$:

THÉORÈME 2 (S. Gallot). —

(i) *Si* $R(M,g) \geqslant -(n-1)$, *alors :*

$$C_1 V^{-\frac{1}{n}} \geqslant \left[\int_0^d \left(\frac{\mathrm{ch}\, t}{h(M)} + \frac{1}{n}\,\mathrm{sh}\, t \right)^{n-1} dt \right]^{-\frac{1}{n}}$$

(ii) *Si* $R(M,g) \geqslant 0$, *alors :* $C_1 V^{-\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{1}{n}} h(M)$

(iii) *Si* $R(M,g) \geqslant (n-1)$, *alors :*

$$C_1 V^{-\frac{1}{n}} \geqslant 2^{-\frac{1}{n}} \left[\int_0^{\frac{d}{2}} (\cos t)^{n-1}\, dt \right]^{-1}.$$

II. INÉGALITÉS DE SOBOLEV SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES M à $R(M,g) > 0$

L'idée principale est de ramener la recherche de telles inégalités à celle sur la sphère canonique, ceci par le biais de la symétrisation adaptée à l'inégalité isopérimétrique de Gromov.

2.1. Cas d'inclusion de $H_1^2(M)(n>2)$.

Le fait que $\mathfrak{M}_0(M)$ (resp. $\mathfrak{M}(M)$) est dense dans $\mathring{H}_1^q(M)$ (resp. $H_1^q(M)$) et que $|\nabla f| = |\nabla |f||$ presque partout, nous restreignons nos preuves aux fonctions positives ou nulles de $\mathfrak{M}_0(M)$ (resp. $\mathfrak{M}(M)$).

Dans son étude du problème de Yamabe sur (S^n,can), T. Aubin ([1] corollaire 4, p. 294) prouve l'inégalité :

$$\forall \varphi \in H_1^2(S^n) : \quad \|\varphi\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leqslant [K(n,2)]^2 \|\nabla\varphi\|_2^2 + \omega_n^{-2/n} \|\varphi\|_2^2 .$$

En appliquant cette inégalité et les résultats de 1.1.2 à la symétrisée f^* d'une fonction $f \in H_1^2(M)$, on obtient le :

THÉORÈME 3. — *Si* $R(M,g) \geqslant R(S_\delta^n,\mathrm{can}) = \delta(n-1) > 0$, *alors :*

$$\forall f \in H_1^2(M) : \quad \|f\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leqslant [K(n,2)]^2 \left[\frac{\mathrm{vol}\, S_\delta^n}{V}\right]^{\frac{2}{n}} \|\nabla f\|_2^2 + V^{-\frac{2}{n}} \|f\|_2^2 .$$

Remarques. — Pour $S_\delta^n \left(= \left(S^n, \frac{1}{\delta}\mathrm{can} \right) \right)$ les deux meilleures constantes dans l'inégalité $(*)$ sont atteintes (pour le meilleur A, voir [2] et [3]; pour le meilleur B, voir [11]).

— un autre problème se pose : pour B fixé (en particulier la valeur optimale de B), quel est le meilleur A tel qu'une inégalité du type $(*)$

ait lieu pour tout $f \in H_1^q(M)$? Pour H_1^2 le théorème 3 nous donne une réponse partielle : sur l'espace projectif réel $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, la première constante dans l'inégalité du théorème 3 vaut $2^{\frac{2}{n}}K(n;2)^2$ et est assez proche donc de la meilleure constante possible $K(n,2)^2$ pour n assez grand (pour des précisions sur cette constante voir [2] et [3]).

– Cette inégalité nous permet d'améliorer les applications géométriques de [6], [7] et [12] si $R(M,g) > 0$, nous signalons que D. Hulin en a trouvé une autre application (voir [10]).

2.2. Cas limite $H_1^n (n = \dim M)$.

Nous partons dans ce cas d'un résultat de P. Cherrier [5] (amélioré par T. Aubin [3], p. 156) :

$$\forall f \in H_1^n(S^n) : \quad \int_{S^n} e^f \, dv_{can} \leqslant c(n).\exp\left[\mu_n \|\nabla f\|_n^n + \frac{2}{\omega_n}\|f\|_1\right]$$

où $\mu_n = (n-1)^{n-1} n^{(1-2n)} \omega_{n-1}^{-1}$ est la meilleure possible (voir [5], théorème 2, p. 357). T. Aubin a amélioré $\frac{2}{\omega_n}\|f\|_1$ en $\frac{1}{\omega_n}\int_{S^n} f \, dv_{can}$.

