ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL KOOSIS

La plus petite majorante surharmonique et son rapport avec l'existence des fonctions entières de type exponentiel jouant le rôle de multiplicateurs

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 1 (1983), p. 67-107

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_1_67_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33,1 (1983), 67-107

LA PLUS PETITE MAJORANTE SURHARMONIQUE ET SON RAPPORT AVEC L'EXISTENCE DES FONCTIONS ENTIÈRES DE TYPE EXPONENTIEL JOUANT LE RÔLE DE MULTIPLICATEURS

par Paul KOOSIS (*)

Introduction.

Le travail exposé dans cet article a comme point de départ l'étude des fonctions $W(x) \geq 1$ *paires et continues* pour lesquelles il existe des fonctions entières non-nulles φ, *de type exponentiel arbitrairement petit*, telles que $W(x)\varphi(x)$ soit *borné* sur l'axe réel. On s'intéresse surtout à la recherche des conditions portant sur W qui seraient nécessaires et suffisantes pour l'existence de telles fonctions φ.

Ecrivons $w(x) = \log W(x)$. L'existence des fonctions φ est assurée si, pour tout $a > 0$, on peut trouver une fonction croissante $n(t)$ sur $[0, \infty)$, *à valeurs entières,* telle que

$$\frac{n(t)}{t} \longrightarrow \frac{a}{\pi}, \ t \longrightarrow \infty \tag{0.1}$$

et que

$$w(x) + \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dn(t) \leq C^{te}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{0.2}$$

Si, en effet, une telle fonction $n(t)$ est à notre disposition, nous pouvons prendre la suite $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ $(\lambda_1 > 0)$ de ses points de saut (dans cette suite, une même valeur se trouve répétée un nombre de fois égal au saut de $n(t)$ pour cette valeur de t), et

(*) Recherche subventionnée en partie par la National Science Foundation. Allocation No. MCS80-02955. Je remercie M. Yves Dermenjian de m'avoir aidé à corriger quelques fautes de français.

former ensuite la fonction entière $\varphi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$. Le produit $W(x)\varphi(x)$ sera alors borné sur $\mathbf{R}$ d'après (0.2). La fonction φ sera en outre de type exponentiel a. Ceci est une conséquence presque immédiate de (0.1) ; pour s'en convaincre, il suffit de soumettre le membre de droite de la relation

$$\log |\varphi(z)| \leqslant \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{|z|^2}{t^2}\right) dn(t)$$

à une intégration par parties.

Supposons maintenant que l'existence des φ, de type exponentiel arbitrairement petit, se voie confirmée de quelque façon que ce soit. Alors, parmi ces fonctions φ se trouvent nécessairement certaines fournies par la construction qu'on vient de décrire. Une telle φ peut en effet être supposée paire, avec $\varphi(0) = 1$; on peut aussi, comme on sait (voir par ex. [1], pp. 107-108), ramener tous ses zéros sur l'axe réel en y faisant diminuer les valeurs $|\varphi(x)|$. Si on désigne par $n(t)$ le nombre de zéros de la nouvelle fonction φ sur $[0, t]$ on retombe sur la relation (0.2). Quant à (0.1), elle est une conséquence directe d'un théorème connu de Levinson (voir [2], pp. 33-41, [3], pp. 136-138 ou [4]) appliqué à l'ancienne fonction φ. L'existence des φ est donc équivalente à celle des fonctions croissantes $n(t)$, *à valeurs entières*, satisfaisant, pour $a > 0$ arbitraire, à (0.1) et aussi à (0.2).

Il arrive que la fonction $w(x) = \log W(x)$, définie sur $\mathbf{R}$, ait un prolongement naturel au plan complexe. Dans ce cas, on peut souvent lever la restriction obligeant la fonction croissante $n(t)$ à ne prendre que des valeurs entières. Un exemple important est fourni en prenant pour $W(x)$ la restriction à l'axe réel d'une fonction entière paire $W(z)$, de type exponentiel. On peut alors écrire $w(z) = \log |W(z)|$ pour $z \in \mathbf{C}$. Supposons maintenant qu'on puisse, pour un $a > 0$ donné, trouver une fonction $\rho(t)$ croissante sur $[0, \infty)$ avec $\rho(t) = O(t)$,

$$\frac{\rho(t)}{t} \longrightarrow \frac{a}{\pi}, \; t \longrightarrow \infty \tag{0.3}$$

et

$$w(x) + \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t) \leqslant C^{te}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{0.4}$$

La fonction $w(z) + \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d\rho(t)$ est sousharmonique dans $\mathbf{C}$ et bornée supérieurement par un multiple constant de $|z| + 1$. Cela nous permet d'employer un théorème de Phragmén-Lindelöf ([3], p. 82 ; [5], pp. 177-178) pour tirer, de (0.4), l'inégalité

$$w(x+i) + \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{(x+i)^2}{t^2} \right| d\rho(t) \leqslant C^{te}, \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (0.5)$$

Notons $[\rho(t)]$ la *partie entière* de $\rho(t)$. On sait que

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d\rho(t) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d[\rho(t)]$$

deviennent comparables dès que z s'éloigne de l'axe réel. On a, par exemple,

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{(x+i)^2}{t^2} \right| d[\rho(t)] \qquad (0.6)$$
$$\leqslant \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{(x+i)^2}{t^2} \right| d\rho(t) + \log^+ |x|, \quad x \in \mathbf{R}$$

(voir ci-dessous). Donc, si $n(t) = ([\rho(t)] - 1)^+$, (0.5) entraîne

$$w(x+i) + \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{(x+i)^2}{t^2} \right| dn(t) \leqslant C^{te}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

A cette relation on peut encore appliquer le théorème de Phragmén-Lindelöf utilisé tout à l'heure (cette fois-ci dans le demi-plan $\Im z < 1$), et on retrouve (0.2). La fonction croissante $n(t)$ ne prend que des valeurs entières et satisfait à (0.1) grâce à (0.3). On voit qu'ici la seule connaissance de la fonction croissante $\rho(t)$ nous a permis de construire une fonction φ, de type exponentiel a, rendant $W(x)\varphi(x)$ borné sur $\mathbf{R}$.

Une version générale de (0.6) sera suffisamment utile par la suite pour qu'on s'arrête un moment là-dessus. La voici :

LEMME. – *Soit* $\rho(t)$ *une fonction croissante et* $O(t)$ *sur* $[0, \infty)$. *Si* x *et* $y > 0$, *on a (pour* $z = x + iy$*)*

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| (d[\rho(t)] - d\rho(t)) \qquad (0.7)$$
$$\leqslant \log \left\{ \frac{\max(x, y)}{2y} + \frac{y}{2\max(x, y)} \right\}.$$

Pour éviter que le lecteur ou la lectrice ait à se rapporter ailleurs, donnons la démonstration. Lorsque $y = \Im z \neq 0$, on peut intégrer le membre de gauche de (0.7) par parties. La propriété $\rho(t) = O(t)$ garantit que le terme intégré s'annule, et il nous reste

$$\int_0^\infty (\rho(t) - [\rho(t)]) \frac{\partial}{\partial t} \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| dt. \tag{0.8}$$

Fixons z et introduisons la variable $\zeta = \dfrac{z^2}{t^2}$, $t > 0$; ζ parcourt une demi-droite $\mathcal{L}$ dans le plan complexe. Lorsque $\Re z^2 \leqslant 0$, la distance $|1 - \zeta|$ décroît quand t croît ; l'expression (0.8) est alors $\leqslant 0$ puisque $\rho(t) - [\rho(t)] \geqslant 0$. Si, par contre, $\Re z^2 > 0$, $|1 - \zeta|$ décroît d'abord jusqu'à sa valeur minimum $|\Im z^2|/|z|^2$, distance perpendiculaire du point 1 à la ligne $\mathcal{L}$, et remonte ensuite en tendant vers la limite 1. Dans ce cas, l'expression (0.8) sera $\leqslant \log(|z|^2/|\Im z^2|)$ parce que $\rho(t) - [\rho(t)] \leqslant 1$. On a vérifié (0.7).

Considérons maintenant le cas général d'une fonction $W(x)$, paire et $\geqslant 1$, avec $w(x) = \log W(x)$. Si, pour un $a > 0$ donné, on a une fonction croissante $\rho(t) = O(t)$ satisfaisant à (0.3) et à (0.4), la fonction $V(z) = \int_0^\infty \left| 1 - \dfrac{z^2}{t^2} \right| d\rho(t)$, harmonique dans $\Im z > 0$, est bornée supérieurement par une constante sur $\mathbf{R}$, et par $a|z| + o(|z|)$ dans le dit demi-plan. Le théorème de Phragmén-Lindelöf déjà employé entraîne ici que la fonction $V(z) - a\Im z$, harmonique dans $\Im z > 0$, y soit bornée supérieurement. Comme il est bien connu, cela oblige $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{V(x)}{1 + x^2}\, dx$ à être $> -\infty$, et de là, par (0.4), on a $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{w(x)}{1 + x^2}\, dx < \infty$. Cette relation nous permet de prolonger $w(x)$ au plan complexe par la formule

$$w(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{|\Im z|}{|z - t|^2}\, w(t)\, dt. \tag{0.9}$$

La fonction $w(z)$ est harmonique dans $\Im z > 0$ et on peut employer le théorème de Phragmén-Lindelöf une fois encore pour passer de (0.4) à (0.5) où $w(x + i)$ est maintenant donné par (0.9). En faisant jouer (0.6) on retrouve la relation

$$w(x + i) + \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{(x + i)^2}{t^2} \right| dn(t) \leqslant C^{te}, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{0.10}$$

avec $n(t) = ([\rho(t)] - 1)^+$.

Supposons alors que $W(x)$ jouisse de cette propriété de régularité locale :

Il existe trois constantes positives α, ℓ *et* C *telles qu'à tout* $x \in \mathbf{R}$ *corresponde un intervalle* J_x *de longueur* ℓ *contenant* x *avec*

$$CW(x') \geqslant (CW(x))^\alpha \,, \quad x' \in J_x \,. \tag{0.11}$$

Cette condition (ou plutôt une variante équivalente) est examinée au début de [1]. Elle n'est pas très restrictive, et se voit souvent remplie à cause de la façon dont la fonction $w(x)$ se présente.

Portons (0.11) dans (0.9). On trouve $w(x+i) \geqslant \gamma w(x) + C^{te}$ avec une constante γ dépendant seulement de α et de ℓ. En utilisant cette inégalité on obtient, de (0.10),

$$(W(x))^\gamma \, |\varphi(x+i)| \leqslant C^{te} \,, \quad x \in \mathbf{R} \,,$$

φ étant la fonction entière formée de la manière décrite ci-dessus à partir de $n(t)$. Si l'on prend maintenant $\psi(z) = (\varphi(z+i))^m$ avec $m = [1/\gamma] + 1$, on aura $W(x)\, |\psi(x)| \leqslant C^{te}$ sur $\mathbf{R}$ avec la fonction entière ψ de type exponentiel ma. On voit qu'une fonction $W(x)$ remplissant la condition supplémentaire (0.11) possède la propriété qui nous intéresse dès qu'il existe des fonctions croissantes $\rho(t) = O(t)$ satisfaisant à (0.3) (pour $a > 0$ arbitraire) et à (0.4) (avec $w(x) = \log W(x)$). Selon la discussion de tout à l'heure, il en est de même si $W(x)$ est la restriction à l'axe réel d'une fonction entière de type exponentiel, sans qu'il soit question de (0.11).

C'est pour ces raisons-là que nous regardons le sujet initial de ce travail comme étant ramené, en grande partie, à la question suivante :

Soit $w(x) \geqslant 0$ *une fonction paire et continue. Sous quelles conditions portant sur* w *existe-t-il, pour tout* $a > 0$, *une fonction croissante* $\rho(t) = O(t)$ *telle que (0.3) et (0.4) aient lieu ?*

Ce problème sera l'objet principal de notre attention dans ce qui va suivre.

La question a déjà été traitée dans [6] en faisant l'hypothèse que $W(x) = \exp w(x)$ satisfasse à (0.11). L'idée de [6] était de chercher des conditions qu'on pourrait exprimer en se référant à une *majorante* de $w(x)$. Par cette voie, on est effectivement arrivé à des conditions nécessaires et suffisantes, mais leur formulation est peu commode. A la fin de l'article, il est dit que l'emploi des *fonctions maximales* pourrait mener à une meilleure solution.

Cette considération se trouve à la base du présent travail. Les fonctions maximales qu'on va utiliser dépendent du paramètre a. Etant donné une fonction w, faisons d'abord son prolongement au plan complexe par la formule (0.9) et posons ensuite $F(x) = w(z) - a|\Im z|$ avec un $a > 0$ fixé à l'avance. Dans le § 2 on démontre qu'une fonction croissante $\rho(t) = O(t)$ satisfaisant à (0.3) et à (0.4) existe *si et seulement si* F *possède, dans* $\mathbf{C}$, *une majorante surharmonique finie.* Désignons par $\mathfrak{M}F$ *la plus petite majorante surharmonique de* F *dans* $\mathbf{C}$. On démontre (§ 1) que si, par exemple, $(\mathfrak{M}F)(0) < \infty$, $(\mathfrak{M}F)(z)$ est finie partout. La majorante $\mathfrak{M}F$ est une véritable fonction maximale de F (§ 1); on peut aussi la caractériser comme le résultat d'un processus itératif établi par l'emploi d'une fonction maximale de forme classique.

