

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LYLIANE BOUVIER

JEAN-JACQUES PAYAN

Sur la structure galoisienne du groupe des unités d'un corps abélien de type (p, p)

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 1 (1979), p. 171-187

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_171_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA STRUCTURE GALOISIENNE DU GROUPE DES UNITÉS D'UN CORPS ABÉLIEN DE TYPE (p, p)

par L. BOUVIER et J. J. PAYAN

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

Notations et rappels.

K/\mathbf{Q} désigne une extension abélienne dont le groupe de Galois G est de type (p, p) , réelle si $p = 2$. On note k_1, k_2, \dots, k_{p+1} les extensions intermédiaires de degré p et E (resp. E_i) le quotient du groupe des unités de K (resp. k_i) par $\{\pm 1\}$, H_i désigne le sous-groupe de G auquel appartient k_i . Le groupe E est muni canoniquement d'une structure de $\mathbf{Z}[G]$ -module de type fini sans \mathbf{Z} -torsion et l'on voit facilement que, dans le cas présent, E^{H_i} (sous-module de E formé des éléments invariants sous l'action de H_i) est égal à E_i . On pose en outre $g_i = G/H_i$.

On dira que K (resp. k_i) admet une unité de Minkowski si E (resp. E_i) est $\mathbf{Z}[G]$ -monogène, ce qui équivaut, d'après un résultat de N. Moser [8], à E (resp. E_i) est $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphe à $\mathbf{Z}[G]/\mathbf{Z}\tilde{G}$ (resp. $\mathbf{Z}[g_i]/\mathbf{Z}\tilde{g}_i$) où \tilde{G} (resp. \tilde{g}_i) désigne l'élément de $\mathbf{Z}[G]$ (resp. $\mathbf{Z}[g_i]$) somme des éléments de G (resp. g_i).

On sait depuis Nehr Korn [10] que si h_K (resp. h_i) désigne le nombre de classes d'idéaux de K (resp. k_i), le quotient $h_K / \prod_{i=1}^{p+1} h_i$ est une puissance de p .

Un calcul élémentaire de régulateur montre que $h_K = \frac{a}{p^\alpha} \prod_{i=1}^{p+1} h_i$
où $a = [E : E_1 E_2 \dots E_{p+1}]$ et $\alpha = \frac{p(p+1)}{2} - 1$ (pour la valeur de α cf. S. Kuroda [7]). Nous nous servirons de cette formule à la fin de ce travail pour donner un exemple numérique, elle fait intervenir l'indice a , invariant lié à la structure galoisienne de E .

1. Extensions de modules réalisables comme modules d'unités.

Nous dirons qu'un $\mathbf{Z}[G]$ -module M est réalisable comme module d'unités s'il existe un sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module de E $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphe à M . Nous allons donc considérer des $\mathbf{Z}[G]$ -modules M astreints aux conditions suivantes :

- a) M est de type fini et sans \mathbf{Z} -torsion ;
- b) $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} M$ s'injecte par un $\mathbf{Z}[G]$ -homomorphisme dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} E$ qui est $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphe à $\mathbf{Q}[G]/\mathbf{Q}\tilde{G}$.

Par abus de langage, on appellera longueur de M la longueur de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} M$ (en tant que $\mathbf{Q}[G]$ -module).

On note \mathcal{H}_M l'ensemble des sous-groupes d'ordre p de G qui laissent point par point invariant un sous-module non trivial de M et, pour tout H_i dans \mathcal{H}_M , M^{H_i} désigne le sous-module de M formé des éléments invariants sous l'action de H_i et σ_i un générateur de H_i .

Remarque 1.1. — Le cardinal de \mathcal{H}_M est égal à la longueur de M .

Remarque 1.2. — $\bigoplus_{H \in \mathcal{H}_M} M^H$ est un sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module d'indice fini de M .

Remarque 1.3. — $M / \bigoplus_{H \in \mathcal{H}_M} M^H$ est d'exposant 1 ou p . On le voit en remarquant que $p \cdot 1 = \sum_{i=1}^{p+1} \tilde{H}_i - \tilde{G}$ et que \tilde{G} annule M , \tilde{H}_i désignant l'élément de $\mathbf{Z}[G]$ somme des éléments de H_i .

On dit que M est une extension de \bar{M} par M_0 s'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

de $\mathbf{Z}[G]$ -modules scindée sur \mathbf{Z} . Etant donnés M_0 et \bar{M} , l'extension M est déterminée par la donnée d'un cocycle ϵ de G à valeurs dans $T = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\bar{M}, M_0)$ avec l'action de G définie par $(g, t) \longrightarrow g \circ t \circ g^{-1}$; M s'identifie alors au produit \mathbf{Z} -direct $M_0 \times \bar{M}$ sur lequel G opère par $g \cdot (x, y) = (gx + \epsilon_g y, gy)$.

Convenons de dire que deux extensions M et M' de \bar{M} par M_0 sont isomorphes au sens restreint s'il existe un $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphisme

φ de M sur M' rendant commutatif le diagramme suivant (cf. [11]) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \bar{M} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \varphi & & \downarrow \text{id} \\
 0 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \bar{M} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Le résultat suivant est classique :

PROPRIETE 1.1. — *Les classes d'isomorphismes au sens restreint d'extensions de \bar{M} par M_0 sont associées bijectivement aux éléments de $H^1(G, T)$ (cf. [2]).*

Remarque 1.4. — La remarque 1.2 montre que tout $Z[G]$ -automorphisme d'une extension M de \bar{M} par M_0 induit par restriction un $Z[G]$ -automorphisme de M_0 et par passage au quotient un $Z[G]$ -automorphisme de \bar{M} . En effet, \mathcal{H}_M est, compte-tenu de l'injection de $\mathbf{Q} \otimes M$ dans $\mathbf{Q}[G]/\mathbf{Q}\tilde{G}$, la réunion disjointe de \mathcal{H}_{M_0} et de $\mathcal{H}_{\bar{M}}$.