Et en procédant alors de la même manière que pour le théorème 3, on obtient :

THÉORÈME 4. – *Si* $R(M,g) \geqslant R(S_\delta^n, can) = \delta(n-1) > 0$, *alors :*

$$\forall f \in H_1^n(M) : \quad \int_M e^f \, dv_g \leqslant c(n).V.\exp\left[\mu_n\left(\frac{\text{vol } S_\delta^n}{V}\right)\|\nabla f\|_n^n + \bar{f}\right]$$

où $c(n)$ *est une constante ne dépendant que de* n *et où* $\bar{f}$ *est la moyenne de* f, *i.e.* $\bar{f} = \frac{1}{V}\int_M f \, dv_g$.

III. LE CAS GÉNÉRAL (SANS RESTRICTION SUR LE SIGNE DE $R(M,g)$)

Précisons quelques notations ultérieures : $B(r)$ est la boule euclidienne de $\mathbf{R}^n$ de rayon r; si Ω est un ouvert de M, Ω^* est la boule euclidienne de même volume; nous notons $\|f\|_{p,\Omega} = \int_\Omega |f|^p \, dv_g$, de même pour $\|\nabla f\|_{q,\Omega}$.

3.1. Cas de $H_1^q(1 \leqslant q < n)$.

Théorème 5. — *Si* M *est une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension* n *et de volume* V, *alors pour toute fonction* $f \in H_1^q(M)\ (1 \leqslant q < n)$:

$$\|f\|_p \leqslant \frac{C^*K(n,q)}{C_1}\|\nabla f\|_q + 2V^{-\frac{1}{n}}\|f\|_q$$

où $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{n}$.

Montrons d'abord le :

Lemme. — *Si* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{n}$:

$$\operatorname*{Inf}_{\substack{f \in \mathring{H}_1^q(B(r)) \\ f \neq 0}} \left[\frac{\|\nabla f\|_q}{\|f\|_p}\right] = \operatorname*{Inf}_{\substack{f \in \mathring{H}_1^q(B(1)) \\ f \neq 0}} \left[\frac{\|\nabla f\|_q}{\|f\|_p}\right] = [K(n,q)]^{-1}.$$

Ce lemme résulte d'une part de l'invariance du rapport $\|\nabla f\|_q/\|f\|_p$ sous l'effet d'une homothétie et d'autre part de la détermination de la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev euclidienne (voir [2] et [3]).

Si $f \in H_1^q(B(r)) \cap C_0(\overline{B(r)})$ (où $C_0(\overline{B(r)})$ est l'ensemble des fonctions continues$_{\textit{variété}}\overline{(r)}$ nulles sur $\partial B(r)$), alors $f \in \mathring{H}_1^q(B(r))$ (ceci est valable pour tout ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, voir [8], p. 147); on déduit alors du lemme que :

$$\operatorname*{Inf}_{\substack{f \in H_1^q(\Omega^*), f|_{\partial\Omega^*} = 0 \\ f \not\equiv 0}} \left[\frac{\|\nabla f\|_q}{\|f\|_p}\right] = [K(n,q)]^{-1}. \tag{10}$$

Preuve du théorème 5. — On se restreint à des éléments $\geqslant 0$ de $\mathfrak{M}(M)$. Soit $f \in \mathfrak{M}(M)$ (positive ou nulle). Il existe un réel $a \geqslant 0$ tel que les sous-ensembles

$$M_+ = f^{-1}(]a,\infty[) \qquad \text{et} \qquad M_- = f^{-1}(]-\infty,a[)$$

aient un volume égal à $\dfrac{V}{2}$, et soit M^* la boule euclidienne de volume $\dfrac{V}{2}$.

