Annales de l'institut Fourier

Robert Moussu

Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 171-220
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_171_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 171-220.

SUR L'EXISTENCE D'INTÉGRALES PREMIÈRES POUR UN GERME DE FORME DE PFAFF

par Robert MOUSSU

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Dans cette introduction ω désigne le germe en zéro d'une forme de Pfaff de classe C^∞ ou analytique (resp. holomorphe) sur un voisinage de O dans $\mathbf{R}^n$ (resp. dans $\mathbf{C}^n$), $n \geqslant 3$, qui s'annule en O. On dit que ω est un germe *complètement intégrable* si le germe en zéro de 3-forme $\omega \wedge d\omega$ est nul. Une *intégrale première faible* f de ω est un germe en zéro de fonction numérique de même classe que ω tel que :

$$\omega \wedge df = 0.$$

Nous dirons que f est une *intégrale première* de ω, si de plus, il existe un germe g en zéro de fonction numérique de même classe que ω tel que :

$$\omega = g\, df \qquad \text{et} \qquad g(0) \neq 0.$$

Si ω possède une intégrale première, le germe de 2-forme $d\omega$ se décompose en $(dg/g) \wedge \omega$ et $d\omega(0) = 0$. L'étude des germes ω complètement intégrables, tels que $d\omega(0) \neq 0$, se ramène à l'étude des germes en $0 \in \mathbf{R}^2$ (resp. $0 \in \mathbf{C}^2$) des champs de vecteurs ([4] et [7]). Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées d'un point x de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$, nous écrivons :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i$$

Le rang de la matrice $\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)\right)$ est indépendant des coordonnées choisies. Dans le dernier chapitre de sa thèse [7], G. Reeb montre que si ce rang est supérieur ou égal à 3, cette matrice est symétrique. Nous appelons *hessian* de ω, la forme quadratique q_ω qui lui correspond.

THÉORÈME DE REEB. — *Un germe ω complètement intégrable, dont le hessian est de rang maximum possède :*

— *une intégrale première si ω est analytique ou holomorphe.*

— *une intégrale première faible si ω est C^∞ et q_ω positive.*

Plus généralement, son raisonnement permet de montrer que ω, de classe C^∞, possède une intégrale première faible si q_ω est de rang maximum et d'indice différent de 2 et $n-2$. Cette hypothèse supplémentaire est nécessaire dans le cas C^∞ comme le montre l'exemple suivant : soit ω le germe en $0 \in \mathbf{R}^3$ défini par

$$\omega = x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 - x_3\, dx_3 + \frac{l(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)}{x_1^2 + x_2^2}(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)$$

où $l : (\mathbf{R}, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ est un germe C^∞ tel que $l(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $l(t) > 0$ si $t > 0$. Le feuilletage C^∞, de $\mathbf{R}^3 - \{0\}$, défini par $\omega/\mathbf{R}^3 - \{0\}$ a une holonomie non nulle. Ses feuilles ne sont pas les surfaces de niveau d'une fonction numérique. Les résultats de Reeb et l'exemple précédent nous amènent à proposer la conjecture suivante que nous démontrerons partiellement dans cet article.

Conjecture (*). — Soit ω un germe complètement intégrable, analytique ou holomorphe. Alors ω possède une intégrale première dès que 0 est un zéro algébriquement isolé de ω (définition 1 — 0). Dans le cas C^∞, on peut formuler la même conjecture avec l'hypothèse supplémentaire : le feuilletage de $\mathbf{R}^n - \{0\}$ défini par $\omega/\mathbf{R}^n - \{0\}$ est sans holonomie.

R. Thom a proposé (dans son séminaire de l'I.H.E.S.) des démonstrations de cette conjecture dans les cas holomorphes et analytiques. Il me semble que son raisonnement (géométrique) permet seulement de montrer l'existence d'intégrale première faible de classe C^∞, dans le cas analytique. Par des arguments qui s'appuient fortement sur le théorème de division de De Rham [1] (qui est l'objet du chapitre I) nous montrerons dans le chapitre III que la conjecture est vraie formellement.

Théorème (d'existence d'intégrales premières formelles). — *Soit ω un germe de forme de Pfaff, complètement intégrable, analytique ou holomorphe* (*resp. de classe* C^∞) *dont* O *est un zéro algébriquement isolé. Alors* ω *possède une intégrale première formelle : c'est-à-dire, il existe des séries formelles* f *et* g *avec* $g(0) \neq 0$ *telles que* $\omega = g\,df$ (*resp.* $J^\infty\omega = g\,df$).

Le jet d'ordre 1 de ω, noté $J^1\omega$, est donc la différentielle du polynôme homogène de degré 2, $g(0)\,J^2f$. La forme quadratique q_ω qu'il représente ne dépend que de ω. Nous l'appelons *hessian* de ω, nous notons $r(\omega)$ son rang et $i(\omega)$ son *indice* (que nous pouvons toujours supposer supérieur à $r(\omega)/2$). En utilisant un théorème de fonctions composées (chapitre II) et le théorème formel, nous démontrerons une version à paramètres du théorème de Reeb et nous en déduirons les résultats suivants :

Théorème (d'existence d'intégrales premières analytiques ou holomorphes). — *Soit* ω *un germe en* $0 \in \mathbf{R}^n$ (*resp. en* $0 \in \mathbf{C}^n$) *complètement intégrable, analytique* (*resp. holomorphe*), *dont* O *est un zéro algébriquement isolé. Si le hessian* q_ω *de* ω *est*

(*) B. Malgrange a récemment démontré cette conjecture dans le cas holomorphe (Frobenius avec singularités. 1. codimension un).

de rang $r \geqslant 2$, ω *possède une intégrale première* f *qui peut s'écrire* :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i x_i^2 + h(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$$

où h *est un germe analytique en* $0 \in \mathbf{R}^{n-r}$ (*resp. holomorphe en* $0 \in \mathbf{C}^{n-r}$) *et* $\varepsilon_i = 1$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant i(\omega)$, $\varepsilon_i = -1$ *pour* $i(\omega) < i \leqslant r$ (*resp* $\varepsilon_i = 1$).

Théorème (d'existence d'intégrales premières dans le cas C^∞). — *Soit* ω *un germe en* $0 \in \mathbf{R}^n$, *complètement intégrable, de classe* C^∞, *dont* 0 *est un zéro algébriquement isolé. Alors,* ω *possède une intégrale première* f *lorsque* (**) :

1) $r(\omega) = i(\omega) = n$ *et alors* $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

2) $n \geqslant 4$, $r(\omega) = n$, $i(\omega) = n - 1$ *et alors*

$$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2$$

3) $n \geqslant 4$, $r(\omega) = i(\omega) = n - 1$ *et alors*

$$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + h(x_n).$$

Pour $n = 3$, les points 2 et 3 sont encore vrais si le feuilletage de $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ défini par $\omega/\mathbf{R}^3 - \{0\}$ est sans holonomie.

Je veux terminer cette introduction en remerciant J. Martinet qui, par quelques remarques astucieuses, m'a beaucoup aidé, ainsi que les auditeurs du cours que j'ai fait sur ce sujet à Porto.

Notations. — Le vocabulaire (usuel) sur les germes d'applications est celui de [8] et dans toute la suite nous notons :

— $\Lambda_\infty^p(n)$ (resp. $\Lambda_A^p(n)$) l'ensemble des germes en $0 \in \mathbf{R}^n$ des p-formes différentielles, de classe C^∞ (resp. analytiques) sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$.

— $\Lambda_H^p(n)$ l'ensemble des germes en $0 \in \mathbf{C}^n$ de p-formes différentielles holomorphes.

(**) J'ai montré récemment que ce résultat est encore vrai si : 4) $r(\omega) = n$ et si le feuilletage de $\mathbf{R}^n - \{0\}$ défini par ω a une holonomie nulle, ce sera le cas si $i(\omega) \neq n - 2$.

— $\Lambda_F^p(n)$ l'ensemble des jets d'ordre infini des éléments de $\Lambda_\infty^p(n)$. Pour $X = \infty$, A, F, H, $\Lambda_X^p(n)$ est un module libre sur l'anneau local $\Lambda_X^0(n)$ dont l'idéal maximal sera noté $\mathcal{M}_X(n)$ (généralement on note $\Lambda_\infty^0(n) = \mathcal{E}(n)$, $\Lambda_A^0(n) = \theta(n)$). L'idéal engendré dans $\Lambda_X^0(n)$ par des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_p$ est noté $[a_1, a_2, \ldots, a_p]$. Le théorème de Borel permet d'identifier $\Lambda_F^0(n)$ à l'anneau des séries formelles à n indéterminées, à coefficients réels. Dans la suite, $\Lambda_F^0(n)$ désignera, quelquefois aussi, l'anneau des séries formelles à n indéterminées sur $\mathbf{C}$.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point $x \in \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ un élément $\alpha \in \Lambda_X^p(n)$ s'écrit :

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} a_{i_1, i_2 \ldots, i_p}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_p}$$

les $a_{i_1, i_2, \ldots i_p}$ étant des éléments de l'anneau $\Lambda_X^0(n)$. En particulier, un germe ω de 1-forme s'écrit :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i, \qquad a_i \in \Lambda_X^0(n).$$

L'idéal engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\Lambda_X^0(n)$ est noté $I(\omega)$.

DEFINITION 1. — *Nous dirons que* 0 *est un zéro algébriquement isolé de* ω *si* $\Lambda_X^0(n)/I(\omega)$ *est un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbf{R}$ *lorsque* $X = \infty$, A, F, *sur* $\mathbf{C}$ *lorsque* $X = H$.

Soient $s_1, s_2, \ldots, s_q$ les coordonnées d'un point s de $\mathbf{R}^q$ ou $\mathbf{C}^q$. Nous noterons $\Lambda_X^p(n, q)$ le sous-module de $\Lambda_X^p(n+q)$ formé par les p-formes $\alpha_s = \alpha$ qui s'écrivent

$$\alpha_s(x) = \alpha(x, s) = \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_p} a_{i_1, i_2 \ldots i_p}(x, s)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots dx_{i_p}$$

où les $a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ sont des éléments de l'anneau $\Lambda_X^0(n+q)$. Nous dirons que α_s est une p-forme sur $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}^n$) à paramètre s. La dérivée extérieure de α_s en temps qu'élément de $\Lambda_X^p(n, q)$, sera écrite $d_x \alpha_s$. En particulier si

$$f \in \Lambda_X^0(n+q)$$

est considéré comme un élément de $\Lambda^0_X(n, q)$ on écrit :

$$d_x f(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s)\, dx_i.$$

Plan. — Les chapitres I et II sont consacrés à des préliminaires : le théorème de De Rham de division des formes et un théorème de fonctions composés. Les résultats que nous y établirons sont déjà plus ou moins connus. Dans les chapitres III, IV et V nous démontrerons les théorèmes d'existence d'intégrales premières respectivement formelles, analytiques et C^∞.

CHAPITRE PREMIER

LE THÉORÈME DE DIVISION DE G. DE RHAM

Une 1-forme différentielle ω sans zéro sur une variété M^n possède la propriété de division; c'est-à-dire, si α est une p-forme différentielle sur $M^n (1 \leqslant p \leqslant n-1)$ telle que $\omega \wedge \alpha = 0$, il existe une $(p-1)$-forme β telle que $\alpha = \omega \wedge \beta$. Nous allons montrer que ce résultat reste vrai pour les 1-formes différentielles dont les zéros sont algébriquement isolés. Plus précisément, nous démontrerons un théorème de division local [1] dans les cas C^∞, analytique, holomorphe et nous en déduirons le théorème de division global dans le cas C^∞.

1. Énoncés des résultats.

(pour les notations voir l'introduction).

DÉFINITION 1. — *Un élément* ω *de* $\Lambda^1_X(n)$ *possède la propriété de division (dans* $\Lambda_X(n)$*) si quel que soit* $\alpha \in \Lambda^p_X(n)$ *tel que :*

$$\omega \wedge \alpha = 0 \qquad \textit{et} \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

il existe $\beta \in \Lambda^{p-1}_X(n)$ *tel que* $\alpha = \omega \wedge \beta$.

THÉORÈME (LOCAL) 1. — *Soit* ω *un élément de* $\Lambda^1_X(n)$. *Si* 0 *est un zéro algébriquement isolé de* ω *et* $X = \infty$, A, F, H, *alors* ω *possède la propriété de division. Réciproquement, si* ω *possède la propriété de division et* $X =$ A, F, H, *alors* 0 *est un zéro algébriquement isolé de* ω.

[1] Ce théorème est bien connu, en géométrie analytique (par exemple : Saïto, calcul algébrique de la monodromie. Astérisque 7 et 8).

Cette réciproque n'est pas vraie dans le cas C^∞ comme le montre l'exemple suivant : la 1-forme différentielle sur $\mathbf{R}^2$

$$\omega = e^{-\frac{1}{x_1^2}} dx_1 + x_2\, dx_2$$

est de classe C^∞ et 0 n'est pas un zéro algébriquement isolé de ω. Cependant elle possède la propriété de division. En effet, si :

$$\alpha = f_1(x_1, x_2)\, dx_1 + f_2(x_1, x_2)\, dx_2 \quad \text{et} \quad \omega \wedge \alpha = 0$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^2$, il est clair que :

$$e^{-\frac{1}{x_1^2}} f_2(x_1, 0) = 0$$

On en déduit l'existence d'une fonction g, C^∞ sur $\mathbf{R}^2$ telle que

$$f_2(x_1, x_2) = x_2 g(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \alpha = g(x_1, x_2)\omega.$$

Corollaire 1. — *Soit* ω *un élément de* $\Lambda^1_X(n, q)$, *avec* $X = A, H, F$,

$$\omega_s(x) = \omega(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x, s)\, dx_i,$$
$$(x, s) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q \quad \text{ou} \quad \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^q$$

tel que $0 \in \mathbf{R}^n$ *ou* $\mathbf{C}^n$ *soit un zéro algébriquement de*

$$\omega_0(x) = \omega(x, 0)$$

considéré comme élément de $\Lambda^1_X(n)$. *Alors si*

$$\alpha_s \wedge \omega_s = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha_s \in \Lambda^1_X(n, q), \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1,$$

il existe $\beta_s \in \Lambda^{p-1}_\infty(n, q)$ *tel que* $\alpha_s = \omega_s \wedge \beta_s$.