Faisons alors opérer $\text{Aut}_{Z[G]} M_0$ et $\text{Aut}_{Z[G]} \bar{M}$ sur $Z^1(G, T)$ en associant au couple (α, β) de $\text{Aut}_{Z[G]} M_0 \times \text{Aut}_{Z[G]} \bar{M}$ et au cocycle $\sigma \longrightarrow \epsilon_\sigma$ à valeurs dans T , le cocycle $\sigma \longrightarrow \alpha \circ \epsilon_\sigma \circ \beta^{-1}$. On en déduit immédiatement une opération de $\text{Aut}_{Z[G]} M_0$ et de $\text{Aut}_{Z[G]} \bar{M}$ sur $H^1(G, T)$.

PROPRIETE 1.2. — *Les classes d'isomorphisme d'extensions de \bar{M} par M_0 sont en correspondance bijective avec les doubles classes de $H^1(G, T)$ sous l'action de $\text{Aut}_{Z[G]} M_0$ et de $\text{Aut}_{Z[G]} \bar{M}$.*

Démonstration. — Il suffit d'adapter la démonstration du lemme 8.1.8 de [3] au cas particulier que nous considérons.

Remarque 1.5. — L'énoncé précédent reste évidemment valable si on remplace G par un groupe fini quelconque à condition de ne considérer comme isomorphes deux extensions de \bar{M} par M_0 que si l'isomorphisme laisse M_0 globalement invariant.

Pour classifier les $Z[G]$ -modules réalisables comme modules d'unités, nous allons considérer les extensions

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

avec \bar{M} de longueur 1 et M_0 de longueur $r - 1$. Nous posons

$$\mathcal{H}_{M_0} = \mathcal{H}_0 = \{H_1, H_2, \dots, H_{r-1}\}$$

et

$$\mathcal{H}_{\bar{M}} = \overline{\mathcal{H}} = \{H_r\} = \{\bar{H}\}.$$

Les remarques 1.1 et 1.2 montrent que $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_0 \cup \overline{\mathcal{H}}$. On en déduit que M^{H_r} s'injecte canoniquement sur un sous-module d'indice fini de \bar{M} .

Le groupe G opère naturellement sur $H^1(H_r, T)$ en associant à $g \in G$ et à $\epsilon \in Z^1(H_r, T)$ le cocycle $\sigma \rightarrow g \circ \epsilon_\sigma \circ g^{-1}$ et en passant aux classes modulo les 1-cobords. Énonçons alors la

PROPRIÉTÉ 1.3. — $H^1(G, T)$ est isomorphe à $H^1(H_r, T)^{G/H_r}$.

Démonstration. — De la suite formée par inflation et restriction, on extrait (cf. [12], chap. VII, § 6) la suite exacte

$$H^1(G/H_r, T^{H_r}) \rightarrow H^1(G, T) \rightarrow H^1(H_r, T)^{G/H_r} \rightarrow H^2(G/H_r, T^{H_r}).$$

Il reste à voir que $T^{H_r} = \{0\}$: comme H_r opère trivialement sur \bar{M} , cela revient à montrer que $M_0^{H_r} = \{0\}$; cette dernière assertion résulte de $H_r \notin \mathcal{H}_0$.

La remarque suivante rappelle la structure des $\mathbf{Z}[G]$ -modules de longueur 1.

Remarque 1.6. — Il résulte facilement de la classification des $\mathbf{Z}[g_i]$ -modules pour g_i cyclique d'ordre premier (cf. [11] ou des remarques de A. Brumer [1]) qu'un $\mathbf{Z}[G]$ -module de longueur 1 est indécomposable et isomorphe à un idéal α de $\mathbf{Q}^{(p)}$, corps cyclotomique d'indice p , et que l'action d'un élément de $G \setminus H_i$ est la multiplication par une racine primitive p -ième de l'unité.

Ce qui précède suffit à démontrer la

PROPRIÉTÉ 1.4. — Si la longueur de M_0 est égale à 1, le nombre de classes d'extensions de \bar{M} par M_0 est égal à 2.

Démonstration. — D'après la propriété 1.3, le nombre de classes d'isomorphisme au sens restreint est égal au cardinal de $H^1(H_r, T)^{G/H_r}$. Or $H^1(H_r, T)$ est isomorphe à $T/(\sigma_r - 1)T \simeq (M_0/(\sigma_r - 1)M_0)^{p-1}$.

Ici $r = 2$, donc $H^1(H_2, T) \cong T/(\sigma_2 - 1)T$ est un F_p -espace vectoriel de dimension $p - 1$. L'élément σ_1 opère sur $H^1(H_2, T)$, comme σ_1 opère trivialement sur M_0 , $1 + \sigma_1 + \dots + \sigma_1^{p-1}$ annule T . Montrons que le polynôme minimal de σ_1 est $(X - 1)^{p-1}$; si ce n'était pas le cas ce polynôme minimal serait de la forme $(X - 1)^\alpha$ avec $1 \leq \alpha < p - 1$; on en déduirait que pour tout $t \in T$, $t(\sigma_1 - 1)^\alpha = (\sigma_2 - 1)t'$ avec $t' \in T$. Soit alors $\{e_1, e_2, \dots, e_{p-1}\}$ une \mathbf{Z} -base de \overline{M} telle que $\{pe_1, pe_2, \dots, pe_\alpha, e_{\alpha+1}, \dots, e_{p-1}\}$ soit une \mathbf{Z} -base de $(\sigma_1 - 1)^\alpha \overline{M}$. On considère un \mathbf{Z} -homomorphisme t de \overline{M} dans M_0 tel que $t(e_{\alpha+1}) \notin (\sigma_2 - 1)M_0$, alors, puisque $e_{\alpha+1} \in (\sigma_1 - 1)^\alpha \overline{M}$, $t(\sigma_1 - 1)^\alpha$ ne serait pas de la forme $(\sigma_2 - 1)t'$ avec $t' \in T$: d'où l'assertion désirée. Ainsi $H^1(H_2, T)^{G/H_2}$ s'identifie au sous-espace propre de l'opérateur σ_1 de polynôme minimal $(X - 1)^{p-1}$. Il est clair que $H^1(H_2, T)^{G/H_2}$ est isomorphe à $F_p[\sigma_1]/(\sigma_1 - 1)^{p-1}$ et le sous-espace propre est de dimension 1.