Afin de montrer que $(\mathfrak{M}F)(0) < \infty$ on peut, dans certains cas, se servir des résultats concernant l'estimation harmonique développés dans la première partie de [7]. On trouve ainsi des courtes démonstrations nouvelles pour les théorèmes classiques de Beurling et Malliavin [8. 9, 7] où il s'agit de fonctions $W(x)$ étant, soit des restrictions à $\mathbf{R}$ de fonctions entières de type exponentiel (§ 3), soit des exponentielles de fonctions $w(x)$ avec $w(x)/x$ d'énergie finie (§ 5). Ce genre de démonstration de l'existence des φ entières de type exponentiel rendant $W(x)\,\varphi(x)$ borné sur $\mathbf{R}$ fournit aussi une estimation pour $\sup_x W(x)\,|\varphi(x)/\varphi(0)|$ en fonction du type exponentiel a de φ. Cela se trouve au § 4.

1. La plus petite majorante surharmonique.

Soit $F(z)$ une fonction réelle, continue dans le plan complexe, et posons, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$V(z) = \inf\{U(z)\,;\ U \geqslant F \text{ partout et } U \text{ surharmonique dans } \mathbf{C}\}.$$

Ecrivons finalement $(\mathfrak{M}F)(z) = \min\{V(z), \liminf_{\zeta \to z} V(\zeta)\}$. En faisant cette définition, on considère comme surharmonique la fonction égale à l'infini partout ; $\mathfrak{M}F$ est donc toujours définie, la possibilité $\mathfrak{M}F \equiv \infty$ n'étant point exclue.

D'après les éléments de la théorie du potentiel, $(\mathfrak{M}F)(z)$ est elle-même une fonction surharmonique ([10], p. 69, théorème 4.16, y compris sa démonstration) ; comme F est continue on a aussi $\mathfrak{M}F \geqslant F$ partout. La fonction $\mathfrak{M}F$ est donc par sa définition même la *plus petite* parmi *toutes* les *majorantes surharmoniques de* F.

LEMME 1. – *Si* $(\mathfrak{M}F)(z) = \infty$ *pour un point* z, *on a* $\mathfrak{M}F = \infty$ *partout.*

Démonstration. – Afin de simplifier les écritures, nous allons supposer que $(\mathfrak{M}F)(0) = \infty$; il faut alors montrer que $(\mathfrak{M}F)(z) = \infty$ pour tout z.

Fixons un $M > 0$ fini tel que $F(z) < M$ dans un voisinage de 0 ; c'est possible, F étant continue. Comme toute fonction surharmonique, $\mathfrak{M}F$ a la propriété de semi-continuité

$$\liminf_{\zeta \to z} (\mathfrak{M}F)(\zeta) \geqslant (\mathfrak{M}F)(z) ; \tag{1.1}$$

il y a donc un $r_0 > 0$ assez petit pour que $(\mathfrak{M}F)(z) \geqslant 2M$ lorsque $|z| \leqslant 3r_0$. On aura en même temps $F(z) < M$ pour $|z| \leqslant 3r_0$ si r_0 est choisi convenablement.

Nous allons montrer que pour $|z_0| < r_0$, $(\mathfrak{M}F)(z_0) = \infty$. Fixons en effet un tel z_0 et prenons un r, $r_0 < r < 2r_0$, de sorte que le disque de rayon r centré au point z_0 soit *contenu* dans le disque $|z| \leqslant 3r_0$ et *contienne* le point 0. Il suffit de montrer que

$$\int_0^{2\pi} (\mathfrak{M}F)(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = \infty , \tag{1.2}$$

car cela entraîne $(\mathfrak{M}F)(z_0) = \infty$ par la surharmonicité de $\mathfrak{M}F$.

Supposons, raisonnant par l'absurde, que l'intégrale de gauche dans (1.2) soit *finie.* La fonction F étant continue, sa majorante $\mathfrak{M}F$ a une borne inférieure finie sur le cercle de rayon r autour de z_0. On aura donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \theta)} (\mathfrak{M}F)(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta < \infty , \tag{1.3}$$

quels que soient φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, et ρ, $0 \leqslant \rho < r$. Soit maintenant $U(z)$ la fonction définie de la manière suivante : pour

$|z - z_0| \geq r$ on pose $U(z) = (\mathfrak{M}F)(z)$, et pour $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ avec $0 \leq \rho < r$ on prend pour $U(z)$ la valeur de l'intégrale de Poisson (1.3). On sait ([10], p. 69) que $U(z)$ est surharmonique.

Pour $|z - z_0| \geq r$ on a évidemment $U(z) = (\mathfrak{M}F)(z) \geq F(z)$. Si, par contre, $|z - z_0| < r$, on a $|z| < 3r_0$, d'où $F(z) < M$, tandis que $U(z)$, donnée par (1.3), est $\geq 2M$, vu que toutes les valeurs de $(\mathfrak{M}F)(z_0 + re^{i\theta})$ sont $\geq 2M$. On voit que $U(z) \geq F(z)$ dans le disque $|z - z_0| < r$ aussi ; U est donc une *majorante surharmonique* de F et par conséquent $U \geq \mathfrak{M}F$. On a en particulier $(\mathfrak{M}F)(0) \leq U(0)$; or, comme $|0 - z_0| < r$, $U(0) < \infty$ par (1.3). L'hypothèse $(\mathfrak{M}F)(0) = \infty$ est donc contredite, et (1.2) est prouvée.

Nous avons montré que $(\mathfrak{M}F)(z) \equiv \infty$ pour $|z| < r_0$. Soit maintenant z_0 un point quelconque, et traçons autour de z_0 un cercle γ coupant le disque $\{|z| < r_0\}$ par un arc de *longueur positive.* La fonction $\mathfrak{M}F$ a une borne inférieure finie sur γ, donc, par sa surharmonicité, $(\mathfrak{M}F)(z_0) \geq \dfrac{1}{|\gamma|}\displaystyle\int_\gamma (\mathfrak{M}F)(\zeta)\,|d\zeta| = \infty$. Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE. – *Si* $(\mathfrak{M}F)(z)$ *est finie pour une valeur de* z, *elle est finie partout.*

Ainsi, il n'y a que deux possibilités qui peuvent se présenter pour la fonction $\mathfrak{M}F$: elle est soit *finie partout* ou bien *infinie partout.* Pour indiquer la première, on dira dorénavant que $\mathfrak{M}F$ *est finie.*

LEMME 2. – *Si* $\mathfrak{M}F$ *est finie et* $F(z)$ *harmonique dans un ouvert* Ω, $(\mathfrak{M}F)(z)$ *est aussi harmonique dans* Ω.

Démonstration. – Soit $z_0 \in \Omega$ et prenons un $r > 0$ assez petit pour que Ω contienne le disque fermé $\{|z - z_0| \leq r\}$. Il suffit de voir que $(\mathfrak{M}F)(z)$ est harmonique pour $|z - z_0| < r$.

Pour $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ et $0 \leq \rho < r$ on a, $F(z)$ étant harmonique, $F(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \theta)}\, F(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$.

L'intégrale de droite est à son tour $\leq$ celle de (1.3). Prenons maintenant la fonction surharmonique $U(z)$ construite lors de la démonstration du lemme précédent ; si $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ avec $0 \leq \rho < r$,

$U(z)$ est égale à l'intégrale (1.3) qui, on vient de le voir, est $\geqslant F(z)$. Pour $|z - z_0| \geqslant r$, $U(z) = (\mathfrak{M}F)(z)$ est aussi $\geqslant F(z)$.

La fonction $U(z)$ est donc une *majorante surharmonique* de $F(z)$, d'où $U(z) \geqslant (\mathfrak{M}F)(z)$. Mais $U(z) \leqslant (\mathfrak{M}F)(z)$ aussi. Pour $|z - z_0| \geqslant r$ c'est clair, et pour $|z - z_0| < r$, $U(z)$, donnée par l'intégrale (1.3), est $\leqslant (\mathfrak{M}F)(z)$ car cette fonction est surharmonique ([10], p. 69). Il s'ensuit que $U(z) = (\mathfrak{M}F)(z)$.

Or, pour $|z - z_0| < r$, $U(z)$, donnée par (1.3), est harmonique. La fonction $(\mathfrak{M}F)(z)$ est donc harmonique dans ce disque, c.q.f.d.

Si $\mathfrak{M}F$ est finie, on peut considérer l'ensemble E où $(\mathfrak{M}F)(z) = F(z)$. Il est possible que E soit *vide* ; c'est en tout cas un ensemble fermé à cause de (1.1) et de la continuité de F. L'ensemble où $(\mathfrak{M}F)(z) > F(z)$ est donc *toujours ouvert*.

Le résultat suivant rend de grands services lorsqu'on veut faire l'estimation de $\mathfrak{M}F$. J'en ai eu l'idée en réfléchissant à une conversation que j'avais eue avec L. Dubins au sujet de ce §. M. Dubins m'a apporté une aide précieuse par cette conversation ; je l'en remercie.

LEMME 3. – *Si* $\mathfrak{M}F$ *est finie, elle est harmonique sur l'ouvert* Ω *où* $(\mathfrak{M}F)(z) > F(z)$.

Démonstration. – Soit $z_0 \in \Omega$; supposons que

$$(\mathfrak{M}F)(z_0) = F(z_0) + 2\epsilon, \ \epsilon > 0.$$

Par (1.1) et la continuité de F on peut trouver un $r > 0$ tel que $(\mathfrak{M}F)(z) \geqslant F(z_0) + \epsilon$ et $F(z) < F(z_0) + \epsilon$ lorsque $|z - z_0| \leqslant r$. Il suffit de montrer que $(\mathfrak{M}F)(z)$ est harmonique pour $|z - z_0| < r$.

Soit $U(z)$ la fonction surharmonique utilisée dans les démonstrations des deux lemmes précédents. Pour $0 \leqslant \rho < r$ on a, selon (1.3) et le choix de r, $U(z_0 + \rho e^{i\varphi}) \geqslant F(z_0) + \epsilon$ puisque $(\mathfrak{M}F)(z_0 + re^{i\theta}) \geqslant F(z_0) + \epsilon$. Pour ces valeurs de ρ on a en même temps $F(z_0 + \rho e^{i\varphi}) < F(z_0) + \epsilon$; c'est-à-dire que $U(z) > F(z)$ pour $|z - z_0| < r$. Si $|z - z_0| \geqslant r$, $U(z) = (\mathfrak{M}F)(z) \geqslant F(z)$; on a donc $F \leqslant U$ partout, d'où $\mathfrak{M}F \leqslant U$.

A partir d'ici, la démonstration suit exactement celle du lemme 2.

Remarque. – Quand j'ai montré ce résultat à T. Gamelin il m'a signalé qu'une proposition semblable et, à plusieurs égards, plus générale, avait déjà été établie et employée par lui dans [11] (voir les pp. 130-132 de cet article). Son résultat semble exiger une démonstration plus difficile que la nôtre.

LEMME 4. – *Si* $\mathfrak{M}F$ *est finie, elle est continue.*

Démonstration. – Soit E l'ensemble où $(\mathfrak{M}F)(z) = F(z)$ et soit $\Omega = \mathbf{C} \sim E$. D'après le lemme 3, $\mathfrak{M}F$ est harmonique, donc continue, sur Ω ; il s'agit par conséquent de montrer que $\mathfrak{M}F$ est continue aux points de E.

Prenons un $z_0 \in E$ et le disque fermé Δ de rayon 1 centré au point z_0. La fonction $(\mathfrak{M}F)(z)$ est surharmonique dans $\mathbf{C}$ et harmonique en dehors de E ; elle est donc donnée par une représentation de Riesz ([10], p. 113) dans l'intérieur de Δ :

$$(\mathfrak{M}F)(z) = H(z) + \int_{E\cap\Delta} \log \left| \frac{1 - (\overline{\zeta} - \overline{z}_0)(z - z_0)}{z - \zeta} \right| d\mu(\zeta),$$

$$|z - z_0| < 1 . \quad (1.4)$$

Dans (1.4), μ est une mesure positive portée par $E \cap \Delta$ et $H(z)$ est harmonique pour $|z - z_0| < 1$.

La fonction $H(z)$ est continue au point z_0 ; il suffit donc de voir que l'intégrale de droite dans (1.4) – notons la $G(z)$ pour le moment – est continue en z_0. $G(z)$ est le potentiel de Green (pour Δ) de la mesure μ portée par $E \cap \Delta$, et *sur* $E \cap \Delta$, $G(\zeta) = (\mathfrak{M}F)(\zeta) - H(\zeta) = F(\zeta) - H(\zeta)$, une fonction continue au point z_0. La continuité de $G(z)$ en ce point est alors la conséquence d'un théorème classique ([10], p. 117-118, théorème 6.20, y compris sa démonstration), vu que μ est positive.

La démonstration est terminée.

Les deux théorèmes suivants ne trouveront pas d'emploi direct dans cet article. On les inclut parce qu'ils nous aident à mieux saisir le lien entre une fonction donnée et sa plus petite majorante surharmonique.

Soit $\mathfrak{M}$ la classe de *mesures positives* m, *à support compact* dans $\mathbf{C}$, telles que

$$\int_{\mathbf{C}} U(\zeta)\, dm(\zeta) \leqslant U(0) \quad (1.5)$$

pour toute fonction U, *continue et surharmonique dans* **C**. (Ce sont des *mesures de Jensen.*)

THEOREME. — *Si* F *est continue,*

$$(\mathfrak{M}F)(z) = \sup_{m \in \mathfrak{M}} \int_{\mathbf{C}} F(z + \zeta)\, dm(\zeta).$$

Démonstration. — Il est presque immédiat que

$$\int_{\mathbf{C}} F(z + \zeta)\, dm(\zeta) \leqslant (\mathfrak{M}F)(z)$$

pour chaque $m \in \mathfrak{M}$. On peut en effet supposer $\mathfrak{M}F$ finie (sinon, l'inégalité est claire); elle est donc une fonction continue selon le lemme 4. Il suffit alors de poser $U(\zeta) = (\mathfrak{M}F)(z + \zeta)$ dans (1.5); comme $F \leqslant \mathfrak{M}F$, on a la relation voulue.