Appliquons à la fonction $f - a$ et aux sous-ensembles M_+ et M_- de

M, les résultats de la symétrisation du paragraphe 1.1.3 et (10) pour obtenir :

$$\frac{\|\nabla f\|_{q,\mathrm{M}_\pm}}{\|f-a\|_{p,\mathrm{M}_\pm}} \geqslant \frac{\mathrm{C}(\mathrm{M}_\pm)}{\mathrm{C}^*}\frac{\|\nabla f^*\|_{q,\mathrm{M}^*}}{\|f-a\|_{p,\mathrm{M}^*}} \geqslant \frac{\mathrm{C}(\mathrm{M}_\pm)}{\mathrm{C}^*}[\mathrm{K}(n,q)]^{-1}.$$

Or, $\mathrm{Min}\,(\mathrm{C}(\mathrm{M}_+),\mathrm{C}(\mathrm{M}_-)) \geqslant \mathrm{C}_1(\mathrm{M})$; donc :

$$\|f-a\|_p^p\left(\frac{\mathrm{C}_1(\mathrm{M})}{\mathrm{C}^*}\right)^p(\mathrm{K}(n,q))^{-p} \leqslant \|\nabla f\|^p_{q,\mathrm{M}_+} + \|\nabla f\|^p_{q,\mathrm{M}_-} \leqslant \|\nabla f\|^p_q.$$

On peut alors écrire :

$$\|f\|_p \leqslant \|f-a\|_p + a\mathrm{V}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\mathrm{C}^*\mathrm{K}(n,q)}{\mathrm{C}_1}\|\nabla f\|_q + a\mathrm{V}^{\frac{1}{p}}.$$

On majore la constante a, en remarquant que :

$$a.\frac{\mathrm{V}}{2} \leqslant \int_{\mathrm{M}_+} f.dv_g \leqslant \|f\|_1,$$

et on conclut par l'inégalité de Hölder.

Remarque. — Si on part dans la preuve précédente d'une fonction f à moyenne nulle, on a une meilleure estimation pour le réel a, à savoir : $|a|\mathrm{V} \leqslant \|f\|_1$.

Et on a donc pour de telles fonctions :

$$\|f\|_p \leqslant \frac{\mathrm{C}^*\mathrm{K}(n,q)}{\mathrm{C}_1}.\|\nabla f\|_q + \mathrm{V}^{\frac{1}{p}-1}\|f\|_1. \tag{11}$$

Comme corollaire, nous nous intéressons au problème suivant : considérons l'inégalité de Sobolev $(*)$, quelle est la meilleure constante B dans $(*)$ (i.e. la plus petite constante B telle que $(*)$ ait lieu pour au moins une valeur A et pour tout $f \in \mathrm{H}_1^q(\mathrm{M})$)? En appliquant $(*)$ à une constante, on voit que : $\mathrm{B} \geqslant \mathrm{V}^{-\frac{1}{n}}$.

COROLLAIRE. — *La meilleure constante* B *dans* $(*)$ *est* $\mathrm{V}^{-\frac{1}{n}}$. *Et on a :*

$$\forall f \in \mathrm{H}_1^q(\mathrm{M}) : \quad \|f\|_p \leqslant \left[\frac{\mathrm{C}^*\mathrm{K}(n,q)}{\mathrm{C}_1} + \frac{2\mathrm{V}^{-\frac{1}{n}}}{h(\mathrm{M})}\right]\|\nabla f\|_q + \mathrm{V}^{-\frac{1}{n}}\|f\|_q$$

où $1 \leqslant q < n$ *et* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{n}$.

Preuve. — Nous avons déjà prouvé ce résultat mais par d'autres considérations (voir [11] proposition 2.1).

Appliquons l'inégalité (11) à $f - \bar{f}$:

$$\|f - \bar{f}\|_p \leqslant \left[\frac{C^*K(n,q)}{C_1}\right]\|\nabla f\|_q + V^{\frac{1}{p}-1}\|f - \bar{f}\|_1 .$$

Or d'après un résultat de S. T. Yau rectifié par S. Gallot (voir [11])

$$\|f-\bar{f}\|_1 \leqslant \frac{2}{h(M)}\|\nabla f\|_1 ,$$

d'où :

$$\|f\|_p \leqslant \|f-\bar{f}\|_p + \|\bar{f}\|_p \leqslant \left[\frac{C^*K(n,q)}{C_1}\right]\|\nabla f\|_q + \frac{2V^{\frac{1}{p}-1}}{h(M)}\|\nabla f\|_1 + \|\bar{f}\|_p;$$

et l'inégalité de Hölder nous permet de conclure.