Remarquons encore que $\text{Aut}_{\mathbf{Z}[G]} M_0$ s'identifie par un raisonnement classique issu de la remarque 1.6 au groupe multiplicatif des unités du corps cyclotomique $\mathbf{Q}^{(p)}$ et que l'action de l'automorphisme associé à l'unité cyclotomique $\xi_2^i - 1/\xi_2 - 1$, i entier compris entre 1 et $p - 1$, se ramène à la multiplication par la classe de i modulo p . On voit donc que tous les éléments non nuls de $H^1(G, T)$ donnent des extensions $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphes, celles-ci n'étant pas isomorphes à l'extension construite avec les 1-cobords puisque cette dernière est la seule, à isomorphisme au sens restreint près, à être décomposée.

Pour traiter le cas où M_0 est de longueur 2, nous précisons l'isomorphisme entre $H^1(G, T)$ et $H^1(H_3, T)^{G/H_3}$. Remarquons d'abord qu'un élément ϵ de $Z^1(H_3, T)$ est caractérisé par la donnée de ϵ_{σ_3} dans T et que l'invariance par l'action de G/H_3 de la classe de ϵ modulo les 1-cobords se traduit par la condition

$$\tau \epsilon_{\sigma_3} \tau^{-1} - \epsilon_{\sigma_3} = (\sigma_3 - 1)t \quad (1)$$

où $\tau \in G \setminus H_3$ et $t \in T$ (t dépendant bien entendu du choix de τ). Le prolongement $\tilde{\epsilon}$ de ϵ à G est alors défini par $\tilde{\epsilon}_\tau = t$, $\tilde{\epsilon}_{\sigma_3} = \epsilon_{\sigma_3}$, les valeurs de $\tilde{\epsilon}$ pour les autres éléments de G s'en déduisent en utilisant la condition "bord" et le fait que τ et σ_3 engendrent G .

Achevons alors l'étude des extensions de modules de longueur 1.

THEOREME 1.5. — M_0 et \bar{M} étant de longueur 1, les deux extensions de \bar{M} par M_0 sont caractérisées par $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2}] = 1$ ou p suivant que le cocycle ϵ servant à les construire est un cobord ou non.

Démonstration. — $M = M_0 \times \bar{M}$ étant déterminé par la donnée de ϵ , déterminons les éléments de M invariants par H_2 . Ce sont les (x, y) vérifiant

$$(\sigma_2 - 1)x + \epsilon_{\sigma_2}y = 0. \tag{2}$$

Si ϵ est un cobord, c'est-à-dire $\epsilon_{\sigma_2} = (\sigma_2 - 1)t$ avec $t \in T$, l'équation (2) s'écrit $(\sigma_2 - 1)(x + ty) = 0$, soit encore $x + ty = 0$ puisque le noyau de la multiplication par $\sigma_2 - 1$ est nul dans M_0 . D'où $M^{H_2} = \{(-ty, y), y \in \bar{M}\}$. Si ϵ n'est pas un cobord alors $\epsilon_{\sigma_2}(\bar{M}) \not\subset (\sigma_2 - 1)M_0$, mais la condition (1) utilisée avec $\tau = \sigma_1$ s'écrit $\epsilon_{\sigma_2}(\sigma_1^{-1} - 1) = (\sigma_2 - 1)t$; on en déduit, comme ci-dessus, que les couples $(-tz, (\sigma_1^{-1} - 1)z)$ où z parcourt \bar{M} , sont dans M^{H_2} . D'autre part, si $y \notin (\sigma_1^{-1} - 1)\bar{M}$ l'équation (2) n'a pas de solution, donc $M^{H_2} = \{(-tz, (\sigma_1^{-1} - 1)z) \mid z \in \bar{M}\}$. Un calcul élémentaire montre que $M^{H_1} = M_0$. On en déduit facilement que :

si ϵ est un cobord $M^{H_1} \oplus M^{H_2} = M$;

si ϵ n'est pas un cobord, $M^{H_1} \oplus M^{H_2} = \{(x, (\sigma_1^{-1} - 1)z) \mid x \in M_0 \text{ et } z \in \bar{M}\}$ et l'on voit que $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2}] = [\bar{M} : (\sigma_1^{-1} - 1)\bar{M}] = p$.

On obtient alors sans peine le

COROLLAIRE 1.5. — Soit M un $\mathbf{Z}[G]$ -module de longueur 2, posons $\mathcal{H}_M = \{H_1, H_2\}$ alors ou bien $M = M^{H_1} \oplus M^{H_2}$, ou bien M est indécomposable et $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2}] = p$.

Notation. — Dans le cas où $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2}] = p$, nous poserons $M = (M^{H_1}, M^{H_2})_1$.

Pour simplifier l'étude des modules de longueur 3, nous utiliserons la

Remarque 1.7. — Soit

$$0 \longrightarrow M'_0 \oplus M''_0 \longrightarrow M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

une suite exacte définissant une extension de \bar{M} par la somme $\mathbf{Z}[G]$ -

directe $M'_0 \oplus M''_0$. Le cocycle associé ϵ s'écrit $\epsilon' \oplus \epsilon''$ avec $\epsilon' \in Z^1(G, T')$ (resp. $\epsilon'' \in Z^1(G, T'')$), où $T' = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\bar{M}, M'_0)$ (resp. $T'' \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\bar{M}, M''_0)$). En outre, si $\epsilon'' \in B^1(G, T'')$ alors $M = M' \oplus M''_0$ où M' est l'extension de \bar{M} par M'_0 construite avec le cocycle ϵ' .

Nous aurons besoin également par la suite d'un résultat sur l'application norme : M désignant encore une extension de \bar{M} par M_0 construite avec le cocycle $\epsilon \in Z^1(G, T)$, on obtient

PROPRIETE 1.6. — Soient $\sigma_r \in \bar{H}$ et $\sigma \in G$ tel que σ opère non trivialement sur \bar{M} , alors $(\sigma_r - 1)S_\sigma = \tilde{H} \epsilon_{\sigma_r}$ où H est le sous-groupe de G engendré par σ et où $S_\sigma = \sum_{i=0}^{p-1} \epsilon_{\sigma^i} \sigma^i$.