Passons maintenant à la preuve de l'inégalité contraire. Introduisons, à cette fin, la fonction $V(z)$ égale au *supremum* des intégrales $\int_{\mathbf{C}} F(z + \zeta)\, dm(\zeta)$ pour les m *absolument continues* appartenant à $\mathfrak{M}$. Si $r > 0$, la mesure de masse totale 1 distribuée sur le disque $\{|\zeta| \leqslant r\}$ avec une *densité superficielle uniforme* appartient à $\mathfrak{M}$ ([10], p. 65). En prenant $r > 0$ arbitrairement petit, on voit que $F(z) \leqslant V(z)$. Comme supremum d'une famille de *fonctions continues,* V jouit en outre de la propriété de semi-continuité (1.1).

Nous allons montrer que $V(z)$ est surharmonique ; pour cela, il suffit qu'on vérifie la relation

$$V(z_0) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta. \tag{1.6}$$

Il y a un ensemble dénombrable de mesures absolument continues appartenant à $\mathfrak{M}$ qui est *dense* (pour la convergence L_1 à support borné) dans la collection de *toutes* ces mesures — notons $\{m_k, k = 1, 2, \ldots\}$ cet ensemble dénombrable. Comme F est continue, on a

$$V(z_0) = \sup_k \int_{\mathbf{C}} F(z_0 + \zeta)\, dm_k(\zeta).$$

Ecrivons $V_N(z_0) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant N} \int_{\mathbf{C}} F(z_0 + \zeta)\, dm_k(\zeta)$; on a, par le théorème de Lebesgue, $\int_0^{2\pi} V_N(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta \xrightarrow[N]{} \int_0^{2\pi} V(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta$,

et (1.6) sera vérifiée si on voit que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_N(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta \leqslant V(z_0)$ pour chaque N.

Fixons N, R et z_0. Etant donné θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, il y a un indice $k(\theta)$, $1 \leqslant k(\theta) \leqslant N$, tel que

$$V_N(z_0 + Re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{C}} F(z_0 + Re^{i\theta} + \zeta)\, dm_{k(\theta)}(\zeta)\,;$$

comme F est continue, on peut s'arranger pour que $k(\theta)$ soit une fonction mesurable de θ. Nous avons alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_N(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{C}} F(z_0 + Re^{i\theta} + \zeta)\, dm_{k(\theta)}(\zeta)\, d\theta\,. \tag{1.7}$$

Il y a évidemment une *mesure absolument continue* μ, à *support compact*, telle que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{C}} G(Re^{i\theta} + \zeta)\, dm_{k(\theta)}(\zeta)\, d\theta = \int_{\mathbf{C}} G(w)\, d\mu(w)$$

pour chaque fonction continue G. Si G est aussi *surharmonique*, l'intégrale de gauche est $\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(Re^{i\theta})\, d\theta \leqslant G(0)$; μ *appartient donc à* $\mathfrak{M}$. Le membre de droite dans (1.7), qui vaut $\int_{\mathbf{C}} F(z_0 + w)\, d\mu(w)$ est donc $\leqslant V(z_0)$ selon la définition de la fonction V. L'intégrale de gauche dans (1.7) est par conséquent $\leqslant V(z_0)$, le nombre N étant arbitraire. On a vu déjà que cela entraîne (1.6).

Notre fonction V est ainsi une majorante surharmonique de F. A ce titre, elle satisfait à la relation $V(z) \geqslant (\mathfrak{M}F)(z)$. Vu la définition de V, nous avons, à plus forte raison,

$$\sup_{m \in \mathfrak{M}} \int_{\mathbf{C}} F(z + \zeta)\, dm(\zeta) \geqslant (\mathfrak{M}F)(z)\,.$$

L'inégalité contraire a déjà été vue au début. Donc,

$$(\mathfrak{M}F)(z) = \sup_{m \in \mathfrak{M}} \int_{\mathbf{C}} F(z + \zeta)\, dm(\zeta)\,,$$

c.q.f.d.

Remarque. – Si H est *harmonique* dans **C** on a

$$H(z) = \int_{\mathbf{C}} H(z + \zeta)\, dm(\zeta)$$

pour toute $m \in \mathfrak{M}$. La classe $\mathfrak{M}$ est, pourtant, *plus restreinte* que celle composée de *toutes* les m positives satisfaisant à la relation précédente pour les fonctions H harmoniques. Voici un exemple que T. Lyons m'a montré.

Soit p la mesure portée par le disque $\{|\zeta| \leqslant 1\}$, ayant une densité superficielle égale à $1/\pi$. On sait ([10], p. 65) que $p \in \mathfrak{M}$. Soit μ la mesure portée par le disque $|\zeta - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{4}$ ayant *la même* densité superficielle que p, et prenons enfin la mesure ponctuelle δ de masse 1 concentrée au point $1/2$. Si H est harmonique dans $\mathbf{C}$, on a $\int_{\mathbf{C}} H(z+\zeta)\, d\mu(\zeta) = \frac{1}{16} \int_{\mathbf{C}} H(z+\zeta)\, d\delta(\zeta)$, donc

$$H(z) = \int_{\mathbf{C}} H(z+\zeta)\, dp(\zeta) = \int_{\mathbf{C}} H(z+\zeta) \left(dp(\zeta) - d\mu(\zeta) + \frac{1}{16}\, d\delta(\zeta)\right).$$

La mesure $m = p - \mu + \frac{1}{16}\delta$ est positive et satisfait à la relation en question pour les fonctions harmoniques H ; pourtant, elle n'appartient pas à $\mathfrak{M}$.

Prenons en effet la fonction

$$U_0(z) = \begin{cases} 0, & |z| \geqslant 1 \\ \log \left| \dfrac{1-(z/2)}{z-(1/2)} \right|, & |z| < 1\,; \end{cases}$$

U_0 est surharmonique dans $\mathbf{C}$, mais

$$\int_{\mathbf{C}} U_0(\zeta)\, dm(\zeta) = \infty > U_0(0) = \log 2\,.$$

Il est vrai que U_0 n'est pas continue, mais on peut approcher U_0 par une fonction surharmonique continue $U \leqslant U_0$ ([10], p. 71) et on aura encore $\int_{\mathbf{C}} U(\zeta)\, dm(\zeta) > U(0)$ si U est choisie assez proche de U_0.

Cet exemple montre que l'on *ne peut pas* caractériser $(\mathfrak{M}F)(z)$ comme le supremum des intégrales $\int_{\mathbf{C}} F(z+\zeta)\, dm(\zeta)$ pour *toutes* les mesures m positives et à support compact telles que $H(z) = \int_{\mathbf{C}} H(z+\zeta)\, dm(\zeta)$ pour les fonctions harmoniques H.

Etant donné une fonction F réelle et continue sur $\mathbf{C}$, posons

$$(MF)(z) = \sup_{r>0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|\zeta|<r} F(x+\zeta)\, d\xi d\eta\,.$$

(*Ici, et dorénavant, on écrit* $\zeta = \xi + i\eta$). Cette définition rappelle celle de la fonction maximale de Hardy et Littlewood, mais ici la fonction F elle-même figure dans l'intégrale, et non sa valeur absolue. A cause de cette différence, notre définition ressemble aussi à celle de la fonction maximale « perpendiculaire » pour le demi-espace $\{(z, t) ; z \in \mathbf{C}, t \geqslant 0\}$.

THEOREME. – *Soit* F *une fonction réelle, continue sur* $\mathbf{C}$, *et posons* $F^{(1)} = MF$, $F^{(2)} = MF^{(1)}, F^{(3)} = MF^{(2)}, \ldots$.

Alors, $\mathfrak{M}F = \lim_{n\to\infty} F^{(n)}$.

Démonstration. – La suite des fonctions $F^{(n)}(z)$ est évidemment croissante ; soit $G(z) = \lim_{n\to\infty} F^{(n)}(z)$. Il est presque immédiat que $MG = G$, donc

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|\zeta|<r} G(z + \zeta)\, d\xi d\eta \leqslant G(z) \tag{1.8}$$

pour tout $z \in \mathbf{C}$. La fonction G est d'autre part la limite d'une suite croissante de fonctions $F^{(n)}(z)$ ayant chacune la propriété de semi-continuité (1.1) ; elle a donc cette propriété aussi. G est alors surharmonique en vue de (1.8). On a évidemment $G \geqslant F$, d'où $G(z) \geqslant (\mathfrak{M}F)(z)$.

Or, $\mathfrak{M}F$ est surharmonique et $\geqslant F$. De là on tire successivement $\mathfrak{M}F = M\mathfrak{M}F \geqslant MF = F^{(1)}$, $\mathfrak{M}F = M\mathfrak{M}F \geqslant MF^{(1)} = F^{(2)}$, etc. On a par conséquent $\mathfrak{M}F \geqslant \lim_{n\to\infty} F^{(n)} = G$. Puisque $G \geqslant \mathfrak{M}F$ on a enfin $\mathfrak{M}F = G$, c.q.f.d.

Remarque. – La construction fournie par ce théorème-ci a en fait été la première façon d'introduire la fonction $\mathfrak{M}F$ dans ce travail.

2. Rôle joué ici par la plus petite majorante surharmonique.

Prenons une fonction $w(x) \geqslant 0$ paire et continue ; nous allons voir que l'existence d'une fonction croissante $\rho(t) = O(t)$ ayant les propriétés (0.3) et (0.4) (voir l'introduction) est directement liée à la finitude de $\mathfrak{M}F$ pour une certaine fonction F. Dans l'introduction il a déjà été remarqué que l'existence d'une fonction ρ implique

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{1 + x^2}\, dx < \infty \ ; \tag{2.1}$$

nous allons donc supposer (2.1) satisfaite. Soit $a > 0$; on peut alors poser

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z|\, w(t)\, dt}{|z - t|^2} - a\,|\Im z|. \tag{2.2}$$

La fonction F est continue partout et *harmonique dans chacun des demi-plans* $\Im z > 0$, $\Im z < 0$. Si $\mathfrak{M}F$ est finie elle est *aussi harmonique dans chacun de ces deux demi-plans* selon le lemme 2 (§ 1).

Continuons notre examen de la fonction $\mathfrak{M}F$, supposant toujours qu'elle soit finie. Elle est paire. On a en effet $F(z) = F(-z)$, donc $F(z) \leqslant$ la fonction *surharmonique*

$$V(z) = \min\{(\mathfrak{M}F)(z),\ (\mathfrak{M}F)(-z)\}.$$

Cela entraîne $V(z) \geqslant (\mathfrak{M}F)(z)$; il est d'autre part clair que $V(z) \leqslant (\mathfrak{M}F)(z)$, et $\mathfrak{M}F$ se confond avec la fonction paire V. Comme $F(z) = F(\bar{z})$, on voit de la même façon que $(\mathfrak{M}F)(z) = (\mathfrak{M}F)(\bar{z})$.

Dans le demi-plan $\Im z > 0$, $(\mathfrak{M}F)(z) + a\Im z$ est harmonique et $\geqslant F(z) + a\Im z$, ce qui est *positif* d'après (2.2). On a donc la représentation de Poisson

$$(\mathfrak{M}F)(z) + a\Im z = \gamma \Im z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z - t|^2}\, d\mu(t), \quad \Im z > 0,$$

avec une mesure positive μ et un nombre $\gamma \geqslant 0$. En vertu de la continuité de $\mathfrak{M}F$ (§ 1, lemme 4) on a $d\mu(t) = (\mathfrak{M}F)(t)\, dt$ et la dernière relation devient

$$(\mathfrak{M}F)(z) = (\gamma - a)\,|\Im z| + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z|\,(\mathfrak{M}F)(t)}{|z - t|^2}\, dt, \quad z \in \mathbf{C},$$

vu que $(\mathfrak{M}F)(z) = (\mathfrak{M}F)(\bar{z})$.

Nous avons $(\mathfrak{M}F)(t) \geqslant F(t) = w(t)$, $t \in \mathbf{R}$; la dernière formule donne donc, avec (2.2), $(\mathfrak{M}F)(z) \geqslant F(z) + \gamma|\Im z|$. La fonction $(\mathfrak{M}F)(z) - \gamma\,|\Im z|$ est ainsi une *majorante* de $F(z)$; elle est en outre *surharmonique* parce que $-\gamma\,|\Im z|$ l'est, γ étant $\geqslant 0$. On a par conséquent $(\mathfrak{M}F)(z) - \gamma\,|\Im z| \geqslant (\mathfrak{M}F)(z)$, d'où $\gamma = 0$. La dernière formule pour $(\mathfrak{M}F)(z)$ peut donc s'écrire

$$(\mathfrak{M}F)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z|\,(\mathfrak{M}F)(t)}{|z - t|^2}\, dt - a\,|\Im z|, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{2.3}$$

Il est maintenant vraisemblable que $(\mathfrak{M}F)(z)$, en tant que fonction surharmonique paire avec toute sa « masse » sur $\mathbf{R}$, ait une représentation comme *potentiel logarithmique* de la forme

$$C^{te} - \int_0^\infty \left(\log\left|1+\frac{z}{t}\right| + \log\left|1-\frac{z}{t}\right|\right) d\rho(t),$$

ρ étant une fonction croissante. La représentation (2.3) entraîne pour $(\mathfrak{M}F)(z)$ un certain comportement à l'infini qui doit, à son tour, impliquer (0.3) pour $\rho(t)$. Quant à (0.4), elle viendrait directement de l'inégalité $w(x) \leqslant (\mathfrak{M}F)(x)$. On pourrait, de cette façon, établir l'existence d'une fonction $\rho(t)$ jouissant des propriétés décrites dans l'introduction.