Corollaire 2. — *Soient* ω *un élément de* $\Lambda^1_\infty(n)$ *dont* 0 *est un zéro algébriquement isolé. Alors si*

$$\alpha_s \wedge \omega = 0 \quad \textit{avec} \quad \alpha_s \in \Lambda^p_\infty(n, q), \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

il existe $\beta_s \in \Lambda^{p-1}_\infty(n, q)$ *tel que* $\alpha_s = \omega \wedge \beta_s$.

Soit M^n une variété C^∞ et, soit $\Lambda^p(M)$ le module sur $C^\infty(M) = \Lambda^0(M)$ des p-formes différentielles de classe C^∞ sur M. Nous dirons que $\omega \in \Lambda^1(M)$ possède la propriété de division si quelle que soit $\alpha \in \Lambda^p(M)$ telle que

$$\omega \wedge \alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

il existe une $(p-1)$-forme $\beta \in \Lambda^{p-1}(M)$ telle que $\alpha = \omega \wedge \beta$. Si a est un point de M, on note $\Lambda^p(M, a)$ l'ensemble des germes en a des éléments de $\Lambda^p(M)$. Un zéro a de $\omega \in \Lambda^1(M)$ est dit algébriquement isolé si la dimension sur $\mathbf{R}$ de $\Lambda^0(M, a)/I(\omega_a)$ est finie, $\omega_a \in \Lambda^1(M, a)$ désignant le germe de ω en a.

COROLLAIRE 3. — *Une 1-forme différentielle* C^∞ *sur une variété* M^n, *dont les zéros sont algébriquement isolés possède la propriété de division.*

Avant d'aborder la démonstration de ces résultats, rappelons le théorème de Rham-Northcott (voir [1], et [6] page 374).

2. Le théorème de De Rham-Northcott.

Soient A un anneau commutatif, unitaire et $\Lambda^p(A^n)$ le module sur A des p-formes extérieures sur A^n. Nous écrirons encore

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \quad \text{avec} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_p$$

les éléments de la base canonique de $\Lambda^p(A^n)$. En particulier une 1-forme $\omega \in \Lambda^1(A^n)$ s'écrira

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i \qquad \text{avec} \qquad a_i \in A \quad \text{pour} \quad i \leqslant i \leqslant n.$$

Nous dirons que ω possède la propriété de division si la condition $\omega \wedge \alpha = 0$, $\alpha \in \Lambda^p(A^n)$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$ implique l'existence de $\beta \in \Lambda^{p-1}(A^n)$ telle que $\alpha = \omega \wedge \beta$. A une 1-forme $\omega \in \Lambda^1(A^n)$, on associe le complexe de cochaine $(\Lambda(A^n), \omega)$:

$$\Lambda^0(A^n) \xrightarrow{\omega} \Lambda^1(A^n) \ldots \xrightarrow{\omega} \Lambda^{p-1}(A^n) \xrightarrow{\omega} \Lambda^p(A^n) \ldots \xrightarrow{\omega} \Lambda^n(A^n) \xrightarrow{\omega} 0$$

l'opérateur cobord ω étant défini par $\omega(\alpha) = \omega \wedge \alpha$. Ce complexe peut être identifié au complexe de Koszul (page 359 de [6]) $K(a_1, a_2, \ldots, a_n, A)$. Il est clair que $\omega \in \Lambda^1(A^n)$ possède la propriété de division si, et seulement si,

$$H^p(\Lambda(A^n), \omega) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1.$$

Désignons par $I_i(\omega)$ l'idéal engendré par $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ dans A si

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i.$$

Théorème de De Rham-Northcott. ([1] et [6]). — *Soit* $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i$ *un élément de* $\Lambda^1(A^n)$:

i) *Si pour* $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, *la classe de* a_{i+1} *dans* $A/I_i(\omega)$ *n'est pas un diviseur de zéro, alors* ω *possède la propriété de division.*

ii) *Réciproquement si* A *est noethérien et si* ω *possède la propriété de division, la classe de* a_{i+1} *dans* $A/I_i(\omega)$ *n'est pas un diviseur de zéro pour* $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

La démonstration de la partie directe peut être vue dans [1] et celle de la réciproque dans [6] page 374, théorème 8.

3. Démonstration du théorème local lorsque X = A, F, H.

Il nous suffit de démontrer la proposition suivante.

Proposition 1. — *Soient* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n *éléments de* $\Lambda^0_X(n)$ *où* $X = A, F, H$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

i) *L'idéal* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *engendré par les* a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ *dans* $\Lambda^0_X(n)$ *est de codimension finie.*

ii) *Pour* $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, *la classe de* a_{i+1} *dans* $\Lambda^0_X(n)/[a_1, a_2, \ldots, a_i]$ *n'est pas un diviseur de zéro.*

Cette équivalence est assez bien connue (voir par exemple [8]). Aussi, nous n'en ferons qu'une démonstration rapide dans le cas holomorphe (en utilisant les résultats et les notations de [3]).

Démonstration dans le cas holomorphe. — Soit I_i l'idéal engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_i$ dans $\Lambda^0_H(n)$. Désignons par $\operatorname{Loc} a_i$ et $\operatorname{Loc} I_i$ les germes de « variétés » :

$$\operatorname{Loc} a_i = \{x \in (\mathbf{C}^n, 0)/a_i(x) = 0\}$$
$$\operatorname{Loc} I_i = \{x \in (\mathbf{C}^n, 0)/a_1(x) = a_2(x) = \cdots = a_i(x) = 0\}.$$

Nous allons montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\dim_{\mathbf{C}} \Lambda^0_H(n)/I_n < \infty$.

2. $\operatorname{Loc} I_n = \{0\}$.

3. $\operatorname{Loc} I_i$ est un germe de « variété » de dimension pure $n - i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

4. La classe de a_{i+1} dans $\Lambda^0_H(n)/I_i$ n'est pas un diviseur de zéro, pour $0 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Équivalence entre 1 *et* 2 : Si I_n est un idéal de codimension finie de $\Lambda^0_H(n)$, il contient une puissance de son idéal maximal $\mathcal{M}_H(n)$. Le radical $\sqrt{I_n}$ est donc $\mathcal{M}_H(n)$. Réciproquement, si $\operatorname{Loc} I_n$ est le point 0, le radical de I_n contient $\mathcal{M}_H(n)$, c'est-à-dire que I_n contient une puissance de $\mathcal{M}_H(n)$ et, I_n est nécessairement de codimension finie.

Équivalence entre 2 *et* 3 : Supposons qu'il existe

$$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

tel que, la dimension de $\operatorname{Loc} I_i$ soit strictement supérieure à $n - i$. Le théorème 14, page 115 de [3] permet d'affirmer que

$$\dim \operatorname{Loc} I_{i+1} = \dim (\operatorname{Loc} I_i \cap \operatorname{Loc} a_{i+1}) > n - i - 1.$$

Par une récurrence évidente on en déduit que la dimension de $\operatorname{Loc} I_n$ est positive. Ainsi, si $\operatorname{Loc} I_n$ est $\{0\}$, la dimension de $\operatorname{Loc} I_i$ est $n - i$ et $\operatorname{Loc} I_i$ est un germe de « variété » de dimension pure. La réciproque est évidente.

Équivalence entre 3 *et* 4 : La classe de a_{i+1} dans $\Lambda^0_{\mathrm{H}}(n)/\mathrm{I}_i$ est un diviseur de zéro si, et seulement si, a_{i+1} appartient à un idéal premier P de la décomposition de $\sqrt{\mathrm{I}_i}$ en idéaux premiers. Supposons que Loc I_i soit un germe de « variété » de dimension pure $n - i$. Alors, Loc I_{i+1} est un germe de « variété » de dimension $n - i$ (non pure) si et seulement si, Loc a_{i+1} contient une branche irréductible V de Loc I_i; ce qui est équivalent à : a_{i+1} appartient à un idéal premier P de la décomposition de $\sqrt{\mathrm{I}_i}$ tel que

$$\mathrm{V} = \mathrm{Loc}\ \mathrm{P} = \{x \in (\mathbf{C}^n, 0)/p(x) = 0 \quad \text{si} \quad p \in \mathrm{P}\}$$

De ces deux équivalences, on déduit l'équivalence entre 3 et 4 par une récurrence évidente.

Démonstration du corollaire 1. — Faisons cette démonstration dans le cas holomorphe. Le point $0 \in \mathbf{C}^n$ étant un zéro algébriquement isolé de :

$$\omega_0(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, dx_i,\ b_i(x) = a_i(x, 0) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le locus de l'idéal $[b_1, b_2, \ldots, b_n] \subset \Lambda^0_{\mathrm{H}}(n)$ est réduit à $\{0\} \in \mathrm{C}^n$. Le locus de l'idéal $[a_1, a_2, \ldots, a_n] \subset \Lambda^0_{\mathrm{H}}(n + q)$ est donc de dimension pure q. D'après la démonstration de la proposition précédente (équivalence entre 2 et 4), la classe de a_{i+1} dans l'anneau quotient $\Lambda^0_{\mathrm{H}}(n + q)/[a_1, a_2, \ldots, a_i]$ n'est pas un diviseur de zéro. Le résultat est une conséquence du théorème de De Rham.

Les démonstrations du corollaire 1 et de la proposition 1 dans les cas analytiques et formels se font sensiblement de la même façon que dans le cas holomorphe en remplaçant la notion de « codimension » du locus d'un idéal par celle de hauteur.

Remarque 1. — Si B_x et B_s sont des polydisques fermés de centre $0 \in \mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) et $0 \in \mathbf{R}^q$ (resp. $\mathbf{C}^q$) nous notons $\Lambda^p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}_x, \mathrm{B}_s)$ (resp. $\Lambda^p_{\mathrm{H}}(\mathrm{B}_x, \mathrm{B}_s)$ l'ensemble des $\alpha_s \in \Lambda^p(n, q)$ tels que :

$$\alpha_s = \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_p}$$

dont les coefficients $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ sont des séries convergentes sur $B_x \times B_s$. Le corollaire 1 peut être précisé de la façon suivante : il existe 2 polydisques B_x, B_s tels que, si

$$\omega_s \wedge \alpha_s = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha_s \in \Lambda^p_X(B_x, B_s), \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

il existe $\beta_s \in \Lambda^p_X(B_x, B_s)$ et $\alpha_s = \omega_s \wedge \beta_s$. Démontrons cette affirmation lorsque $X = H$. D'après le théorème 2, page 82 de [3], il existe des polydisques B_x et B_s tels que si

$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} a_i(x, s)\, dx_i, \qquad a_i \in \Lambda^0_X(B_x, B_s)$$

tout élément c de $[a_1, a_2, \ldots, a_n] \subset \Lambda^0_H(n+q)$ s'écrit :

$$c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \qquad \text{avec} \qquad \lambda_i \in \Lambda^0_H(B_x, B_s)$$

Ainsi, pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, la classe de a_{i+1} dans l'anneau quotient $\Lambda^0_H(B_x, B_s)/\{a_1, a_2, \ldots, a_i\}\,.\,\Lambda^0_H(B_x, B_s)$ n'est pas un diviseur de zéro. Le résultat est une conséquence du théorème de De Rham.

4. Démonstration du théorème local lorsque $X = \infty$.

Avant d'aborder cette démonstration faisons la remarque suivante que je dois à J. Martinet. Si M est une variété, considérons les éléments $\omega \in \Lambda^1(M)$ comme les sections du fibré T^*M et soit h un automorphisme de ce fibré qui induit l'application identique sur la base M. Il est clair que, si ω possède la propriété de division $h(\omega)$ possède aussi la propriété de division.

Lemme 1. — *Soient* ω *et* ω' *deux éléments de* $\Lambda^1_X(n)$ *tels que* $I(\omega) = I(\omega')$. *Alors, si* ω *possède la propriété de division, il en est de même pour* ω'.

C'est-à-dire, tout critère qui permet de décider si $\omega \in \Lambda^1_X(n)$ possède la propriété de division porte seulement sur l'idéal $I(\omega)$.

Démonstration. — Écrivons ω et ω' sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i \qquad \text{et} \qquad \omega' = \sum_{i=1}^{n} a'_i\, dx_i$$

les a_i, a'_i étant des éléments de l'anneau local $\Lambda^0_X(n)$. L'égalité $I(\omega) = I(\omega')$ se traduit par l'existence de 2 matrices (n, n)

$$(\alpha_i^j) \quad \text{et} \quad (\alpha'^j_i) \qquad \text{avec} \qquad \alpha_i^j, \ \alpha'^j_i \in \Lambda^0_X(n)$$

telles que

$$a = (\alpha_i^j)a' \qquad \text{et} \qquad a' = (\alpha'^j_i)a$$

avec $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; $a' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$. Le raisonnement classique de J. Mather sur l'équivalence de contact permet d'affirmer qu'il existe une matrice (n, n), inversible (β_i^j) telle que :

$$a' = (\beta_i^j)\,(a), \qquad \text{avec} \qquad \beta_i^j \in \Lambda^0_X(n) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

La matrice (β_i^j) représente un automorphisme du fibré $T^*_X(\mathbf{R}^n, 0)$ qui induit l'application identique sur la base.