Démonstration. — De la relation $\sigma^i \epsilon_{\sigma_r} - \epsilon_{\sigma_r} \sigma^i = (\sigma_r - 1) \epsilon_{\sigma^i} \sigma^i$ on déduit $\tilde{H} \epsilon_{\sigma_r} - \epsilon_{\sigma_r} \tilde{H} = (\sigma_r - 1)S_\sigma$, comme $\tilde{H} \bar{M} = 0$, on obtient la relation voulue.

Utilisons ce qui vient d'être obtenu pour un module indécomposable de longueur 2 :

PROPRIETE 1.7. — $\tilde{H}_i(M^{H_1}, M^{H_2})_1$ est un sous-module d'indice p^{p-2} de M^{H_i} .

Démonstration. — Par symétrie, on se ramène à $i = 1$. En prenant $H = H_1$ dans la propriété 1.6, on montre que $\tilde{H}_1(M^{H_1}, M^{H_2})_1$ est formé des $\tilde{H}_1 x + S_{\sigma_1} y$ où x parcourt M^{H_1} et y parcourt M/M^{H_1} . Or $(\sigma_2 - 1)S_{\sigma_1} = p \epsilon_{\sigma_2}$ et en notant $\frac{p}{\sigma_2 - 1}$ le produit $\prod_{i=2}^{p-1} (\sigma_2^i - 1)$, on voit que $\tilde{H}_1(M^{H_1}, M^{H_2})_1$ est formé des éléments de M^{H_1} de la forme $px + \frac{p}{\sigma_2 - 1} \epsilon_{\sigma_2} y$ où x (resp. y) parcourt M^{H_1} (resp. M/M^{H_1}). L'assertion découle de ce que $\epsilon_{\sigma_2}(\bar{M}) \not\subset (\sigma_2 - 1)M^{H_1}$.

2. Classification des modules de longueur 3.

M désigne maintenant un $\mathbf{Z}[G]$ -module de longueur 3 vérifiant les hypothèses restrictives faites au début de 1. On pose $\mathcal{H}_M = \{H_1, H_2, H_3\}$ et on note M_i le sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module de M formé des x tels que $px \in M^{H_j} \oplus M^{H_k}$ où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. M_i est donc un facteur \mathbf{Z} -direct de M et M est une extension (au sens défini en 1) de M/M_i par M_i , M/M_i est de longueur 1 et $\mathcal{H}_{M/M_i} = \{H_i\}$ alors que la longueur de M_i est 2.

La classification des $\mathbf{Z}[G]$ -modules de longueur 3 réalisables comme modules d'unités passe donc par la classification des extensions de \bar{M} de longueur 1 par M_0 de longueur 2 avec $\mathcal{H}_{\bar{M}} = \{H_3\}$ et $\mathcal{H}_{M_0} = \{H_1, H_2\}$. Pour chaque i , σ_i désigne encore un générateur de H_i . On voit sans peine que $M^{H_i} = M_0^{H_i}$ pour $i = 1, 2$.

1^{er} cas. — $M_0 = M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$ et M sont donnés et M est construit avec le cocycle $\epsilon = \epsilon' + \epsilon''$ où $\epsilon' \in Z^1(G, T')$ et $\epsilon'' \in Z^1(G, T'')$ (voir remarque 1.7).

PROPRIÉTÉ 2.1. —

a) Si $\epsilon \in B^1(G, T)$ alors $M = M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}$ (somme $\mathbf{Z}[G]$ -directe).

b) Si $\epsilon \notin B^1(G, T)$ et $\epsilon' \in B^1(G, T')$ alors

$$M = (M^{H_2}, M^{H_3})_1 \oplus M^{H_1}.$$

c) Si $\epsilon' \notin B^1(G, T')$ et $\epsilon'' \notin B^1(G, T'')$ alors toutes les extensions ainsi construites sont indécomposables, $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphes et vérifient $[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}] = p$. En outre, pour tout i , on a $M_i = M^{H_j} \oplus M^{H_k}$, avec $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, et M est une extension de M/M_i par M_i associée à un cocycle $\epsilon'_i + \epsilon''_i$ où $\epsilon'_i \in Z^1(G, T'_i) \setminus B^1(G, T'_i)$ (resp. $\epsilon''_i \in Z^1(G, T''_i) \setminus B^1(G, T''_i)$) avec $T'_i = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M/M_i, M^{H_j})$ et $T''_i = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M/M_i, M^{H_k})$.

Démonstration. — Les assertions a) et b) résultent du théorème 1.5 et de la remarque 1.7. On voit encore par application de la propriété 1.3 que les extensions de \bar{M} par M_0 construites avec un cocycle vérifiant les conditions de b) sont $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphes.

Examinons en détail le cas c). On voit sans difficulté que $M^{H_1} = M_0^{H_1}$ et $M^{H_2} = M_0^{H_2}$. M^{H_3} est formé des couples $(x_1 + x_2, y)$ de $(M^{H_1} \oplus M^{H_2}) \times \bar{M}$ tels que $(\sigma_3 - 1)(x_1 + x_2) + (\epsilon'_{\sigma_3} + \epsilon''_{\sigma_3})y = 0$, soit encore

$$\begin{cases} (\sigma_3 - 1)x_1 + \epsilon'_{\sigma_3}y = 0 \\ (\sigma_3 - 1)x_2 + \epsilon''_{\sigma_3}y = 0. \end{cases} \quad (2')$$

Ecrivons la relation (1) avec $\tau = \sigma_1$ et $\tau = \sigma_2$, on obtient :

$$\epsilon'_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1) = (\sigma_3 - 1)t' \quad \text{avec } t' \in T'$$

$$\epsilon''_{\sigma_3}(\sigma_2^{-1} - 1) = (\sigma_3 - 1)t'' \quad \text{avec } t'' \in T''.$$