Nous allons voir que cette idée est juste. Sa réalisation nous obligera à nous occuper de plusieurs détails techniques. On verra aussi qu'on peut aller dans le sens inverse, et cela sera plus facile.

Commençons par deux lemmes. Si $\mathfrak{M}F$ est finie on a, en posant $z = i$ dans (2.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathfrak{M}F)(t)}{1+t^2}\, dt < \infty. \tag{2.4}$$

Comme $(\mathfrak{M}F)(t) \geqslant 0$, la relation (2.4) nous permet de définir la transformée de Hilbert

$$V(x) = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1}\right)(\mathfrak{M}F)(t)\, dt. \tag{2.5}$$

Pour $\Im z > 0$, écrivons

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-t}{|z-t|^2} + \frac{t}{t^2+1}\right)(\mathfrak{M}F)(t)\, dt\,; \tag{2.6}$$

on sait ([5], p. 78 et p. 142-147, surtout p. 147 ; [12], p. 252) que pour presque tout $x_0 \in \mathbf{R}$, $V(z) \longrightarrow V(x_0)$ lorsque $z \longrightarrow x_0$ de façon non-tangentielle.

LEMME 5. – *Si* $\mathfrak{M}F$ *est finie et* $V(x)$ *est donnée par (2.5),* $V(x) + ax$ *est presque partout égale à une fonction croissante.*

Démonstration. – La fonction $\mathfrak{M}F$ est continue (§ 1, lemme 4); de là on déduit facilement à l'aide d'un résultat connu (voir [5], p. 140 ou [12], p. 269) que $V(x)$ appartient *localement* à chaque espace L_p, et même que

$$\int_a^b |V(a + (x - a)e^{i\delta}) - V(x)|^p dx \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \delta \longrightarrow 0 \qquad (2.7)$$

si a et b sont finis.

D'après (2.3) et (2.6), la fonction $\Phi(z) = (\mathfrak{M}F)(z) + iV(z) + iax$ est analytique dans le demi-plan supérieur (on écrit $z = x + iy$). Soient $x_0 \in \mathbf{R}$, $0 < R < R'$, prenons un petit nombre $\delta > 0$, et intégrons $\dfrac{\Phi(z)}{z - x_0}$ autour du contour Γ formé des arcs $z = x_0 + Re^{i\theta}$, $z = x_0 + R'e^{i\theta}$, $\delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta$, et des segments $z = x_0 + re^{i\delta}$, $z = x_0 - re^{-i\delta}$, $R \leqslant r \leqslant R'$. Le théorème de Cauchy donne $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\Phi(z)}{z - x_0}\, dz = 0$. Prenons la partie imaginaire de cette relation et faisons tendre δ vers zéro. En tenant compte de (2.7), on trouve

$$\int_R^{R'} \frac{V(x_0 + r) - V(x_0 - r) - 2ar}{r}\, dr$$
$$= \int_0^\pi [(\mathfrak{M}F)(x_0 + Re^{i\theta}) - (\mathfrak{M}F)(x_0 + R'e^{i\theta})]\, d\theta,$$

c'est-à-dire,

$$2\int_R^{R'} \frac{V(x_0 + r) - V(x_0 - r) - 2ar}{r}\, dr \qquad (2.8)$$
$$= \int_0^{2\pi} (\mathfrak{M}F)(x_0 + Re^{i\theta})\, d\theta - \int_0^{2\pi} (\mathfrak{M}F)(x_0 + R'e^{i\theta})\, d\theta,$$

puisque $(\mathfrak{M}F)(z) = (\mathfrak{M}F)(\bar{z})$.

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\mathfrak{M}F)(x_0 + Re^{i\theta})\, d\theta$ est une fonction décroissante de R parce que $\mathfrak{M}F$ est surharmonique ([10], p. 70). Le membre de gauche dans (2.8) est donc $\geqslant 0$. Comme x_0, R et $R' > R$ sont arbitraires, le lemme s'ensuit.

LEMME 6. – *Soit* $u \geqslant 0$ *une fonction continue sur* $\mathbf{R}$ *qui s'annule identiquement sur un segment* $[-h, h]$, $h > 0$. *Posons*

$$G(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z|\, u(t)}{|z - t|^2}\, dt - a|\Im z|. \qquad (2.9)$$

Si $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t^2}\, dt > a$, *on a* $\displaystyle\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})\, d\theta > 0 = 2\pi G(0)$ *pour les petites valeurs de* $r > 0$.

Démonstration. – On a $G(z) = G(\bar{z})$; il suffit donc de voir que $\displaystyle\frac{d}{dr}\int_0^\pi G(re^{i\theta})\, d\theta > 0$ pour $r > 0$ près de 0.

$G(z)$ est harmonique dans le demi-disque $\{z\,;\,|z| < h/2\,,\,\Im z > 0\}$. Toutes ses dérivées partielles sont uniformément continues dans ce demi-disque parce que $u(t) \equiv 0$ pour $-h \leqslant t \leqslant h$. Si $0 < r < h/2$, on peut donc appliquer le théorème de Green avec un contour formé du demi-cercle $re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et du segment $-r < x < r$. On trouve ainsi

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial G(re^{i\theta})}{\partial r}\, r d\theta = \int_{-r}^{r} G_y(x + i0)\, dx\,, \tag{2.10}$$

où $G_y(x + i0)$ désigne $\lim\limits_{y \to 0+} \dfrac{G(x + iy) - G(x)}{y}$.

Pour $-h < x < h$ (où $G(x) = 0$) on a, selon (2.9),

$$G_y(x + i0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{|t - x|^2}\, dt - a\,,$$

et par l'hypothèse ceci est > 0 si x est assez près de 0. L'intégrale de gauche dans (2.10) est donc > 0 si $r > 0$ est assez petit ; c'est ce que nous voulions voir. Le lemme est établi.

Voici le résultat principal de ce §.

THEOREME. – *Soit* $w(x) \geqslant 0$ *une fonction continue et paire avec* $w(0) = 0$, *et supposons que (2.1) soit satisfaite. Soit* $a > 0$ *et formons la fonction* $F(z)$ *selon la formule (2.2). Pour qu'il existe une fonction croissante* $\rho(t) = O(t)$ *telle que*

$$\frac{\rho(t)}{t} \longrightarrow \frac{a}{\pi}\,, \quad t \longrightarrow \infty \tag{2.11}$$

et que, pour x *réel,*

$$w(x) + \int_0^{\infty} \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t) \leqslant C\,, \tag{2.12}$$

une constante, il faut et il suffit que $(\mathfrak{M}F)(0) < \infty$. *Si cette condition est remplie on peut, pour n'importe quel* $C > (\mathfrak{M}F)(0)$, *trouver une fonction* $\rho(t)$ *ayant les propriétés susdites telle que (2.12) soit valable.*

Remarque. – Il n'est pas très important qu'on ait $w(0) = 0$. Si $w(0) > 0$, on peut remplacer $w(x)$ par une autre fonction paire, continue et $\geqslant 0$, égale à $w(x)$ pour $|x| \geqslant 1$ et à zéro à l'origine. Cela a pour effet d'augmenter la valeur de C dans (2.12) qui subsiste pour la nouvelle valeur de C avec la fonction w initiale. La dernière phrase de l'énoncé ne reste alors plus valable.

Démonstration du théorème. – La *nécessité* est presque immédiate. Soit $\rho(t) = O(t)$ une fonction croissante telle que (2.11) et (2.12) soient valables. On voit comme au début de l'introduction que

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d\rho(t) \leqslant a\,|z| + o(|z|)\,; \tag{2.13}$$

on a aussi $\int_0^\infty \log \left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t) \leqslant C$ pour $x \in \mathbf{R}$ par (2.12), puisque $w(x) \geqslant 0$. La fonction $J(z) = \int_0^\infty \log \left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\rho(t)$ est sousharmonique dans $\mathbf{C}$. La dernière inégalité, jointe à (2.13), entraîne par conséquent

$$J(z) \leqslant C + a\,|\Im z| \tag{2.14}$$

selon le théorème de Phragmén-Lindelöf déjà cité dans l'introduction ([3], p. 82; [5], pp. 177-178). Pour $\Im z > 0$, la fonction $J(z) - C - a\Im z$ est donc harmonique et négative ; à cause de cela on peut écrire

$$J(z) - C - a\Im z = \gamma\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\Im z}{|z-t|^2}\, d\mu(t)\,, \quad \Im z > 0\,.$$

Ici, $\gamma \leqslant 0$, $d\mu(t) \leqslant 0$, et la partie absolument continue de $d\mu(t)$ vaut $(J(t) - C)\,dt$. Comme $J(z) = J(\bar z)$, on a ainsi

$$J(z) \leqslant a\,|\Im z| + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{|\Im z|\, J(t)}{|z-t|^2}\, dt\,, \quad z \in \mathbf{C}\,. \tag{2.15}$$

(En fait on a *égalité* ici, mais cela ne nous est pas nécessaire.)

Mettons (2.2) et (2.15) ensemble ; on trouve,

$$F(z) + J(z) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{|\Im z|\,(J(t) + w(t))}{|z-t|^2}\, dt\,,$$

ce qui est $\leqslant C$ par (2.12). La fonction

$$C - J(z) = C - \int_0^\infty \log \left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\rho(t)$$

est donc une *majorante* pour $F(z)$; elle est aussi *surharmonique.* On a $C - J(i) \leqslant C$, ρ étant croissante, d'où $(\mathfrak{M}F)(i) \leqslant C$. Par conséquent, $(\mathfrak{M}F)(0) < \infty$ selon le lemme 1 (§ 1).

La preuve de la *suffisance* demande plus d'effort. Soit $(\mathfrak{M}F)(0) < \infty$; $(\mathfrak{M}F)(z)$ est donc finie partout (lemme 1, § 1) et continue (lemme 4, § 1). Afin de ne pas se perdre dans des détails, *faisons d'abord la démonstration sous l'hypothèse supplémentaire que* $(\mathfrak{M}F)(z)$ *soit infiniment dérivable au voisinage de l'origine ;* nous lèverons cette hypothèse à la fin.

La transformée de Hilbert $V(x)$ donnée par (2.5) est *impaire* parce que $(\mathfrak{M}F)(x)$ est *paire*. $V(x)$, de même que $(\mathfrak{M}F)(x)$, est infiniment dérivable au voisinage de 0. Le rapport $V(x)/x$ reste donc borné lorsque $x \longrightarrow 0$; nous allons représenter ce rapport comme une transformée de Hilbert.

On a l'identité $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) dt = 0$; (2.5) s'écrit donc

$$V(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) [(\mathfrak{M}F)(t) - (\mathfrak{M}F)(0)]\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2-t^2} [(\mathfrak{M}F)(t) - (\mathfrak{M}F)(0)]\, dt,$$

$(\mathfrak{M}F)(t)$ étant paire. De là,

$$\frac{V(x)}{x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\mathfrak{M}F)(t) - (\mathfrak{M}F)(0)}{x^2 - t^2}\, dt \tag{2.16}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} \; \frac{(\mathfrak{M}F)(t) - (\mathfrak{M}F)(0)}{t}\, dt.$$

Or, $(\mathfrak{M}F)(t)$ étant infiniment dérivable, on a

$$(\mathfrak{M}F)(t) - (\mathfrak{M}F)(0) = O(t^2)$$

près de 0. La relation (2.4) entraîne donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(\mathfrak{M}F)(t) - (\mathfrak{M}F)(0)}{t} \right| \frac{dt}{1+t^2} < \infty, \tag{2.17}$$

$\mathfrak{M}F$ étant > 0.

Ici interviennent les espaces H_p. Etant donné une fonction $f(x)$ complexe définie sur $\mathbf{R}$, disons que $f(x) \in H_p\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$ *si, après le changement de variable* $x \longrightarrow \tau = \frac{i-x}{i+x}$ (qui fait correspondre $\mathbf{R}$ au cercle unité), *la fonction* $\varphi(\tau) = f(x)$ *appartient à l'espace* H_p *usuel correspondant au cercle unité.* Les formules (2 16) et (2.17) nous permettent alors d'affirmer que

$$\frac{(\mathfrak{M}F)(x) - (\mathfrak{M}F)(0)}{x} + i\,\frac{V(x)}{x} \in H_p\left(\frac{dx}{1+x^2}\right) \quad \text{si} \quad p < 1 \tag{2.18}$$

(voir [5], p. 137, 145 et 159 ; [12], p. 254). Nous verrons tout à l'heure que (2.18) est vraie aussi pour $p = 1$. Avant de le faire, montrons que $V(x)/x$ est en fait borné sur $\mathbf{R}$. On peut dire plus ; *ce rapport est borné et tend vers zéro lorsque* $x \longrightarrow \infty$. Cela dépend du lemme 5 et d'un théorème de Kolmogorov.

