ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 3 (1974), p. 219-266

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_219_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,3 (1974), 219-266

ALGÈBRE DE LIE DES AUTOMORPHISMES INFINITÉSIMAUX D'UNE STRUCTURE UNIMODULAIRE

par André LICHNEROWICZ

Introduction.

Cet article est le troisième d'une série ([3], [5]) consacrée aux quatre algèbres de Lie infinies classiques qui sont les suivantes :

1) algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable W.

2) algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire (W , η), où η est une forme élément de volume.

3) algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure symplectique (W , F).

4) algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact.

Dans chacun de ces articles, on s'est proposé d'une part de déterminer les dérivations des algèbres de Lie envisagées, d'autre part d'établir un certain nombre de propriétés de leurs idéaux, en particulier les suivantes : tous ces idéaux sont semi-simples et de dimension infinie, mais aucun idéal non trivial n'admet un idéal supplémentaire. Certains idéaux importants – dits canoniques – sont mis en évidence et leur rôle analysé. Dans chaque cas, l'étude des idéaux repose sur ce que nous nommons un lemme principal.

Nous nous intéressons ici à l'algèbre de Lie L des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire, c'est-à-dire au cas 2. Après avoir étudié les idéaux, nous montrons que les dérivations sont données par l'algèbre de Lie L^c des transformations infinitésimales conformes unimodulaires, c'est-à-dire celles qui reproduisent la forme élément de volume à un facteur constant près. La situation générale est proche de celle concernant l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une structure symplectique. La méthode employée pour déterminer les dérivations est un raffinement de celle introduite par F. Takens [7] pour montrer que dans le cas 1 toutes les dérivations sont intérieures. Une telle méthode peut aussi être employée dans le cas 3 mais se révèle plus lourde que celle employée dans [3].

Pour être adapté à l'étude des idéaux, le lemme principal du cas envisagé se présente comme devant être le plus raffiné des quatre lemmes principaux (voir aussi [4_3]) correspondant aux quatre algèbres de Lie infinies classiques.

Dans la partie V, nous avons introduit et étudié une algèbre de Lie nouvelle, notée N, que nous proposons d'appeler *l'algèbre de Lie dynamique du cas unimodulaire,* par analogie avec l'algèbre de Lie dynamique du cas symplectique définie à partir des parenthèses de Poisson sur les fonctions. Nous avons en particulier déterminé les dérivations de N et par suite son premier espace de cohomologie à valeurs dans l'algèbre de Lie N elle-même.

Certains résultats ont été annoncés dans deux Notes [$4_{1,2}$].

1. Transformations infinitésimales unimodulaires.

1. *Structure unimodulaire.*

a) Soit W une variété différentiable connexe, paracompacte, orientable, de dimension $n \geqslant 3$. Tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞. Une structure *unimodulaire* est définie sur W par la donnée d'une n-forme élément de volume η.

Soit $\{y^i\}$ (i, tout indice latin $= 1, \ldots, n$) une carte locale de domaine U. On a :

$$\eta\,|_U = k_U(\eta)\, dy^1 \wedge dy^2 \wedge \ldots \wedge dy^n \tag{1-1}$$

Les $k_U(\eta)$ définissent une densité scalaire $k(\eta)$ de poids 1 ; $k(\eta)$ (c'est-à-dire $k_U(\eta)$) est strictement positive pour une classe de cartes locales ; $\eta\,|_U$ a pour composantes sur U :

$$\eta\,|_U = \{k_U(\eta)\,\epsilon_{i_1 \ldots i_n}\}$$

où ϵ est l'indicateur de Kronecker. Les $k_U(\eta)^{-1}\epsilon^{i_1 \ldots i_n}$ définissent sur W un n-tenseur contravariant antisymétrique que nous notons η^{-1}.

De considérations classiques, il résulte que W admet des atlas de cartes dites *canoniques* $\{x^i\}$ telles que η puisse s'écrire sur le domaine U d'une telle carte :

$$\eta\,|_U = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{1-2}$$

c'est-à-dire telles que $k_U(\eta) = 1$.

b) Soit T^p l'espace des p-tenseurs contravariants antisymétriques de W et F_p l'espace des p-formes de W. Sur la variété unimodulaire $(W\,,\eta)$, on note $*$ l'isomorphisme de T^p sur F_{n-p} défini par :

$$t \in T^p \to *\,t = i(t)\,\eta \in F_{n-p}$$

où i désigne le produit intérieur.

On peut ainsi introduire sur $(W\,,\eta)$ l'opérateur $\delta : T^p \to T^{p-1}$ défini par :

$$\delta : t \in T^p \to \delta t = (-1)^p *^{-1} d * t \in T^{p-1}$$

On a manifestement $\delta^2 = 0$. L'élément t de T^p est dit δ-*fermé* si $\delta t = 0$, c'est-à-dire si la forme $*\,t$ est fermée ; t est dit δ-*exact* s'il existe $u \in T^{p+1}$ tel que $t = \delta u$, c'est-à-dire si la forme $*\,t$ est exacte.

c) Il est aisé d'évaluer δt dans une carte locale quelconque de domaine U ; $*\,t|_U$ a pour composantes :

$$*\,t_{j_{p+1}\ldots j_n} = \frac{1}{p\,!}\,t^{i_1\ldots i_p}\,k_U(\eta)\,\epsilon_{i_1\ldots i_p\,j_{p+1}\ldots j_n}$$

Il en résulte :

$$(\delta t)^{h_1\ldots h_{p-1}} = \frac{(-1)^p}{p\,!\,(n-p+1)\,!}\,\frac{1}{k_U(\eta)}\,\partial_{j_p}(t^{i_1\ldots i_p}\,k_U(\eta))\,\epsilon^{h_1\ldots h_{p-1}\,j_p\,j_{p+1}\ldots j_n}_{i_1\ldots i_p\,j_{p+1}\ldots j_n}$$

soit

$$(\delta t)^{h_1\ldots h_{p-1}} = -\frac{1}{p\,!}\,\frac{1}{k_U(\eta)}\,\partial_{j_p}(t^{i_1\ldots i_p}\,k_U(\eta))\,\epsilon^{j_p\,h_1\ldots h_{p-1}}_{i_1\ldots i_p}$$

Il vient ainsi

$$(\delta t)^{h_1 \ldots h_{p-1}} = - \frac{1}{k_U(\eta)} \partial_r (t^{r h_1 \ldots h_{p-1}} k_U(\eta)) \tag{1-3}$$

2. *Transformations infinitésimales unimodulaires.*

a) Etant donnée une variété unimodulaire (W, η), étudions l'action d'une transformation infinitésimale (t. i.) X sur la forme η. Si $\mathcal{L}(X)$ est l'opérateur de dérivation de Lie :

$$\mathcal{L}(X)\,\eta = di(X)\,\eta = d * X \tag{2-1}$$

X définit une *t. i. unimodulaire* si η reste invariant par X. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la $(n-1)$-forme $* X$ soit fermée, c'est-à-dire que X *soit δ-fermée* $(\delta X = 0)$.

Nous notons L l'algèbre de Lie des t. i. unimodulaires de (W, η), L_0 celle des t. i. unimodulaires X à supports S(X) *compacts.*

b) Soit X, $Y \in T^1$ deux champs de vecteurs arbitraires de W. Evaluons $* [X, Y]$; il vient

$$i([X, Y])\,\eta = \mathcal{L}(X)\, i(Y)\,\eta - i(Y)\,\mathcal{L}(X)\,\eta$$

Or :

$$\mathcal{L}(X)\, i(Y)\,\eta = d\, i(X)\, i(Y)\,\eta + i(X)\, d\, i(Y)\,\eta = d\, i(X)\, i(Y)\,\eta + i(X)\,\mathcal{L}(Y)\,\eta$$

On obtient ainsi :

$$* [X, Y] = - d * (X \wedge Y) + i(X)\,\mathcal{L}(Y)\,\eta - i(Y)\,\mathcal{L}(X)\,\eta$$

soit :

$$[X, Y] = - \delta (X \wedge Y) + *^{-1} (i(X)\,\mathcal{L}(Y)\,\eta - i(Y)\,\mathcal{L}(X))\,\eta \tag{2-2}$$

Si X, Y appartiennent à L, on a $\mathcal{L}(X)\,\eta = \mathcal{L}(Y)\,\eta = 0$ et (2-2) se réduit à

$$[X, Y] = - \delta (X \wedge Y) \tag{2-3}$$

Soit L^* le sous-espace de L défini par les éléments *δ-exacts* de L. On a $[L, L] \subset L^*$.

Soit maintenant L_0^* le sous-espace de L_0 défini par les vecteurs X pour lesquels il existe $t \in T^2$, à support $S(t)$ compact, tel que $X = \delta t$. Il résulte de (2-3) que $[L, L_0] \subset L_0^*$. Nous pouvons ainsi énoncer :

PROPOSITION 1. — 1) L^* *est un idéal de* L *tel que* L/L^* *soit abélien.*

2) *On a* $[L, L_0] \subset L_0^*$. *En particulier* L_0 *et* L_0^* *sont des idéaux de* L *et* L_0/L_0^* *est abélien.*

c) Soit $H^{n-1}(W; R)$ (resp. $H_0^{n-1}(W; R)$) le $(n-1)^{\text{ème}}$ espace de cohomologie réelle de W à supports fermés (resp. supports compacts) ; $b_{n-1}(W)$ et $b_{n-1}^0(W)$ sont les dimensions correspondantes; $b_{n-1}(W)$ est le $(n-1)^{\text{ème}}$ nombre de Betti de W pour l'homologie à supports compacts et $b_{n-1}^0(W)$ le $(n-1)^{\text{ème}}$ nombre de Betti pour l'homologie à supports fermés.

On déduit immédiatement des théorèmes de G. de Rham comme dans [3].

PROPOSITION 2. — 1) *L'espace* L/L^* *est isomorphe à l'espace de cohomologie* $H^{n-1}(W; R)$ *et dim.* $L/L^* = b_{n-1}(W)$.

2) *L'espace* L_0/L_0^* *est isomorphe à l'espace de cohomologie* $H_0^{n-1}(W; R)$ *et dim.* $L_0/L_0^* = b_{n-1}^0(W)$.

3. *Transformations infinitésimales conformes unimodulaires.*

a) Nous dirons (par abus de langage) qu'un champ de vecteurs X définit une t. i. conforme unimodulaire s'il existe une constante K_X telle que :

$$\mathcal{L}(X)\,\eta = K_X\,\eta \tag{3-1}$$

Nous notons L^c *l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales conformes unimodulaires.*

Pour $X \in L^c$ et $Y \in L$, la formule (2-2) se réduit à :

$$[X, Y] = -\,\delta(X \wedge Y) - K_X\,Y \tag{3-2}$$

où $\delta(X \wedge Y) \in L^*$. Il en résulte que L est un idéal de L^c. La même conclusion s'étend à partir de (3-2) à L^*, L_0 et L_0^*.

PROPOSITION 1. — *Si* L^c *est l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales conformes unimodulaires de* (W, η), *les algèbres de Lie* L, L^*, L_0, L_0^* *sont des idéaux de* L^c.

b) Si $X \in L^c$, (3-1) peut s'écrire :

$$K_X \eta = d * X \tag{3-3}$$

Si la variété W *est compacte,* la forme η n'est pas exacte et il résulte de (3-3) que $K_X = 0$ pour tout élément X de L^c. Ainsi dans ce cas, L^c coïncide avec L.