On en déduit en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1.5 que

$$M^{H_3} = \left\{ \left(-t'z - t'' \frac{\sigma_1^{-1} - 1}{\sigma_2^{-1} - 1} z, (\sigma_1^{-1} - 1)z \right) \mid z \in \bar{M} \right\}$$

et en raisonnant comme dans le cas des extensions indécomposables de longueur 2 :

$$[M : M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}] = [\bar{M} : (\sigma_2 - 1)\bar{M}] = p.$$

Si M était décomposable, M s'écrirait comme somme $\mathbf{Z}[G]$ -directe de deux sous-modules M' et M'' non triviaux. La semi-simplicité de $\mathbf{Q} \otimes M$ entrainerait alors l'existence de i tel que $\{M', M''\} = \{M_i, M^{H_i}\}$. C'est impossible avec $i = 3$ car on aurait alors $M = M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}$. C'est impossible avec $i = 1$ ou 2 car on aurait $M_i = (M^{H_j}, M^{H_k})_1$ et $M = M_i \oplus M^{H_i}$ et on se trouverait dans le cas b). M est donc indécomposable et la dernière assertion en découle.

Dans le cas c), on posera $M = ((M^{H_1} \oplus M^{H_2}), M^{H_3})_1$.

2^e cas. — $M_0 = (M_0^{H_1}, M_0^{H_2})_1$ et \bar{M} sont donnés et M est construit avec le cocycle ϵ . On écrit la relation (1) sous la forme :

$$\epsilon_{\sigma_3}(\tau^{-1} - 1) = (\sigma_3 - 1)\tau^{-1}\epsilon_\tau + (\tau^{-1} - 1)\epsilon_{\sigma_3}. \quad (1')$$

Le lemme suivant précise l'action de G sur M_0 :

LEMME 2.2. —

a) Soit $\tau \notin H_1 \cup H_2$, alors $(\tau - 1)M_0$ est un sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module d'indice p de $M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$.

b) $(\sigma_1 - 1)M_0 = M_0^{H_2}$ et $(\sigma_2 - 1)M_0 = M_0^{H_1}$.

Démonstration. — Un calcul direct dans M_0 considéré comme extension de $M_0/M_0^{H_1}$ par $M_0^{H_1}$ associée à un cocycle η non cobord montre que $(\tau - 1)M_0$ est contenu dans $M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$. On utilise alors une \mathbf{Z} -base de M_0 dont tous les éléments sauf le dernier sont dans $M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$ et on écrit la matrice associée à l'application \mathbf{Z} -linéaire de M_0 dans lui-même obtenue en multipliant un élément par $\tau - 1$. On voit alors que

$$\begin{aligned} [M_0 : (\tau - 1)M_0] &= [M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2} : (\tau - 1)(M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2})] \\ &= [M_0^{H_1} : (\tau - 1)M_0^{H_1}] \times [M_0^{H_2} : (\tau - 1)M_0^{H_2}] = p^2 \end{aligned}$$

qui achève la démonstration de a).

Pour b), on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_0^{H_1} \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_0/M_0^{H_1} \longrightarrow 0$$

associée à $\eta \in Z^1(G, \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M_0/M_0^{H_1}, M_0^{H_1}))$, η non cobord. Soit $(x, y) \in M_0^{H_1} \times M_0/M_0^{H_1}$, on voit que

$$(\sigma_2 - 1)(x, y) = ((\sigma_2 - 1)x + \eta_{\sigma_2}y, 0),$$

quand (x, y) parcourt $M_0^{H_1} \times M_0/M_0^{H_1}$, $(\sigma_2 - 1)x + \eta_{\sigma_2}y$ parcourt $M_0^{H_1}$ puisque $\eta_{\sigma_2}(M_0/M_0^{H_1}) \not\subset (\sigma_2 - 1)M_0^{H_1}$ (remarque déjà utilisée dans la démonstration du théorème 1.5). L'égalité $(\sigma_1 - 1)M_0 = M_0^{H_2}$ résulte de la "symétrie" de M_0 (corollaire 1.5).

Nous sommes donc conduits à distinguer 3 cas pour le cocycle ϵ , à savoir :

$$\text{Cas 2.1.} \quad - \quad \epsilon_{\sigma_3}(\bar{M}) \subset (\sigma_3 - 1)M_0$$

$$\text{Cas 2.2.} \quad - \quad \epsilon_{\sigma_3}(\bar{M}) \subset M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}$$

$$\epsilon_{\sigma_3}(\bar{M}) \not\subset (\sigma_3 - 1)M_0$$

$$\text{Cas 2.3.} \quad - \quad \epsilon_{\sigma_3}(\bar{M}) \not\subset M_0^{H_1} \oplus M_0^{H_2}.$$

Nous sommes en mesure de prouver la

PROPRIÉTÉ 2.2. — Dans les cas 2.1, 2.2 et 2.3, $M^{H_1} = M_0^{H_1}$ et $M^{H_2} = M_0^{H_2}$,

$$\text{dans le cas 2.1 : } M = M_0 \oplus M^{H_3};$$

$$\text{dans le cas 2.2 : } [M : M_0 \oplus M^{H_3}] = p;$$

$$\text{dans le cas 2.3 : } [M : M_0 \oplus M^{H_3}] = p^2.$$

Démonstration. — Les assertions concernant M^{H_1}, M^{H_2} et le cas 2.1 sont évidentes. Pour déterminer les deux dernières, on évalue M^{H_3} , c'est-à-dire l'ensemble des $(x, y) \in M_0 \times \bar{M}$ vérifiant $(\sigma_3 - 1)x + \epsilon_{\sigma_3} y = 0$. Dans le cas 2.2, il existe $t \in T$ tel que $\epsilon_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1) = (\sigma_3 - 1)t$. On le voit en utilisant la condition (1') et le lemme 2.2. On en déduit, comme dans la démonstration du théorème 1.5 que $M^{H_3} = \{(-tz, (\sigma_1^{-1} - 1)z) \mid z \in \bar{M}\}$ et $[M : M_0 \oplus M^{H_3}] = [\bar{M} : (\sigma_1^{-1} - 1)\bar{M}] = p$. Dans le cas 2.3, la condition (1') et l'assertion b) du lemme 2.2 entraînent