Démonstration du théorème local dans le cas C^∞. — Soit $\omega \in \Lambda^1(n)$, dont 0 est un zéro algébriquement isolé.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i, \qquad a_i \in \Lambda^0_\infty(n) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Si $\mathscr{M}_\infty(n)$ désigne l'idéal maximal de $\Lambda^0_\infty(n)$, il existe un entier N tel que

$$\mathscr{M}^N_\infty(n) \subset I(\omega) = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Soit a'_i le jet d'ordre N de a_i en zéro. On a les deux inclusions

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] \subset [a'_1, a'_2, \ldots, a'_n] + \mathscr{M}^{N+1}_\infty(n),$$
$$[a'_1, a'_2, \ldots, a'_n] \subset [a_1, a_2, \ldots, a_n] + \mathscr{M}^{N+1}_\infty(n).$$

Le lemme de Nakayama implique

$$I(\omega) = [a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a'_1, a'_2, \ldots, a'_n] = I(\omega').$$

où ω' désigne le germe de 1-forme analytique :

$$\omega' = \sum_{i=1}^{n} a'_i\, dx_i.$$

D'après le paragraphe précédent, ω' possède la propriété de division dans $\Lambda_A(n)$; c'est-à-dire (paragraphe 2), la suite suivante est exacte

$$\Lambda_A^{p-1}(n) \xrightarrow{\omega'} \Lambda_A^p(n) \xrightarrow{\omega'} \Lambda_A^{p+1}(A), \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

Or $\Lambda_\infty^p(n)$ est le produit tensoriel de $\Lambda_A^p(n)$ par $\Lambda_\infty^0(n)$ et, puisque $\Lambda_\infty^0(n)$ est un module plat [5] sur $\Lambda_A^0(n)$ la suite

$$\Lambda_\infty^{p-1}(n) \xrightarrow{\omega'} \Lambda_\infty^p(n) \xrightarrow{\omega'} \Lambda_\infty^{p+1}(n), \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

est exacte et ω' possède la propriété de division dans $\Lambda_\infty(n)$.

Démonstration du corollaire 2. — D'après le lemme 1, on peut supposer que ω est un élément de $\Lambda_A^1(n)$. Le corollaire 1 permet d'affirmer que pour $p = 1, 2, \ldots, n-1$, la suite suivante est exacte :

$$\Lambda_A^{p-1}(n, q) \xrightarrow{\omega} \Lambda_A^p(n, q) \xrightarrow{\omega} \Lambda_A^{p+1}(n, q)$$

On en déduit, de la même façon, que plus haut, que la suite

$$\Lambda_\infty^p(n, q) \xrightarrow{\omega} \Lambda_\infty^p(n, q) \xrightarrow{\omega} \Lambda_\infty^{p+1}(n, q)$$

est exacte; c'est-à-dire que ω possède la propriété de division dans $\Lambda_\infty(n, q)$.

Démonstration du corollaire 3. — Soient $\{0_i\}_{i\in I}$ l'ensemble des zéros de ω et $\alpha \in \Lambda^p(M^n)$ tel que $\omega \wedge \alpha = 0$ et

$$1 \leqslant p \leqslant n-1.$$

Puisque les 0_i sont des zéros algébriquement isolés de ω, l'ensemble des zéros de ω est formé de points isolés de M. Le théorème de division local (dans le cas C^∞) permet d'affirmer : pour chaque $i \in I$, il existe un voisinage ouvert U_i de 0_i dans M et une $(p-1)$-forme $\beta_i \in \Lambda^{p-1}(U_i)$ telle que

$$\alpha/U_i = (\omega/U_i) \wedge \beta_i, \qquad U_i \cap U_j = \varnothing \quad \text{si} \quad j \neq i.$$

Sur $M^n - \{0_i\}_{i\in I}$, il existe une $(p-1)$-forme

$$\beta' \in \Lambda^{p-1}(M^n - \{0_i\}_{i\in I})$$

telle que :

$$\alpha/\mathrm{M} - \{0_i\}_{i\in\mathrm{I}} = (\omega/\mathrm{M} - \{0_i\}_{i\in\mathrm{I}}) \wedge \beta'$$

Soit, pour $i \in \mathrm{I}$, $l_i : \mathrm{M} \to \mathbf{R}$ telle que $l_i(x) = 1$ sur un voisinage de 0_i et $\operatorname{supp} l_i \subset \mathrm{U}_i$. Alors

$$\beta = \sum_i l_i\beta_i + \Big(1 - \sum_i l_i\Big)\beta'$$

possède la propriété cherchée.

CHAPITRE II

FONCTIONS COMPOSÉES

1. Énoncés des résultats.

Dans tout ce chapitre nous supposons $n \geqslant 2$ et, $\Lambda^0_X(n)$ désigne l'anneau des germes en 0 des fonctions de classe C^∞ si $X = \infty$, analytiques si $X = A$, holomorphes si $X = H$. A un élément $f \in \Lambda^0_X(n)$, tel que $f(0) = 0$, correspond

$$f^* : \quad \Lambda^0_X(1) \to \Lambda^0_X(n), \qquad f^* : l \to l \circ f.$$

Si $l'(0)$ est non nul nous dirons que f et $g = l \circ f$ sont L-*équivalents*. Nous dirons que les *surfaces de niveau* de f sont *connexes* s'il existe un représentant $\hat{f}$ de f et $\varepsilon > 0$ tel que $\hat{f}^{-1}(u)$ soit connexe lorsque $|u| < \varepsilon$. Il est clair que, si $g \in \Lambda^0_X(n)$ appartient à l'image de f^*, le germe de 2-forme $df \wedge dg$ est nul. Dans ce chapitre, nous allons étudier la réciproque de cette proposition.

Théorème 1. — *Soit f un élément de $\Lambda^0_X(n)$ tel que 0 soit un zéro algébriquement isolé de df et $f(0) = 0$. Alors, $g \in \Lambda^0_X(n)$ appartient à l'image de f^* si $df \wedge dg$ est nul lorsque* $X = A$, H, F, *si $df \wedge dg$ est nul et les surfaces de niveau de f sont connexes lorsque* $X = \infty$. *De plus, si 0 est un zéro algébriquement isolé de dg, f et g sont* L-*équivalents.*

La condition $df \wedge dg = 0$ signifie, géométriquement, que g est constant sur les composantes connexes des surfaces de niveau de f. Cette condition n'est pas suffisante dans le cas C^∞ pour affirmer que $g \in \mathrm{Im} f^*$, si les surfaces de niveau de f ne sont pas connexes. Par exemple, soient $f, g \in \Lambda^0_\infty(2)$ définies par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,$$

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + e^{\frac{1}{x_1^2 - x_2^2}} & \text{si} \quad x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad \text{et} \quad x_2 < 0 \\ x_1^2 - x_2^2 & \text{si} \quad x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Il est clair que $df \wedge dg = 0$ et que g n'appartient pas à $\mathrm{Im} f^*$. On peut dire que g a de l'holonomie par rapport à f. On peut justifier cette définition de la façon suivante :

Soit ω la 1-forme sur $S^1 \times \mathbf{R}^2$ définie par :

$$\omega = df + \theta(dg - df), \qquad (\theta, x) \in S^1 \times \mathbf{R}.$$

Cette 1-forme est complètement intégrable et le feuilletage singulier qu'elle définit a une holonomie non nulle.

Si f est un élément de $\Lambda^0_X(n+q)$, nous notons $d_x f$ l'élément de $\Lambda^1_X(n, q)$, défini par :

$$d_x f(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s)\, dx_i$$

Corollaire 1. — *Soient* f *et* g *deux éléments de* $\Lambda^0_X(n+q)$, $X = A, H, F$, *tels que :*

i) 0 *soit un zéro algébriquement isolé de* $d_x f(x, 0)$ *considéré comme élément de* $\Lambda^1_X(n)$ *et* $f(0, s) = 0$;

ii) *le germe de 2-forme* $d_x f \wedge d_x g \in \Lambda^2_X(n, q)$ *soit nul.*

Alors, il existe $l \in \Lambda^0_X(1+q)$ *tel que* $g(x, s) = l(f(x, s), s)$.

Corollaire 2. — *Soient* $f \in \Lambda^0_\infty(n)$ (*avec* $f(0) = 0$) *et* $g \in \Lambda^0_\infty(n+q)$ *tels que :*

i) 0 *soit un zéro algébriquement isolé de* df *et les surfaces de niveau de* f *soient connexes;*

ii) *le germe de 2-forme* $df \wedge d_x g \in \Lambda^2_\infty(n, q)$ *soit nul.*

Alors il existe $l \in \Lambda^0_\infty(1+q)$ *tel que* $g(x, s) = l(f(x), s)$.

2. Démonstration du théorème 1.

La 1-forme df possède la propriété de division dans $\Lambda_X(n)$. Le germe $df \wedge dg$ étant nul, il existe $g_1 \in \Lambda^0_X(n)$ (unique) tel que $dg = g_1 df$. Le germe de 2-forme $dg_1 \wedge df$ est nul et, par une récurrence évidente, on construit l'algorithme A :

$$dg = g_1\, df,\ dg_1 = g_2\, df,\ \ldots,\ dg_n = g_{n+1}\, df,\ \ldots$$

où $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont des éléments de $\Lambda^0_X(n)$.

1. *Cas* $X = \infty$: Soient $\varepsilon > 0$ et $\hat{f}$ un représentant de f tels que $\hat{f}^{-1}(u)$ soit connexe si $|u| < \varepsilon$. Si $\hat{f}$ est positive (resp. négative) sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$, $I(\varepsilon)$ désigne l'intervalle $(0, \varepsilon)$ (resp. $(-\varepsilon, 0)$, dans le cas contraire $I(\varepsilon)$ désigne l'intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Nous pouvons toujours supposer que si

$$\hat{f} : U \to I(\varepsilon) \qquad \text{avec} \qquad U = \hat{f}^{-1}(I(\varepsilon))$$

le point $0 \in \mathbf{R}^n$ est le seul zéro de df et qu'il existe un représentant $\hat{g}$ de g, défini sur U, tel que $d\hat{f} \wedge d\hat{g} \equiv 0$. On a alors l'algorithme :

$$d\hat{g} = \hat{g}_1\, d\hat{f}, \qquad d\hat{g}_1 = \hat{g}_2\, d\hat{f}\ \ldots, \qquad d\hat{g}_n = \hat{g}_{n+1}\, d\hat{f}, \ldots$$

les $\hat{g}_i$ étant des fonctions numériques C^∞ sur U. La première égalité de l'algorithme implique que $\hat{g}$ est constant sur les composantes connexes des surfaces de niveau de $\hat{f}$. Ces surfaces étant connexes, il existe une application (ensembliste)

$$\hat{l} : I(\varepsilon) \to \mathbf{R}, \quad \text{telle que} \quad \hat{g}(x) = \hat{l}(\hat{f}(x)) \quad \text{si} \quad x \in U.$$

En tout point $u_0 = \hat{f}(x_0) \neq 0$, f est une submersion. Il existe une section locale s, de classe C^∞, de f:

$$\hat{f}(s(u)) = u \qquad \text{si} \qquad |u - u_0| < \alpha.$$

On en déduit que $\hat{l}(u) = \hat{l}(\hat{f}(s(u))) = \hat{g}(s(u))$ est C^∞ sur un voisinage de u_0. Montrons maintenant que $\hat{l}$ est C^∞ au point $0 \in \mathbf{R}$.

$$\lim_{u\to 0} \hat{l}(u) = \lim_{x\to 0} \hat{l}(\hat{f}(x)) = \lim_{x\to 0} \hat{g}(x) = \hat{g}(0)$$

Pour $n = 1$, on déduit de l'algorithme,

$$\hat{l}'(\hat{f}(x)) = \hat{g}_1(x) \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$
$$\lim_{u\to 0} \hat{l}'(u) = \lim_{x\to 0} \hat{l}'(\hat{f}(x)) = \lim_{x\to 0} \hat{g}_1(x) = \hat{g}_1(0)$$

Et, par une récurence évidente, on vérifie que

$$\hat{l}^{(n)}(0) = \hat{g}_n(0) \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 0.$$

2. *Cas* $X = F$: Soient F et G les séries formelles à $(n+1)$-variables :

$$F(x, t) = f(x) + t \quad \text{et} \quad G(x, t) = g(x) + \sum_{n \geqslant 1} \frac{t^n}{n!} g_n(x)$$

Les $g_n \in \Lambda_F^0(n)$ étant déterminés par l'algorithme A, le coefficient de t^n dans $dF \wedge dG$ est

$$\frac{1}{n!}(df \wedge dg_n + dt \wedge dg_n + g_{n+1}\, df \wedge dt) = 0$$

On en déduit que l'élément $dF \wedge dG$ de $\Lambda_F^2(n+1)$ est nul. F étant régulière en zéro $\left(\frac{\partial F}{\partial t}(0, 0) \text{ n'est pas nul}\right)$, il existe un changement de variables $\psi : (t_1, x_1) \to (t, x)$, $\psi(0, 0) = (0, 0)$ telle que :

$$F_1(t_1, x_1) = F \circ \psi(t_1, x_1) = t_1.$$

Soit G_1, la série formelle $G \circ \psi$. La nullité de $dF \wedge dG$ implique :

$$dF_1 \wedge dG_1 = dt_1 \wedge dG_1 = 0.$$

G_1 est une série formelle en t_1 telle que :

$$G_1(x_1, t_1) = l(t_1) = l(F_1(x_1, t_1)) \quad \text{et} \quad G = l \circ F$$

En faisant $t = 0$, on obtient le résultat cherché.

3. *Cas* $X = A, H$: Nous savons qu'il existe une série formelle $l \in \Lambda_F^0(1)$ telle que $g = l \circ f$, montrons qu'elle converge sur un disque B_u. Soit m l'ordre de f en 0. Il existe des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telles que :

$$f(x_1, 0, 0, \ldots, 0) = x_1^m \quad \text{si} \quad \|x_1\| \leqslant r_1.$$

Alors, pour $\|x_1\| \leqslant r_1$, on a $g(x_1, 0, 0, \ldots, 0) = l(x_1^m)$. Si g converge pour $\|x\| \leqslant r_2$, l est convergente sur le disque de rayon $\inf(r_1, r_2^{1/m})$.

L-*équivalence :* Si 0 est un zéro algébriquement isolé de dg, on a

$$df = f_1\, dg, \quad dg = g_1\, df \quad \text{et} \quad g_1 = \frac{1}{f_1}.$$

La dérivée $l'(0)$ de l en zéro est $g_1(0) \neq 0$, ainsi l est un germe de difféomorphisme de même classe que f et g.