Si la variété W est non compacte, le n^e groupe de cohomologie de W est trivial et η est une forme exacte ; on a $\eta = d\omega$, où ω est une $(n-1)$-forme de W. Si $X_0 = *^{-1}\omega$, il vient :

$$\eta = d * X_0$$

et X_0 appartient à L^c, avec $K_{X_0} = 1$. Si $X \in L^c$, nous avons :

$$K_X \eta = d * X = d * (K_X X_0)$$

et par suite :

$$d * (X - K_X X_0) = 0$$

Ainsi $X - K_X X_0 \in L$. Tout élément X de L^c admet une décomposition unique en somme d'un élément proportionnel à X_0 et d'un élément de L :

$$X = K_X X_0 + Y \quad (Y \in L)$$

Si X' est un autre élément de L^c, on a :

$$X' = K_{X'} X_0 + Y' \quad (Y' \in L)$$

Il vient :

$$[X, X'] = K_X[X_0, Y'] + K_{X'}[Y, X_0] + [Y, Y']$$

où chaque terme du second membre appartient à L. Par suite

$$[L^c, L^c] \subset L$$

Inversement, soit Y un élément arbitraire de L ; on déduit de (3-2) appliquée à X_0 et Y :

$$Y = -[X_0, Y] - \delta(X_0 \wedge Y) \tag{3-4}$$

Nous établirons ultérieurement que L^* *est exactement l'idéal dérivé* $[L, L]$ *de* L. Le premier terme du second membre de (3-4) appartient à $[L^c, L^c]$, le second à L^* donc à $[L, L]$. Il en résulte :

$$L \subset [L^c, L^c]$$

et par suite $[L^c, L^c] = L$. Nous énonçons :

PROPOSITION 2. — *Si la variété unimodulaire* (W, η) *est non compacte,* L^c *est, en tant qu'espace vectoriel, somme directe de* L *et d'un sous-espace* C_0 *de dimension 1 :*

$$L^c = L \oplus C_0$$

En particulier dim. $L^c/L = 1$. *On a de plus :*

$$[L^c, L^c] = L$$

2. Le lemme principal.

4. *Lemme préliminaire.*

Dans l'étude de la structure de l'algèbre de Lie L, un instrument important est fourni par ce que nous nommons un lemme principal ; des lemmes analogues existent pour les quatre algèbres de Lie infinies classiques [3, 4_3, 5]. Nous établirons d'abord un lemme préliminaire.

LEMME PRELIMINAIRE. — *Soit* U, U' *deux domaines contractiles de* W, *avec* $\overline{U}' \subset U$ *et soit* (x^j) *une carte canonique de domaine* U'. *Donnons-nous n champs de vecteurs* $Z_{(j)} \in L_0^*$, *à supports* $S(Z_{(j)}) \subset U$, *tels que* $Z_{(j)}|_{U'} = \partial_j$. *Si* $t \in T^2$ *est un 2-tenseur à support compact* $S(t) \subset U'$ *tel que :*

$$\int_{U'} t^{ij} \eta_{U'} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4-1}$$

il existe n champs de vecteurs $Y_{(j)} \in L_0^*$, *à supports* $S(Y_{(j)}) \subset U'$, *tels que :*

$$t = -\sum_j Y_{(j)} \wedge Z_{(j)} \tag{4-2}$$

En effet, d'après (4-1), il existe des fonctions d^{kij}, à supports compacts contenus dans U', telles que :

$$t^{ij} = \partial_k d^{kij} \quad (d^{kij} = -d^{kji})$$

Montrons qu'il existe des fonctions c^{kij}, à supports compacts contenus dans U', telles que :

$$t^{ij} = \partial_k c^{kij} + a^{ij} \tag{4-3}$$

avec

$$c^{kij} = - c^{ikj} \tag{4-4}$$

et

$$a^{ij} = a^{ji} \tag{4-5}$$

S'il en est ainsi, on a d'après (4-3) et les propriétés postulées de symétrie :

$$- t^{ij} = \partial_k c^{kji} + a^{ij}$$

soit, par différence avec (4-3) :

$$2 t^{ij} = \partial_k c^{kij} - \partial_k c^{kji} = \partial_k (c^{kij} + c^{jki}) \tag{4-6}$$

Pour montrer l'existence des c^{kij}, il suffit de les astreindre au système défini par (4-4) et

$$c^{kij} + c^{jki} = 2 d^{kij} \tag{4-7}$$

Par permutation circulaire, il vient :

$$c^{ijk} + c^{kij} = 2 d^{ijk}$$

$$c^{jki} + c^{ijk} = 2 d^{jki}$$

On en déduit que la solution du système (4-4), (4-7) est donnée par :

$$c^{kij} = d^{kij} + d^{ijk} - d^{jki} \tag{4-8}$$

Les fonctions définies par (4-8) sont bien à supports compacts contenus dans U', vérifient (4-4) et l'on a d'après (4-7) :

$$t^{ij} = \partial_k c^{kij} + a^{ij} \tag{4-9}$$

où

$$2 a^{ij} = - \partial_k (c^{kij} + c^{kji}) \quad (a^{ij} = a^{ji})$$

Ainsi le tenseur t peut s'écrire sur U' :

$$t|_{U'} = \frac{1}{2} t^{ij} \partial_i \wedge \partial_j = \frac{1}{2} (\partial_k c^{kij}) \partial_i \wedge \partial_j$$

Introduisons les vecteurs $Y_{(j)}$, à supports compacts $S(Y_{(j)}) \subset U'$, admettant pour composantes sur U' :

$$Y^i_{(j)} = - \frac{1}{2} \partial_k c^{kij} \quad (c^{kij} = - c^{ikj})$$

Les coordonnées choisies étant canoniques, il résulte de (1-3) que ces vecteurs appartiennent à L_0^* et l'on a :

$$t|_{U'} = - \sum_j Y_{(j)}|_{U'} \wedge \partial_j$$

On en déduit (4-2) d'après les propriétés de supports.

5. *Le lemme principal.*

Nous allons établir le lemme suivant :

LEMME PRINCIPAL. – *Soient* U, U′ *deux domaines contractiles de* W, *avec* $\overline{U'} \subset U$. *Donnons-nous une carte canonique* $(x^{(o)j})$ *arbitraire de domaine* U′ *et* n *vecteurs* $Z^{(o)}_{(j)} \in L_0^*$, *à supports* $S(Z^{(o)}_{(j)}) \subset U$, *tels que* $Z^{(o)}_{(j)}|_{U'} = \partial_j^{(o)}$. *On peut trouver* $(C_n^2 + 1)$ *cartes canoniques* $(x^{(A)j})$ $(A = 0, 1, \ldots, C_n^2)$ *de domaine* U′ *et* $n(C_n^2 + 1)$ *vecteurs* $Z^{(A)}_{(j)} \in L_0^*$, *à supports* $S(Z^{(A)}_{(j)}) \subset U$, *tels que* $Z^{(A)}_{(j)}|_{U'} = \partial_j^{(A)}$ *vérifiant la condition suivante : si* $X \in L_0^*$ *est à support* $S(X) \subset U'$, *il existe* $n(C_n^2 + 1)$ *vecteurs* $Y^{(A)}_{(j)} \in L_0^*$, *à supports* $S(Y^{(A)}_{(j)}) \subset U'$, *tels que :*

$$X = \sum_A \sum_j [Y^{(A)}_{(j)}, Z^{(A)}_{(j)}] \tag{5-1}$$

De plus pour chaque $A \neq 0$, *on peut choisir* $Z^{(A)}_{(j_A)} = Z^{(o)}_{(j_A)}$ *pour un indice* j_A.

On a posé dans cet énoncé $\partial_j^{(A)} = \partial/\partial x^{(A)j}$ dans la carte $(x^{(A)j})$.

a) Si $X \in L_0^*$ est à support $S(X) \subset U'$, il existe $t \in T^2$, à support compact $S(t) \subset U'$, tel que $X = \delta t$. Nous allons raisonner par suite sur les tenseurs t de T^2 à supports compacts contenus dans U′.

Soit $(x^{(o)j}) = (x^j)$ une carte canonique arbitraire de domaine U′ et soient $Z^{(o)}_{(j)} \in L_0^*$, n vecteurs à supports $S(Z^{(o)}_{(j)}) \subset U$ tels que $Z^{(o)}_{(j)}|_{U'} = \partial_j$. Considérons la paire d'indices distincts (1,2) et montrons qu'il existe un tenseur $u \in T^2$, à support compact $S(u) \subset U'$, de la forme :

$$u = u^{12} \partial_1 \wedge \partial_2 \tag{5-2}$$

vérifiant :

$$\int_{U'} u^{12} \eta_{U'} \neq 0 \tag{5-3}$$

et tel que :

$$u = -\sum_j Y^{(1)}_{(j)} \wedge Z^{(1)}_{(j)} \qquad (Y^{(1)}_{(j)}, Z^{(1)}_{(j)} \in L^*_0) \tag{5-4}$$

où $S(Y^{(1)}_{(j)}) \subset U'$, $S(Z^{(1)}_{(j)}) \subset U$ et $Z^{(1)}_{(j)}|_{U'} = \partial^{(1)}_j$, pour une carte canonique convenable $(x^{(1)j}) = (x^{j'})$ de domaine U'.

Donnons-nous à cet effet, dans une carte canonique encore indéterminée $(x^{j'})$ de domaine U', une fonction $u^{1'2'}$, à support compact $S(u^{1'2'}) \subset U'$, telle que :

$$\int_{U'} u^{1'2'} \eta_{U'} = 0 \tag{5-5}$$

Relions les cartes canoniques (x^j) et $(x^{j'})$ par des formules du type:

$$x^1 = x^{1'} . \varphi(x^{3'}), x^2 = x^{2'}, x^3 = \psi(x^{3'}), x^4 = x^{4'}, \ldots, x^n = x^{n'} \tag{5-6}$$

Le jacobien correspondant s'écrit :

$$J = \varphi . \psi'$$

La fonction ψ étant choisie de façon que ψ' soit $\neq 0$ sur U, on prendra :

$$\varphi = \frac{1}{\psi'}$$

de façon que le jacobien J soit égal à 1. On en déduit que le tenseur :

$$u = u^{1'2'} \partial_{1'} \wedge \partial_{2'}$$

à support $S(u) \subset U'$ peut s'écrire :

$$u = u^{12} \partial_1 \wedge \partial_2$$

avec :

$$u^{12} = \psi'^{-1} u^{1'2'}$$

Le choix de ψ permet d'assurer (5-3). Appliquons à $u = u^{1'2'} \partial_{1'} \wedge \partial_{2'}$ le lemme préliminaire : on peut se donner n champs de vecteurs $Z^{(1)}_{(j)} \in L^*_0$, à supports $S(Z^{(1)}_{(j)}) \subset U$, tels que $Z^{(1)}_{(j)}|_{U'} = \partial_{j'}$. Il existe alors n champs de vecteurs $Y^{(1)}_{(j)} \in L^*_0$, à supports $S(Y^{(1)}_{(j)}) \subset U'$, tels que l'on ait (5-4).

On note que d'après (5-6) $\partial_2 = \partial_{2'}$ et que *l'on peut donc choisir* $Z^{(1)}_{(2)} = Z^{(0)}_{(2)}$.

b) Soit maintenant $t \in T^2$ un 2-tenseur arbitraire à support compact $S(t) \subset U'$. Pour le tenseur $t^{12}\, \partial_1 \wedge \partial_2$, il existe une constante k telle que :

$$\int_{U'} (t^{12} - ku^{12})\, \eta_{U'} = 0$$

D'après le lemme préliminaire, il existe n champs de vecteurs $Y^{(0)}_{(j)} \in L^*_0$, à supports $S(Y^{(0)}_{(j)}) \subset U'$, indépendants de t, tels que

$$t^{12}\partial_1 \wedge \partial_2 = -\sum_j Y^{(0)}_{(j)} \wedge Z^{(0)}_{(j)} - k \sum_j Y^{(1)}_{(j)} \wedge Z^{(1)}_{(j)}$$

En appliquant ce résultat à chaque composante t^{ij} $(i < j)$ de t dans la carte initiale on obtient :

$$t = -\sum_A \sum_j (Y^{(A)}_{(j)} \wedge Z^{(A)}_{(j)}) \tag{5-7}$$

pour des vecteurs $Y^{(A)}_{(j)}$ satisfaisant aux hypothèses du lemme. On en déduit (5-1) pour $X = \delta t$.