Pour une fonction $f(x)$ telle que

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2}\,dx \quad \text{(N.B. !)}$$

soit fini, désignons par $\tilde{f}(x)$ sa transformée de Hilbert

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1}\right) f(t)\,dt\,.$$

Le résultat de Kolmogorov dit que pour $\lambda > 0$,

$$\int_{\{|\tilde{f}(x)|>\lambda\}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant 32\,\frac{\|f\|_1}{\lambda}\,. \tag{2.19}$$

(Voir [5], p. 129 ; [12], p. 134 ; on se sert habituellement de la variable $\tau = \dfrac{i-x}{i+x}$ pour exprimer ce résultat.) Selon un procédé bien connu on peut, dans (2.19), remplacer le membre de droite par $o(1/\lambda)$ pour $\lambda \longrightarrow \infty$. Soit en effet $\epsilon > 0$; il y a une fonction $f_1(x)$ infiniment dérivable et à support compact telle que $\|f - f_1\|_1 < \dfrac{\epsilon}{64}$. La transformée de Hilbert $\tilde{f}_1(x)$ est *bornée,* donc, pour les grandes valeurs de λ, $|\tilde{f}(x)| > \lambda$ entraîne $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_1(x)| > \lambda/2$, et, par (2.19) appliquée à la *différence* $f - f_1$, $\displaystyle\int_{\{|\tilde{f}(x)|>\lambda\}} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{\epsilon}{\lambda}$ si λ est assez grand. D'après (2.4) et (2.5) on a par conséquent

$$\int_{\{|V(x)|>\lambda\}} \frac{dx}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \longrightarrow \infty. \tag{2.20}$$

Prenons un $\epsilon > 0$ et un $\gamma > 1$, et posons $\lambda = \epsilon\gamma^n$ dans (2.20). Comme $\displaystyle\int_{\gamma^n}^{\gamma^{n+1}} \frac{dx}{1+x^2} \sim \frac{\gamma-1}{\gamma^{n+1}}$ pour $n \longrightarrow \infty$, on voit que pour tout n assez grand il y a un x_n, $\gamma^n \leqslant x_n \leqslant \gamma^{n+1}$, tel que $|V(x_n)| \leqslant \epsilon\gamma^n$. Utilisons maintenant le fait que $V(x) + ax$ est *croissante* (lemme 5). Si $\gamma^n \leqslant x \leqslant \gamma^{n+1}$, on a

$$V(x_{n-1}) - a(x - x_{n-1}) \leqslant V(x) \leqslant V(x_{n+1}) + a(x_{n+1} - x)\,;$$

c'est-à-dire, pour n grand,

$$-\epsilon\gamma^{n-1} - a(\gamma^{n+1} - \gamma^{n-1}) \leqslant V(x) \leqslant \epsilon\gamma^{n+1} + a(\gamma^{n+2} - \gamma^n)\,,$$

de sorte que $|V(x)/x| \leqslant \epsilon\gamma + a(\gamma^2 - 1)$. La dernière inégalité est donc valable dès que x est assez grand.

Or, $\epsilon > 0$ et $\gamma > 1$ étaient *arbitraires*. Nous voyons par conséquent que $V(x)/x \longrightarrow 0$ pour $x \longrightarrow \infty$. Puisque $V(x) + ax$ *croît* et $V(x)/x$ reste borné pour $x \longrightarrow 0$, il faut que ce rapport soit borné sur $[0, \infty)$, car il l'est pour les grandes valeurs de x. La fonction $V(x)/x$ est donc bornée sur $\mathbf{R}$.

Revenons à (2.18). Comme $V(x)/x$ est borné, on a par (2.4),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(\mathfrak{M}F)(x) - (\mathfrak{M}F)(0)}{x} + i\,\frac{V(x)}{x} \right| \frac{dx}{1+x^2} < \infty\,.$$

Un théorème de Smirnov ([5], p. 102; [12], p. 278) permet de déduire de cette relation que (2.18), vraie pour $p < 1$, subsiste aussi pour $p = 1$; après multiplication par $-i$ de la fonction figurant dans (2.18), on voit que

$$\frac{V(x)}{x} - i\,\frac{(\mathfrak{M}F)(x) - (\mathfrak{M}F)(0)}{x} \in H_1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{(\mathfrak{M}F)(x) - (\mathfrak{M}F)(0)}{x} = K - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1}\right) \frac{V(t)}{t}\, dt \quad \text{p.p.} \tag{2.21}$$

avec une constante K. Le membre de gauche est impair et continu à l'origine comme fonction de x. Dans le membre de droite, *l'intégrale seule* a les mêmes propriétés, $V(t)/t$ étant paire et infiniment dérivable près de 0. Il faut donc que $K = 0$, et après multiplication par x, (2.21) devient

$$(\mathfrak{M}F)(x) = (\mathfrak{M}F)(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - t^2}\, \frac{V(t)}{t}\, dt \qquad \text{p.p.}$$

Joint à l'identité $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x^2}{x^2 - t^2}\,dt = 0$, cela donne finalement

$$(\ \ \mathrm{F})(x) = (\mathfrak{M}\mathrm{F})(0) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2x^2}{x^2 - t^2}\,\frac{\mathrm{V}(t) + at}{t}\,dt \quad \text{p.p.} \tag{2.22}$$

Posons maintenant

$$\rho(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{V}(t) + \frac{a}{\pi}\,t\,; \tag{2.23}$$

cette fonction est alors *croissante ;* elle est $\mathrm{O}(t)$ et satisfait à (2.11) en vue des propriétés de $\mathrm{V}(x)/x$ établies tout à l'heure. Soumettons chaque terme de

$$\left(\int_0^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^\infty\right) \frac{2x^2}{t(x^2 - t^2)}\,\rho(t)\,dt$$

à l'intégration par parties. Lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$ la somme des termes intégrés tend vers zéro si $\rho(x)$ admet une *dérivée finie,* donc pour presque toute valeur de x.

De (2.22) et (2.23) on trouve ainsi

$$(\ \ \mathrm{F})(x) = (\mathfrak{M}\mathrm{F})(0) - \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t) \quad \text{p.p.} \tag{2.24}$$

Un lemme élémentaire en théorie du potentiel affirme alors que (2.24), avec $\mathfrak{M}\mathrm{F}$ continue et ρ croissante, doit être valable *partout* sur $\mathbf{R}$ si elle l'est presque partout. On en donnera la preuve après avoir terminé cette démonstration. Nous voyons qu'on peut enlever le « p.p. » de (2.24).

On peut maintenant conclure. Nous avons en effet $(\mathfrak{M}\mathrm{F})(x) \geqslant w(x)$, et la relation (2.24) (valable partout) entraîne par conséquent (2.12) avec $\mathrm{C} = (\mathfrak{M}\mathrm{F})(0)$. C'est ce qu'il nous fallait.

Reste à nous affranchir de l'hypothèse que $(\mathfrak{M}\mathrm{F})(z)$ soit *infiniment dérivable* au voisinage de zéro ; voici comment on fait.

Fixons un $h > 0$ et prenons

$$w_h(x) = \begin{cases} 0\,, & -h \leqslant x \leqslant h \\ w(x) + 2\pi a h\,, & |x| \geqslant 2h \\ \text{fonct. linéaire sur } [-2h\,, -h] \text{ et sur } [h\,, 2h]. & \end{cases}$$

Comme $w(0) = 0$ on a, $w(x)$ étant continue, $|w_h(x) - w(x)| \leqslant \delta_h$, où δ_h est une quantité qui tend vers zéro avec h.

Ecrivons

$$\mathrm{F}_h(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z|\, w_h(t)}{|z-t|^2}\, dt - a|\Im z|\,;$$

on a évidemment $|\mathrm{F}_h(z) - \mathrm{F}(z)| \leqslant \delta_h$, donc, *si* $(\mathfrak{M}\mathrm{F})(0) < \infty$, $(\mathfrak{M}\mathrm{F})(z) + \delta_h$ *est une majorante surharmonique finie de* $F_h(z)$. Cela entraîne $(\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(0) < \infty$.

Je dis que $(\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(z)$ est une fonction *harmonique* de z au voisinage de 0. Ceci est une conséquence directe du lemme 3 (§ 1), grâce à l'inégalité

$$(\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(0) > \mathrm{F}_h(0) \tag{2.25}$$

que nous allons maintenant vérifier en faisant appel au lemme 6.

La fonction $w_h(t)$ a en effet les propriétés de celle, $u(t)$, qui figure dans l'énoncé de ce lemme. On a en outre $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_h(t)}{t^2}\, dt > 2a$. La fonction $\mathrm{F}_h(z)$ joue ici le rôle de $\mathrm{G}(z)$, donnée par (2.9). Nous avons donc $\mathrm{F}_h(0) < \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{F}_h(re^{i\theta})\, d\theta$ si $r > 0$ est assez petit. L'intégrale de droite est à son tour $\leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} (\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(re^{i\theta})\, d\theta$, ce qui est $\leqslant (\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(0)$, $\mathfrak{M}\mathrm{F}_h$ étant surharmonique. La relation (2.25) est donc valable.

Nous voyons ainsi que $(\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(z)$ est harmonique au voisinage de 0 ; elle y est donc infiniment dérivable, et *satisfait à l'hypothèse supplémentaire* qu'on avait imposée sur $(\mathfrak{M}\mathrm{F})(z)$. Le raisonnement suivi ci-dessus pour $\mathfrak{M}\mathrm{F}$ est donc valable pour $\mathfrak{M}\mathrm{F}_h$, et on trouve $(\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(x) = (\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(0) - \displaystyle\int_0^{\infty} \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t)$ avec une fonction croissante $\rho(t) = \mathrm{O}(t)$ satisfaisant à (2.11).

Or, $(\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(x) \geqslant w_h(x) \geqslant w(x) - \delta_h$ et $(\mathfrak{M}\mathrm{F})(0) + \delta_h \geqslant (\mathfrak{M}\mathrm{F}_h)(0)$, la fonction $(\mathfrak{M}\mathrm{F})(z) + \delta_h$ étant une majorante surharmonique de F_h. Par conséquent

$$w(x) + \int_0^{\infty} \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t) \leqslant (\mathfrak{M}\mathrm{F})(0) + 2\delta_h\,,$$

$x \in \mathbf{R}$. Comme $\delta_h > 0$ peut être rendu aussi petit qu'on veut en prenant h assez près de 0, la suffisance est complètement démontrée.

Voici le résultat qui a été employé pour montrer que (2.24) est en fait valable partout.

LEMME 7. – *Soit* $\rho(t) = O(t)$ *une fonction croissante sur* $[0, \infty)$ *et supposons que*

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d\rho(t) = \varphi(x) \quad \text{p.p. sur } \mathbf{R}, \tag{2.26}$$

φ étant une fonction continue. La relation (2.26) est alors valable partout sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. – Il suffit de voir que (2.26) est vraie partout sur l'intervalle $[-A, A]$ quel que soit $A > 0$. Fixons alors un A et écrivons

$$\int_0^\infty \log \left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t) = \int_{-2A}^{2A} \log |x - t| \, d\rho(t) + \int_{-2A}^{2A} \log \frac{1}{|t|} \, d\rho(t) + \int_{2A}^{\infty} \log \left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t). \tag{2.27}$$

Notons $\psi(x)$ la somme des deux derniers termes de droite dans (2.27); d'après l'hypothèse faite sur $\rho(t)$, $\psi(x)$ est continue pour $-A \leqslant x \leqslant A$. On a donc

$$\int_{-2A}^{2A} \log |x - t| \, d\rho(t) = \varphi(x) - \psi(x) \quad \text{p.p.}$$

avec $\varphi(x) - \psi(x)$ continue sur $[-A, A]$, et il suffit de montrer que cette relation a lieu partout sur $[-A, A]$.

La fonction $V(z) = \int_{-2A}^{2A} \log |z - t| \, d\rho(t)$ est sousharmonique, ρ étant croissante. Donc $\limsup_{z \to z_0} V(z) \leqslant V(z_0)$. En même temps, $\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z - z_0| < r} V(z) \, dxdy \geqslant V(z_0)$ (on écrit $z = x + iy$). Par conséquent, pour $z_0 = x_0 \in [-A, A]$,

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z - x_0| < r} V(z) \, dxdy \longrightarrow V(x_0) \quad \text{lorsque } r \longrightarrow 0. \tag{2.28}$$

Pour t fixe $\in [-2A, 2A]$, $\log |z - t|$ est harmonique comme fonction de z dans chacun des deux demi-plans $\Im z > 0$, $\Im z < 0$, et l'on a

$$\log |z - t| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z| \log |\xi - t|}{|z - \xi|^2} \, d\xi, \quad \Im z \neq 0. \tag{2.29}$$

Pour z fixe $\notin \mathbf{R}$ on vérifie facilement que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z| \, |\log |\xi - t||}{|z - \xi|^2} \, d\xi$ est bornée et continue comme fonction de t pour $-2A \leqslant t \leqslant 2A$.

Cela nous permet d'employer le théorème de Fubini après avoir multiplié les deux membres de (2.29) par $d\rho(t)$ et effectué l'intégration par rapport à t de $-2A$ à $2A$. On trouve ainsi

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z|}{|z-\xi|^2} V(\xi)\,d\xi\,, \quad z \notin \mathbf{R}\,,$$

c'est-à-dire,

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-3A}^{3A} \frac{|\Im z|\,(\varphi(\xi)-\psi(\xi))}{|z-\xi|^2}\,d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|\geqslant 3A} \frac{|\Im z|\,V(\xi)}{|z-\xi|^2}\,d\xi\,, \quad z \in \mathbf{R}\,. \tag{2.30}$$

Soit $-A \leqslant x_0 \leqslant A$. Il est clair que $|V(\xi)| = O(\log|\xi|)$ pour $|\xi| \geqslant 3A$; la deuxième intégrale de droite dans (2.30) tend donc vers zéro pour $z \longrightarrow x_0$. On voit facilement aussi que $\psi(\xi)$, et donc $\varphi(\xi)-\psi(\xi)$, appartient à $L_1(-3A, 3A)$. La fonction $\varphi(\xi)-\psi(\xi)$ est en outre continue au point x_0. La *première intégrale* de droite dans (2.30) tend par conséquent vers $\varphi(x_0)-\psi(x_0)$ lorsque $z \longrightarrow x_0$. Nous voyons d'après (2.30) que $V(z) \longrightarrow \varphi(x_0)-\psi(x_0)$ lorsque $z \longrightarrow x_0$ avec, soit $\Im z > 0$, soit $\Im z < 0$. Cela oblige l'intégrale de gauche dans (2.28) à tendre vers $\varphi(x_0) - w(x_0)$ lorsque $r \longrightarrow 0$. On a donc $V(x_0) = \varphi(x_0) - \psi(x_0)$ pour $-A \leqslant x_0 \leqslant A$. C'est ce qu'il fallait montrer.