3. Démonstration du corollaire 1.

Le point 0 étant un zéro algébriquement isolé de

$$d_x f(x, 0) \in \Lambda^1_X(n),$$

le corollaire 1.I permet de construire un algorithme A_s

$$\begin{cases} d_x g(x, s) = g_1(x, s)\, d_x f(x, s) & \text{où pour } n = 1, 2, \ldots, g_n \in \Lambda^0_X(n+q) \\ d_x g_1(x, s) = g_2(x, s)\, d_x f(x, s) & \\ \vdots & \\ d_x g_n(x, s) = g_{n+1}(x, s)\, d_x f(x, s) & \\ \vdots & \end{cases}$$

Dans les cas $X = A, H$, on peut supposer (remarque 1.I) que f, g et les g_n sont des séries convergentes sur le produit de 2 boules $B_x \times B_s$. Soit, de la même façon que dans la démonstration du théorème 1,

$$F(x, t, s) = t + f(x, s) \quad \text{et} \quad G(x, t, s) = g(x, s) + \sum_{n \geqslant 1} \frac{t^n}{n\,!}\, g_n(x, s)$$

Considérons ces 2 séries formelles comme des séries formelles en (x, t) à paramètre s. De l'algorithme A_s on déduit que :

$$\left(d_x F + \frac{\partial F}{\partial t}\, dt\right) \wedge \left(d_x G + \frac{\partial G}{\partial t}\, dt\right) = 0$$

Puisque $\dfrac{\partial F}{\partial t}(0, 0, s)$ n'est pas nul, il existe une série formelle

$$l(u, s) = g(0, s) + \sum_{n \geqslant 1} g_n(0, s) \frac{u^n}{n\,!}$$

telle que :

$$l(F(x, t, s), s) = G(x, t, s) \quad \text{et} \quad l(f(x, s), s) = g(x, s).$$

Il suffit de montrer que l appartient à $\Lambda^0_H(q + 1)$ dans le cas $X = H$. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n, s)$ un système de coordonnées tel que $f(x_1, 0, \ldots, 0, s)$ soit régulière d'ordre m en x_1. Dans la suite nous écrirons pour $h \in \Lambda^0_H(n + q)$

$$h(z, 0, 0, \ldots, 0, s) = h(z, 0, s)$$

Il existe (d'après la remarque 1.I) un disque D_z de centre

$0 \in \mathbf{C}$ et une boule B_s de centre $0 \in \mathbf{C}^q$ tels que $f(z, 0, s)$, $g(z, 0, s)$ et les $g_n(z, 0, s)$ soient convergentes sur $D_z \times B_s$. Écrivons la division (de Weierstrass) de $g(z, 0, s) - g(0, 0, s)$ par $f(z, 0, s)$:

$$g(z, 0, s) - g(0, 0, s) = q_1(z, s)f(z, 0, s) + \sum_{i=1}^{m} z^{m-i}r_i(s)$$

De l'égalité formelle $l(f(z, 0, s)) = g(z, 0, s)$, on déduit que le reste de cette division est nul. Par une récurrence évidente on construit l'algorithme

$$\left\{\begin{array}{l} g(z, 0, s) - g(0, 0, s) = q_1(z, s)f(z, 0, s) \\ q_1(z, s) - q_1(0, s) = q_2(z, s)f(z, 0, s) \\ \quad\vdots \\ q_n(z, s) - q_n(0, s) = q_{n+1}(z, s)f(z, 0, s) \\ \quad\vdots \end{array}\right.$$

où les q_n sont des fonctions holomorphes sur $D_z \times B_s$ et

$$g_n(0, s) = q_n(0, s), \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1, \quad \text{et} \quad s \in B_s.$$

On peut toujours supposer que $f(z, 0, s)$ ne s'annule pas sur $\partial D_z \times B_s$. Soient :

$$\begin{aligned} m &= \inf \{\|f(z, 0, s)\|,\ (z, s) \in \partial D_z \times B_s\}, \\ M_n &= \sup \{\|q_n(z, s)\|,\ (z, s) \in \partial D_z \times B_s\}. \end{aligned}$$

De l'algorithme précédent, on déduit la majoration suivante :

$$2M_n \geqslant mM_{n+1} \quad \text{et} \quad \|g_n(0, s)\| \leqslant M_n \leqslant \left(\frac{2}{m}\right)^n M_0.$$

Ainsi la série $l(u, s)$ converge, uniformément pour $s \in B_s$, sur un disque de centre $0 \in \mathbf{C}$ et $l(u, s)$ est un élément de $\Lambda_{\mathrm{H}}^0(q + 1)$.

4. Démonstration du corollaire 2.

De la démonstration du théorème 1, on déduit l'existence de 2 boules $B_x \subset \mathbf{R}^n$, $B_s \subset \mathbf{R}^q$ et de 2 représentants

$$\hat{f} : \ B_x \to \mathbf{R}, \qquad \hat{g} : B_x \times B_s \to \mathbf{R}$$

de f et g tels que pour tout $s \in B_s$ il existe une application C^∞.

$$\hat{l}_s : \quad I(\varepsilon) \to \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad \hat{l}_s(\hat{f}(x)) = \hat{g}(x, s) \quad \text{si} \quad x \in B_x.$$

Soit $\hat{l}$ l'application de $I(\varepsilon) \times B_s$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\hat{l}(u, s) = \hat{l}_s(u)$. f étant régulière sur $B_x - \{0\}$, $\hat{l}$ est C^∞ sur $(I(\varepsilon) - \{0\}) \times B_s$. La condition $d\hat{f} \wedge d_x\hat{g} = 0$, entraîne pour $s \in B_s$, l'existence et l'unicité d'une fonction $\hat{g}_{s,1}$ de classe C^∞ sur B_x telle que :

$$d_x\hat{g}(x, s) = \hat{g}_{s,1}(x)\, d\hat{f}(x)$$

L'application $\hat{g}_1 : (x, s) \to \hat{g}_{s,1}(x)$ est évidemment C^∞ sur $(B_x - \{0\}) \times B_s$. D'après le corollaire 2.I, quel que soit $s_0 \in B_s$, il existe un germe unique h_{s_0} en $(0, s_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$, de classe C^∞ tel que

$$d_x\hat{g}_{s_0}(x, s) = h_{s_0}(x, s)\, df(x)$$

où, $\hat{g}_{s_0}$ est le germe de $\hat{g}$ en $(0, s_0)$. Le germe de $\hat{g}_1$, en $(0, s_0)$ étant nécessairement h_{s_0}, $\hat{g}_1$ est C^∞ sur $B_x \times B_s$. Par une récurrence évidente, on construit une suite de fonctions $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \ldots, \hat{g}_k, \ldots,$ de classe C^∞ dans $B_x \times B_s$ telles que :

$$\left\{\begin{aligned} d_x\hat{g}(x, s) &= \hat{g}_1(x, s)\, d\hat{f}(x) \\ d_x\hat{g}_1(x, s) &= \hat{g}_2(x, s)\, d\hat{f}(x) \\ &\vdots \\ d_x\hat{g}_k(x, s) &= \hat{g}_{k+1}(x, s)\, d\hat{f}(x) \\ &\vdots \end{aligned}\right.$$

En tout point $(x, s) \in (B_x - \{0\}) \times B_s$ on vérifie que :

$$\hat{g}_k(x, s) = \frac{\partial^k \hat{l}}{\partial u^k}(\hat{f}(x), s), \quad \text{pour} \quad k \geqslant 1, \quad \text{et} \quad \hat{g}(x, s) = \hat{l}(\hat{f}(x), s)$$

Montrons que $\hat{l}$ est de classe C^1 en un point $(0, s_0)$. On a

$$\lim_{(u, s) \to (0, s_0)} \hat{l}(u, s) = \lim_{(x, s) \to (0, s_0)} \hat{g}(x, s) = \hat{g}(0, s_0) = \hat{l}(0, s_0)$$

$$\lim_{(u, s) \to (0, s_0)} \frac{\partial \hat{l}}{\partial s_i}(u, s) = \lim_{(x, s) \to (0, s_0)} \frac{\partial \hat{g}}{\partial s_i}(x, s) = \frac{\partial \hat{g}}{\partial s_i}(0, s_0) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial s_i}(0, s_0)$$

pour $i = 1, 2, \ldots, q$

$$\lim_{(u,\, s) \to (0,\, s_0)} \frac{\partial \hat{l}}{\partial u}(u, s) = \lim_{(x,\, s) \to (0,\, s_0)} \hat{g}_1(x, s) = \hat{g}_1(0, s_0) = \frac{\partial \hat{l}}{\partial u}(0, s_0)$$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial \hat{l}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \hat{l}}{\partial s_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots, q$ sont de classe C^1 pour la même raison. En effet :

$$d\hat{f}(x) \wedge d_x \frac{\partial \hat{g}}{\partial s}(x, s) = 0 \quad (\text{resp. } d\hat{f}(x) \wedge (d_x \hat{g}_1(x, s) = 0)$$

et $\dfrac{\partial \hat{l}}{\partial s_i}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{\partial \hat{l}}{\partial u}\right)$ est déterminée par :

$$\frac{\partial \hat{l}}{\partial s_i}(\hat{f}(x), s) = \frac{\partial \hat{g}}{\partial s_i}(x, s) \left(\text{resp. } \frac{\partial \hat{l}}{\partial u}(\hat{f}(x), s) = \hat{g}_1(x, s)\right)$$

En utilisant l'algorithme précédent, on montre, par récurrence, que les dérivées partielles de $\hat{l}$ sont continues en tout point $(0, s_0)$. Elles sont données par :

$$\frac{\partial^{|\mathrm{I}|+k}}{\partial s^{\mathrm{I}}\, \partial u^k} \hat{l}(0, s_0) = \frac{\partial^{|\mathrm{I}|}}{\partial s^{\mathrm{I}}} \hat{g}_k(0, s_0) = \lim_{(x,\, s) \to (0,\, s_0)} \frac{\partial^{|\mathrm{I}|+k}}{\partial s^{\mathrm{I}}\, \partial x^k} \hat{l}(\hat{f}(x), s)$$

le germe de $\hat{l}$ en $(0, 0)$ est donc un élément de $\Lambda^0_\infty(q + 1)$.

CHAPITRE III

EXISTENCE D'INTÉGRALES PREMIÈRES FORMELLES

1. Énoncés des résultats.

Une série formelle $f \in \Lambda^0_F(n)$ à coefficients réels (resp. complexes) est une intégrale *première formelle* d'un germe complètement intégrable $\omega \in \Lambda^1_X(n)$ s'il existe une deuxième série formelle g à coefficients réels, lorsque $X = A$, F, (resp. complexes lorsque $X = H$) telle que :

$$\omega = g\, df \qquad \text{et} \qquad g(0) \neq 0$$

Si $X = \infty$, nous dirons que $f \in \Lambda^0_F(n)$ est une intégrale première formelle de ω, si f est une intégrale première du jet d'ordre infini de ω.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_F(n)$, $n \geqslant 3$, *un germe complètement intégrable, dont* 0 *est un zéro algébriquement isolé. Alors,* ω *possède une intégrale première formelle.*

Supposons que ω soit analytique ou holomorphe et soit f_1 une autre intégrale première (formelle ou non) de ω. D'après le théorème 1.II, f et f_1 sont formellement L-équivalentes puisque :

$$df_1 = g_1\, df \qquad \text{avec} \qquad g_1(0) \neq 0.$$

Ainsi, ω possède une intégrale première si et seulement si l'image de $f^* : \Lambda^0_F(1) \to \Lambda^0_F(n)$ contient une série convergente. Cette réduction est vraisemblablement sans intérêt dans le cas général. Cependant, elle nous permettra de redémontrer le théorème de Reeb de façon simple.

Lorsque ω est un germe C^∞ il existe (d'après le théorème de Borel) 2 germes de fonctions C^∞, g, f et une 1-forme π_∞ dont les coefficients sont des germes des fonctions C^∞ plats en 0 tels que :

$$\omega = g\, df + \pi_\infty \qquad \text{avec} \qquad g(0) \neq 0$$

De plus, 0 étant un zéro algébriquement isolé de df, f est de détermination finie (Mather III); on peut supposer que f est un polynôme.

Soit, toujours, $\omega \in \Lambda^1_X(n)$ un germe complètement intégrable. Nous dirons que ω possède un *algorithme de Godbillon-Vey* s'il existe une suite $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ d'éléments de $\Lambda^1_X(n)$ telle que

$$A_2 \begin{cases} d\omega = \omega \wedge \omega_1 \\ d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_2 \\ \vdots \\ d\omega_n = \omega \wedge \omega_{n+1} + \sum\limits_{1 \leqslant i < \frac{n+1}{2}} c_{i,\, n+1-i}\,\omega_i \wedge \omega_{n+1-i} \\ \vdots \end{cases}$$

avec $c_{i,\, n+1-i} = \dfrac{n!}{i\,!(n+1-i)}\,(n+1-2i)$. (Pour plus de détails voir [2].)

Proposition 1. — *Soient $\omega \in \Lambda^1_X(n)$ un germe complètement intégrable dont 0 est un zéro algébriquement isolé. Alors ω possède un algorithme de Godbillon-Vey*

$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\} \subset \Lambda^1_X(n)$$

et, ω possède une intégrale première de classe X si, et seulement si, il existe une suite infinie

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots\} \subset \Lambda^0_X(n)$$

telle que

$$(S) \begin{cases} dv_0 = v_0\omega_1 + v_1\omega \\ dv_1 = v_0\omega_2 + 2v_1\omega_1 + v_2\omega \quad \textit{avec} \quad v_0(0) \neq 0 \\ \vdots \\ dv_n = \sum\limits_{p=0}^{n+1} C^p_{n+1} v_p \omega_{n+1-p}. \\ \vdots \end{cases}$$

Nous montrerons que le système différentiel S possède toujours une solution formelle; et, nous en déduirons le corollaire suivant :

Corollaire 1. — *Soit $\omega \in \Lambda^1_X(n)$ ($X = \infty$, A, F, H et $n \geqslant 3$) un germe complètement intégrable, dont 0 est un zéro algébriquement isolé. Alors, quel que soit l'entier $k > 0$,* *il existe un polynôme* P_k *de degré* $< k$ *tel que le jet d'ordre* k *de* $d(P_k\omega)$ *est nul.*

Il est clair que ce corollaire fournit une intégrale première formelle de ω. Mais sa construction étant très compliquée, il est peu probable que l'on puisse montrer qu'elle converge lorsque $X = A, H$. Par contre, le résultat suivant que je dois à J. Martinet est beaucoup plus utilisable.