3. Idéaux de L.

6. *Idéaux dérivés.*

Soit (W, η) une variété unimodulaire, L (resp. L_0) l'algèbre de Lie des t. i. unimodulaires (resp. à supports compacts) de (W, η).

a) Etudions l'idéal dérivé de L^* et celui de L. Introduisons un recouvrement $\{U_\nu\}_{\nu \in I}$ de W par des domaines contractiles vérifiant la condition (C) suivante :

(C) Il existe une partition de I en une collection finie de sous-ensemble I_μ $(\mu = 1, \ldots, r)$ telle que, pour chaque μ, les domaines pour lesquels $\nu \in I_\mu$ soient deux à deux disjoints (Palais).

Soit $\{\varphi_\nu\}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement et posons :

$$\tau_\mu = \sum_{\nu \in I_\mu} \varphi_\nu$$

Soit X un élément de L^*. Il existe un tenseur $t \in T^2$ tel que $X = \delta t$. Posons $t_\mu = \tau_\mu t$, $X_\mu = \delta t_\mu$. Pour μ fixé, considérons les domaines $\{U_\nu\}_{\nu \in I_\mu}$ deux à deux disjoints ; en appliquant à $t_{\mu|U_\nu}$ le lemme principal, on voit que X_μ est la somme d'un nombre fini de crochets $[Y^{(A)}_{(j)}, Z^{(A)}_{(j)}]$ d'éléments de L^*, où $S(Y^{(A)}_{(j)})$, $S(Z^{(A)}_{(j)}) \subset \cup_{I_\mu} U_\nu$, donc appartient à $[L^*, L^*]$; X somme finie d'éléments X_μ de $[L^*, L^*]$ appartient à cet idéal. On en déduit

$$[L^*, L^*] = L^*$$

Comme

$$[L, L] \subset L^* = [L^*, L^*] \subset [L, L]$$

on a $[L, L] = L^*$. Nous énonçons :

PROPOSITION 1. – *Les algèbres de Lie* L *et* L^* *admettent* L^* *pour idéal dérivé.*

On en déduit, comme nous l'avons vu, que si W est non compacte, L^c admet L pour idéal dérivé.

b) Soit X un élément de L_0^* ; on a $X = \delta t$ où $S(t)$ est compact. Posons :

$$t_\nu = \varphi_\nu t \qquad X_\nu = \delta t_\nu$$

t étant à support compact, il existe seulement un nombre fini de t_ν qui sont non nuls. Pour ν fixé, en appliquant le lemme principal à X_ν, on voit que X_ν est somme finie de crochets d'élément de L_0^*, donc appartient à $[L_0^*, L_0^*]$. Il en est donc de même pour X et

$$[L_0^*, L_0^*] = L_0^*$$

On en déduit :

PROPOSITION 2. – *Les algèbres de Lie* L_0 *et* L_0^* *admettent* L_0^* *pour idéal dérivé.*

7. *Fermés de nullité et idéaux canoniques associés.*

a) Soit M un sous-espace vectoriel de L. Nous appelons *fermé de nullité* de M, et notons $n(M)$, l'ensemble fermé f des points x de W tels que $X(x) = 0$ pour tout X de M ; Cf est l'ouvert complémentaire. L'espace M est dit transitif en $x_0 \in Cf$ si les valeurs en x_0 des éléments de M engendrent l'espace vectoriel tangent en x_0 à W ; M est transitif sur un ouvert de W s'il est transitif en tout point de cet ouvert. On vérifie immédiatement (et cela résultera du lemme suivant) que L_0^* est transitive sur W.

Etant donné un fermé f de W, considérons le sous-espace $I_c(f)$ de L_0^* défini par les éléments X tels que $X = \delta t$, où $t \in T^2$ est à support compact $S(t) \subset Cf$. Si $X \in I_c(f)$ et si $Y \in L$, on a

$$[X, Y] = -\delta(X \wedge Y)$$

avec

$$S(X \wedge Y) \subset S(X) \subset S(t) \subset Cf$$

et $I_c(f)$ est un idéal de L. Si X est un élément de $I_c(f)$, on a $S(X) \subset Cf$ et il en résulte que $f \subset n(I_c(f))$; d'autre part si $x_0 \in Cf$, on peut trouver $t \in T^2$, à support compact $S(t) \subset Cf$, tel que $X = \delta t$ soit $\neq 0$ en x_0 ; on a donc $Cf \subset Cn(I_c(f))$ et par suite $n(I_c(f)) = f$.

Ainsi $I_c(f)$ *est un idéal de* L *admettant* f *comme fermé de nullité ; nous l'appelons l'idéal canonique associé à* f.

b) Nous nous proposons d'établir le lemme suivant :

LEMME. – *Soit* M [*avec* $n(M) = f$] *un sous-espace vectoriel de* L *invariant par* $I_c(f)$.

Si $x_0 \in Cf$, *on peut trouver des domaines contractiles* U, U′ *de* W, *avec* $x_0 \in U'$, $\bar{U}' \subset U \subset Cf$, *tels que, si* (x^i) *est une carte canonique de domaine* U′, $[M, I_c(f)]$ *contienne* n *vecteurs* $Z_{(j)} \in L_0^*$ *à supports* $S(Z_{(j)}) \subset U$ *et vérifiant* $Z_{(j)}|_{U'} = \partial_j$.

Si $x_0 \in Cf$, il existe un élément T de M que nous fixons, tel que $T(x_0) \neq 0$. On sait qu'il existe alors une carte locale $(x^{i'})$ (non canonique a priori), de domaine V contenant x_0, telle que $T|_V = \partial_{1'}$. Comme $\delta T = 0$, on a dans cette carte $\partial_{1'} k_V(\eta) = 0$. Effectuons un changement de carte défini par des relations de la forme :

$$x^1 = x^{1'} \qquad x^\alpha = x^\alpha(x^{\beta'})$$

où $\alpha, \beta = 2, \ldots, n$. Par un tel changement, on peut construire une carte *canonique* (x^i) de domaine U′ (avec $x_0 \in U' \subset Cf$) tel que $T|_{U'} = \partial_1$.

Cela posé, en rétrécissant au besoin U′, donnons-nous un domaine contractile U tel que $\bar{U}' \subset U \subset Cf$. Soit d'abord $t_{(\alpha)} \in T^2$ un tenseur à support compact $S(t_{(\alpha)}) \subset U$ tel que :

$$t_{(\alpha)}|_{U'} = -\frac{(x^1)^2}{2}\,\partial_1 \wedge \partial_\alpha$$

Le vecteur $X_{(\alpha)} = \delta t_{(\alpha)}$ est un élément de $I_c(f)$ et il est aisé de calculer les composantes dans la carte (x^i) de la restriction de $X_{(\alpha)}$ à U'. On a :

$$X^{\alpha}_{(\alpha)} = x^1 \qquad X^i_{(\alpha)} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq \alpha$$

On a donc :

$$X_{(\alpha)}|_{U'} = x^1\,\partial_\alpha$$

Nous pouvons introduire le vecteur à support compact $S(Z_{(\alpha)}) \subset U$:

$$Z_{(\alpha)} = [T\,,X_{(\alpha)}] \tag{7-1}$$

Ce vecteur appartient par construction à $[M\,,I_c(f)]$ et est tel que :

$$Z_{(\alpha)}|_{U'} = \partial_\alpha$$

Considérons maintenant un tenseur $t_{(1)} \in T^2$, à support compact $S(t_{(1)}) \subset U$, tel que :

$$t_{(1)}|_{U'} = x^1 x^2\,\partial_1 \wedge \partial_2$$

Le vecteur $X_{(1)} = \delta t_{(1)}$ est un élément de $I_c(f)$ et les composantes, dans la carte canonique (x^i), de la restriction de $X_{(1)}$ à U' s'écrivent :

$$X^1_{(1)} = x^1 \qquad X^2_{(1)} = -\,x^2 \qquad X^a_{(1)} = 0 \quad \text{pour} \quad a = 3, \ldots, n$$

On a donc :

$$X_{(1)}|_{U'} = x^1\,\partial_1 - x^2\,\partial_2$$

Nous introduisons le vecteur $Z_{(1)}$, à support compact $S(Z_{(1)}) \subset U$, défini par :

$$Z_{(1)} = [T\,,X_{(1)}] \tag{7-2}$$

Ce vecteur appartient à $[M\,,I_c(f)]$ et est tel que :

$$Z_{(1)}|_{U'} = \partial_1$$

Nous avons donc mis en évidence n vecteurs $Z_{(j)} \in [M, I_c(f)]$, à supports compacts $S(Z_{(j)}) \subset U$, tels que, pour la carte canonique (x^i),

$$Z_{(j)}|_{U'} = \partial_j$$

ce qui démontre le lemme. En particulier $[M\,,I_c(f)]$ est *transitif* sur Cf.

c) Nous pouvons déduire de ce lemme et du lemme principal le théorème suivant :

THEOREME. – *Si* M *est un sous-espace vectoriel de* L *tel que* $n(\mathrm{M}) = f$ *et est invariant par* $\mathrm{I}_c(f)$, *on a*

$$\mathrm{I}_c(f) \subset \mathrm{M} \qquad [\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)] = \mathrm{I}_c(f)$$

En particulier $\mathrm{M} \neq \{0\}$ *ne peut être de dimension finie.*

En effet soit $x_0 \in \mathrm{C}f$ et U, U′ les domaines définis par le lemme précédent. Dans le lemme principal, prenons (les notations étant celles du lemme précédent) $(x^{(o)j}) = (x^j)$ et $\mathrm{Z}^{(o)}_{(j)} = \mathrm{Z}_{(j)}$. Pour $\mathrm{A} \neq 0$ fixé, les vecteurs $\mathrm{Z}^{(\mathrm{A})}_{(j)}$ introduits par le lemme principal sont tels que l'un d'entre eux $\mathrm{Z}^{(\mathrm{A})}_{(j\mathrm{A})}$ au moins peut être choisi appartenant à $[\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)]$. En prenant $\mathrm{T} = \mathrm{Z}^{(\mathrm{A})}_{(j\mathrm{A})}$ dans le lemme précédent et en adoptant la carte canonique $(x^{(\mathrm{A})j})$, on déduit du raisonnement du lemme que les $\mathrm{Z}^{(\mathrm{A})}_{(j)}$ peuvent tous être choisis appartenant à $[\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)]$.

Soit X un élément de L^*_0 tel que $\mathrm{S}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{U}'$. En vertu du lemme principal, il existe $n(\mathrm{C}^2_n + 1)$ vecteurs $\mathrm{Y}^{(\mathrm{A})}_{(j)} \in \mathrm{L}^*_0$, à supports

$$\mathrm{S}(\mathrm{Y}^{(\mathrm{A})}_{(j)}) \subset \mathrm{U}' \,,$$

tels que :

$$\mathrm{X} = \sum_{\mathrm{A}} \sum_{j} \,[\mathrm{Y}^{(\mathrm{A})}_{(j)}\,,\mathrm{Z}^{(\mathrm{A})}_{(j)}]$$

On note que pour chaque $\mathrm{Y}^{(\mathrm{A})}_{(j)}$, il existe un tenseur $t^{(\mathrm{A})}_{(j)} \in \mathrm{T}^2$, à support compact $\mathrm{S}(t^{(\mathrm{A})}_{(j)}) \subset \mathrm{U}'$, tel que $\mathrm{Y}^{(\mathrm{A})}_{(j)} = \delta t^{(\mathrm{A})}_{(j)}$ et que par suite $\mathrm{Y}^{(\mathrm{A})}_{(j)} \in \mathrm{I}_c(f)$. Ainsi X appartient à $[\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)]$.