3. Le théorème de Beurling et Malliavin.

Grâce au théorème du § précédent, la question à laquelle la discussion de l'introduction avait abouti se trouve ramenée à celle-ci :

Etant donné une fonction continue et paire $w(x) \geqslant 0$, quand est-ce que $(\mathfrak{M}F)(0) < \infty$ pour la fonction $F(z)$ fournie par (2.2) ?

Le lemme 3 du § 1 va nous permettre de traiter ce problème par l'estimation harmonique.

Il n'y a évidemment pas de difficulté si w est bornée ; on va donc toujours supposer que $w(x) \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow \pm\infty$. Cela étant admis, on pose pour chaque entier $N > 0$ $w_N(x) = \inf(w(x), N)$, on se fixe un $a > 0$, et on considère les fonctions

$$F_N(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Im z| \, w_N(t)}{|z-t|^2} \, dt - a |\Im z| . \tag{3.1}$$

Les F_N convergent en croissant vers la fonction F donnée par (2.2) ; *cela implique la convergence des* $\mathfrak{M}F_N$ *vers* $\mathfrak{M}F$. $\mathfrak{M}F_{N+1}$ est en effet pour chaque N une majorante surharmonique de $F_N \leqslant F_{N+1}$, d'où $\mathfrak{M}F_{N+1} \geqslant \mathfrak{M}F_N$. Soit $V(z)$ la limite de la suite monotone croissante $\{(\mathfrak{M}F_N)(z)\}$; $V(z)$ est *surharmonique* et $V(z) \geqslant F(z)$. On a donc $V(z) \geqslant (\mathfrak{M}F)(z)$, et comme $(\mathfrak{M}F)(z) \geqslant (\mathfrak{M}F_N)(z)$ pour chaque N, on peut dire aussi que $(\mathfrak{M}F)(z) \geqslant V(z)$. Ces deux inégalités montrent que

$$(\mathfrak{M}F)(z) = \lim_{N \to \infty} (\mathfrak{M}F_N)(z) .$$

Notre tâche se trouve réduite ainsi à la recherche d'une borne supérieure pour $(\mathfrak{M}F_N)(0)$ qui est indépendante de N.

Fixons une valeur de N. L'expression $N - a|\Im z|$ *est* une majorante surharmonique de $F_N(z)$, donc

$$(\mathfrak{M}F_N)(z) \leqslant N - a|\Im z| . \tag{3.2}$$

La fonction $(\mathfrak{M}F_N)(z)$ est en particulier finie, donc continue (lemme 4, § 1). Comme $w(x) \longrightarrow \infty$ lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$ on a $F_N(x) = N$ pour tout x réel de valeur absolue assez grande. D'après (3.2) il y a par conséquent un nombre L tel que

$$(\mathfrak{M}F_N)(x) = F_N(x) = N \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant L . \tag{3.3}$$

Deux possibilités se présentent maintenant : soit $(\mathfrak{M}F_N)(0) = F_N(0)$, soit $(\mathfrak{M}F_N)(0) > F_N(0)$. Dans le *premier cas* on a

$$(\mathfrak{M}F_N)(0) = w_N(0) \leqslant w(0) .$$

Si cela a lieu pour chaque N, on aura $(\mathfrak{M}F)(0) = w(0)$; là, on n'a pas de travail à faire. Dans le *deuxième cas,* $(\mathfrak{M}F_N)(0) > F_N(0)$ et il s'agit de trouver une majoration pour $(\mathfrak{M}F_N)(0)$ qui est indépendante de N.

Lorsque $(\mathfrak{M}F_N)(0) > F_N(0)$, $(\mathfrak{M}F_N)(z)$ est harmonique au voisinage de 0, cette fonction étant harmonique partout dans l'ouvert où elle est $> F_N(z)$ par le lemme 3, § 1. $(\mathfrak{M}F_N)(z)$ est harmonique aussi dans chacun des demi-plans $\Im z > 0$, $\Im z < 0$ parce que $F_N(z)$ l'est (lemme 2, § 1). On voit que $(\mathfrak{M}F_N)(z)$ est harmonique partout dans $\mathbf{C}$ sauf sur un certain ensemble fermé $E_0 \subseteq \mathbf{R}$ où $(\mathfrak{M}F_N)(x) = F_N(x) = w_N(x)$; selon (3.3), E_0 inclut les deux demi-droites $(-\infty, -L]$ et $[L, \infty)$. On a aussi $0 \notin E_0$.

La différence $(\mathfrak{M}F_N)(x) - w_N(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et nulle sur $E_0 \supseteq (-\infty, -L] \cup [L, \infty)$. Si l'on se donne un $\epsilon > 0$ on peut donc trouver un petit $\delta > 0$ tel que

$$(\mathfrak{M}F_N)(x) - w_N(x) < \epsilon, \quad x \in E_0 + [-\delta, \delta]. \tag{3.4}$$

Prenons δ assez petit pour que $0 \notin E_0 + [-\delta, \delta]$ et désignons ce dernier ensemble par E ; E est un ensemble fermé sur $\mathbf{R}$ composé d'un nombre *fini* d'intervalles fermés ; il contient les deux demi-droites $(-\infty, -L+\delta]$, $[L-\delta, \infty)$. Soit $\mathcal{D} = \mathbf{C} \sim E$; on a $0 \in \mathcal{D}$. $(\mathfrak{M}F_N)(z)$ est harmonique dans $\mathcal{D}$ parce que $E_0 \subset E$.

Le domaine $\mathcal{D}$ a la forme de ceux étudiés dans la première partie de [7]. Nous allons obtenir la représentation de Poisson pour $(\mathfrak{M}F_N)(z)$ dans $\mathcal{D}$.

On a $w_N(x) \geq 0$, d'où, par (3.1), $(\mathfrak{M}F_N)(z) \geq F_N(z) \geq -a|\Im z|$ et finalement, par (3.2),

$$-a|\Im z| \leq (\mathfrak{M}F_N)(z) \leq N - a|\Im z|. \tag{3.5}$$

Soit $Y_{\mathcal{D}}(z)$ la fonction continue positive, harmonique dans $\mathcal{D}$ et *nulle* sur E, satisfaisant à une relation de la forme

$$Y_{\mathcal{D}}(z) = |\Im z| + O(1). \tag{3.6}$$

Si $z \in \mathcal{D}$, notons $d\omega_{\mathcal{D}}(t, z)$ la différentielle (en t) de la *mesure harmonique pour $\mathcal{D}$ associée à z et portée par* E. Comme $(\mathfrak{M}F_N)(z)$, harmonique dans $\mathcal{D}$, est continue jusqu'à E et satisfait à (3.5), on a

$$(\mathfrak{M}F_N)(z) = \int_E (\mathfrak{M}F_N)(t)\, d\omega_{\mathcal{D}}(t, z) - aY_{\mathcal{D}}(z).$$

De là, par (3.4),

$$(\mathfrak{M}F_N)(0) \leq \int_E (w_N(t) + \epsilon)\, d\omega_{\mathcal{D}}(t, 0) - aY_{\mathcal{D}}(0),$$

c'est-à-dire,

$$(\mathfrak{M}F_N)(0) \leq \int_E w(t)\, d\omega_{\mathcal{D}}(t, 0) + \epsilon - aY_{\mathcal{D}}(0). \tag{3.7}$$

Ici, $\epsilon > 0$ est arbitraire mais le domaine $\mathcal{D}$ en dépend. L'exacte description de $\mathcal{D}$ est d'ailleurs inaccessible *en principe ;* pour y arriver il faudrait connaître le comportement précis de la fonction

$\mathfrak{M}F_N$ dont nous essayons justement de faire l'estimation. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que *si* $(\mathfrak{M}F_N)(0)$ *n'est pas déjà* $\leqslant w(0)$, $(\mathfrak{M}F_N)(0)$ *satisfait à l'inégalité (3.7) avec un domaine* $\mathcal{D}$ *ayant la forme générale décrite ci-dessus.*

(Dans une version antérieure du raisonnement conduisant à (3.7) il y avait une erreur qui a d'abord été remarquée par T. Lyons et ensuite par T. Gamelin et J. Garnett. Je les en remercie.)

L'utilité de (3.7) consiste en ceci : on peut parfois majorer l'intégrale de droite dans (3.7) par un multiple constant de $Y_{\mathcal{D}}(0)$ avec la constante *dépendant seulement de* w *et non du domaine* $\mathcal{D}$. Cette possibilité est examinée dans la première partie de [7]. Si elle se réalise, on a un moyen pour prouver que le membre de droite de (3.7) est $\leqslant \epsilon$ quel que soit $\mathcal{D}$ dès que a est assez grand, et cette estimation dépendra uniquement de w et de a, et non de N. Voici une application de ce procédé.

THEOREME. – *Soit* $f(z)$ *une fonction entière de type exponentiel* B, *et supposons que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty. \tag{3.8}$$

Si $a > 0$, *il y a une fonction entière* $\varphi \not\equiv 0$ *de type exponentiel* a *telle que* $(1 + |f(x)|)\,\varphi(x)$ *soit borné sur* $\mathbf{R}$.

Remarque. – Ce résultat est dû à Beurling et Malliavin ([8, 9]). Une autre démonstration, fondée sur la dualité, se trouve dans la deuxième partie de [7].

Démonstration du théorème. – Fixons d'abord une valeur de $a > 0$ et prenons

$$T(z) = 1 + \frac{z^2}{M^2}\,\left(f(z)\,\overline{f(\bar{z})} + f(-z)\,\overline{f(-\bar{z})}\right) \tag{3.9}$$

avec une constante M qui sera spécifiée tout à l'heure.

La fonction $T(z)$ est entière, de type exponentiel 2B, et paire ; on a $T(z) \geqslant 1$ sur $\mathbf{R}$ et $T(0) = 1$. Appliquons le théorème de [7], p. 287, à T avec la formule pour $Y_{\mathcal{D}}(0)$ se trouvant à la p. 277 de cet article. On obtient

$$\int_E \log T(t)\, d\omega_{\mathcal{D}}(t, 0) \leqslant \left[J + \sqrt{2\pi e J(J + B)}\right] Y_{\mathcal{D}}(0) \tag{3.10}$$

pour les domaines $\mathcal{D}$ de la forme décrite tantôt ; ici,

$$J = \int_0^\infty \frac{\log T(x)}{x^2}\, dx .$$

Prenons maintenant M assez grand dans (3.9) pour que la quantité J satisfasse à $J + \sqrt{2\pi e J(J + B)} < a$; cela est possible grâce à (3.8). Posons alors $w(x) = \log T(x)$; (3.10) et (3.7) entraînent $(\mathfrak{M}F_N)(0) \leqslant \epsilon$. Ici, $w(0) = 0$; donc, comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, $(\mathfrak{M}F_N)(0) = 0$ et finalement $(\mathfrak{M}F)(0) = 0$.

Faisons appel au théorème du § précédent ; selon ce résultat il y a une fonction croissante $\rho(t) = O(t)$ satisfaisant à (2.11) et à (212). La dernière relation s'écrit ici

$$\log T(x) + \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d\rho(t) \leqslant C, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{3.11}$$

C étant une constante.

A partir de (3.11) on suit le raisonnement de l'introduction. Prenons pour $\varphi(z)$ la fonction entière $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$ où les λ_k sont les points de saut de $([\rho(t)] - 1)^+$; d'après (2.11), φ est de type exponentiel a. A l'aide du lemme donné dans l'introduction on tire, de (3.11), $T(x)\,|\varphi(x)| \leqslant C^{te}$, $x \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire $|\varphi(x)| \leqslant C^{te}$ et $x^2\,|f(x)|^2\,|\varphi(x)| \leqslant C^{te}$, $x \in \mathbf{R}$, selon (3.9). On a bien $(1 + |f(x)|)\,|\varphi(x)| \leqslant C^{te}$, $x \in \mathbf{R}$, avec $\varphi \not\equiv 0$ entière, de type exponentiel a. C'est ce qu'il nous fallait.

Remarque. – Même avec ses préparatifs, cette démonstration est, je pense, plus simple que celle donnée dans la deuxième partie de [7]. La complexité de celle-ci semble venir de son emploi de la dualité qui a pour effet d'introduire une phase $\psi(x)$ dont il faut tenir compte (voir [7], p. 295 et seq., surtout les pages 298-299).

4. Une version quantitative du résultat précédent.

La méthode employée au § 3 pour démontrer l'existence de certaines fonctions entières φ fournit en même temps des estimations. Voici le genre de résultat qu'on peut obtenir.

THEOREME. – *Soit* $G(z)$ *une fonction entière paire de type exponentiel* $2B$ *avec* $G(x) \geqslant 0$ *pour* x *réel. Supposons que* $\int_0^\infty \frac{\log^+ G(x)}{1+x^2}\,dx < \infty$, *et soit, pour* $a > 0$, M_a *une valeur du paramètre* M *qui rend* $J + \sqrt{2\pi e J(J+B)} < a$ *avec*

$$J = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \log\left(1 + \frac{x^2}{M^2}\, G(x)\right) dx\,.$$

Il existe alors une fonction entière paire $\varphi(z)$, *de type exponentiel* a, *telle que* $\varphi(0) = 1$ *et que*

$$G(x)\,|\varphi(x)| \leqslant 2e^2 (2B + a)^2 M_a^2\,, \quad x \in \mathbf{R}\,. \tag{4.1}$$

Remarque. – Le facteur 2 dans (4.1) de droite peut être remplacé par n'importe quel nombre > 1. Ce qui est intéressant est la relation entre $\sup_x G(x)\,|\varphi(x)/\varphi(0)|$ et le paramètre M_a. On aimerait savoir si la forme de dépendance donnée par (4.1) s'approche de la meilleure forme possible.