3.2. Cas de $H_1^n(M)$ $(n = \dim M)$.

THÉORÈME 6. — *Si* (M,g) *est une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension* n *et de volume* V, *alors pour toute fonction* $f \in H_1^n(M)$:

$$\int_M e^f \, dv_g \leqslant c(n).V.\exp\left[\mu_n\left(\frac{C^*}{C_1}\right)^n \|\nabla f\|_n^n + \frac{2}{V}\|f\|_1\right].$$

Preuve. — On va utiliser les mêmes techniques que pour prouver le théorème 5. Soit $f \in \mathfrak{M}(M)$ $(\geqslant 0)$: d'une part à partir des résultats de 1.1.3, on peut écrire :

$$\int_{M_\pm} e^{f-a}\, dv_g = \int_{M^*} e^{f-a}\, dv .$$

D'autre part, sur la boule euclidienne M^* $\left(\text{de volume } \frac{V}{2}\right)$ le théorème 1 de [5] nous donne :

$$\int_{M^*} e^{f^*-a}\, dv^* \leqslant c(n).\frac{V}{2}\exp\left[\mu_n\|\nabla f^*\|_{n,M^*}^n\right]$$

(où $c(n)$ est une constante ne dépendant que de n).

D'où par (9) :

$$\int_M e^{f-a}\, dv_g \leqslant c(n).\mathrm{V}.\exp\,[\mu_n \|\nabla f^*\|^n_{n,\mathrm{M}^*}].$$

Or d'après (6) on a :

$$\|\nabla f^*\|^n_{n,\mathrm{M}^*} \leqslant \left(\frac{\mathrm{C}^*}{\mathrm{C}(\mathrm{M}_\pm)}\right)^n \|\nabla f\|^n_{n,\mathrm{M}_\pm}.$$

Donc, puisque $\mathrm{C}(\mathrm{M}_\pm) \geqslant \mathrm{C}_1(\mathrm{M})$:

$$\int_M e^{f-a}\, dv_g \leqslant c(n).\mathrm{V}.\exp\left[\mu_n\left(\frac{\mathrm{C}^*}{\mathrm{C}_1}\right)^n \|\nabla f\|^n_n\right];$$

et la majoration $\dfrac{a.\mathrm{V}}{2} \leqslant \|f\|_1$ permet de conclure.

3.3. Cas de $\mathrm{H}^q_1(\mathrm{M})(q > n)$.

Si $q > n$ l'inclusion $\mathrm{H}^q_1 \subset \mathrm{L}^\infty$ est continue, et alors il existe un couple de constantes (A,B) tel que : $\forall f \in \mathrm{H}^q_1(\mathrm{M})(q>n)$:

$$(***) \qquad \|f\|_\infty \leqslant \mathrm{A}\|\nabla f\|_q + \mathrm{B}\|f\|_q.$$

Il est naturel de s'intéresser, comme au cas $q < n$ à la meilleure constante A :

$$\mathrm{K}_1 = \mathrm{Inf}\,\{\mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{B}(\mathrm{A}) \text{ existe}\}.$$
$$\mathrm{K}_2 = \mathrm{Inf}\,\{\mathrm{B} \text{ tel que } \mathrm{A}(\mathrm{B}) \text{ existe}\}.$$

On va donner une majoration de K_1, et on va voir que $\mathrm{K}_2 = \mathrm{V}^{-\frac{1}{q}}$ (par les mêmes méthodes qu'avant).

THÉORÈME 7. — *Soit* (M,g) *une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension* n *et de volume* V. *Pour toute fonction* $f \in \mathrm{H}^q_1(\mathrm{M})\ (q>n)$:

$$\|f\|_\infty \leqslant \left(\frac{q-1}{q-n}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\mathrm{C}^*}{\mathrm{C}_1}\right)\frac{\mathrm{V}^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}}\omega_{n-1}^{\frac{1}{n}}}\|\nabla f\|_q + 2\mathrm{V}^{-\frac{1}{q}}\|f\|_q.$$

Pour la démonstration nous aurons besoin d'un résultat semblable sur une boule euclidienne. Considérons, comme précédemment (théorème 5 et 6) la valeur a, les domaines M_+ et M_-, et la boule euclidienne de même volume M^*.