COROLLAIRE 2. — *Soient* $\omega \in \Lambda^1_X(n)$ $(X = A, F, H$ et $n \geqslant 2)$ *un germe complètement intégrable dont* 0 *est un zéro algébriquement isolé et* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \ldots$ *les éléments d'un algorithme de Godbillon-Vey de* ω. *Le germe (non singulier)* $\Omega \in \Lambda^1_F(n+1)$

$$\Omega = dt + \omega + \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \omega_n$$

est complètement intégrable.

Le théorème 1 est une conséquence immédiate de ce corollaire. En effet, le théorème de Frobenius étant vrai formellement, il existe $G(x, t)$ et $F(x, t)$ appartenant à $\Lambda^0_F(n+1)$ tels que :

$$\Omega(x, t) = G(x, t)\, dF(x, t) \quad \text{et} \quad G(0, 0) \neq 0$$

En faisant $t = 0$, on obtient l'intégrale première formelle $f(x) = F(x, 0)$:

$$\omega = G(x, 0)\, df(x)$$

Le corollaire 2 peut être généralisé au cas des systèmes de Pfaff complètement intégrables de la façon suivante : soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, des éléments de $\Lambda^1_X(n)$ tels que :

$$d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 \ldots \wedge \omega_p) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, p\,.$$

Alors si l'ensemble des zéros de $\omega_1 \wedge \omega_2 \ldots \wedge \omega_p$ et de « codimension » supérieure ou égale à 3, il existe des éléments $\omega_{i,\mathrm{I}} \in \Lambda^0_X(n)$ pour tout multi-indice $\mathrm{I} = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ et pour $i = 1, 2, \ldots, p$ tels que le système de Pfaff formel

$$\Omega_i = dt_i + \omega_i + \sum_{|\mathrm{I}| > 0} \frac{t^{\mathrm{I}}}{\mathrm{I}!} \omega_{i,\mathrm{I}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

soit complètement intégrable. Il est alors clair que le système de Pfaff $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p\}$ possède p-intégrales premières formelles, indépendantes. Ce résultat et quelques-unes de ses applications sera l'objet d'une publication ultérieure.

2. Démonstration de la proposition 1.

D'après le théorème I.I, ω possède la propriété de division. Le germe $\omega \wedge d\omega \in \Lambda^3_X(n)$ étant nul il existe $\omega_1 \in \Lambda^1_X(n)$ tel que :

$$d\omega = \omega \wedge \omega_1$$

En prenant la dérivée extérieure de cette égalité on constate que $\omega \wedge d\omega_1$ est nul. Il existe $\omega_2 \in \Lambda^1_X(n)$ tel que :

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2$$

Par une récurrence évidente (voir [2]) on montre l'existence de l'algorithme. Démontrons maintenant la seconde partie de la proposition. S'il existe $\varphi_0, \varphi_1 \in \Lambda^0_X(n)$ qui vérifie

$$d\varphi_0 = \varphi_0\omega_1 + \varphi_1\omega \quad \text{et} \quad \varphi_0(0) \neq 0$$

Il est clair que $d(\varphi_0\omega)$ est nul. $\varphi_0\omega$ est la différentielle d'un germe $f \in \Lambda^0_X(n)$ et

$$\omega = \frac{1}{\varphi_0}\, df = g\, df \quad \text{avec} \quad g(0) \neq 0$$

Réciproquement supposons que $d(\varphi_0\omega)$ est nul et montrons l'existence de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \ldots\} \subset \Lambda^0_X(n)$ qui vérifie le système S.

$$0 = d(\varphi_0\omega) = d\varphi_0 \wedge \omega + \varphi_0\, d\omega = (d\varphi_0 - \varphi_0\omega_1) \wedge \omega$$

Puisque ω possède la propriété de division, il existe

$$\varphi_1 \in \Lambda^0_X(n)$$

tel que

$$d\varphi_0 = \varphi_0\omega_1 + \varphi_1\omega$$

Supposons l'existence de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \Lambda^0_X(n)$ tels que

$$\begin{cases} d\varphi_k = \sum_{p=0}^{k+1} C^p_{k+1}\varphi_p\omega_{k+1-p} \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

En écrivant que $d(d\varphi_{n-1})$ est nul, on obtient

$$\omega \wedge d\varphi_n = \sum_{q=0}^{n-1} C_n^q \, d\varphi_q \wedge \omega_{n-q} + \sum_{p=0}^{n} C_n^p \varphi_p \, d\omega_{n-p}$$

en utilisant l'expression de $d\omega_{n-p}$ fournie par l'algorithme A_2 on montre que

$$\omega \wedge d\varphi_n = \sum_{p=0}^{n} C_{n+1}^p \varphi_p \omega \wedge \omega_{n+1-p}.$$

ω possèdant la propriété de division, on en déduit l'existence de $\varphi_{n+1} \in \Lambda_X^0(n)$ tel que :

$$d\varphi_n = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p \varphi_p \omega_{n+1-p}$$

Remarque 1. — Supposons que 0 soit un zéro d'ordre q de ω et soit $J^q\omega$ le jet d'ordre q de ω en 0. C'est une 1-forme dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré q.

$$d(J^q\omega) = J^{q-1} \, d\omega = J^{q-1}(\omega \wedge \omega_1) = 0$$

$J^q\omega$ est la différentielle d'un polynôme homogène de degré $q + 1$. En particulier, $j^1\omega$ est la différentielle d'une forme quadratique q_ω que nous avons appelé *hessian de* ω. Le rang de q_ω et son indice sont des invariants attachés à ω.

3. Démonstration du corollaire 1.

Il suffit de faire cette démonstration dans le cas $X = F$. Si α est un élément de $\Lambda_F^p(n)$ nous notons $(\alpha)^k$ son jet d'ordre k en zéro. Supposons que 0 soit un zéro d'ordre q de ω.

$$(\omega)^{q-1} = 0 \quad \text{et} \quad (\omega)^q \neq 0$$

Soient N un nombre entier, k et r le quotient et le reste dans la division de N par $q + 1$. On montre par récurrence sur N l'existence de $\varphi_0 \in \Lambda_F^0(n)$ tel que

$$d((\varphi_0)^N\omega)^{N+q} = 0$$

L'hypothèse de récurrence (au rang N) est la suivante : soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$, il existe $k+1$ séries formelles

$\varphi_i \in \Lambda^0_F(n)$ pour $0 \leqslant i \leqslant k$ telles que :

i) $\varphi_i(0) = \lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$

ii) $d(\varphi_0)^N = (\varphi_0\omega_1)^{N-1} + (\varphi_1\omega)^{N-1}$

$$d(\varphi_i)^{N-i(q+1)} = \sum_{p=0}^{i+1} C^p_{i+1}(\varphi_p\omega_{i+1-p})^{N-1-i(q+1)}$$

$$d(\varphi_k)^r = \sum_{p=0}^{k+1} C^p_{k+1}(\varphi_p\omega_{k+1-q})^{r-1}.$$

La vérification de cette récurrence étant très fastidieuse, nous allons seulement en donner les grandes lignes lorsque $q = 1$. D'après la remarque précédente $(\omega)^1$ est une forme fermée et

$$(d((\varphi_0)^0\omega))^0 = d\lambda_0(\omega)^1 = 0, \quad \text{si} \quad (\varphi_0)^0 = \lambda_0$$

Pour calculer $(\varphi_0)^1$ on vérifie que

$$d[(\varphi_0\omega_1)^0 + (\varphi_1\omega)^0] = 0, \quad \text{avec} \quad (\varphi_1)^0 = \lambda_1.$$
$$d(\varphi_0)^1 = (\varphi_0\omega_1)^0 + (\varphi_1\omega)^0 = \lambda_0(\omega_1)^0$$

Pour calculer $(\varphi_0)^2$ on vérifie que :

$$d(\varphi_0\omega_1)^1 + (\varphi_1\omega)^1 = d(\varphi_0)^1 \wedge (\omega_1)^0 + (\varphi_1)^0 \wedge d(\omega)^1 = 0$$
$$d(\varphi_0)^2 = (\varphi_0\omega_1)^1 + (\varphi_1\omega)^1.$$

Pour calculer $d(\varphi_0)^3$ nous devons tout d'abord déterminer $(\varphi_1)^1$. On vérifie tout d'abord que :

$$d(\varphi_1)^1 = (\varphi_0\omega_2)^0 + 2(\varphi_1\omega)^0$$

On en déduit que $(\varphi_0\omega_1)^2 + (\varphi_1\omega)^2$ est une forme fermée et

$$d(\varphi_0)^3 = (\varphi_0\omega_1)^2 + (\varphi_1\omega)^2$$

D'une façon générale, l'hypothèse de récurrence fournit (lorsque $q = 1$) $(\varphi_0)^N, (\varphi_1)^{N-2}, \ldots, (\varphi_k)^i$ avec si N est pair $k = \dfrac{N}{2} - 1,\ i = 2$ et $k = \dfrac{N+1}{2} - 1,\ i = 1$ si N est impair. En utilisant ces polynômes, on vérifie qu'un certain nombre de formes sont fermées. Ce sont les différentielles de $(\varphi_0)^{N+1}, (\varphi_1)^{N-1}, \ldots$.

Remarque 2. — Supposons que ω, ainsi que les éléments $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots$ de son algorithme dépendent de façon

C^∞ d'un paramètre $s \in B_s \subset \mathbf{R}^q$, c'est-à-dire :

$$\omega_{k,s}(x) = \omega_k(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(x, s)\, dx_i$$

où, les $a_{k,i}$ sont des séries formelles en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de $s \in B_s$. Par construction $(\varphi_0)^N$ est un polynôme en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré N dont les coefficients sont des fonctions C^∞, de $s \in B_s$. Par conséquent, l'intégrale première formelle $f_s(x)$ de ω_s déterminée par :

$$(df_s)^N = (\varphi_0 \omega_s)^N, \qquad s \in B_s$$

est une série formelle en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de $s \in B_s$. On montrerait de la même façon que, si $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k, \ldots$ dépendent de façon holomorphe de $s \in B_s \subset \mathbf{C}^q$, l'intégrale première formelle f_s est une série formelle, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes sur B_s.

4. Démonstration du corollaire 2.

Vérifions que $\Omega \in \Lambda^1_F(n+1)$

$$\Omega = dt + \omega + t\omega_1 + \frac{t^2}{2!}\omega_2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}\omega_n + \cdots$$

est complètement intégrable. Le coefficient de t^n dans le développement de $\Omega \wedge d\Omega$ suivant les puissances de t est :

$$\frac{\omega_n \wedge d\omega}{n!} + \cdots + \frac{\omega_{n-p} \wedge d\omega_p}{n-p!\,p!} + \cdots + \frac{\omega \wedge d\omega_n}{n!}$$
$$+\, dt \wedge \frac{d\omega_n}{n!}$$
$$-\, dt \wedge \frac{\omega_n \wedge \omega_1}{n!} + \cdots + \frac{\omega_{n-p} \wedge \omega_{p+1}}{n-p!\,p!} + \cdots + \frac{\omega \wedge \omega_{n+1}}{n!}$$

On montre que la première ligne est nulle et que

$$d\omega_n = \omega \wedge \omega_{n+1} + \cdots + C_n^p \omega_{n-p} \wedge \omega_{p+1} + \cdots$$

en utilisant l'algorithme A_2 et en remarquant que

$$c_{p,\, n+1-p} = C_n^p - C_n^{p-1}.$$

CHAPITRE IV

EXISTENCE D'INTÉGRALES PREMIÈRES ANALYTIQUES

1. Énoncés des résultats.

Nous avons vu dans le chapitre précédent (remarque 1.III) que, si 0 est un zéro algébriquement isolé d'un germe de 1-forme ω, complètement intégrable, J^1_ω est la différentielle d'une forme quadratique q_ω, le hessian de ω :

$$q_\omega(x) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0) x_i x_j \quad \text{si} \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i$$

Dans ce chapitre nous allons montrer que la conjecture formulée dans l'introduction est vraie dès que rang

$$q_\omega(x) = r \geqslant 2.$$

THÉORÈME 1. — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_X(n)$, $n \geqslant 3$, $X = A$, H, *un germe complètement intégrable dont* 0 *est un zéro algébriquement isolé. Alors,* ω *possède une intégrale première* f *dès que rang de* $q_\omega = r \geqslant 2$.