Démonstration du théorème. – Avec

$$w(x) = \log\left(1 + \frac{x^2}{M_a^2}\, G(x)\right), \tag{4.2}$$

construisons $F(z)$ par la formule (2.2) (§ 2), et faisons l'estimation de $(\mathfrak{M}F)(0)$ comme lors de la démonstration du théorème, § 3. Grâce au choix de M_a on trouve $(\mathfrak{M}F)(0) = 0$. Le théorème du § 2 nous fournit donc une fonction croissante $\rho(t) = O(t)$ satisfaisant à (2.11) et telle que

$$\log\left(1 + \frac{x^2}{M_a^2}\, G(x)\right) + \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t) \leqslant \epsilon\,, \quad x \in \mathbf{R}\,, \tag{4.3}$$

ϵ étant un nombre quelconque > 0 choisi à l'avance.

Comme $G(z)$ est de type exponentiel $2B$ et ρ satisfait à (2.11), on a, pour la fonction *sousharmonique*

$$V(z) = \log\left|\frac{z^2}{M_a^2}\, G(z)\right| + \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\rho(t) \tag{4.4}$$

une estimation de la forme

$$V(z) \leqslant (2B + a)\,|z| + o(|z|)\,. \tag{4.5}$$

Puisque $G(x) \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}$, (4.3) donne $V(x) \leqslant \epsilon$, $x \in \mathbf{R}$. Cette relation et (4.5) entraînent, par le théorème de Phragmén-Lindelöf déjà employé ([3], p. 82 ; [5], pp. 177-178),

$$V(z) \leqslant \epsilon + (2B + a)\,|\Im z|,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{|z|^2}{M_a^2}\,|G(z)|\,\exp\Big(\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\rho(t)\Big) \leqslant e^\epsilon e^{(2B+a)|\Im z|}. \quad (4.6)$$

Soit maintenant $\varphi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$ où les λ_k sont les points de saut de $[\rho(t)]$ sur la demi-droite positive. (N.B. Ce n'est pas tout à fait la même φ que celle employée au § 3.) La fonction φ est entière, de type exponentiel a, et $\varphi(0) = 1$. Comme

$$\log|\varphi(z)| = \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d[\rho(t)],$$

on peut utiliser le lemme de l'introduction, et on trouve, en portant (0.7) dans (4.6),

$$\frac{|z|^2}{M_a^2}\,|G(z)|\,|\varphi(z)| \leqslant e^\epsilon e^{(2B+a)y}\left(\frac{\max(x, y)}{2y} + \frac{y}{2\max(x, y)}\right)$$

pour $x > 0$, $y > 0$. (On écrit $z = x + iy$). Donc, pour x et $y > 0$,

$$|G(z)|\,|\varphi(z)| \leqslant M_a^2 e^\epsilon e^{(2B+a)y}\left[\frac{\dfrac{\max(x, y)}{y} + \dfrac{y}{\max(x, y)}}{2(x^2 + y^2)}\right]. \quad (4.7)$$

La quantité entre crochets est

$$\leqslant \frac{1}{2y^2}\max_{\xi > 0}\left(\frac{\max(\xi, 1) + \dfrac{1}{\max(\xi, 1)}}{\xi^2 + 1}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

En portant ceci dans (4.7) on obtient, pour $h > 0$,

$$|G(x + ih)\,\varphi(x + ih)| \leqslant \frac{1}{h^2}\,M_a^2 e^\epsilon e^{(2B+a)h}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

La fonction $G(z)\,\varphi(z)$ est entière et de type exponentiel $2B + a$. Appliquons le théorème de Phragmén-Lindelöf encore une fois, dans le demi-plan $\Im z < h$. On trouve, d'après la dernière relation,

$$G(x)\ |\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{h^2}\ M_a^2 e^e e^{2(2B+a)h}\ , \quad x \in \mathbf{R}. \tag{4.8}$$

Posons finalement $h = \dfrac{1}{2B + a}$ dans (4.8); on obtient, pour $x \in \mathbf{R}$,
$G(x)\ |\varphi(x)| \leqslant e^e e^2 (2B + a)^2 M_a^2$, c.q.f.d.

Remarque. – Plus $a > 0$ est *petit*, plus doit être petite la quantité

$$J = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \log\left(1 + \frac{x^2}{M_a^2}\ G(x)\right) dx$$

pour que $J + \sqrt{2\pi e J(J + B)} < a$; plus, donc, doit être ***grand*** le paramètre M_a figurant dans (4.1). Nous voulons signaler ici que *la seule connaissance de la valeur de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ G(x)}{1 + x^2}\, dx$ *et du type,* 2B, *de* G *ne nous permet pas d'obtenir des renseignements sur la manière dont* M_a *dépend de* a.

Prenons en effet les polynômes pairs $P_N(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{4N^2}\right)^{2N}$; $P_N(x)$ est $\geqslant 0$ sur $\mathbf{R}$ et $\geqslant 1$ précisément pour $|x| \geqslant 2\sqrt{2}N$, de sorte que

$$\int_0^\infty \frac{\log^+ P_N(x)}{x^2}\, dx = 2N \int_{2\sqrt{2}N} \frac{1}{x^2} \left(\log \frac{x^2}{4N^2} - 1\right) dx = C, \tag{4.8}$$

une constante indépendante de N, comme on le voit en faisant le changement de variable $x/2N = \xi$.

On a $P_N(x) \geqslant 3^{2N}$ pour $x \geqslant 4N$, donc

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \log^+\left(\frac{P_N(x)}{4^N}\right) dx \geqslant \int_{4N}^\infty \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{9}{4}\right)^N dx = \frac{\log 9 - \log 4}{4}.$$

La valeur de M nécessaire pour rendre

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \log^+\left(\frac{P_N(x)}{M}\right) dx < \frac{\log 9 - \log 4}{4}$$

est par conséquent $> 4^N$, malgré (4.8) et le fait que tous les $P_N(x)$ sont de type exponentiel *zéro.*

5. Le cas où $w(x)/x$ est d'énergie finie.

Le procédé expliqué au début du § 3 marche pour une certaine classe de fonctions $w(x)$; ce sont des fonctions pour lesquelles l'intégrale de droite dans (3.7) se compare facilement avec le dernier terme de droite, $-aY_{\omega}(0)$, de cette formule.

Les fonctions $w(x)$ dont il s'agit sont celles pour qui *l'énergie de* $w(x)/x$ *est finie.* Cette notion (son rôle dans le sujet qui nous occupe ici a d'abord été constaté par Beurling et Malliavin – voir [8, 9]) demande quelques explications, qu'on tâchera de rendre aussi brèves que possible. Il y a une discussion plus détaillée dans le § 1 de [6].

Pour commencer, on prend les mesures réelles μ portées par $(0, \infty)$ telles que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \log \left| \frac{x+t}{x-t} \right| |d\mu(t)|\, |d\mu(x)| < \infty . \tag{5.1}$$

Etant donné une telle μ, on écrit

$$G_\mu(z) = \int_0^\infty \log \left| \frac{z+t}{z-t} \right| d\mu(t) . \tag{5.2}$$

Les G_μ sont des potentiels de Green pour le demi-plan $\Re z > 0$; si l'on en a deux, soit G_μ et G_υ, on pose

$$\langle G_\mu , G_\upsilon \rangle_E = \int_0^\infty \int_0^\infty \log \left| \frac{x+t}{x-t} \right| d\mu(t)\, d\upsilon(x) . \tag{5.3}$$

On démontre en théorie du potentiel (voir [10], pp. 227-229 – ici, une vérification élémentaire est aussi possible) que la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_E$ est *positive définie* sur l'ensemble des G_μ. Cet ensemble est donc un espace pré-hilbertien et on le munit de la norme $\|G_\mu\|_E = \sqrt{\langle G_\mu , G_\mu \rangle_E}$. Désignons par $\mathfrak{D}$ le *complété* de cet espace des fonctions G_μ (par rapport à $\|\ \|_E$), et continuons d'employer les symboles $\langle\ ,\ \rangle_E$ et $\|\ \|_E$ pour le produit scalaire et la norme dans $\mathfrak{D}$.

On démontre (voir p. ex. le § 1 de [6]) que les éléments de $\mathfrak{D}$ sont en fait des *fonctions* localement sommables sur $\mathbf{R}$. Nous allons voir que le procédé du § 3 s'applique aux fonctions $w(x) \geqslant 0$ paires et continues, telles que $w(x)/x$ appartienne à l'espace $\mathfrak{D}$.

On dit pour une telle fonction que $w(x)/x$ *est d'énergie finie, et on écrit* $\| w(x)/x \|_E < \infty$.

Nous aurons besoin d'une variante d'un théorème de Cartan ([10], p. 232). La voici.

LEMME 8. – *Supposons que* $\| w(x)/x \|_E < \infty$, *et soit* $\epsilon > 0$. *Il existe une mesure* υ *réelle portée par* $(0, \infty)$ *et deux nombres,* C *et* R, *tels que*

$$\| (w(x)/x) - G_\upsilon(x) \|_E < 4\epsilon , \tag{5.4}$$

$$| G_\upsilon(x) | \leqslant 2C, \quad x \geqslant 0 , \tag{5.5}$$

$$G_\upsilon(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \geqslant R . \tag{5.6}$$

La différence principale entre ce lemme et le théorème de Cartan est que le potentiel G_υ figurant dans celui-là a la forme spéciale (5.2) avec une mesure υ portée par $(0, \infty)$. Passer du théorème au lemme nous ferait embarquer dans une considération sur le balayage que nous préférons éviter ; esquissons plutôt une *démonstration directe.*

Soit d'abord λ une mesure réele sur $(0, \infty)$ satisfaisant à (5.1) et telle que

$$\| (w(x)/x) - G_\lambda(x) \|_E < \epsilon . \tag{5.7}$$

Montrons qu'on peut prendre λ *à support compact dans* $(0, \infty)$. Pour alléger l'écriture prenons le cas où λ est *positive,* et désignons par λ_n la partie de λ portée par $\left[\frac{1}{n} , n \right]$. Les fonctions $G_{\lambda_n}(x)$ tendent en croissant vers $G_\lambda(x)$ pour $x \geqslant 0$, et de là on voit sans peine que $\| G_\lambda(x) - G_{\lambda_n}(x) \|_E \xrightarrow[n]{} 0$, Ici, (5.7) reste valable si on remplace λ par λ_n, n étant assez grand. Dans le cas général où λ est la différence de deux mesures positives satisfaisant à (5.1), on peut suivre ce procédé pour chacune et on aura encore (5.7) avec λ remplacée par une mesure à support compact. Nous supposons dorénavant que cela a déjà été fait, c'est-à-dire que λ *est* à support compact.

Je dis qu'il y a une mesure μ à support compact $\subset (0, \infty)$ *avec* $G_\mu(x)$ *borné* telle que $\| G_\lambda(x) - G_\mu(x) \|_E < 2\epsilon$. Supposons d'abord comme avant que λ soit *positive.* La fonction $G_\lambda(z)$ est alors *surharmonique* pour $\Re z > 0$ et satisfait à (1.1) dans ce demi-plan. Les ensembles $\mathcal{O}_N = \{x > 0 ; G_\lambda(x) > N\}$ sont donc *ouverts* dans $\mathbf{R}$. Comme $\|G_\lambda\|_E^2 = \int_0^\infty G_\lambda(x)\, d\lambda(x) < \infty$, il y a évidemment un N tel que $\int_{\mathcal{O}_N} G_\lambda(x)\, d\lambda(x) < \epsilon^2$, λ étant à support compact dans $(0, \infty)$. Fixons un tel N et soit μ la partie de λ porté par l'ensemble fermé $K_N = [0, \infty) \sim \mathcal{O}_N$; μ est à support compact.

Puisque $G_\mu(x) \leqslant G_\lambda(x) \leqslant N$ sur K_N, on a $G_\mu(z) \leqslant N$ *partout* dans $\Re z \geqslant 0$ ([10], p. 184 ; [13], p. 53 ; [14], p. 15). Nous avons aussi

$$\|G_\lambda - G_\mu\|_E^2 \leqslant \int_0^\infty (G_\lambda(x) - G_\mu(x))\, d\lambda(x)$$
$$= \int_0^\infty G_\lambda(x)\,(d\lambda(x) - d\mu(x)) = \int_{\mathcal{O}_N} G_\lambda(x)\, d\lambda(x) < \epsilon^2 .$$

Ici, μ est la mesure voulue.

Dans le cas général, λ est la différence de deux mesures positives et on répète ce qu'on vient de faire pour chacune, obtenant de cette façon deux nouvelles mesures positives. Pour μ on prend simplement la différence de celles-ci.

A cause de (5.7), la mesure μ de support compact qu'on vient d'obtenir satisfait à

$$\|(w(x)/x) - G_\mu(x)\|_E < 3\epsilon , \tag{5.8}$$

en même temps que

$$|G_\mu(x)| \leqslant C, \quad x \geqslant 0 , \tag{5.9}$$

avec une certaine constante C. Comme toute mesure à support compact, μ est *finie;* soient a et b, $0 < a < b < \infty$, deux nombres tels que μ ait son support sur $[a, b]$. Prenons $R > b$; montrons qu'il y a une mesure τ_R portée par $[R, \infty)$ telle que

$$G_{\tau_R}(x) = G_\mu(x), \quad x \geqslant R . \tag{5.10}$$

Nous avons affaire ici à un exemple très spécial de balayage où on peut écrire une formule pour τ_R ; voici comment on fait.