LEMME. — *Soit* $f \in H_1^q(M_\pm)$ *telle que* $f|_{\partial M_\pm} = 0$. *Alors sa symétrisée* f^* (*qui appartient à* $H_1^q(M^*)$ *et est telle que* $f^*|_{\partial M^*} = 0$) *vérifie l'inégalité :*

$$\|f^*\|_{\infty,M^*} \leqslant \left(\frac{q-1}{q-n}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(n.\frac{V}{2}\right)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} \omega_{n-1}^{-1/n} \|\nabla f^*\|_{q,M^*}.$$

Preuve du lemme. — Soit R le rayon de la boule M^*, alors :

$$\|\nabla f^*\|_{q,M^*}^q = \omega_{n-1} \int_0^R |(f^*)'(r)|^q r^{n-1}\, dr.$$

Le changement de variable $r = t^{q-1/q-n}$ et l'inégalité de Hölder donnent :

$$\|\nabla f^*\|_{q,M^*}^q \geqslant \omega_{n-1} \left(\frac{q-n}{q-1}\right)^{q-1} R^{n-q} \left\{ \int_0^{R^{q-n/q-1}} \left| \frac{d}{dt} f^*(t^{\frac{q-1}{q-n}}) \right| dt \right\}^q.$$

Et compte tenu de la décroissance de f^*, on a :

$$\|\nabla f^*\|_{q,M^*}^q \geqslant \omega_{n-1} \left(\frac{q-n}{q-1}\right)^{q-1} R^{n-q} \|f^*\|_{\infty,M^*}^q),$$

d'où le lemme.

Preuve du théorème 7. — Il suffit d'appliquer le lemme à la fonction $f - a$ sur M_+ ou M_-. On obtient :

$$\|f^* - a\|_{\infty,M^*} \leqslant \left(\frac{q-1}{q-n}\right)^{1-\frac{1}{q}} \omega_{n-1}^{-1/n} \left(n.\frac{V}{2}\right)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} \|\nabla f^*\|_{q,M^*},$$

et les résultats de 1.1.3 sur la symétrisation nous permettent de conclure. La détermination de K_2 se fait de la même manière qu'au corollaire du théorème 5.

Remarque. — Nous avons prouvé implicitement que si (M,g) est à bord :

1) $\forall f \in \mathring{H}_1^q(M)$ $(1 \leqslant q < n)$:

$$\|f\|_p \leqslant \frac{C^*}{C(M)}.K(n,q)\|\nabla f\|_q \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}.$$

2) $\forall f \in \mathring{H}_1^n(M)$:

$$\int_M e^f\, dv_g \leqslant c(n).V.\exp\left[\mu_n.\left(\frac{C^*}{C(M)}\right)^n \|\nabla f\|_n^n\right].$$

3) $\forall f \in \mathring{\mathrm{H}}_1^q(\mathrm{M})$ $(q>n)$:

$$\|f\|_\infty \leqslant \left(\frac{q-1}{q-n}\right)^{1-\frac{1}{q}} . (n.\mathrm{V})^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} . \omega_{n-1}^{-1/n}\left(\frac{\mathrm{C}^*}{\mathrm{C}(\mathrm{M})}\right) \|\nabla f\|_q .$$

Mais pour préciser ces inégalités, il conviendrait de savoir minorer la constante isopérimétrique C(M).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. AUBIN, Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl.*, 55 (1976), 269-296.
[2] T. AUBIN, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *J. Diff. Géom.*, 11 (1976), 573-598.
[3] T. AUBIN, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire, *J. Funct. Anal.*, 32 (1979), 148-174.
[4] P. BÉRARD et D. MEYER, Inégalités isopérimétriques et applications, à paraître aux *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*
[5] P. CHERRIER, Une inégalité de Sobolev sur les variétés riemanniennes, *Bull. Sci. Math.*, 103 (1979), 353-374.
[6] S. GALLOT, A Sobolev inequality and some geometric applications (à paraître).
[7] S. GALLOT, Inégalités isopérimétriques sur les variétés riemanniennes compactes sans bord (à paraître).
[8] D. GILBARG et N. S. TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of second order, *Grundlehren der Math.*, 224, Springer, 1977.
[9] M. GROMOV, Paul Levy's isoperimetric inequality, *Publications I.H.E.S.*
[10] D. HULIN, Le second nombre de Betti d'une variété riemannienne $\frac{1}{4}-\varepsilon$ pincée de dimension 4 (à paraître).
[11] S. ILIAS, Sur une inégalité de Sobolev, *C.R.A.S.*, Paris, t. 294, Série I (1982), 731-734.
[12] P. LI, On the Sobolev constant and the *p*-spectrum of a compact riemannian manifold, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 13, fasc. A (1980), 451-469.
[13] D. MEYER, Un lemme de géométrie hilbertienne et des applications à la géométrie riemannienne, à paraître aux *C.R.A.S.*, Paris.

Manuscrit reçu le 1er septembre 1982.

Saïd ILIAS,
22, rue M. Le Prince
75006 Paris
et
Laboratoire associé C.N.R.S. n° 212.