Ce résultat peut être précisé de la façon suivante. Il existe un système de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que si $X=H$:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 + h(x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

Si $X = A$ et si $i(\omega)$ est l'indice de q_ω.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{i(\omega)}^2 - x_{i(\omega)+1}^2 - \cdots - x_r^2 + h(x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

En effet, puisque $\omega = g\, df$ avec $g(0) \neq 0$, le hessian de f est q_ω et le lemme de Morse à paramètres permet d'écrire f

sans la forme ci-dessus. 0 étant un zéro algébriquement isolé de df, le germe f est de R-détermination finie (Mather III) et on peut supposer que h est un polynôme en

$$x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots\ x_n.$$

Soient $\omega \in \Lambda^1_{\mathrm{X}}(n+q)$ un germe complètement intégrable. Dans des coordonnées $(x, s) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, s_1, s_2, \ldots, s_q)$ nous écrivons :

$$\omega(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x, s)\, dx_i + \sum_{j=1}^{q} b_j(x, s)\, ds_j,$$

$$\omega_s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x, s)\, dx_i$$

Nous dirons que $f \in \Lambda^0_{\mathrm{X}}(n+q)$ est une intégrale première à paramètre s de ω_s s'il existe $g \in \Lambda^0_{\mathrm{X}}(n+q)$ tel que :

$$\omega_s(x) = g(x, s)\, d_x f(x, s).$$

Le théorème est une conséquence évidente des 2 propositions suivantes :

Proposition 1. — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_{\mathrm{X}}(n+q)$, $n \geqslant 2$, $\mathrm{X} = \mathrm{A}, \mathrm{H}$, *un germe complètement intégrable dont* 0 *est un zéro algébriquement isolé.*

$$\omega(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x, s)\, dx_i + \sum_{j=1}^{q} b_j(x, s)\, ds_j$$

Alors, si ω_s *possède une intégrale première à paramètre* s, ω *possède une intégrale première.*

Proposition 2 (théorème de Reeb à paramètres). — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_{\mathrm{X}}(n+q)$, $n+q \geqslant 3$, $\mathrm{X} = \mathrm{A}, \mathrm{H}$, *un germe complètement intégrable dont* 0 *est un zéro algébriquement isolé. Alors, si* q_ω *est de rang* $n \geqslant 2$, *il existe un système de coordonnées* $x_1, x_2, \ldots, x_n, s_1, s_2, \ldots, s_q$ *dans lequel* ω *s'écrit :*

$$\omega(x, s) = g(x, s)\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\, dx_i\right) + \sum_{j=1}^{q} b_j(x, s)\, ds_j$$

où g *et les* b_j *sont des éléments de* $\Lambda^0_{\mathrm{X}}(n+q)$ *et pour* $\mathrm{X} = \mathrm{H}$, $\varepsilon_i = 1$ *si* $1 \leqslant i \leqslant n$, *pour* $\mathrm{X} = \mathrm{A}$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

Pour fixer les arguments géométriques de la proposition 2, nous démontrerons tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 1 (théorème de Reeb). — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_{\mathrm{H}}(n)$, $n \geqslant 2$, *un germe complètement intégrable dont le hessian est de rang* n. *Si* f *est une intégrale première formelle de* ω, *il existe une série formelle*

$$l(u) = u + \sum_{k \geqslant 2} c_k u^k, \quad c_k \in \mathbf{C}$$

telle que la série $l \circ f$ *est un élément de* $\Lambda^0_{\mathrm{H}}(n)$.

2. Démonstration de la proposition 1.

Nous allons faire une démonstration par induction sur q. Plus précisément, pour démontrer la proposition il suffit de montrer que si

$$\omega(x, s) = d_x f(x, s) + \sum_{j=1}^{q} b_j(x, s)\, ds_j$$

$$\omega_{s'}(x, s_1) = d_x f(x, s) + b_1(x, s)\, ds_1, \qquad s' = (s_2, \ldots, s_q)$$

la 1-forme $\omega_{s'}$, à paramètre s', possède une intégrale première à paramètre s'. La condition de complète intégrabilité de $\omega_{s'}$ s'écrit :

$$0 = \omega_{s'} \wedge d_{x, s_1} \omega_{s'}$$
$$= d_x f(x, s) \wedge \left(- d_x \frac{\partial f}{\partial s_1}(x, s) + d_x b_1(x, s) \right) \wedge ds_1$$

c'est-à-dire :

$$d_x f(x, s) \wedge d_x b(x, s) = 0 \quad \text{avec} \quad b(x, s) = b_1(x, s) - \frac{\partial f}{\partial s_1}(x, s)$$

Le point 0 étant un zéro algébriquement isolé de ω, $0 \in \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ est un zéro algébriquement isolé de $d_x f(x, 0)$. D'après le corollaire 1.II, il existe $l(u, s) \in \Lambda^0_{\mathrm{X}}(1 + q)$ tel que

$$b(x, s) = l(f(x, s), s)$$

La 1-forme $\omega_{s'}$ à paramètre s'écrit alors :

$$\omega_{s'}(x, s_1) = d_{x, s_1} f(x, s) + l(f(x, s), s)\, ds_1.$$

Soit $\Omega_{s'}(x, s_1, t) \in \Lambda^1_{\mathrm{X}}(n + 2, q - 1)$ la 1-forme à paramètre s' définie par :

$$\Omega_{s'}(x, s_1, t) = d_{x, s_1} f(x, s) + dt + l(f(x, s) + t, s)\, ds_1$$

Il est clair que $\Omega_{s'}$ est complètement intégrable et non singulière. D'après le théorème de Frobenius (à paramètre s') il existe $G(x, s_1, t, s')$ et $H(x, s_1, t, s')$ appartenant à

$$\Lambda^0_X(n+q+1)$$

tels que

$$\Omega_{s'} = G\left(d_x H + \frac{\partial H}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial H}{\partial t} dt\right).$$

Soient g et h les restrictions de G et H à l'hyperplan $t=0$. Ce sont des éléments de $\Lambda^0_H(n+q)$ et on a

$$\omega_{s'} = g(x, s)\left(d_x h(x, s) + \frac{\partial h}{\partial s_1}(x, s)\, ds_1\right).$$

3. Démonstration du lemme 1.

Nous reprenons les notations et les définitions de [7], page 150. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées dans $\mathbf{C}^n$ dans lequel :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \sum_{|I|\geqslant 2} a_{i,I}x^I\right)dx_i, \qquad a_I \in \mathbf{C}.$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{|I|\geqslant 3}\lambda_I x^I, \qquad \lambda_I \in \mathbf{C}$$

où f est une intégrale première formelle de ω. Nous notons $\Sigma^{n-1} \subset \mathbf{C}^n$ la sphère réelle de dimension $n-1$ dans $\mathbf{C}^n$

$$\Sigma^{n-1} = \left\{\bar{x} \in \mathbf{C}^n / \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i^2 = 1\right\}.$$

$$\psi : \mathbf{C} \times \Sigma^{n-1} \to \mathbf{C}^n, \qquad \psi(\rho, \bar{x}) = \rho\bar{x}.$$

Un germe de fonction *analytique complexe* sur $\mathbf{C} \times \Sigma^{n-1}$ le long de $\{0\} \times \Sigma^{n-1}$ est une série en ρ, à paramètre $\bar{x} \in \Sigma^{n-1}$ qui converge (uniformément), c'est-à-dire :

$$g(\rho, \bar{x}) = \sum_{k\geqslant 0}\lambda_k(\bar{x})\rho^k$$

où les λ_k sont des fonctions analytiques sur Σ^{n-1}, à valeurs complexes, et il existe $M > 0$ tel que :

$$|\lambda_k(\bar{x})| < M^k \qquad \text{pour} \qquad k \geqslant 0$$

On définit la notion de germe de 1-forme analytique complexe sur $\mathbf{C} \times \Sigma^{n-1}$ le long de $\{0\} \times \Sigma^{n-1}$. Un tel germe π s'écrit :

$$\pi(\rho, \bar{x}) = \sum_{k \geqslant 0} \rho^k \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_{k,i}(\bar{x})\, d\bar{x}_i + \pi_k(\bar{x})\, d\rho \right)$$

où, les $\pi_{k,i}$ et π_k sont des fonctions analytiques, à valeurs complexes, sur Σ^{n-1}. L'image réciproque par ψ de ω est un germe de 1-forme analytique complexe

$$\psi^*(\omega) = \rho\, d\rho + \sum_{k \geqslant 2} \rho^k(\ldots$$

Le germe de 1-forme $\omega^* = \dfrac{\psi^*(\omega)}{\rho}$ vérifie la condition

$$\omega^* \wedge d\omega^* = 0$$

qui s'interprète géométriquement de la façon suivante. Identifions $\mathbf{C} \times \Sigma^{n-1}$ avec $\mathbf{R}^2 \times \Sigma^{n-1}$, en écrivant $\rho = \rho' + i\rho''$. Il existe 2 germes de 1-forme analytiques réelles ω' et ω'' le long de $(0, 0) \times \Sigma^{n-1}$ dans $\mathbf{R}^2 \times \Sigma^{n-1}$ telles que :

$$\omega^*(\rho' + i\rho'', \bar{x}) = \omega'(\rho', \rho'', \bar{x}) + i\omega''(\rho', \rho'', \bar{x})$$

Le système de Pfaff $\{\omega', \omega''\}$ est complètement intégrable et il définit un germe de feuilletage F_{ω^*} de codimension 2 le long de $(0, 0) \times \Sigma^{n-1}$ dans $\mathbf{R}^2 \times \Sigma^{n-1}$ dont $(0, 0) \times \Sigma^{n-1}$ est une feuille. Pour simplifier les calculs qui suivent, il est plus intéressant de considérer F_{ω^*} comme un germe de feuilletage analytique complexe [7] le long de $\{0\} \times \Sigma^{n-1}$, dans $\mathbf{C} \times \Sigma^{n-1}$, qui est transverse au facteur $\mathbf{C}$. A l'intégrale première formelle f de ω correspond l'intégrale première formelle $\bar{f}$ de ω^* (c'est-à-dire $d\bar{f} \wedge \omega^* = 0$) :

$$\bar{f}(\rho, \bar{x}) = f \circ \psi(\rho, \bar{x}) = \rho^2 + \sum_{k \geqslant 3} \lambda_k(\bar{x})\rho^k$$

où les λ_k sont des polynômes homogènes de degré k en $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Pour $n \geqslant 3$, le théorème de stabilité de Reeb permet d'affirmer qu'il existe un difféomorphisme analytique complexe Φ de $\mathbf{C} \times \Sigma^{n-1}$ du type :

$$\Phi : (r, \bar{x}) \to (\rho(r, \bar{x}), \bar{x}), \quad \Phi^{-1} : (\rho, \bar{x}) \to (r(\rho, \bar{x}), \bar{x}).$$

tel que les feuilles du feuilletage image réciproque de F_{ω^*} par Φ soient les sphères $\{r\} \times \Sigma^{n-1}$, c'est-à-dire :

$$\Phi^*(\omega^*)(r, \bar{x}) = g(r, \bar{x})\, dr \quad \text{avec} \quad g(0, \bar{x}) \neq 0$$

où g est un germe analytique complexe. Montrons que ce résultat est encore vrai lorsque $n = 2$. F_{ω^*} est complètement déterminé (modulo un difféomorphisme de $\mathbf{C} \times \Sigma^1$) par la représentation d'holonomie de la feuille compacte $\{0\} \times \Sigma^1$:

$$\theta : \pi_1(\Sigma^1) \to \mathrm{Diff}_0\, \mathbf{C}$$

où $\mathrm{Diff}_0\, \mathbf{C}$ désigne le groupe des germes en $0 \in \mathbf{C}$ de difféomorphismes holomorphes de $\mathbf{C}$ qui laissent fixe 0. Soit j^k la projection de $\mathrm{Diff}_0\, \mathbf{C}$ sur le groupe des jets d'ordre k des éléments de $\mathrm{Diff}_0\, \mathbf{C}$. Pour tout $k > 0$ $J^k \circ \theta$ ne dépend que du jet d'ordre k de ω^*. Or on peut toujours supposer que :

$$J^k \omega^* = \frac{1}{\rho} J^{k+1}\, d\bar{f}.$$

Le morphisme $J^k \circ \theta$ est nul pour tout $k > 0$ et θ est le morphisme nul. La série formelle $\hat{f}(r, \bar{x})$ définie par :

$$\hat{f}(r, \bar{x}) = \bar{f} \circ \Phi(r, \bar{x}) = \bar{f}(\rho(r, \bar{x}), \bar{x})$$

est une intégrale première de $\Phi^*(\omega^*)$. Elle est indépendante de $\bar{x}$ puisque $dr \wedge d\hat{f}(r, \bar{x}) = 0$. Nous écrirons

$$\hat{f}(r) = \hat{f}(r, \bar{x}).$$

D'autre part, la propriété de symétrie de ψ,

$$\psi(\rho, \bar{x}) = \psi(-\rho, -\bar{x})$$

entraîne que :

$$\Phi(r, \bar{x}) = \Phi(-r, -\bar{x}) \quad \text{et} \quad \bar{f}(\rho, \bar{x}) = \bar{f}(-\rho, -\bar{x})$$

On en déduit que :

$$\hat{f}(r) = \bar{f}(\rho(r, \bar{x}), \bar{x}) = \bar{f}(\rho(-r, -\bar{x}), -\bar{x}) = \hat{f}(-r)$$

La série formelle $\hat{f}(r)$ est paire en r et nous l'écrivons :

$$\hat{f}(r) = \sum_{k\geqslant 1} \mu_k r^{2k} \qquad \text{avec} \qquad \mu_1 \neq 0.$$

Soient $c_1, c_2, \ldots c_k, \ldots$ déterminés par le système

$$\begin{cases} c_1\mu_1 = 1 \\ c_1\mu_2 + c_2\mu_1^2 = 0 \\ \quad\vdots \\ \sum_{j=1}^{k} c_j \left(\sum_{i_1+i_2+\cdots i_j=k} \mu_{i_1}.\mu_{i_2}. \ldots .\mu_{i_j} \right) = 0 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Alors si

$$l(u) = \sum_{k\geqslant 1} c_k u^k, \qquad l \circ \hat{f}(r) = r^2,$$

ainsi

$$l \circ \hat{f} \circ \Phi^{-1}(\rho, \bar{x}) = l \circ \bar{f}(\rho, \bar{x}) = r(\rho, \bar{x})^2 = \rho^2 + \sum_{k\geqslant 3} \rho^k \mathrm{P}_k(\bar{x}).$$

Puisque $\hat{f}$ est une série en ρ dont les coefficients $\lambda_k(\bar{x})$ sont des polynômes homogènes de degré k en $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, le coefficient $\mathrm{P}_k(\bar{x})$ de ρ^k dans $l \circ \bar{f}$ est un polynôme homogène de degré k. D'autre part, $r(\rho, \bar{x})$ étant un germe analytique complexe il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que :

$$|\mathrm{P}_k(\bar{x})| < \mathrm{M}^k \quad \text{si} \quad \bar{x} \in \Sigma^{n-1}, \quad \text{pour} \quad k \geqslant 2.$$

La série $h = l \circ f$ en $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ qui s'écrit :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{k\geqslant 3} \mathrm{P}_k(x)$$

est convergente sur une boule de centre $0 \in \mathbf{C}^n$. Son germe en 0 est une intégrale première holomorphe de ω.