Soit maintenant $t \in \mathrm{T}^2$ un 2-tenseur à support compact $\mathrm{S}(t) \subset \mathrm{C}f$ et soit $\mathrm{X} = \delta t$ l'élément correspondant de $\mathrm{I}_c(f)$. Introduisons un recouvrement fini convenable $\{\mathrm{U}_\nu\}$ d'un voisinage ouvert de $\mathrm{S}(t)$ et une partition $\{\varphi_\nu\}$ différentiable de l'unité subordonnée. Si on pose $t_\nu = \varphi_\nu t$, $\mathrm{X}_\nu = \delta t_\nu$, on a $\mathrm{S}(\mathrm{X}_\nu) \subset \mathrm{U}_\nu$ et d'après le résultat précédent X_ν appartient à $[\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)]$. Le vecteur X, somme finie d'éléments de $[\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)]$ appartient à $[\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)]$.

On a donc

$$\mathrm{I}_c(f) \subset [\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)]$$

et $\mathrm{I}_c(f)$ étant un idéal :

$$[\mathrm{M}\,,\mathrm{I}_c(f)] \subset \mathrm{I}_c(f)$$

Nous avons donc établi que $[\mathrm{M}, \mathrm{I}_c(f)] = \mathrm{I}_c(f)$; M étant invariant par $\mathrm{I}_c(f)$, l'inclusion $\mathrm{I}_c(f) \subset \mathrm{M}$ en résulte ; $\mathrm{I}_c(f)$ étant de dimension infinie pour $f \neq \mathrm{W}$, M est de dimension infinie.

Pour $f = \phi$, on a $\mathrm{I}_c(f) = \mathrm{L}_0^*$. Il résulte du théorème :

Corollaire. – *Tout sous-espace vectoriel* M *de* L *invariant par* L_0^* *et tel que* $n(\mathrm{M}) = \phi$ *vérifie :*

$$\mathrm{L}_0^* \subset \mathrm{M} \qquad [\mathrm{M}, \mathrm{L}_0^*] = \mathrm{L}_0^*$$

Un fermé f de W étant donné, prenons $\mathrm{M} = \mathrm{I}_c(f)$, idéal de L admettant f comme fermé de nullité. On a :

$$[\mathrm{I}_c(f), \mathrm{I}_c(f)] = \mathrm{I}_c(f) \tag{7-3}$$

8. *Idéaux et idéaux canoniques – Semi-simplicité.*

Soit A une sous-algèbre de Lie de L *contenant* L_0^*.

a) Prenons pour M un idéal I de A tel que $n(\mathrm{I}) = f$; I est invariant par L_0^*, donc par $\mathrm{I}_c(f)$. On déduit du théorème du § 7.

Proposition 1. – *Si* I *est un idéal de* A *tel que* $n(\mathrm{I}) = f$, *on a*

$$\mathrm{I}_c(f) \subset \mathrm{I} \qquad [\mathrm{I}, \mathrm{I}_c(f)] = \mathrm{I}_c(f)$$

En particulier $\mathrm{I} \neq \{0\}$ *ne peut être de dimension finie et* I *est transitif sur* $\mathrm{C}f$.

b) Soit I [avec $n(\mathrm{I}) = f$] un idéal de A, J [avec $n(\mathrm{J}) = f'$] un idéal de I. On a nécessairement $f \subset f'$ et par suite $\mathrm{I}_c(f') \subset \mathrm{I}_c(f)$. D'après la proposition 1, J est invariant par $\mathrm{I}_c(f)$, donc par $\mathrm{I}_c(f')$ et le théorème du § 7 s'applique à J.

Proposition 2. – *Si* J *est un idéal d'un idéal* I *de* A *tel que* $n(\mathrm{J}) = f'$, *on a :*

$$\mathrm{I}_c(f') \subset \mathrm{J} \qquad [\mathrm{J}, \mathrm{I}_c(f')] = \mathrm{I}_c(f')$$

En particulier $\mathrm{J} \neq \{0\}$ *ne peut être de dimension finie et* J *est transitif sur* $\mathrm{C}f'$.

c) Supposons J *abélien.* Comme $\mathrm{I}_c(f') \subset \mathrm{J}$, on a

$$[\mathrm{J}, \mathrm{I}_c(f')] = \{0\}$$

et il résulte de la proposition 2 :

$$\mathrm{I}_c(f') = \{0\}$$

soit $f' = \mathrm{W}$. Ainsi l'idéal abélien J de I est nécessairement réduit à $\{0\}$. Avec la définition de la semi-simplicité d'une algèbre de Lie (de dimension finie ou infinie) rappelée dans [3], on obtient :

THEOREME. – *Tout idéal* I *d'une sous-algèbre de Lie* A *de* L *contenant* L_0^* *est semi-simple. En particulier* L, L^*, L_0, L_0^* *et tous leurs idéaux sont semi-simples.*

9. *Centralisateur d'un idéal. Idéaux supplémentaires.*

Soit I un idéal de la sous-algèbre A, Z(I) le centralisateur de I dans A. L'idéal $\mathrm{I} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{I})$ de A est abélien, donc nul et l'on a $\mathrm{I} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{I}) = \{0\}$.

a) Nous allons établir la proposition suivante :

PROPOSITION. – *Soit* I *un idéal de* A *tel que* $n(\mathrm{I}) = f$. *Le centralisateur* Z(I) *de* I *dans* A *coïncide avec l'ensemble des éléments de* A *qui s'annulent en tout point de* $\overline{\mathrm{C}f}$.

En effet désignons par I' l'ensemble des éléments précédents. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{I}_c(f)$, $\mathrm{Z} \in \mathrm{Z}(\mathrm{I})$; comme $\mathrm{I}_c(f) \subset \mathrm{I}$, on a :

$$[\mathrm{Z}\,,\mathrm{X}] = 0 \tag{9-1}$$

Soit x_0 un point de $\mathrm{C}f$ et soit (x^i) une carte canonique de domaine U contenant x_0 ; (9-1) s'écrit sur U.

$$[\mathrm{Z}\,,\mathrm{X}]^i_{\mathrm{U}} = \mathrm{Z}^r\,\partial_r\,\mathrm{X}^i - \mathrm{X}^r\,\partial_r\,\mathrm{Z}^i \tag{9-2}$$

Si $\mathrm{X} = \delta t$, où $t \in \mathrm{T}^2$ est à support compact $\mathrm{S}(t) \subset \mathrm{C}f$, on peut choisir t tel qu'en x_0 (voir § 10)

$$\mathrm{X}^i_0 = -\,\partial_r(t^{ri})_0 = 0 \qquad \text{dét}\,(\partial_r\,\mathrm{X}^i)_0 = \text{dét}\,(-\,\partial_{rs}\,t^{si})_0 \neq 0$$

(9-2) se réduit en x_0 à :

$$\mathrm{Z}^r_0(\partial_r\,\mathrm{X}^i)_0 = 0 \tag{9-3}$$

et il vient $\mathrm{Z}(x_0) = 0$. On en déduit $\mathrm{Z}\,|_{\mathrm{C}f} = 0$ et par suite $\mathrm{Z}\,|_{\overline{\mathrm{C}f}} = 0$. Ainsi :

$$\mathrm{Z}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}'$$

Inversement soit $X \in I$, $Y \in I'$. On a localement :

$$[X, Y]^i = X^r \partial_r Y^i - Y^r \partial_r X^i \tag{9-4}$$

D'après les propriétés de Y, on voit sur (9-4) que l'on a $[X, Y]|_{Cf} = 0$, donc que :

$$[X, Y]_{\overline{Cf}} = 0$$

Soit $x \in \overset{\circ}{f}$ un point intérieur à f. D'après les propriétés de X, on voit sur (9-4) que $[X, Y]_x = 0$.

Par suite :

$$[X, Y]_{\overset{\circ}{f}} = 0$$

Ainsi $[X, Y] = 0$ sur W et $Y \in Z(I)$. On a donc

$$I' \subset Z(I)$$

ce qui démontre la proposition.

b) Nous allons établir le théorème suivant :

THEOREME. — *Un idéal non trivial de* A *n'admet jamais un idéal supplémentaire dans* A. *Il en est ainsi en particulier pour* $A = L, L^*, L_0, L_0^*$.

Supposons que I admette un idéal B supplémentaire de I dans A. On a :

$$A = I \oplus B\,, \tag{9-5}$$

avec $[B, I] = \{0\}$, donc $B \subset Z(I)$. En décomposant $Z(I)$ selon (9-5), il vient :

$$Z(I) = J \oplus B \qquad (J \subset I)$$

Comme $I \cap Z(I) = \{0\}$, on a $J = \{0\}$ et $B = Z(I)$. Ainsi :

$$A = I \oplus Z(I)$$

Si $f = n(I)$, nous voyons que tout élément de A doit s'annuler sur $f \cap \overline{Cf}$. Mais A contient L_0^* transitif sur W. Il en résulte

$$f \wedge \overline{Cf} = \phi\,. \tag{9-6}$$

W étant connexe, (9-5) entraîne que l'un des fermés f ou $\overline{Cf}$ est nécessairement vide. Si $f = \phi$, $Z(I) = \{0\}$ et $I = A$. Si $\overline{Cf} = \phi$, $f = W$ et $I = \{0\}$. Dans les deux cas, I est un idéal trivial de A.

4. Dérivations et premiers groupes de cohomologie.

10. *Caractère local des dérivations de* L, L*.

Nous nous proposons, au cours de cette section, de déterminer les dérivations des algèbres de Lie L^c, L et L*. Une dérivation de l'algèbre de Lie L est une application linéaire $D : L \to L$ telle que, pour tout $X, Y \in L$, on ait :

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \tag{10-1}$$

Mêmes définitions pour une dérivation D* de L*, ou D^c de L^c.

a) Soit D une dérivation de L, X un élément de L tel que, sur un ouvert U de W, on ait $X|_U = 0$. Si Y est un autre élément de L tel que $S(Y) \subset U$, on a $[X, Y] = 0$, donc $D[X, Y] = 0$; d'autre part $[X, DY]_U = 0$, donc d'après (10-1) $[DX, Y]_U = 0$. Ainsi :

$$[DX, Y] = 0 \tag{10-2}$$

Choisissons pour Y un élément $Y = \delta t$ de L_0^*, où $t \in T^2$ est à support compact $S(t) \subset U$. Soit x_0 un point arbitraire de U ; *on peut trouver un tenseur t satisfaisant la condition précédente et tel que :*

$$Y(x_0) = 0 \qquad j^1 Y(x_0) \text{ régulier} \tag{10-3}$$

où $j^1 Y(x_0)$ est le 1-jet de Y au point x_0 ; nous retrouvons les conditions imposées à un élément de L_0^* au § 9, a.

Pour établir ce fait, considérons une carte canonique (x^i) de domaine V suffisamment petit contenant x_0 et telle que x_0 admette dans cette carte des coordonnées nulles. Introduisons sur V le tenseur t_V de composantes :

$$(t_V)^{ij} = \frac{1}{2} x^r x^s a_{rs}^{ij} \qquad (a_{rs}^{ij} = a_{sr}^{ij} = - a_{rs}^{ji}) \tag{10-4}$$

où les a_{rs}^{ij} sont les constantes définies à partir des éléments b_k^i d'une matrice constante B par les formules :

$$a_{rs}^{ij} = \delta_r^i b_s^j + \delta_s^i b_r^j - \delta_r^j b_s^i - \delta_s^j b_r^i \tag{10-5}$$

Nous prolongerons ensuite ce tenseur de façon que son support compact S(t) soit contenu dans U.