$$\epsilon_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1)\bar{M} \subset (\sigma_3 - 1)M_0 + M^{H_2}$$

d'où, en utilisant encore la formule (1'),

$$\epsilon_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1)^2 \bar{M} \subset (\sigma_3 - 1)M_0,$$

il en résulte l'existence d'un $t \in T$ tel que $\epsilon_{\sigma_3}(\sigma_1^{-1} - 1)^2 = (\sigma_3 - 1)t$. On en déduit encore $M^{H_3} = \{(-tz, (\sigma_1^{-1} - 1)^2 z) \mid z \in \bar{M}\}$ et

$$[M : M_0 \oplus M^{H_3}] = [\bar{M} : (\sigma_1^{-1} - 1)^2 \bar{M}] = p^2.$$

Remarque 2.1. — L'éventualité 2.3 implique $p \neq 2$. En effet, si $p = 2$, $(\sigma_3 - 1)M_0 = 2M_0$ et $(\sigma_1^{-1} - 1)\bar{M} = 2\bar{M}$, ϵ_{σ_3} étant un \mathbf{Z} -homomorphisme, $\epsilon_{\sigma_3}(2\bar{M}) \subset (\sigma_3 - 1)M_0 = 2M_0$ et on se trouve dans le cas 2.1 ou dans le cas 2.2.

Notations. — Une extension M correspondant au cas 2.2 (resp. 2.3) sera notée $((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_1$ (resp. $((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_2$).

Rassemblons l'ensemble des résultats dans le

THEOREME 2.3. — *Soit M un module de longueur 3 avec $\mathcal{H}_M = \{H_1, H_2, H_3\}$, quitte à modifier convenablement l'indexation des H_i , M est de l'une des formes suivantes (les sommes \oplus sont $\mathbf{Z}[G]$ -directes) :*

- ① $M = M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}$
- ② $M = (M^{H_1}, M^{H_2})_1 \oplus M^{H_3}$
- ③ $M = ((M^{H_1} \oplus M^{H_2}), M^{H_3})_1$
- ④ $M = ((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_1$
- ⑤ $M = ((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_2$ (cas impossible si $p = 2$).

Les modules des cas ③, ④ et ⑤ sont indécomposables et "symétriques" relativement aux M^{H_i} . En outre M^{H_1} , M^{H_2} et M^{H_3} étant donnés, les modules du cas ① (resp. ②, resp. ③, resp. ④, resp. ⑤) sont $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphes.

Démonstration. — L'assertion sur l'isomorphie de M avec l'un des modules évoqués résulte des propriétés 2.1 et 2.2. L'indécomposabilité du cas ③ a fait l'objet de l'assertion b) de la propriété 2.1. Les deux autres cas se traitent de façon analogue. La symétrie se voit comme suit dans le cas ④ : M_3 est nécessairement égal à $(M^{H_2}, M^{H_3})_1$, sinon $((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_1$ serait une extension d'un module de longueur 1 par $M^{H_2} \oplus M^{H_3}$ et $M^{H_1} \oplus M^{H_2} \oplus M^{H_3}$ serait d'indice p^2 , ce qui est impossible d'après la propriété 2.1, $((M^{H_1}, M^{H_2})_1, M^{H_3})_1$ est donc une extension d'un module de longueur 1 par $(M^{H_2}, M^{H_3})_1$ et nécessairement, d'après la propriété 2.2, de la forme $((M^{H_2}, M^{H_3})_1, M^{H_1})_1$. On procède de manière analogue dans le cas ⑤.

Le $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphisme est évident dans le cas ①, et résulte de la propriété 1.4 dans le cas ②. Montrons que les modules du cas ③, $M^{H_1}, M^{H_2}, M^{H_3}$ étant fixés, sont $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphes : un tel module M est déterminé par la donnée de $M^{H_1} \oplus M^{H_2}$, celle de M et celle de e' (resp. e'') dans $\mathbf{Z}^1(G, T')$ (resp. $\mathbf{Z}^1(G, T'')$) et non cobords. On conclut, comme dans la démonstration de la proposition 1.4, en utilisant le fait que

$$\text{Aut}_{\mathbf{Z}[G]}(M^{H_1} \oplus M^{H_2}) = \text{Aut}_{\mathbf{Z}[G]}M^{H_1} \oplus \text{Aut}_{\mathbf{Z}[G]}M^{H_2}.$$

On fera de même avec les extensions du cas ④ en utilisant le fait que les éléments de $M_0/(\sigma_3 - 1)M_0$ (avec $M_0 = (M^{H_1}, M^{H_2})_1$) annihilés par $\sigma_2 - 1$ forment un sous- \mathbf{F}_p -espace vectoriel de dimension 1.

Complétons ces résultats par l'évaluation des images par la "norme", par analogie avec la propriété 1.7.

PROPRIÉTÉ 2.4. — L'indice des $\tilde{H}_i M$ dans M^{H_i} est donné, suivant la classification mise en évidence dans le théorème 2.3, par :

$$\text{cas ① : } [M^{H_i} : \tilde{H}_i M] = p^{p-1}$$

$$\text{cas ② : } [M^{H_3} : \tilde{H}_3 M] = p^{p-1} \text{ et si } i = 1 \text{ ou } 2$$

$$[M^{H_i} : \tilde{H}_i M] = p^{p-2}$$

cas ③ : $[M^{H_i} : \tilde{H}_i M] = p^{p-2}$

cas ④ : $[M^{H_i} : \tilde{H}_i M] = p^{p-2}$

cas ⑤ : $[M^{H_i} : \tilde{H}_i M] = p^{p-3}$.