4. Démonstration de la proposition 2 dans le cas holomorphe.

Soit $\omega \in \Lambda^1_{\mathrm{H}}(n+q)$ qui vérifie les hypothèses de la proposition 2. Il existe un système de coordonnées

$$(x', s) = (x'_1, \ldots, x'_n, s_1, \ldots s_q)$$

dans lequel on a :

$$\omega(x', s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x', s)\, dx_i + \sum_{j=1}^{q} b_j(x', s)\, ds_j$$

$$q_\omega(x', s) = q_\omega(x') = \sum_{i=1}^{n} x_i'^2$$

Soit $x'(s) = (x_1'(s), \ldots x_n'(s)) \in (\Lambda_H(q))^n$, fourni par le théorème des fonctions implicites tel que $a_i(x'(s), s)$ est nul. Dans les coordonnées $(x, s) = (x' - x'(s), s)$, ω s'écrit :

$$\omega(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j}(x, s) \right) dx_i + \sum_{j=1}^{q} b_j'(x, s)\, ds_j$$

où les $a_{i,j}$ et b_j' sont des éléments de $\Lambda_H^0(p+q)$ et $a_{i,j}(0, 0) = 0$. Nous supposons que ces germes sont représentés par des séries convergentes sur le produit de 2 boules $B_x \times B_s$ et que, $0 \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^q$ est le seul zéro de ω sur $B_x \times B_s$. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \ldots$, les éléments d'un algorithme de Godbillon-Vey de ω.

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(x, s)\, dx_i + \sum_{j=1}^{q} b_{k,j}(x, s)\, ds_j$$

Les 1-formes $\omega_{k,s} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(x, s)\, dx_i$ sont éléments d'un algorithme de Godbillon-Vey de la 1-forme à paramètre $s \in B_s$

$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j}(x, s) \right) dx_i$$

D'après la remarque 2.III, il existe une série formelle f_s en x, dont les coefficients sont des séries $\lambda_I(s)$ qui convergent sur la boule B_s, qui est une intégrale première formelle de ω_s pour tout $s \in B_s$. Le jet d'ordre 1 de ω_s étant une 1-forme fermée, on peut choisir f_s de telle façon que

$$J^1\, df_s(x) = J^1 \omega_s(x)$$

c'est-à-dire que :

$$f_s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{|I| \geqslant 2} x^I \lambda_I(s) \quad \text{avec} \quad \lambda_I(0) = 0 \text{ si } |I| = 2$$

$$\omega_s(x) \wedge df_s(x) = 0 \quad \text{si} \quad s \in B_s$$

Nous allons montrer l'existence d'une série formelle l_s en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont les coefficients $c_k(s)$ sont des séries en s, convergentes sur la boule B_s.

$$l_s(u) = \sum_{k\geqslant 1} u^k c_k(s) \quad \text{avec} \quad c_1(0) \neq 0$$

telle que $l_s(f_s(x))$ représente un élément de $\Lambda^0_{\mathrm{H}}(n+q)$. Les arguments géométriques qui permettent de construire l_s sont les mêmes que ceux utilisés pour construire l dans le lemme 1 et nous les omettrons. Avec les notations du lemme on a :

$$\psi^*(\omega_s) = \rho\, d\rho(1 + A_s(\rho, \bar{x})) + \rho^2(\ldots$$
$$A_s(\rho, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i\cdot\bar{x}_j a_{i,j}(\rho\bar{x}, s)$$

On peut toujours supposer que, $D_\rho \subset \mathbf{C}$ désignant le disque de rayon ρ

$$\|A_s(\rho, \bar{x})\| = \|A(\rho, \bar{x}, s)\| < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad (\rho, \bar{x}, s) \in D_\rho \times \Sigma^{n-1} \times B_s.$$
$$\omega_s^* = \psi^*(\omega_s)/\rho(1 + A_s(\rho, x)) = d\rho + \rho(\ldots$$

est un germe de 1-forme analytique complexe le long $\{0\}\times\Sigma^{n-1}$ qui dépend de façon holomorphe du paramètre $s \in B_s$ et, son développement de Taylor suivant les puissances de ρ converge pour $\rho \in D_\rho$, uniformément en $(\bar{x}, s) \in \Sigma^{n-1} \times B_s$. Il existe une famille de difféomorphismes

$$\Phi_s : (r, \bar{x}) \to (\rho_s(r, \bar{x}), \bar{x}), \quad \Phi_s^{-1} : (\rho, \bar{x}) \to (r_s(\rho, \bar{x}), \bar{x})$$

dépendant de façon holomorphe de $s \in B_s$ qui trivialisent les germes de feuilletage $F_{\omega_s^*}$, c'est-à-dire

$$\Phi_s^*(\omega_s^*) = g(r, \bar{x}, s)\, dr, \quad g(0, x, s) \neq 0$$

où g est un germe analytique complexe qui dépend de façon holomorphe du paramètre s. Soit $\bar{f}_s$ la série formelle

$$\bar{f}_s(\rho, \bar{x}) = f_s \circ \psi(\rho, \bar{x}) = \rho^2 + \sum_{k\geqslant 2} \rho^k \lambda_k(\bar{x}, s)$$
$$\lambda_k(\bar{x}, s) = \sum_{|\mathrm{I}|=k} \bar{x}^{\mathrm{I}}\lambda_{\mathrm{I}}(s) \quad \text{avec} \quad \lambda_2(\bar{x}, 0) \equiv 0$$

Il est clair que $d\bar{f}_s \wedge \omega_s^*$ est nul. En composant $\bar{f}_s$ par le développement de Taylor de Φ suivant les puissances de r

nous obtenons la série en r :

$$\hat{f}_s(r, \bar{x}) = \bar{f}_s(\rho_s(r, \bar{x})) = \sum_{k\geqslant 2} r^k \mu_{k,s}(\bar{x})$$

où $\mu_1(\bar{x}, s)$ ne s'annule pas sur $\Sigma^{n-1} \times B_s$. Il est clair que le produit extérieur $dr \wedge d\hat{f}_s(r, \bar{x})$ est nul. $\hat{f}$ est une série formelle indépendante de $\bar{x}$. De la même façon que dans le lemme, on montre qu'elle est paire en r. Elle s'écrit

$$\hat{f}_s(r) = \sum_{k\geqslant 1} \rho^{2k} \mu_k(s)$$

Les $\mu_k(s)$ sont des séries convergentes sur la boule B_s. Les coefficients de la série $l_s(u) = \sum_{k\geqslant 0} u^k c_k(s)$ cherchée sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} c_1(s) \cdot \mu_1(s) = 1 \\ c_1(s) \cdot \mu_2(s) + c_2(s)\mu_1^2(s) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k} c_j(s) \left(\sum_{i_1+i_2+\dots i_j=k} \mu_{i_1}(s)\mu_{i_2}(s) \dots \mu_{i_j}(s) \right) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

La série $l_s \circ \bar{f}_s = l_s \circ \hat{f}_s \circ \Phi_s^{-1} = \bar{h}_s$ s'écrit :

$$\bar{h}_s(\rho, \bar{x}) = \rho^2 + \sum_{k\geqslant 3} \rho^k P_k(\bar{x}, s) = (r_s(\rho, \bar{x}))^2$$

Les $P_k(\bar{x}, s)$ sont des polynômes homogènes de degré k en $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, dont les coefficients sont des séries en s, convergentes sur la boule B_s et la série $h_s(\rho, \bar{x})$ converge pour $\rho \in D_\rho$ uniformément en $(\bar{x}, s) \in \Sigma^{n-1} \times B_s$. La série composée

$$h_s(x) = l_s \circ f_s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{k\geqslant 3} P_k(x, s)$$

définit une fonction holomorphe sur $B_\rho \times B_s$. Soit h son germe en $0 \in \mathbf{C}^{n+q}$. Puisque pour tout $s \in B_s$, $d\bar{h}_s \wedge \omega_s^*$ est nul, le germe de 2 formes $d_x h \wedge \omega_s$ est nul. Le corollaire 1.I implique

$$\omega_s = g(x, s)\, d_x h(x, s) \quad \text{avec} \quad g(0, 0) \neq 0$$

D'après le lemme de Morse à paramètres, il existe un germe de difféomorphisme D, tel que :

$$h \circ \mathrm{D}(y, s) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + k(s), \quad \mathrm{D} : (y, s) \to (x(y, s), s)$$

où $k(s) \in \Lambda_{\mathrm{H}}^{0}(q)$. Dans le système de coordonnées (y, s), on a

$$\omega(y, s) = g(x(y, s), s) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \, dy_i \right) + \sum_{j=1}^{q} b_j''(y, s) \, ds_j$$

5. Démonstration de la proposition 2 dans le cas analytique.

Soit $\omega \in \Lambda_{\mathrm{A}}^{1}(n + q)$ qui vérifie les hypothèses de la proposition 2. Il existe des coordonnées (x, s) telles que :

$$\omega_s(x) = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i x_i + \sum_{|\mathrm{I}| \geqslant 1} x^{\mathrm{I}} a_{i,\mathrm{I}}(s)) \, dx_i$$

où les $a_{i,\mathrm{I}}$ sont des séries en $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ convergentes sur une boule B_s avec $a_{i,\mathrm{I}}(0) = 0$ si $|\mathrm{I}| = 1$ et

$\varepsilon_i = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant i(\omega)$, $\quad \varepsilon_i = -1$ si $i(\omega) + 1 \leqslant i \leqslant n$

complexifions ω_s en posant :

$$z_i = x_i + iy_i \quad \text{si} \quad \varepsilon_i > 0, \qquad z_i = y_i + ix_i \quad \text{si} \quad \varepsilon_i = -1$$

$$\hat{\omega}_s(z) = \sum_{i=1}^{n} \Big(z_i + \sum_{|\mathrm{I}| \geqslant 1} \varepsilon_{\mathrm{I}} z^{\mathrm{I}} a_{i,\mathrm{I}}(s) \Big) \, dz_i \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_{\mathrm{I}} = \pm 1$$

$\hat{\omega}_s$ est un germe de 1-forme complètement intégrable à paramètre $s \in \mathrm{B}_s$, tel que $\hat{\omega}_s/(y_1 = y_2 = \cdots y_n = 0) = \omega_s$. Bien que les $a_{i,\mathrm{I}}(s)$ soient des fonctions analytiques réelles, le raisonnement du paragraphe 4 s'applique encore dans ce cas. $\hat{\omega}_s$ possède une intégrale première à paramètre $s \in \mathrm{B}_s$ qui s'écrit :

$$\hat{f}_s(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \sum_{|\mathrm{I}| \geqslant 2} z^{\mathrm{I}} (\lambda_{\mathrm{I}}(s) + i\mu_{\mathrm{I}}(s))$$

où les $\lambda_{\mathrm{I}}(s)$ et $\mu_{\mathrm{I}}(s)$ sont des séries en $s_1, s_2, \ldots, s_q$ qui convergent sur la boule B_s. La partie réelle de la restriction de f_s à $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, notée $f_s(x)$, est une intégrale première de ω_s à paramètre $s \in \mathrm{B}_s$. Le résultat est une conséquence du lemme de Morse à paramètres.

CHAPITRE V

EXISTENCE D'INTÉGRALES PREMIÈRES C^∞

1. Énoncés des résultats.

Dans le cas analytique, le théorème de fonctions composées (corollaire 1.II) nous a permis de faire un raisonnement par récurrence (proposition 1.IV) pour montrer l'existence d'intégrales premières. Or dans le cas C^∞, l'hypothèse de ce théorème étant beaucoup plus forte (corollaire 2.II), il n'est pas possible de raisonner par induction (voir proposition 1.V) et les résultats que nous obtenons sont beaucoup plus faibles. Rappelons, que, si ω est un germe de 1-forme complètement intégrable, q_ω, $r(\omega)$, $i(\omega)$ désignent respectivement le hessian de ω, le rang de q_ω, l'indice de ω.

Théorème 1. — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_\infty(n)$, $n \geqslant 3$, *un germe complètement intégrable dont* 0 *est une singularité algébriquement isolée. Alors* ω *possède une intégrale première* $f \in \Lambda^0_\infty(n)$ *dans les cas suivants :*

(1) $r(\omega) = i(\omega) = n$; (2) $n \geqslant 4$, $r(\omega) = n$, $i(\omega) = n-1$; (3) $n \geqslant 4$, $r(\omega) = i(\omega) = n-1$; *lorsque* $n = 3$, *les 2 derniers résultats sont encore vrais si le feuilletage de* $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ *défini par* ω *est sans holonomie.*

Le hessian de l'intégrale première f étant q_ω, il existe des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du point x tel que dans les cas :

(1) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

(2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2$

(3) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + h(x_n)$ avec $h(x_n) \in \Lambda^0_\infty(1)$.

Ce théorème est une conséquence évidente des 2 propositions suivantes.

PROPOSITION 1. — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_\infty(n+1)$, $n \geqslant 2$, *un germe complètement intégrable dont* 0 *est une singularité algébriquement isolée. Alors, si*

$$\omega(x, s) = df(x) + b(x, s)\, ds, \quad (x, s) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

où $f \in \Lambda^0_\infty(n)$ *est un germe dont les surfaces de niveau sont connexes,* ω *possède une intégrale première* C^∞.

PROPOSITION 2. — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_\infty(n+q)$, $n+q \geqslant 3$, *un germe complètement intégrable dont* 0 *est une singularité algébriquement isolée. Alors si,* $i(\omega) = n > 2$ *(ou si* $n = 2$, *le feuilletage de* $\mathbf{R}^{2+q} - \{0\}$ *défini par* ω *est sans holonomie) il existe des coordonnées* $(x_1, \ldots x_n, s_1, \ldots s_q)$ *telles que :*

$$\omega(x, s) = g(x, s)\, d(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + \sum_{j=1}^{q} b_j(x, s)\, ds_j$$

où g *et les* b_j *sont des éléments de* $\Lambda^0_\infty(n+q)$.

Les arguments géométriques de la démonstration de la proposition 2 seront tout d'abord utilisés pour démontrer le lemme suivant :

LEMME 1 (Théorème de Reeb dans le cas C^∞). — *Soit* $\omega \in \Lambda^1_\infty(n)$, $n \geqslant 3$, *un germe complètement intégrable tel que* $r(\omega) = i(\omega) = n$. *Alors* ω *possède une intégrale première qui peut s'écrire :*

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Ce résultat est encore vrai pour $n = 2$, avec les hypothèses supplémentaires les feuilles du feuilletage de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ défini par $\omega / \mathbf{R}^2 - \{0\}$ sont homéomorphes à des cercles et ω possède une intégrale première formelle.