Pour le vecteur $Y = \delta t$, on a au point x de V :

$$Y^j(x) = -\frac{1}{2}(\delta_i^r x^s + \delta_i^s x^r)\, a_{rs}^{ij} = -x^s a_{is}^{ij}$$

et :

$$(\partial_k Y^j)(x) = -a_{ik}^{ij}$$

Or, d'après (10-5),

$$a_{ik}^{ij} = n\left(b_k^j - \frac{1}{n} b_i^i \delta_k^j\right)$$

Si nous choisissons la matrice B de façon que $B - 1/n$ (tr. B). I soit une matrice régulière, on voit que les conditions (10-3) sont bien satisfaites au point x_0. Il résulte alors de (10-2) écrite au point x_0 que $(DX)(x_0) = 0$. Ainsi nécessairement $DX|_U = 0$.

Le même raisonnement s'applique automatiquement aux dérivations de L^*, L_0, L_0^* et à celles de L^c. Nous avons ainsi établi :

PROPOSITION 1. – *Toute dérivation de* L^c, L, L^*, L_0, L_0^* *est un opérateur local.*

b) Soit D une dérivation de L. Nous avons établi (§ 6) que $L^* = [L, L]$. Or d'après (10-1) :

$$D[L, L] \subset [DL, L] \subset [L, L]$$

Il en résulte que la restriction à L^* d'une dérivation D de L est une dérivation D^* de L^*.

Inversement soit D^* une dérivation de L^* ; si $X \in L$ introduisons $Y \in L^*$ tel que $X|_U = Y|_U$ sur un domaine contractile U de W. D'après son caractère local, toute dérivation D dont la restriction à L^* coïncide avec D^* est nécessairement tel que $DX|_U = D^*Y|_U$. D'après le caractère local de D^*, on définit ainsi une dérivation D nécessairement unique de L dont la restriction à L^* coïncide avec D^*.

Le même raisonnement s'applique aux dérivations de L_0 et L_0^*. Nous pouvons énoncer

PROPOSITION 2. – *L'espace des dérivations de* L^* *(resp.* L_0, L_0^**) est l'espace des restrictions à* L^* *(resp.* L_0, L_0^**) des dérivations de* L. *Il est isomorphe à l'espace des dérivations de* L.

Il nous suffit donc de déterminer les dérivations de L pour connaître par restriction celles de L^*, L_0 et L_0^*.

11. *Détermination d'un vecteur sur* U.

Dans ce paragraphe et les deux suivants, nous nous donnons un domaine contractile U de W et une carte canonique (x^i) de domaine U, fixée à des translations éventuelles près ; la forme η induit sur U la n-forme :

$$\eta_U = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

qui définit sur U une structure unimodulaire. $T^2(U)$ est l'espace des 2-tenseurs contravariants antisymétriques de U. Nous notons L(U) [resp. $L^c(U)$] l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur U qui préservent la forme η_U [resp. la reproduisent à un facteur constant près]. Pour que $X \in L(U)$, il faut et il suffit que $\delta X = 0$; par suite L(U) contient les vecteurs :

$$\partial_i \, , x^i \, \partial_j \text{ (avec } i \neq \partial_j) \quad , \quad x^i \, \partial_i - x^j \, \partial_j \tag{11-1}$$

Nous notons que si $X \in L(U)$, il existe $t \in T^2(U)$ tel que $X = \delta t$

Nous allons établir le lemme suivant :

Lemme. – *Soit* D_U *une dérivation de* L(U). *Si* $X \in L(U)$ *est un vecteur dont les composantes s'expriment par des polynômes de degré 1 en les coordonnées canoniques, il existe sur* U *un vecteur unique* Z *tel que :*

$$D_U(X) = [Z \, , X] \tag{11-2}$$

Le vecteur Z appartient à $L^c(U)$.

a) En effet montrons d'abord qu'il existe un vecteur unique Z sur U tel que :

$$\begin{cases} D_U(\partial_i) = [Z \, , \partial_i] \quad , \quad D_U(x^i \, \partial_j) = [Z \, , x^i \, \partial_j] \; i \neq j \\ D_U(x^i \, \partial_i - x^j \, \partial_j) = [Z \, , x^i \, \partial_i - x^j \, \partial_j] \end{cases} \tag{11-3}$$

Posons :

$$D_U(\partial_i) = \sum_h D_i^h \, \partial_h$$

où les D_i^h sont les composantes de $D_U(\partial_i)$; D_U étant une dérivation, on déduit de $[\partial_i \, , \partial_j] = 0$.

$$[D_U(\partial_i) , \partial_j] + [\partial_i , D_U(\partial_j)] = 0$$

soit '

$$\left[\sum_h D_i^h \partial_h , \partial_j\right] + \left[\partial_i , \sum_h D_j^h \partial_h\right] = 0$$

ce qui s'écrit explicitement :

$$\sum_h (\partial_i D_j^h - \partial_j D_i^h) \partial_h = 0$$

On obtient ainsi :

$$\partial_i D_j^h = \partial_j D_i^h$$

Par suite il existe sur U des fonctions D^h telles que $D_i^h = \partial_i D^h$. Introduisons le vecteur :

$$\overline{Z} = - \sum_h D^h \partial_h$$

Il vient :

$$[\overline{Z} , \partial_i] = - \left[\sum_h D^h \partial_h , \partial_i\right] = \sum_h \partial_i D^h \partial_h = D_U(\partial_i)$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire *l'application linéaire de* L(U) *dans l'espace des vecteurs de* U définie par :

$$D_U^1 : X \in L(U) \to D_U^1(X) = D_U(X) - [\overline{Z} , X]$$

Cette application vérifie $D_U^1(\partial_i) = 0$ et, d'après l'identité de Jacobi, pour X, Y $\in$ L(U) elle satisfait la relation :

$$D_U^1[X , Y] = [D_U^1 X , Y] + [X , D_U^1 Y] \tag{11-4}$$

b) Posons :

$$D_U^1(x^i \partial_j) = \sum_h D^i{}_j{}^h \partial_h \quad (i \neq j) \tag{11-5}$$

Nous allons montrer que les fonctions $D^i{}_j{}^h$ $(i \neq j)$ sont nécessairement des *constantes*. On a en effet :

$$[\partial_k , x^i \partial_j] = \delta_k^i \partial_j$$

Pour $i \neq j$, appliquons D_U^1 aux deux membres de cette relation et tenons compte de (11-4). Il vient :

$$D^1_U[\partial_k , x^i \partial_j] = [D^1_U(\partial_k) , x^i \partial_j] + [\partial_k , D^1_U(x^i \partial_j)] = 0 \quad (i \neq j)$$

soit :

$$[\partial_k , D^1_U(x^i \partial_j] = 0 \quad (i \neq j)$$

On obtient ainsi :

$$\left[\partial_k , \sum_h D^i{}_j{}^h \partial_h\right] = \sum_h \partial_k D^i{}_j{}^h \partial_h = 0 \quad (i \neq j)$$

Ainsi $\partial_k D^i{}_j{}^h = 0$ et les $D^i{}_j{}^h$ introduits par (11-5) sont des *constantes.*

Donnons-nous deux paires d'indices distincts $i \neq j$ et $k \neq l$ et considérons le crochet :

$$[x^i \partial_j , x^k \partial_l] = \delta^k_j x^i \partial_l - \delta^i_l x^k \partial_j$$

Par application de D^1_U, il vient :

$$D^1_U(\delta^k_j x^i \partial_l - \delta^i_l x^k \partial_j) = \sum_h D^i{}_j{}^h [\partial_h , x^k \partial_l] + \sum_h D^k{}_l{}^h [x^i \partial_j , \partial_h]$$

soit :

$$D^1_U(\delta^k_j x^i \partial_l - \delta^i_l x^k \partial_j) = D^i{}_j{}^k \partial_l - D^k{}_l{}^i \partial_j \tag{11-6}$$

Dans (11-6) prenons $j \neq k$; on obtient :

$$- \delta^i_l \, \Sigma \, D^k{}_j{}^h \partial_h = D^i{}_j{}^k \partial_l - D^k{}_l{}^i \partial_j \tag{11-7}$$

Si l est choisi $\neq i, j$, on obtient :

$$D^i{}_j{}^k = 0 \quad (j \neq k) \tag{11-8}$$

et la formule (11-7) se réduit à $(j \neq k)$:

$$\delta^i_l D^k{}_j{}^j = D^k{}_l{}^i = \delta^i{}_l D^k{}_i{}^i$$

On a donc :

$$D^k{}_i{}^i = D^k{}_j{}^j$$

Par suite il existe des constantes d^k telles que pour tout i, on ait :

$$D^k{}_i{}^i = d^k \tag{11-9}$$

Ainsi d'après (11-8), (11-9), on a :

$$D^1_U(x^i \partial_j) = d^i \partial_j \quad (i \neq j) \tag{11-10}$$

D'autre part en faisant $j = k$ et $i = l$ dans (11-6), il vient :

$$D^1_U(x^i\,\partial_i - x^j\,\partial_j) = d^i\,\partial_i - d^j\,\partial_j \tag{11-11}$$

Introduisons sur U le vecteur :

$$Z = \overline{Z} + \sum_h d^h\,\partial_h$$

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} [\Sigma\, d^h\,\partial_h\,,\partial_i] = 0 \qquad [\Sigma\, d^h\,\partial_h\,, x^i\,\partial_j] = d^i\,\partial_j \qquad (i \neq j) \\ \qquad [\Sigma\, d^h\,\partial_h\,, x^i\,\partial_i - x^j\,\partial_j] = d^i\,\partial_i - d^j\,\partial_j \end{array}\right.$$

Il résulte ainsi de (11-10) et (11-11) que l'on a les relations (11-3).

Le vecteur Z ainsi mis en évidence est caractérisé par (11-3) de manière unique. En effet s'il existait deux vecteurs Z, Z' satisfaisant (11-3), leur différence $T = Z' - Z$ vérifierait

$$[T\,,\partial_i] = 0 \qquad [T\,, x^i\,\partial_j] = 0 \quad (i \neq j)$$

On en déduit successivement :

$$\partial_i\,T^h = 0 \quad \text{ou} \quad T^h = \text{const.}$$

puis :

$$T^h\,\partial_h(x^i\,\delta^r_j) = T^i\,\delta^r_j = 0$$

c'est-à-dire $T^i = 0$. Ainsi $Z' = Z$.

c) Soit $X \in L(U)$ un vecteur dont les composantes s'expriment par des polynômes de degré 1 en les coordonnées canoniques. On a :

$$X = \sum_i a^i\,\partial_i + \sum_{i,j} b^j_i x^i\,\partial_j$$

où les a^i, b^j_i sont des constantes, soit :

$$X = \sum_i a^i\,\partial_i + \sum_{i\neq j} b^j_i x^i\,\partial_j + \sum_i c^i x^i\,\partial_i \tag{11-12}$$

où l'on a posé $b^i_i = c^i$. Comme $X \in L(U)$, on a $\delta X = 0$, soit :

$$\sum_i \partial_i\,X^i = \sum_i c^i = 0$$

En choisissant un indice j, on peut mettre (11-12) sous la forme :

$$X = \sum_i a^i \partial_i + \sum_{i \neq j} b^j_i x^i \partial_j + \sum_i c^i (x^i \partial_i - x^j \partial_j)$$

Ainsi X s'exprime par une combinaison linéaire à coefficients constants des vecteurs (11-1) de L(U). Des formules (11-3) résulte la relation (11-2).