Démonstration. — Les cas ① et ② sont évidents, ce dernier se ramenant en partie à la propriété 1.7. Dans les cas ③, ④ et ⑤ un argument de symétrie nous ramène à l'évaluation de $[M^{H_1} : \tilde{H}_1 M]$, dans le cas ③ on conclut alors par analogie avec la démonstration de la propriété 1.7. Dans les cas ④ et ⑤, en utilisant les notations de la propriété 1.6 avec $\sigma_1 = \sigma$ et de la propriété 2.2, on voit que $\tilde{H}_1 M$ est formé des $\tilde{H}_1 x + S_\sigma y$ où x (resp. y) parcourt M_0 (resp. \bar{M}). Dans le cas ④, $\epsilon_{\sigma_3} = \epsilon'_{\sigma_3} \oplus \epsilon''_{\sigma_3}$ avec $\epsilon'_{\sigma_3}(\bar{M}) \subset M^{H_1}$ et $\epsilon''_{\sigma_3}(\bar{M}) \subset M^{H_2}$, en outre l'égalité de la propriété 1.6 s'écrit $(\sigma_3 - 1)S_{\sigma_1} = p \epsilon'_{\sigma_3}$ et $\tilde{H}_1 M$ est formé des $\tilde{H}_1 x + \frac{p}{\sigma_3 - 1} \epsilon'_{\sigma_3} y$. On en déduit encore que $[M^{H_1} : \tilde{H}_1 M] = p^{p-2}$. Dans le cas ⑤, on sait que $pM^{H_1} + \tilde{H}_1 \epsilon_{\sigma_3} \bar{M} = \tilde{H}_1 M_0$ est d'indice p^{p-2} dans M^{H_1} d'après la propriété 1.7, donc de la forme $\frac{p}{\sigma_3 - 1} M^{H_1}$. On a vu que $\tilde{H}_1 M = \tilde{H}_1 M_0 + S_{\sigma_1} \bar{M}$, (S_{σ_1} a été défini dans la propriété 1.6); d'où

$$(\sigma_3 - 1)\tilde{H}_1 M = (\sigma_3 - 1)\tilde{H}_1 M_0 + (\sigma_3 - 1)S_{\sigma_1} \bar{M}$$

soit encore, compte tenu de la propriété 1.6,

$$(\sigma_3 - 1)\tilde{H}_1 M = pM^{H_1} + \tilde{H}_1 \epsilon_{\sigma_3} \bar{M} = \tilde{H}_1 M_0,$$

soit encore $\tilde{H}_1 M = \frac{p}{(\sigma_3 - 1)^2} M^{H_1}$.

3. Application à l'existence d'unités de Minkowski.

Dans tout ce qui suit, on pose $L = \mathbf{Z}[G]/\mathbf{Z}\tilde{G}$.

PROPRIETE 3.1. —

- 1) Si $i \neq j$ alors $L^{H_i} \oplus L^{H_j}$ est facteur \mathbf{Z} -direct de L .
- 2) Si $p = 2$, $[L : L^{H_1} \oplus L^{H_2} \oplus L^{H_3}] = 2$.
- 3) Si $p = 3$, $[L : L^{H_1} \oplus L^{H_2} \oplus L^{H_3} \oplus L^{H_4}] = 3^3$.

Démonstration. —

1) On montre que L^{H_i} admet comme \mathbf{Z} -base $\{\sigma\tilde{H}_i, \sigma$ parcourant un système de représentants de $G/G_i \setminus H_i\}$. Considérons alors le sous \mathbf{Z} -module N de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} L$ engendré par les $\sigma\tilde{H}_i/p, \sigma \in G$ et $i \in \{1, 2, \dots, p+1\}$, il admet comme \mathbf{Z} -base $\{\sigma\tilde{H}_i/p, \sigma$ parcourant un système de représentants de $(G/H_i) \setminus H_i, i = 1, \dots, p+1\}$. Or si $x \in E, px \in E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_{p+1}$, car $p = \sum_{i=1}^{p+1} \tilde{H}_i$ dans L ; donc $N \supset L$. En faisant les calculs dans la base de N considérée ci-dessus et dans la base "canonique" de L , on montre que si $x \in L$ et $px \in L^{H_i} \oplus L^{H_j}, i \neq j$, alors $x \in L^{H_i} \oplus L^{H_j}$, donc que $L^{H_i} \oplus L^{H_j}$ est facteur direct de L .

2) Pour $p = 2$, un calcul simple montre que

$$[L : L^{H_1} \oplus L^{H_2} \oplus L^{H_3}] = 2.$$

3) Pour $p = 3$, en utilisant la \mathbf{Z} -base de N considérée plus haut, on peut montrer que $[L : L^{H_1} \oplus L^{H_2} \oplus L^{H_3} \oplus L^{H_4}] = 3^3$.

Regardons alors le cas $p = 2$, le théorème 2.3 nous donne la classification complète, à $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphisme près, des modules de caractère égal à celui de la représentation d'augmentation. On voit également qu'il y a une unité de Minkowski si et seulement si on se trouve dans le cas ③.

T. Kubota a donné dans [6] les unités fondamentales de K en fonction des unités fondamentales $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ des corps quadratiques intermédiaires. Le tableau ci-dessous donne, dans chaque cas, la structure galoisienne de E suivant la classification du théorème 2.3.

<i>Unités fondamentales de K</i>	<i>Structure galoisienne de E</i>
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	①
$\sqrt{\epsilon_1}, \epsilon_2, \epsilon_3$	①
$\sqrt{\epsilon_1}, \sqrt{\epsilon_2}, \epsilon_3$	①
$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}, \epsilon_2, \epsilon_3$	②
$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}, \sqrt{\epsilon_2}, \epsilon_3$	②
$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}, \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_3}, \sqrt{\epsilon_3 \epsilon_1}$	④
$\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}, \epsilon_2, \epsilon_3$	③

Remarque 3.1. — Dans le cas où $\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}$, ϵ_2 , ϵ_3 forment un système complet d'unités fondamentales de K , on voit que $\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}$ est une unité de Minkowski de K .