2. Démonstration de la proposition 1.

La condition de complète intégrabilité de ω implique que le germe de 2-forme $df \wedge d_x b$ est nul. Les surfaces de niveau de f étant connexes, il existe (corollaire 2.II) un germe $l \in \Lambda^0_\infty(2)$ tel que $b(x, s) = l(f(x), s)$. Le germe de 1-forme

$$\Omega(x, s, t) = df(x) + dt + l(f(x) + t, s)\, ds$$

est complètement intégrable. Il possède une intégrable première $F(x, s, t)$. La restriction f de F à l'hyperplan $t = 0$ est une intégrale première de ω.

3. Démonstration du lemme 1.

Par hypothèse, lorsque $n = 2$, d'après le théorème 1.III, si $n \geqslant 3$, ω possède une intégrale première formelle f. Soit f_∞ un germe en $0 \in \mathbf{R}^n$ de fonction C^∞ dont le développement de Taylor est f. On peut supposer que :

$$j^\infty\omega = \frac{1}{2}\, df \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{1}{2}\, df_\infty + \pi$$

où π est une 1-forme plate en $0 \in \mathbf{R}^n$. Puisque

$$r(\omega) = i(\omega) = n,$$

sont respectivement le hessian de f_∞ et l'indice de ce hessian, il existe des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dans lesquelles :

$$f(x) = f_\infty(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

Notons S^{n-2} la $(n-1)$-sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$ et

$$\psi : \quad \mathbf{R} \times S^{n-1} \to \mathbf{R}^n, \qquad \psi(\rho, \bar{x}) = \rho\bar{x}$$

Soit F_{ω^*} le germe de feuilletage le long

$$\{0\} \times S^{n-1} \subset \mathbf{R} \times S^{n-1}$$

défini par la 1-forme

$$\omega^* = \frac{1}{\rho}\, \psi^*(\omega) = d\rho + \pi(\bar{x}, \rho)$$

où π est un germe de 1-forme, le long de $\{0\} \times S^{n-1}$, qui est plat en ρ. La sphère $\{0\} \times S^{n-1}$ est une feuille de F_{ω^*}. D'après le théorème de stabilité [7] pour $n \geqslant 3$ et puisque

F_{ω^*} est sans holonomie pour $n = 2$, il existe un germe de C^∞-difféomorphisme Φ qui trivialise F_{ω^*}. C'est-à-dire si

$$\Phi : (r, \bar{x}) \to (\rho(r, \bar{x}), \bar{x}) \quad \text{et} \quad \Phi^{-1} : (\rho, \bar{x}) \to (r(\rho, \bar{x}), \bar{x})$$
$$\Phi^*(\omega^*) = g(r, \bar{x})\, dr, \ g(0, \bar{x}) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \bar{x} \in S^{n-1}$$

où g est un germe de fonction C^∞ le long de $\{0\} \times S^{n-1}$. Notons j^∞ l'application qui a un germe le long de $\{0\} \times S^{n-1}$ associe son développement de Taylor suivant les puissances de ρ. La série formelle en ρ,

$$\bar{f}(\rho, \bar{x}) = f \circ \psi(\rho, \bar{x}) = \rho^2$$

est une « intégrale première formelle » de $\omega^*(j^\infty\omega^* \wedge d\bar{f} = 0)$. La série formelle :

$$\hat{f}(r, \bar{x}) = (j^\infty \rho(r, \bar{x}))^2$$

est une intégrale première formelle de $\Phi^*(\omega^*)$. C'est-à-dire

$$\Phi^*(\omega^*) \wedge d\hat{f}(r, \bar{x}) = g(r, \bar{x}).dr \wedge d_{\bar{x}}\hat{f}(r, \bar{x}) = 0$$

Ainsi $\hat{f}$ est indépendant de $\bar{x}$. D'autre part, puisque $\psi(\rho, \bar{x})$ et $\psi(-\rho, -\bar{x})$ sont égaux. On a l'invariance :

$$\rho(r, \bar{x}) = -\rho(-r, -\bar{x}) \quad \text{et} \quad j^\infty\rho(r, \bar{x}) = -j^\infty\rho(-r, -\bar{x})$$

On en déduit que :

$$\hat{f}(r) = \bar{f}(j^\infty\rho(r, \bar{x}), \bar{x}) = \bar{f}(j^\infty\rho(-r, -\bar{x}), -\bar{x}) = \hat{f}(-r).$$

Il existe un germe de fonction C^∞ en $0 \in \mathbf{R}$, $\hat{f}_\infty$ telle que :

$$j^\infty \hat{f}_\infty = \hat{f} \qquad \text{et} \qquad \hat{f}_\infty(-r) = \hat{f}_\infty(r)$$

Le germe $\bar{f}_\infty = \hat{f}_\infty \circ \Phi^{-1}$ (le long de $\{0\} \times S^{n-1}$) possède les trois propriétés suivantes (Φ^{-1} étant invariant par la symétrie $(\rho, \bar{x}) \to (-\rho, -\bar{x})$)

$$j^\infty\bar{f}_\infty = \bar{f}, \quad \bar{f}_\infty(\rho, \bar{x}) = \bar{f}_\infty(-\rho, -\bar{x}) \quad \text{et} \quad \omega^* \wedge d\bar{f}_\infty = 0.$$

D'après un théorème de Gläser il existe $f_\infty \in \Lambda^0_\infty(n)$ tel que

$$\bar{f}_\infty = f_\infty \circ \psi \qquad \text{et} \qquad \omega \wedge df_\infty = 0$$

Par construction $j^\infty f_\infty$ est la série formelle initiale f:

$$j^1\, df_\infty = \sum_{i=1}^{n} x_i\, dx_i = 2j^1\omega$$

Il existe $g \in \Lambda^0_\infty(n)$ tel que $\omega = g\, df_\infty$ avec $g(0)$ non nul. Le lemme est alors une conséquence du lemme de Morse.

Démonstration de la proposition 2. — Soit ω qui vérifie les hypothèses de la proposition. Le raisonnement que nous avons fait dans le cas holomorphe au début de la démonstration de la proposition 2.IV est encore valable. Ainsi, il existe des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots x_n, s_1, \ldots, s_q)$ telles que :

$$\omega(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j}(x, s)\right) dx_i + \sum_{j=1}^{q} b_j(x, s)\, ds_j$$

Les $a_{i,j}$ et b_j sont des éléments de $\Lambda^0_\infty(n+q)$ tels que :

$$a_{i,j}(0, 0) = 0 \text{ et } j^1 b_j = 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant q.$$

Nous supposerons que ces germes possèdent des représentants notés encore $a_{i,j}$ et b_j sur le produit de 2 boules $B_x \times B_s$ et, que $0 \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ est le seul zéro de ω sur $B_x \times B_s$. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \ldots$ les éléments d'un algorithme de Godbillon-Vey de ω :

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(x, s)\, dx_i + \sum_{j=1}^{q} b_{k,j}(x, s)\, ds_j.$$

Les 1-formes $\omega_{k,s} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(x, s)\, dx_i$ sont les éléments d'un algorithme de Godbillon-Vey de la 1-forme à paramètre $s \in B_s$

$$\omega_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j}(x, s)\right) dx_i.$$

Il existe (remarque 2.III) une série formelle $f_s(x)$ dont les coefficients $\lambda_I(s)$ sont des fonctions C^∞ sur B_s qui est une intégrale première formelle de ω_s pour tout $s \in B_s$. Nous pouvons la choisir de telle façon que $j^1\, df_s = j^1\omega_s$. Ainsi elle s'écrit :

$$f_s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{|I| \geqslant 2} x^I \lambda_I(s) \qquad \text{avec} \qquad \lambda_I(0) = 0 \quad \text{si} \quad |I| = 2.$$

Avec les notations de la démonstration du lemme 1, on définit :

$$\psi^*(\omega_s) = \rho\, d\rho(1 + A_s(\rho, \bar{x})) + \rho^2\pi_s(\bar{x}, \rho)$$
$$A_s(\rho, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i\bar{x}_j a_{i,j}(\rho\bar{x}, s)$$

les $a_{i,j}(x, s)$ étant nuls au point $(0, 0)$ il existe un segment D_ρ tel que (en prenant une nouvelle boule $B_s \in \mathbf{R}^q$ si cela est nécessaire)

$$|A_s(\rho, \bar{x})| < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad (\rho, \bar{x}, s) \in D_\rho \times S^{n-1} \times B_s$$

Pour tout $s \in B_s$ la 1-forme

$$\omega_s^* = \psi^*(\omega_s)/(1 + A_s(\rho, \bar{x}))\rho = d\rho + \rho(\ldots$$

définit un germe de feuilletage $F_{\omega_s^*}$ le long de $\{0\} \times S^{n-1}$ dont $\{0\} \times S^{n-1}$ est une feuille. Comme dans la démonstration du lemme, il existe une famille Φ_s de C^∞-difféomorphismes, dépendant de façon C^∞ de s, qui trivialise $F_{\omega_s^*}$:

$$\Phi_s : (r, \bar{x}) \to (\rho_s(r, \bar{x}), \bar{x}) \quad \text{et} \quad \Phi^{-1} : (\rho, \bar{x}) \to (r_s(\rho, \bar{x}), \bar{x})$$
$$\Phi_s^*(\omega_s^*) = g(r, \bar{x}, s)\, dr, \quad g(0, \bar{x}, s) \neq 0 \quad \text{si} \quad (\bar{x}, s) \in S^{n-1} \times B_s$$

Avec les notations du lemme (pour les j^∞), la série formelle en ρ, $\bar{f}_s = f_s \circ \Psi$ est une intégrale première formelle de ω_s^*. C'est-à-dire

$$j^\infty\omega_s^* \wedge d\bar{f}_s = 0 \quad \text{pour} \quad s \in B_s$$

On en déduit que la série formelle en r, $\hat{f}_s = \bar{f}_s \circ j^\infty\Phi_s$

$$\hat{f}_s(r, \bar{x}) = \bar{f}_s(j^\infty\rho_s(r, \bar{x}), \bar{x})$$

ne dépend pas de $\bar{x}$. D'autre part, la symétrie

$$\Psi(\bar{x}, \rho) = \Psi(-\bar{x}, -\rho)$$

entraîne que $\hat{f}_s(r)$ est pair en r. Nous l'écrivons :

$$\hat{f}_s(r) = \sum_{k\geqslant 1} c_k(s) r^{2k}$$

avec $c_1(0) \neq 0$. Les $c_k(s)$ étant des fonctions de classe C^∞ sur la boule B_s, d'après le théorème de Withney, il existe une fonction C^∞, $\hat{f}_\infty(r, s)$, dont le jet d'ordre infini au point $(0; s)$, $s \in B_s$ est $\hat{f}_s$ telle que :

$$\hat{f}_\infty(r, s) = \hat{f}_\infty(-r, s) \quad \text{et} \quad \Phi_s^*(\omega_s^*) \wedge d_r\hat{f}_\infty(r, s) = 0$$

Le germe de fonction C^∞ le long de $\{0\} \times S^{n-1}$ à paramètre s

$$(\bar{f}_\infty)_s(\rho, \bar{x}) = \hat{f}_\infty(r_s(\rho, \bar{x}), s)$$

possède les 3 propriétés suivantes (car $r_s(\rho, \bar{x}) = -r_s(-\rho, -\bar{x})$) :

$$\begin{cases} j^\infty(\bar{f}_\infty)_s = \bar{f}_s = f_s \circ \Psi \quad \text{et} \quad (\bar{f}_\infty)_s(\rho, \bar{x}) = (\bar{f}_\infty)_s(-\rho, -\bar{x}) \\ d(\bar{f}_\infty)_s \wedge \omega_s^* = 0 \end{cases}$$

Les deux premières propriétés impliquent l'existence d'une fonction C^∞, f_∞, sur $\mathbf{R}^n \times B_s$ dont le germe $(f_\infty)_s$ en x le long $\{0\} \times B_s$ possède les 2 propriétés :

$$\begin{cases} (f_\infty)_s \circ \psi = (\bar{f}_\infty)_s \\ d(f_\infty)_s \wedge \omega_s = 0 \end{cases}$$

Par construction, $j^\infty(f_\infty)_s$ est la série formelle f_s. Notons encore f_∞ le germe en $0 \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ de f_∞.

$$d_xf_\infty \wedge \omega_s = 0 \quad \text{et} \quad j^1\, d_xf_\infty(x, s) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, dx_i = j^1\omega.$$

Les coefficients de ω_s engendrent dans $\Lambda^0_\infty(n+q)$ le même idéal que les coefficients de $j^1\omega$. D'après le lemme 1.I. et le corollaire 2.I, ω_s possède la propriété de division dans

$$\Lambda^2_\infty(n, q).$$

Il existe un élément $g \in \Lambda^0_\infty(n+q)$ tel que

$$\omega_s = g(x, s)d_xf_\infty(x, s) \quad \text{avec} \quad g(0, 0) \neq 0$$

La proposition est alors une conséquence évidente du lemme de Morse à paramètres.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. de Rham, Sur la division des formes et des courants par une forme linéaire, *Commentari. Math. Hel.*, 28 (1954).

[2] G. Godbillon-Vey, Un invariant des feuilletages de codimension un, *C.R.A.S.*, Paris (Juin 1971).

[3] Gunning-Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall. Inc. London.

[4] I. Kupka, Singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms, *Proc. Nat. Acad. Sciences*, 52 (1964).

[5] B. Malgrange, Ideals of differentiable functions, Oxford University Press, 1968.

[6] D. G. Northcott, Lessons on Rings Modules and Multiplicities, Cambridge University Press, 1968.

[7] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées (Thèse), Hermann 1952.

[8] J. C. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables, *Ergeb. Math.*, Springer Verlag (1972).

[9] Van der Vardeen, Modern Algebra (Volume II) F. Ungar Publishing. Co., New York (1964).

Manuscrit reçu le 21 mars 1975
Proposé par G. Reeb.

Robert Moussu,
Département de Mathématiques
Université de Djion
21000 Dijon.