Pour que [Z , X] appartienne à L(U) il faut et il suffit que :

$$[Z , X]^i = Z^r \partial_r X^i - X^r \partial_r Z^i = \partial_r (Z^r X^i - X^r Z^i) - \partial_r Z^r . X^i$$

vérifie :

$$\partial_i [Z , X]^i = 0$$

Ainsi pour tout $X \in L(U)$, donné par (11-12), on doit avoir :

$$\partial_i \partial_r Z^r . X^i = 0$$

On obtient ainsi sur U :

$$\partial_i \partial_r Z^r = 0 \qquad \partial_r Z^r = \text{const.}$$

ce que nous écrirons :

$$\delta Z = - K_Z$$

où K_Z est une constante. En étoilant les deux membres, il vient :

$$d * Z = K_Z \eta$$

ce qui exprime, d'après (3-3), que $Z \in L^c(U)$ et notre lemme est démontré.

12. *Cas de polynômes de degré 3.*

Nous nous proposons de déduire du lemme du § 11 le lemme suivant :

LEMME. – *Si* $X \in L(U)$ *est un vecteur dont les composantes s'expriment par des polynômes de degré 3 en les coordonnées canoniques, on a pour le vecteur Z déterminé par le lemme du* § 11 :

$$D_U(X) = [Z , X] \tag{12-1}$$

En particulier pour un tenseur $t \in T^2(U)$ *dont les composantes s'expriment par des polynômes de degré 4, il vient :*

$$D_U(\delta t) = [Z\,,\delta t] \tag{12-2}$$

a) Z appartenant à $L^c(U)$, l'application $X \in L(U) \to [Z\,,X] \in L(U)$ est une dérivation de $L(U)$. Nous sommes ainsi conduits à introduire la dérivation de $L(U)$ définie par :

$$D_U^2 : X \in L(U) \to D_U^2(X) = D_U(X) - [Z\,,X] \in L(U)$$

Les vecteurs :

$$x^a x^b \partial_c \quad (a\,,b \neq c) \quad , \quad x^b x^c \partial_c - \frac{(x^b)^2}{2} \partial_b \quad (b \neq c) \tag{12-3}$$

appartiennent à $L(U)$. Nous voulons d'abord établir :

$$D_U^2(x^a x^b \partial_c) = 0 \quad (a\,,b \neq c) \quad , \quad D_U^2\left(x^b x^c \partial_c - \frac{(x^b)^2}{2} \partial_b\right) = 0 \quad (b \neq c) \tag{12-4}$$

Posons à cet effet :

$$D_U^2(x^a x^b \partial_c) = \sum_h D_c^{abh} \partial_h \qquad (a\,,b \neq c) \tag{12-5}$$

On a :

$$[\partial_i\,, x^a x^b \partial_c] = \delta_i^a x^b \partial_c + \delta_i^b x^a \partial_c \qquad (a\,,b \neq c)$$

Par application de D_U^2 et compte-tenu du lemme du § 11, il vient :

$$D_U^2[\partial_i\,, x^a x^b \partial_c] = [\partial_i\,, D_U^2(x^a x^b \partial_c)] = 0$$

Soit, d'après (12-5),

$$\sum_h \partial_i D_c^{abh} \partial_h = 0 \qquad (a\,,b \neq c)$$

Ainsi les D_c^{abh} définis par (12-5) sont constantes.

Cela posé, donnons-nous les indices $(i\,,j)$ $(i \neq j)$ et

$$(a\,,b\,,c)\ (a\,,b \neq c)\ .$$

On a :

$$[x^i \partial_j\,, x^a x^b \partial_c] = \delta_j^a x^i x^b \partial_c + \delta_j^b x^i x^a \partial_c - \delta_c^i x^a x^b \partial_j$$

Par application de D_U^2 et compte-tenu de (12-5), il vient :

$$D_U^2(\delta_j^a x^i x^b \partial_c + \delta_j^b x^i x^a \partial_c - \delta_c^i x^a x^b \partial_j) = -D_c^{abi} \partial_j \tag{12-6}$$

Choisissons $i \neq c$. On obtient :

$$\delta_j^a \sum_h \mathrm{D}_c^{ibh} \partial_h + \delta_j^b \Sigma \mathrm{D}_c^{iah} \partial_h = - \mathrm{D}_c^{abi} \partial_j \tag{12-7}$$

En choisissant un indice $j \neq a, b$, il reste

$$\mathrm{D}_c^{abi} = 0 \quad \text{pour } i \neq c$$

La formule (12-7) se réduit donc à :

$$\delta_j^a \mathrm{D}_c^{ibc} + \delta_j^b \mathrm{D}_c^{iac} = 0$$

En choisissant un indice $j = a \neq b$, on obtient :

$$\mathrm{D}_c^{ibc} = 0$$

Nous avons donc établi que $\mathrm{D}_c^{abh} = 0$ $(a, b \neq c)$ et par suite la première relation (12-4).

Reprenons la formule (12-6) avec $i = c$ et $j = a = b$. On obtient :

$$\mathrm{D}_{\mathrm{U}}^2(2x^b x^c \partial_c - (x^b)^2 \partial_b) = 0$$

c'est-à-dire la seconde relation (12-4).

b) Considérons les vecteurs de L(U) dont les composantes sont des polynômes de degré 2 en les coordonnées canoniques. Compte-tenu du lemme du § 11, il suffit de considérer les vecteurs

$$\mathrm{X} = \sum_{a,b,i} b^i_{ab} x^a x^b \partial_i \quad (b^i_{ab} = b^i_{ba})$$

où les b^i_{ab} sont des constantes. On peut écrire :

$$\mathrm{X} = \sum_{a,b \neq i} b^i_{ab} x^a x^b \partial_i + 2 \sum_{i \neq b} c^i_b x^b x^i d_i + 2 \sum_b c^b_b (x^b)^2 \partial_b \tag{12-8}$$

où l'on a posé $b^i_{ib} = c^i_b$. Pour que X appartienne à L(U), il faut et il suffit que $\delta \mathrm{X} = 0$, c'est-à-dire :

$$\sum_b \Big(\sum_{i \neq b} c^i_b + 2 c^b_b \Big) x^b = 0$$

soit :

$$\sum_{i \neq b} c^i_b + 2 c^b_b = 0$$

(12-8) peut donc s'écrire :

$$X = \sum_{a,b \neq i} b^i_{ab} x^a x^b \partial_i + 2 \sum_{i \neq b} c^i_b \left(x^b x^i \partial_i - \frac{(x^b)^2}{2} \partial_b \right)$$

X est une combinaison linéaire des vecteurs (12-3) de L(U). Par suite tout vecteur de L(U) dont les composantes sont des polynômes de degré 2 est annulé par D^2_U.

c) Considérons maintenant les vecteurs de L(U) :

$$(12\text{-}9) \begin{cases} x^a x^b x^c \partial_d \ (a, b, c \neq d), \ x^b x^c x^d \partial_d - \dfrac{(x^b)^2}{2} x^c \partial_b \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (b, c \neq d, b \neq c) \\ (x^b)^2 x^c \partial_c - \dfrac{(x^b)^3}{3} \partial_b \ (b \neq c) \end{cases}$$

et montrons qu'ils sont annulés par D^2_U.

Posons à cet effet :

$$D^2_U(x^a x^b x^c \partial_d) = \sum_h D^{abch}_d \partial_h \ (a, b, c \neq d) \qquad (12\text{-}10)$$

On déduit de :

$$[\partial_i, x^a x^b x^c \partial_d] = \delta^a_i x^b x^c \partial_d + \delta^b_i x^c x^a \partial_d + \delta^c_i x^a x^b \partial_d$$

que

$$[\partial_i, D^2_U(x^a x^b x^c \partial_d)] = 0$$

soit d'après (12-10) :

$$\sum_h \partial_i D^{abch}_d \partial_h = 0$$

Ainsi les D^{abch}_d définis par (12-10) sont des constantes.

Cela posé, donnons-nous les indices (i, j) $(i \neq j)$ et (a, b, c, d) $(a, b, c \neq d)$. On a :

$$[x^i \partial_j, x^a x^b x^c \partial_d] = \delta^a_j x^i x^b x^c \partial_d + \delta^b_j x^i x^a x^c \partial_d + \delta^c_j x^i x^a x^b \partial_d - \\ - \delta^i_d x^a x^b x^c \partial_j$$

Par application de D^2_U et compte-tenu de (12-10), on a :

$$D^2_U(\delta^a_j x^i x^b x^c \partial_d + \delta^b_j x^i x^a x^c \partial_d + \delta^c_j x^i x^a x^b \partial_d - \delta^i_d x^a x^b x^c \partial_j) = \\ - D^{abci}_d \partial_j \quad (12\text{-}11)$$

Choisissons $i \neq d$. On obtient :

$$\delta_j^a \sum_h \mathrm{D}_d^{ibch} \partial_h + \delta_j^b \sum_h \mathrm{D}_d^{iach} \partial_h + \delta_j^c \sum_h \mathrm{D}_d^{iabh} \partial_h = -\mathrm{D}_d^{abci} \partial_j \qquad (12\text{-}12)$$

En choisissant un indice $j \neq a, b, c$, on obtient :

$$\mathrm{D}_d^{abci} = 0 \quad \text{pour } i \neq d$$

La formule (12-12) se réduit donc à :

$$\delta_j^a \mathrm{D}_d^{ibcd} + \delta_j^b \mathrm{D}_d^{iacd} + \delta_d^{iabd} = 0$$

En choisissant un indice $j = a \neq b, c$, il vient :

$$\mathrm{D}_d^{ibcd} = 0$$

Nous avons donc établi que $\mathrm{D}_d^{abch} = 0$ $(a, b, c \neq d)$ et par suite que les premiers vecteurs (12-9) sont annulés par D_U^2.

Reprenons la formule (12-11) avec $i = d$ et $j = a = b \neq c$. On obtient :

$$\mathrm{D}_\mathrm{U}^2(2x^b x^c x^d \partial_d - (x^b)^2 x^c \partial_b) = 0 \quad (b, c \neq d, b \neq c)$$

De même faisons dans la formule (12-11) $i = d$ et $j = a = b = c \neq d$. Il vient :

$$\mathrm{D}_\mathrm{U}^2(3(x^b)^2 x^d \partial_d - (x^b)^3 \partial_b) = 0 \quad (b \neq d)$$

Nous avons établi que tous les vecteurs (12-9) sont annulés par D_U^2.

d) Montrons enfin que les vecteurs de L(U) dont les composantes sont des polynômes de degré 3 en les coordonnées canoniques sont annulés par D_U^2. Il suffit de considérer les vecteurs

$$\mathrm{Y} = \sum_{a,b,c,i} b_{abc}^i x^a x^b x^c \partial_i$$

où les b_{abc}^i sont des constantes symétriques par rapport aux indices a, b, c. On peut écrire :

$$\mathrm{Y} = \sum_{a,b,c \neq i} b_{abc}^i x^a x^b x^c \partial_i + 3 \sum_{i,b,c} c_{bc}^i x^b x^c x^i \partial_i$$

où l'on a posé $b_{ibc}^i = c_{bc}^i$. Il suffit donc de s'intéresser aux vecteurs :

$$\mathrm{X} = \sum_{i,b,c} c_{bc}^i x^b x^c x^i \partial_i$$

Pour que X appartienne à L(U), il faut et il suffit que $\delta X = 0$, c'est-à-dire :

$$\sum_{i,b,c} c^i_{bc} x^b x^c + \sum_{i,b,c} c^i_{bc}(\delta^b_i x^c + \delta^b_i x^c) x^i = 0$$

soit :

$$\sum_{b,c} \left(\sum_i c^i_{bc} + c^b_{bc} + c^c_{cb}\right) x^b x^c = 0$$

On obtient ainsi :

$$\sum_i c^i_{bc} + c^b_{bc} + c^c_{cb} = 0 \tag{12-13}$$

Pour $b \neq c$, (12-13) peut s'écrire :

$$\sum_{i \neq b,c} c^i_{bc} + 2 c^b_{bc} + 2 c^c_{cb} = 0$$

et pour $b = c$:

$$\sum_{i \neq b} c^i_{bb} + 3 c^b_{bb} = 0$$

Il vient pour X :

$$X = \sum_{i, b \neq c} c^i_{bc} x^b x^c x^i \partial_i + \sum_{i,b} c^i_{bb} (x^b)^2 x^i \partial_i$$

soit :

$$X = \sum_{\substack{i \neq b,c \\ b \neq c}} c^i_{bc} x^b c^c x^i \partial_i + \sum_{b \neq c} (c^b_{bc} (x^b)^2 x^c \partial_b + c^c_{cb} (x^c)^2 x^b \partial_c) +$$

$$+ \sum_{i \neq b} c^i_{bb} (x^b)^2 x^i \partial_i + \sum_b c^b_{bb} (x^b)^3 \partial_b$$