Notons $\mathcal{D}_R$ le domaine obtenu en enlevant du demi-plan $\{\Re z > 0\}$ la demi-droite $[R, \infty)$; la frontière $\partial\mathcal{D}_R$ est composée de l'axe imaginaire et de $[R, \infty)$. Pour $z \in \mathcal{D}_R$ et $\zeta \in \partial\mathcal{D}_R$, soit $P_R(z, \zeta)$ le *noyau de Poisson pour le domaine* $\mathcal{D}_R$. On peut calculer $P_R(z, \zeta)$ en faisant la transformation conforme de $\mathcal{D}_R$

sur le disque $\{|w| < 1\}$; il suffit pour nos besoins de savoir que $P_R(z, \zeta)$ sert à recouvrer les fonctions harmoniques (et pas trop grandes) dans $\mathcal{D}_R$ à partir de leurs valeurs sur $\partial\mathcal{D}_R$, que $P_R(z, \zeta) \geqslant 0$, et que

$$\int_{\partial\mathcal{D}_R} P_R(z, \zeta)\, |d\zeta| = 1. \tag{5.11}$$

Si $R \leqslant s$, un nombre fixe, $\log \left|\dfrac{z+s}{z-s}\right|$ est harmonique comme fonction de z dans $\mathcal{D}_R$; elle est en outre positive et continue jusqu'à $\partial\mathcal{D}_R$ sauf au point s où elle n'a qu'une singularité logarithmique. Donc, pour $z \in \mathcal{D}_R$,

$$\log \left|\frac{z+s}{z-s}\right| = \int_{\partial\mathcal{D}_R} \log \left|\frac{\zeta+s}{\zeta-s}\right| P_R(z, \zeta)\, |d\zeta|$$
$$= \int_R^\infty \log \left|\frac{t+s}{t-s}\right| P_R(z, t)\, dt.$$

En particulier, pour $z = \xi \in [a, b]$ et $s = x \geqslant R$,

$$\log \left|\frac{x+\xi}{x-\xi}\right| = \int_R^\infty \log \left|\frac{x+t}{x-t}\right| P_R(\xi, t)\, dt.$$

Multiplions les deux membres de cette relation par $d\mu(\xi)$, intégrons par rapport à ξ de a à b, et utilisons le théorème de Fubini. On obtient (5.10) avec une mesure τ_R portée par $[R, \infty)$ et donnée par la formule

$$d\tau_R(t) = \left(\int_a^b P_R(\xi, t)\, d\mu(\xi)\right) dt, \quad t > R. \tag{5.12}$$

Grâce à (5.11) on a

$$\int_R^\infty |d\tau_R(t)| < \int_a^b |d\mu(\xi)|, \tag{5.13}$$

une quantité finie indépendante de R.

Comme μ est portée par $[a, b]$ on voit par (5.2) que $G_\mu(x) \longrightarrow 0$ pour $x \longrightarrow \infty$. De là, par (5.13),

$$\int_R^\infty G_\mu(x)\, d\tau_R(x) \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad R \longrightarrow \infty,$$

c'est-à-dire que

$$\|G_{\tau_R}\|_E^2 = \int_0^\infty G_{\tau_R}(x)\, d\tau_R(x) \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad R \longrightarrow \infty \tag{5.14}$$

d'après (5.10). Par (5.9) et (5.10),

$$|G_{\tau_R}(x)| \leqslant C, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{5.15}$$

selon le théorème cité tantôt, cette relation étant valable sur le support de τ_R. (Nota: μ est la différence de deux mesures positives, *chacune* satisfaisant à une inégalité de la forme (5.9). En portant ces mesures positives dans le membre de droite de (5.12) on voit que τ_R s'écrit aussi comme différence de deux mesures positives, chacune satisfaisant à (5.15).)

Prenons finalement R assez grand pour que $\|G_{\tau_R}\|_E < \epsilon$, ce qui est possible par (5.14), et écrivons $\upsilon = \mu - \tau_R$. Pour la mesure υ, on a (5.4) grâce à (5.8). On a aussi (5.5) par (5.9) et (5.15), et (5.6) d'après (5.10). Le lemme est démontré.

Voici maintenant le résultat de ce §.

THEOREME. – *Soit* $w(x) \geqslant 0$ *une fonction paire et continue telle que*

$$\int_0^\infty \frac{w(x)}{x^2}\, dx < \infty \,, \tag{5.16}$$

et

$$\| w(x)/x \|_E < \infty \,. \tag{5.17}$$

Alors, pour tout $a > 0$ *il y a une fonction croissante* $\rho(t) = O(t)$ *satisfaisant à (2.11) telle que (2.12) soit valable.*

Démonstration. – L'idée est d'approcher $w(x)/x$ avec le potentiel G_υ fourni par le lemme 8 et de suivre ensuite la méthode du § 4 de la première partie de [7].

Prenons alors un a fixe > 0. Grâce à (5.17), le lemme 8 nous donne une mesure υ satisfaisant à (5.5), à (5.6) et à (5.4) avec $\epsilon = a/(8\sqrt{\pi})$, c'est-à-dire,

$$\sqrt{\pi}\, \|(w(x)/x) - G_\upsilon(x)\|_E < \frac{a}{2} \,. \tag{5.18}$$

Soit $\mathcal{D}$ l'un des domaines envisagés au début du § 3 ; il s'agit de faire l'estimation de (3.7) de droite et donc de comparer l'intégrale $\int_E w(x)\, d\omega_{\mathcal{D}}(t, 0)$ avec $aY_{\mathcal{D}}(0)$.

Reprenons le procédé de [7], p. 285 en essayant d'y faire jouer la différence $(w(x)/x) - G_\upsilon(x)$. Pour $x \geqslant 0$, posons

$$\Omega_{\mathcal{D}}(x) = \int_{(-\infty,-x]\cap E} d\omega_{\mathcal{D}}(t, 0) + \int_{E\cap[x,\infty)} d\omega_{\mathcal{D}}(t, 0) .$$

Comme $w(x)$ est paire, on a alors

$$\begin{aligned} \int_E w(t)\, d\omega_{\mathcal{D}}(t, 0) &= - \int_0^\infty w(x)\, d\Omega_{\mathcal{D}}(x) \qquad (5.19) \\ &= - \int_0^\infty x G_\upsilon(x)\, d\Omega_{\mathcal{D}}(x) - \int_0^\infty (w(x) - xG_\upsilon(x))\, d\Omega_{\mathcal{D}}(x) . \end{aligned}$$

On a évidemment $d\Omega_{\omega}(x) \leqslant 0$ et $-\int_0^{\infty} d\Omega_{\omega}(x) = 1$; l'avant dernière intégrale de droite dans (5.19) est donc $\leqslant 2\mathrm{CR}$ par (5.5) et (5.6).

Pour la dernière intégrale de droite dans (5.19) on a

$$-\int_0^{\infty} (w(x) - x\mathrm{G}_v(x))\, d\Omega_{\omega}(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{w(x)}{x} - \mathrm{G}_v(x)\right) \Omega_{\omega}(x)\, dx$$

$$- \int_0^{\infty} \left(\frac{w(x)}{x} - \mathrm{G}_v(x)\right) d(x\Omega_{\omega}(x)) . \qquad (5.20)$$

Soit $\mathrm{L} > \mathrm{R}$; grâce à (5.6) nous pouvons écrire

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{w(x)}{x} - \mathrm{G}_v(x)\right) \Omega_{\omega}(x)\, dx = \int_0^{\mathrm{L}} \frac{w(x)}{x}\, \Omega_{\omega}(x)\, dx \qquad (5.21)$$

$$- \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{G}_v(x)\, \Omega_{\omega}(x)\, dx + \int_{\mathrm{L}}^{\infty} \frac{w(x)}{x}\, \Omega_{\omega}(x)\, dx .$$

On a $\Omega_{\omega}(x) \leqslant 1$; la somme des deux premiers termes de droite est donc $\leqslant \int_0^{\mathrm{L}} \frac{w(x)}{x}\, dx + 2\mathrm{CR}$ par (5.5), (5.6), l'intégrale étant finie à cause de (5.16). Selon la formule (2.7) sur la p. 279 de [7] jointe à celle pour Y_{ω} sur la p. 277 du même article, on a $\Omega_{\omega}(x) \leqslant \frac{\mathrm{Y}_{\omega}(0)}{x}$ · Par conséquent,

$$\int_{\mathrm{L}}^{\infty} \frac{w(x)}{x}\, \Omega_{\omega}(x)\, dx \leqslant \mathrm{Y}_{\omega}(0) \int_{\mathrm{L}}^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\, dx .$$

Fixons maintenant L assez grand $> \mathrm{R}$ pour que $\int_{\mathrm{L}}^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\, dx < \frac{a}{2}$, ce qui est possible selon (5.16). On aura alors, par (5.21),

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{w(x)}{x} - \mathrm{G}_v(x)\right) \Omega_{\omega}(x)\, dx \leqslant \int_0^{\mathrm{L}} \frac{w(x)}{x}\, dx + 2\mathrm{CR} + \frac{a}{2}\, \mathrm{Y}_{\omega}(0) . \qquad (5.22)$$

A la dernière intégrale de droite dans (5.20) on applique l'inégalité de Schwarz de la même façon qu'à la p. 285 de [7]. (N.B. Voir aussi le premier paragraphe sur la p. 286 de cet article.) Cela donne

$$-\int_0^{\infty} \left(\frac{w(x)}{x} - \mathrm{G}_v(x)\right) d(x\Omega_{\omega}(x)) \leqslant \sqrt{\pi}\, \mathrm{Y}_{\omega}(0) \left\| \frac{w(x)}{x} - \mathrm{G}_v(x) \right\|_{\mathrm{E}} , \qquad (5.23)$$

ce qui est $\leqslant \frac{a}{2}\, \mathrm{Y}_{\omega}(0)$ d'après (5.18).

Portons (5.23) jointe à (5.18) et aussi (5.22) dans (5.20). La relation ainsi obtenue est ensuite portée dans (5.19). On trouve

$$\int_{E} w(t)\, d\omega_{\varpi}(t\,, 0) \leqslant 4CR + \int_{0}^{L} \frac{w(x)}{x}\, dx + aY_{\varpi}(0)\,. \qquad (5.24)$$

Revenons alors à (3.7), § 3. A cause de (5.24), elle devient

$$(\mathfrak{M}F_N)\,(0) \leqslant 4CR + \int_{0}^{L} \frac{w(x)}{x}\, dx + \epsilon\,,$$

$\epsilon > 0$ étant arbitraire. On a donc

$$(\mathfrak{M}F)\,(0) \leqslant 4CR + \int_{0}^{L} \frac{w(x)}{x}\, dx\,,$$

et le théorème du § 2 nous permet de conclure.

COROLLAIRE. – *Soit* $W(x) \geqslant 1$ *une fonction continue et paire telle que* $w(x) = \log W(x)$ *satisfasse aux conditions (5.16) et (5.17) du théorème. Supposons en outre que* $W(x)$ *jouisse de la propriété (0.11) (introduction). Il existe alors des fonctions entières* $\psi \not\equiv 0$ *de type exponentiel arbitrairement petit qui rendent* $W(x)\,\psi(x)$ *borné sur l'axe réel.*

Preuve. – Il y a, d'après le théorème, une fonction croissante $\rho(t) = O(t)$ telle que (2.11) et (2.12) soient valables, a étant un nombre > 0 quelconque donné à l'avance.

Posons, comme au § 2, $J(z) = \int_{0}^{\infty} \log \left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\rho(t)$; on voit comme dans le § 2 que (2.14) est valable et que (2.15) l'est donc aussi. Joignons (2.15) à la formule (0.9) de l'introduction ; on retrouve (0.5). De là on obtient (0.10) par l'emploi de (0.6).

La preuve s'achève de la manière indiquée dans l'introduction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. KOOSIS, Entire functions of exponentiel type as multipliers for weight functions, *Pacific J. Math.*, 95 (1981), 105-123.

[2] N. LEVINSON, Gap and Density Theorems, *Amer. Math. Soc. Colloq. Pubs.*, XXVI, New York, 1940.

[3] R. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.

[4] P. Koosis, Nouvelle démonstration d'un théorème de Levinson concernant la distribution des zéros d'une fonction de type exponentiel, *Bull. Soc. Math. de France*, 86 (1958), 27-40.

[5] P. Koosis, Introduction to H_p Spaces, *LMS Lecture Notes Series*, No. 40, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

[6] P. Koosis, Fonctions entières de type exponentiel comme multiplicateurs. Un exemple et une condition nécessaire et suffisante, *Annales Sci. de l'Ecole Norm. Sup.*, 16, 3 (1983), *à paraître.*

[7] P. Koosis, Harmonic estimation in certain slit regions and a theorem of Beurling and Malliavin, *Acta Math.*, 142 (1979), 275-304.

[8] A. Beurling et P. Malliavin, On Fourier transforms of measures with compact support, *Acta Math.*, 107 (1962), 291-309.

[9] P. Malliavin, On the multiplier theorem for Fourier transforms of measures with compact support, *Arkiv för Mat.*, 17 (1979), 69-81.

[10] L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[11] T. Gamelin, The polynomial hulls of certain subsets of $\mathbf{C}^2$, *Pacific J. Math.*, 61 (1975), 129-142.

[12] A. Zygmund, *Trigonometric Series, vol. I*, second edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

[13] M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, 1959.

[14] L. Carleson, *Selected Problems on Exceptional Sets*, Van Nostrand, Princeton, 1967.

Manuscrit reçu le 27 avril 1982.

Paul Koosis,
University of California
at Los Angeles
Department of Mathematics
Los Angeles, Ca. 90024 (USA).