On déduit encore des résultats de T. Kubota et du paragraphe 2 :

PROPRIETE 3.2. — *Pour que K/\mathbf{Q} réelle de groupe de Galois isomorphe au groupe de Klein admette une unité de Minkowski, il faut et il suffit que $h_K = 1/2 h_1 h_2 h_3$ et que $E_i \oplus E_j$ soit un facteur \mathbf{Z} -direct de E quels que soient i et j distincts.*

Dans le cas $p = 3$, on voit facilement que si $E^{(i)}$ désigne l'ensemble des x de E tels que $px \in E_j \oplus E_k \oplus E_l$ avec $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, alors $E^{(i)}$ est un $\mathbf{Z}[G]$ -module de longueur 3 correspondant au cas ③ du théorème 2.3. Posons $\overline{E^{(i)}} = E/E^{(i)}$, on peut énoncer :

PROPRIETE 3.3. — *Pour que K/\mathbf{Q} , de groupe de Galois isomorphe à $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$ admette une unité de Minkowski, il faut que pour tout i , $E^{(i)}$ soit de type ③ (dans la classification du théorème 2.3) et que le cocycle $\epsilon^{(i)}$ associé à l'extension E de $\overline{E^{(i)}}$ par $E^{(i)}$ vérifie*

$$\begin{cases} \epsilon_{\sigma_i}(\tau - 1)^2 \overline{E^{(i)}} \subset (\sigma_i - 1)E^{(i)} \\ \epsilon_{\sigma_i}(\tau - 1) \overline{E^{(i)}} \not\subset (\sigma_i - 1)E^{(i)}. \end{cases}$$

Compte tenu de l'assertion 3) de la propriété 3.1 et de la formule $h_K = \frac{a}{3^5} h_1 h_2 h_3 h_4$, on peut énoncer la

Remarque 3.2. — Pour que K/\mathbf{Q} de groupe de Galois isomorphe à $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$ admette une unité de Minkowski, il faut que $\frac{h_K}{h_1 h_2 h_3 h_4} = \frac{1}{3^2}$.

Soient alors p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts, avec $p_1 \equiv p_2 \equiv 1$ modulo 3 et tels que p_1 (resp. p_2) ne soit pas reste cubique modulo p_2 (resp. p_1). On note k_1 (resp. k_2) le corps cubique de discriminant p_1^2 (resp. p_2^2) et $K = k_1 k_2$, k_3 et k_4 sont les deux corps cubiques intermédiaires de discriminant $p_1^2 p_2^2$. On sait, voir G. Gras (cf. [4]) et J. Martinet (cf. [9]), que 3 ne divise ni h_1 , ni h_2 , que 3 divise h_3 et h_4 et que les 3-sous-groupes des

classes d'idéaux de k_3 et k_4 sont cycliques, on a de nombreux exemples où ces sous-groupes sont d'ordre 3, on sait alors (cf. H. Kisilevski dans [5]) que 3 ne divise pas h_K . Un tel K peut donc avoir une unité de Minkowski.

Énonçons, en guise de conclusion, une conjecture (vérifiée dans les cas très particuliers envisagés ici) :

Soient G un groupe abélien fini et M et N deux $\mathbf{Z}[G]$ -modules de type fini sans \mathbf{Z} -torsion tels que $\mathbf{Q} \otimes M = \mathbf{Q} \otimes N$ et $\mathbf{Q} \otimes M \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}[G]$. Notons \mathfrak{S} (resp. \mathfrak{C}) l'ensemble des sous-groupes (resp. des sous-groupes à quotient cyclique) de G . Pour que M et N soient $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphes il faut et il suffit que

- 1) pour tout H de \mathfrak{C} , M^H et N^H soient $\mathbf{Z}[G]$ -isomorphes ;
- 2) pour tout couple de sous- $\mathbf{Z}[G]$ -modules M' , N' facteurs \mathbf{Z} -directs respectifs de M et de N vérifiant $\mathbf{Q} \otimes M' = \mathbf{Q} \otimes N'$ et toute relation de dépendance \mathbf{Z} -linéaire de caractères rationnels de la forme $\sum_{H \in \mathfrak{S}} a_H \chi_H^G = 0$ (où χ_H^G désigne le caractère rationnel de G induit par le caractère trivial de H) alors : $\prod_{H \in \mathfrak{S}} [M'^H : N'^H]^{a_H} = 1$.

Cette conjecture a été suggérée par l'étude des travaux de C.D. Walter qui démontre dans [13] que la condition énoncée est nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BRUMER, On the group of units of an absolutely cyclic number field of prime degree, *J. Math. Soc. Japan*, (1969), 357-358.
- [2] H. CARTAN et S. EILENBERG, Homological algebra, *Princeton Univ. Press*, Princeton, N.J., 1956.
- [3] C.W. CURTIS et I. REINER, Representation theory of finite groups and associative algebras, *Pure and Appl. Math.*, vol XI, Interscience, New York, 1962.
- [4] G. GRAS, 1^{ère} partie : Sur les ℓ -classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ , *Annales de l'Institut Fourier*, 23, 3 (1973), 1-48.

- [5] KISILEVSKI, Some results related to Hilbert's theorem 94, *J. Number theory*, 2 (1970), 199-206.
- [6] T. KUBOTA, Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper, *Nagoya Math. J.*, 10 (1956), 65-85.
- [7] S. KURODA, Über die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper, *Nagoya Math. J.*, 1 (1950), 1-10.
- [8] N. MOSER, Unités et nombre de classes d'une extension galoisienne de \mathbf{Q} , Thèse de 3^e cycle, Grenoble (1975).
- [9] J. MARTINET, A propos de classes d'idéaux, *Séminaire de Th. des Nombres*, Bordeaux (1971-1972), exposé n° 5.
- [10] H. NEHRKORN, Über absolute Idealklassengruppen und Einheiten in algebraischen Zahlkörpern, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 9 (1933), 319-334.
- [11] I. REINER, A survey of integral representation theory, *Bull. of Ann. Math. Soc.*, vol. 16, n° 2 (1970).
- [12] J.P. SERRE, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.
- [13] C.D. WALTER, Brauer's class number relation, *Acta Arithmetica*, (à paraître).

Manuscrit reçu le 10 octobre 1978.

L. BOUVIER et J.J. PAYAN,
Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères France.