Compte-tenu de (12-13), on obtient :

$$X = \sum_{\substack{i \neq b,c \\ b \neq c}} c^i_{bc}\left(x^b x^c x^i \partial_i - \frac{1}{2} (x^b)^2 x^c \partial_b\right) +$$

$$+ \sum_{b \neq c} c^c_{cb} ((x^c)^2 x^b \partial_c - (x^b)^2 x^c \partial_b) +$$

$$+ \sum_{i \neq b} c^i_{bb} \left((x^b)^2 x^i \partial_i - \frac{1}{3} (x^b)^3 \partial_b\right)$$

où le vecteur :

$$(x^c)^2 x^b \partial_c - (x^b)^2 x^c \partial_b = (2x^b x^c x^i \partial_i - (x^b)^2 x^c \partial_b) - \\ - (2x^b x^c x^i \partial_i - (x^c)^2 x^b \partial_c)$$

où $b \neq c$ (et b, $c \neq i$) est une combinaison linéaire de vecteurs (12-9). Ainsi X est une combinaison linéaire de vecteurs (12-9) et est annulé par D^2_U. Notre lemme se trouve donc démontré.

Remarque. — Pour $i \neq j$, on a manifestement :

$$[(x^i)^3 \partial_i - 3(x^i)^2 x^j \partial_j \,,\, (x^i)^2 \partial_j] = 5(x^i)^4 \partial_j$$

où les deux facteurs du crochet appartiennent à L(U) ; D^2_U étant une dérivation de L(U) :

$$5 D^2_U((x^i)^4 \partial_j) = [D^2_U((x^i)^3 \partial_i - 3(x^i)^2 x^j \partial_j) \,,\, (x^i)^2 \partial_j] + \\ + [(x^i)^3 \partial_i - 3(x^i)^2 x^j \partial_j \,,\, D^2_U((x^i)^2 \partial_j]$$

On déduit ainsi du lemme :

$$D^2_U((x^i)^4 \partial_j) = 0 \quad (i \neq j) \tag{12-14}$$

13. *Dérivation de* L(U).

a) Soit $x_0 \in U$. On peut supposer, par translation sur les coordonnées canoniques, que x_0 est l'origine de ces coordonnées. Nous nous proposons d'établir le lemme suivant :

LEMME. — *Soit $t \in T^2(U)$ un tenseur tel que son 4-jet $j^4(t)$ (x_0) en x_0 soit nul, c'est-à-dire tel que le 4-jet de chacune de ses composantes soit nul en x_0. Alors :*

$$D^2_U(\delta t)(x_0) = 0 \tag{13-1}$$

Il suffit d'établir (13-1) pour un tenseur de la forme $t = t^{12} \partial_1 \wedge \partial_2$, pour lequel le 4-jet de t^{12} est nul à l'origine. S'il en est ainsi t^{12} peut s'écrire :

$$t^{12} = (x^1)^{r_1} (x^2)^{r_2} \dots (x^n)^{r_n} \varphi(x^1, x^\lambda) \quad (\lambda = 2, \dots, n)$$

où $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 5$ et où φ est une fonction C^∞ sur U. Par la formule de Taylor on a :

$$\varphi(x^1, x^\lambda) = \sum_{h=0}^{k} (x^1)^h \varphi_h(x^\lambda) + \psi(x^i)$$

En substituant dans t^{12} le développement de φ, on voit qu'il suffit de considérer les deux cas suivants :

$$\text{cas I} \qquad t^{12} = (x^1)^5 \alpha(x^i)$$

$$\text{cas II} \qquad t^{12} = (x^1)^{m_1} (x^2)^{m_2} \dots (x^n)^{m_n} \beta(x^\lambda)$$

où $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 5$ et où α et β sont des fonctions C^∞ sur U.

Examinons le cas I :

$$t = (x^1)^5 \alpha \partial_1 \wedge \partial_2$$

On peut mettre t sous la forme :

$$t = \{(x^1)^3 \alpha \partial_1 + (x^1)^2 \gamma \partial_2\} \wedge (x^1)^2 \partial_2$$

et déterminer γ de façon que le premier facteur appartienne à L(U). Il suffit d'imposer à γ la condition :

$$3(x^1)^2 \alpha + (x^1)^3 \partial_1 \alpha + (x^1)^2 \partial_2 \gamma = 0$$

soit

$$\partial_2 \gamma = - 3\alpha - x^1 \partial_1 \alpha$$

et γ peut être choisie sur U par quadrature. On a ainsi dans le cas I :

$$t = - X \wedge Y$$

où les 1-jets de X et de Y sont nuls en x_0 ; D^2_U étant une dérivation de L(U), il résulte de (2-3) :

$$D^2_U(\delta t) = D^2_U[X, Y] = [D^2_U X, Y] + [X, D^2_U Y]$$

De la nullité des 1-jets de X et Y, il résulte que dans le cas I, on a (13-1).

Examinons maintenant le cas II. Le tenseur t envisagé peut s'écrire :

$$t = (x^2)^{m_2} (x^3)^{h_3} \dots (x^n)^{h_n} \beta \partial_1 \wedge (x^1)^{m_1} (x^3)^{k_3} \dots (x^n)^{k_n} \partial_2$$

Si $m_1 \geqslant 2$, $m_2 \geqslant 2$, on a $t = - X \wedge Y$, où les vecteurs X, Y de L(U) ont des 1-jets nuls en x_0 ; le même raisonnement que dans le cas I établit (13-1).

Si $m_1 \leqslant 1$, $m_2 \leqslant 3$, on peut choisir $k_3, \ldots, k_n$ de façon que :

$$m_1 + k_3 + \cdots + k_n = 2$$

Comme $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 5$, il vient :

$$m_2 + h_3 + \cdots + h_n = 3$$

et le même raisonnement s'applique. La situation est la même *pour* $m_2 \leqslant 1$, $m_1 \leqslant 3$.

Si $m_1 = 5$, nous retombons dans le cas I. *Si* $m_2 = 5$, t peut s'écrire

$$t = (x^2)^5 \beta \partial_1 \wedge \partial_2 = (x^2)^2 \beta \partial_1 \wedge ((x^2)^3 \partial_2 - 3(x^2)^2 x^1 \partial_1)$$

et nous aboutissons à la même conclusion.

Il suffit donc d'examiner les hypothèses suivantes :

$$m_1 = 4\,, m_2 = 0 \quad \text{ou} \quad m_2 = 4\,, m_1 = 0$$

$$m_1 = 4\,, m_2 = 1 \quad \text{ou} \quad m_2 = 4\,, m_1 = 1$$

Si $m_1 = 4$, $m_2 = 0$, il existe certainement un exposant, par exemple m_3, qui est égal à 1.

On peut mettre t sous la forme :

$$t = (x^1)^4 x^3 \beta \partial_1 \wedge \partial_2 = ((x^1)^2 x^3 \beta \partial_1 + x^1 x^3 \gamma \partial_2) \wedge (x^1)^2 \partial_2$$

où le premier facteur appartient à L(U) si γ vérifie $\partial_2 \gamma + 2\beta = 0$. Le même raisonnement donne (13-1).

Si $m_1 = 0$, $m_2 = 4$, on a, en supposant encore $m_3 = 1$,

$$t = (x^2)^2 \beta \partial_1 \wedge ((x^2)^2 x^3 \partial_2 - 2x^1 x^2 x^3 \partial_1)$$

et le résultat est acquis :

Si $m_1 = 4$, $m_2 = 1$, il vient :

$$t = (x^1)^4 x^2 \beta \partial_1 \wedge \partial_2 = x^2 \beta \partial_1 \wedge (x^1)^4 \partial_2$$

On en déduit :

$$-\delta t = [x^2 \beta \partial_1\,, (x^1)^4 \partial_2]$$

et par suite :

$$-D_U^2(\delta t) = [D_U^2(x^2 \beta \partial_1)\,, (x^1)^4 \partial_2] + [x^2 \beta \partial_1\,, D_U^2((x^1)^4 \partial_2)]$$

Mais le deuxième terme du second membre est nul d'après (12-14). Il en résulte (13-1).

Si $m_2 = 4$, $m_1 = 1$ un raisonnement analogue est valable en mettant t sous la forme

$$t = (x^2)^4 x^1 \beta \partial_1 \wedge \partial_2 = (x^2)^4 \partial_1 \wedge \left(x^1 \beta \partial_2 - \frac{(x^1)^2}{2} \partial_2 \beta \cdot \partial_1\right)$$

L'équation (13-1) a donc été établie dans tous les cas.

b) Nous allons maintenant établir la proposition suivante :

PROPOSITION. – *Soit* U *un domaine contractile de la variété unimodulaire* (W , η) *et soit* D_U *une dérivation de l'algèbre de Lie* L(U). *Il existe sur* U *un vecteur unique* $Z \in L^c(U)$ *tel que* D_U *soit définie par :*

$$D_U : X \in L(U) \to D_U(X) = [Z , X]$$

Donnons-nous un point x de U et soit (x^i) une carte canonique de domaine U telle que x soit l'origine des coordonnées. A D_U correspond par la carte un vecteur $Z \in L^c(U)$ donné par le lemme du § 11 et par suite une dérivation de L(U) :

$$D_U^2 : X \in L(U) \to D_U^2(X) = D_U(X) - [Z , X]$$

Soit X un élément de L(U) et t un tenseur, élément de $T^2(U)$ tel que $X = \delta t$. Il existe un tenseur $\bar{t} \in T^2(U)$ dont les composantes sont des polynômes de degré 4 en les coordonnées canoniques et qui est tel que :

$$j^4(t)(x) = j^4(\bar{t})(x)$$

D'après le lemme du a, on a :

$$D_U^2(\delta t)(x) = D_U^2(\delta \bar{t})(x)$$

Mais d'après le lemme du § 12 :

$$D_U^2(\delta \bar{t})(x) = 0$$

On a donc $D_U^2(X)(x) = 0$ et par suite, par translation de la carte, $D_U^2(X) = 0$. Ainsi pour tout $X \in L(U)$, il vient :

$$D_U(X) = [Z , X] \tag{13-2}$$

Le § 11, b, montre que le vecteur Z vérifiant (13-2) est unique.

Nous avons donc déterminé l'algèbre de Lie des dérivations de L(U).

14. *Détermination des dérivations de* L, L*, L^c *et premier groupe de cohomologie.*

a) Soit D une dérivation de L. Elle induit sur un domaine U de W une dérivation D_U de L(U) définie de la manière suivante : si $X_U \in L(U)$, il existe $X \in L$ tel que $X|_U = X_U$ et pour tout $x \in U$, la relation de $(D_U X_U)(x) = (DX)(x)$ définit, en vertu du caractère local de D, une dérivation D_U de L(U).

Soit $\{U_\nu\}$ un recouvrement localement fini de W par des domaines contractiles ; si D_ν est la dérivation induite par D sur U_ν, il existe sur U_ν un vecteur unique $Z_\nu \in L^c(U)$ tel que

$$(D_\nu X|_{U_\nu})(x) = [Z_\nu , X|_{U_\nu}](x)$$

pour tout $x \in U_\nu$, $X \in L$. Sur $U_\nu \cap U_{\nu'}$, on a d'après la définition de D_ν, $D_{\nu'}$

$$(D_{\nu'} X|_{U_{\nu'}})(x) = (D_\nu X|_{U_\nu})(x) \qquad x \in U_\nu \cap U_{\nu'}$$

Par suite, les restrictions de Z_ν, $Z_{\nu'}$ à $U_\nu \cap U_{\nu'}$ coïncident et il existe un vecteur Z de W tel que $Z_\nu = Z|_{U_\nu}$ pour tout ν. Ce vecteur appartient à L^c et l'on a :

$$(DX)(x) = [Z , X](x)$$

pour tout $x \in W$, $Z \in L$. Nous avons ainsi établi

THEOREME 1. – *Toute dérivation* D *de* L *(resp.* L*) *est donnée par une transformation infinitésimale conforme unimodulaire* $Z \in L^c$, *avec :*

$$X \in L \to D(X) = \mathcal{L}(Z)\,X$$

b) Proposons-nous de déterminer les dérivations D^c de L^c dans le cas où W *est supposée non compacte.* Cela pourrait être fait directement par des variantes des lemmes précédents, mais il est plus simple de procéder de la manière suivante.

D'après la proposition 2 du § 3, on a $[L^c , L^c] = L$ et il résulte de la définition même des dérivations que :

$$D^c[L^c , L^c] \subset [D^c L^c , L^c] \subset [L^c , L^c]$$

Ainsi la restriction à L d'une dérivation D^c de L^c est une dérivation $D = \mathcal{L}(Z)$ (où $Z \in L^c$) de L.

Nous allons montrer que, sous l'hypothèse faite, toute dérivation de L^c est intérieure. Si $X \in L^c$, $Y \in L$, on a avec les notations précédentes :

$$D^c[X, Y] = [D^c X, Y] + [X, D^c Y]$$

soit :

$$\mathcal{L}(Z)[X, Y] = [D^c X, Y] + [X, \mathcal{L}(Z) Y]$$

D'autre part $\mathcal{L}(Z)$ définit une dérivation intérieure de L^c :

$$\mathcal{L}(Z)[X, Y] = [\mathcal{L}(Z) X, Y] + [X, \mathcal{L}(Z) Y]$$

Il en résulte que, pour tout $Y \in L$,

$$[(D^c - \mathcal{L}(Z)) X, Y] = 0$$

Soit x_0 un point arbitraire de W. On peut trouver (voir § 10, a) un élément Y de L tel que :

$$Y(x_0) = 0 \qquad j^1(Y)(x_0) \text{ régulier}$$

Il en résulte :

$$\{(D^c - \mathcal{L}(Z)) X\}(x_0) = 0$$

Par suite $D^c(X) = \mathcal{L}(Z) X$ et D^c est une dérivation intérieure de L^c. On a le même résultat si W est supposée compacte puisque, dans ce cas, $L^c = L$. Il vient :

THEOREME 2. – *Toute dérivation de l'algèbre de Lie* L^c *est intérieure.*

c) Les théorèmes précédents peuvent être interprétés en termes de cohomologie de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie. Pour une telle algèbre de Lie L, la cohomologie est à valeurs dans l'algèbre de Lie elle-même et définie à partir de la représentation adjointe. Nous notons $H^1(L)$ le premier espace de cohomologie correspondant.

Pour cette cohomologie, l'espace des 1-cochaînes exactes coïncide avec l'espace des dérivations intérieures. Il résulte par suite des théorèmes précédents

THEOREME 3. – *L'espace de cohomologie* $H^1(L^c)$ *est nul. L'espace de cohomologie* $H^1(L)$ *est isomorphe à* L^c/L, *l'espace de cohomologie*

$H^1(L^*)$ *à* L^c/L^*. *Si* W *est compacte, dim.* $H^1(L^*) = b_{n-1}(W)$; *si* W *est non compacte dim.* $H^1(L^*) = b_{n-1}(W) + 1$, *où* $b_{n-1}(W)$ *est le* $(n-1)^e$ *nombre de Betti de* W *pour l'homologie à supports compacts.*

5. L'algèbre de Lie N.

15. *Définition de l'algèbre de Lie* N.

a) Si t, $u \in T^2$, les éléments correspondants $X = \delta t$, $Y = \delta u$ de L^* vérifient (2-3), soit :

$$[X, Y] = -\delta(X \wedge Y) \tag{15-1}$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire une application 2-linéaire, antisymétrique, $B : T^2 \times T^2 \to T^2$, définie par :

$$B(t, u) = -\delta t \wedge \delta u \tag{15-2}$$

Soit v un troisième élément de T^2 et posons $Z = \delta v$. Désignons par S la sommation par rapport aux permutations circulaires sur t, u, v ou sur X, Y, Z. Etudions le 2-tenseur :

$$w = SB\{B(t, u), v\} \tag{15-3}$$

soit :

$$w = S\delta(X \wedge Y) \wedge Z = -S[X, Y] \wedge Z$$

Sur un domaine U de coordonnées canoniques, $w|_U$ a pour composantes :

$$w^{ij} = -S(X^h \partial_h Y^i - Y^h \partial_h X^i) Z^j + S(X^h \partial_h Y^j - Y^h \partial_h X^j) Z^i$$

soit :

$$w^{ij} = -S\partial_h(X^h Y^i Z^j - X^h Y^j Z^i - Y^h X^i Z^j + Y^h X^j Z^i)$$

En explicitant la permutation circulaire, il vient :

$$w^{ij} = -2\partial_h(X^h Y^i Z^j - X^h Y^j Z^i + Y^h Z^i X^j - Y^h Z^j X^i + Z^h X^i Y^j - Z^h X^j Y^i)$$

c'est-à-dire :

$$w^{ij} = -\,2\partial_h(X \wedge Y \wedge Z)^{hij}$$

Nous avons ainsi établi :

$$w = 2\delta(X \wedge Y \wedge Z) \tag{15-4}$$

En particulier le 2-tenseur défini par (15-3) est δ-*exact.*

b) Introduisons sur T^2 deux relations d'équivalence : si t, $u \in T^2$, nous écrirons $t \curlywedge u$ (resp. $t \sim u$) si $t - u$ est δ-*exact* (resp. δ-*fermé*). Nous notons $\hat{t}$ (resp. $\tilde{t}$) la classe d'équivalence relativement à la première (resp. seconde) relation d'équivalence, de représentant $t \in T^2$. Soit N (resp. $\tilde{N}$) l'espace défini par les classes d'équivalence relatives à l'une ou l'autre de nos relations. Nous désignons par π la projection naturelle de N sur $\tilde{N}$ définie par :

$$\pi : \hat{t} \in N \to \tilde{t} \in \tilde{N} \tag{15-5}$$

En remarquant que δt ne dépend que de la classe d'équivalence $\tilde{t}$ de représentant t, nous pouvons poser, par définition,

$$\delta\tilde{t} = \delta\hat{t} = \delta t$$

pour tout représentant t de l'une des classes $\hat{t}$ ou $\tilde{t}$. Introduisons l'application 2-linéaire, antisymétrique, de $\tilde{N} \times \tilde{N}$ dans $\tilde{N}$ définie par :

$$\{\tilde{t}\,,\,\tilde{u}\} = -\,(\delta\tilde{t} \wedge \delta\hat{u})^{\sim}$$

D'après (15-1), nous définissons ainsi sur $\tilde{N}$ une structure d'algèbre de Lie isomorphe à L^* par l'isomorphisme $\tilde{t} \in \tilde{N} \to \delta\tilde{t} \in L^*$.

Cela posé, introduisons sur N l'application 2-linéaire, antisymétrique, de $N \times N$ dans N définie par :

$$[\hat{t}\,,\,\hat{u}] = -\,(\delta\hat{t} \wedge \delta\hat{u})^{\wedge} = -\,(\delta\tilde{t} \wedge \delta\tilde{u})^{\wedge} \tag{15-6}$$

Il résulte du a que cette application vérifie l'identité de Jacobi et définit par suite sur N une structure d'algèbre de Lie. D'après (15-6), on a :

$$\pi[\hat{t}\,,\,\hat{u}] = \{\pi\hat{t}\,,\,\pi\hat{u}\} \tag{15-7}$$

de telle sorte que π est un homomorphisme de l'algèbre de Lie N sur l'algèbre de Lie $\tilde{N}$. Le noyau de cet homomorphisme est donné par l'espace des classes $\hat{t}$ vérifiant $\delta\hat{t} = 0$. Il est isomorphe au quotient de l'espace des 2-tenseurs δ-fermés par l'espace des 2-tenseurs δ-exacts, donc isomorphe à $H^{n-2}(W\,;R)$ de dimension $b_{n-2}(W)$.

c) Si un élément $\hat{t}$ de N contient un 2-tenseur t à support compact, nous dirons, par abus de langage, que *$\hat{t}$ est à support compact.* Soit N_0 le sous-espace de N défini par les éléments à supports compacts ; si $\hat{t} \in N_0$, $\hat{u} \in N$, il résulte du fait que $\delta\hat{t}$ est à support compact et de (15-6) que $[\hat{t}, \hat{u}]$ contient le 2-tenseur à support compact $-(\delta\hat{t} \wedge \delta\hat{u})$ donc appartient à N_0. Ainsi N_0 *est un idéal de* N.

16. *Idéaux dérivés.*

Au cours du § 5, nous avons établi le lemme suivant, qui résulte de la démonstration même du lemme principal.

LEMME. – *Soit* U, U′ *deux domaines contractiles de* W *avec* $\overline{U'} \subset U$. *Si* $t \in T^2$ *est à support compact* $S(t) \subset U'$, *il existe* $n(C_n^2 + 1)$ *paires de 2-tenseurs* $(u_{(j)}^{(A)}, v_{(j)}^{(A)})$ *à supports compacts* $S(u_{(j)}^{(A)}) \subset U'$, $S(v_{(j)}^{(A)}) \subset U$ *tels que :*

$$t = -\sum_{A, j} \delta u_{(j)}^{(A)} \wedge \delta v_{(j)}^{(A)}.$$

a) Introduisons comme au § 6, a, un recouvrement $\{U_\nu\}_{\nu \in I}$ de W par des domaines contractiles vérifiant la condition (C) de Palais. Soit $\hat{t}$ un élément de N admettant comme représentant $t \in T^2$. Posons (avec les notations du § 6, a) $t_\mu = \tau_\mu t$ et désignons par $\hat{t}_\mu$ la classe d'équivalence de t_μ.

D'après le lemme précédent, t_μ est somme finie de produits de la forme $\delta u_{(j)}^{(A)} \wedge \delta v_{(j)}^{(A)}$.

On en déduit :

$$\hat{t}_\mu = \sum_{A, j} [\hat{u}_{(j)}^{(A)}, \hat{v}_{(j)}^{(A)}]$$

Ainsi $\hat{t}_\mu$ somme finie d'éléments de [N , N] appartient à [N , N]. Il en résulte que $\hat{t}$ lui-même appartient à [N , N]. Nous énonçons :

PROPOSITION 1. – *L'algèbre de Lie* N *coïncide avec son idéal dérivé.*

b) Soit $\hat{t}$ un élément de N_0. Posons (avec les notations du § 6, b) $t_\nu = \varphi_\nu t$, pour un représentant t à support compact de $\hat{t}$ et désignons par $\hat{t}_\nu$ la classe de t_ν. On établit comme au a que :

$$\hat{t}_\nu = \sum_{A,j} [\hat{u}^{(A)}_{(j)}, \hat{v}^{(A)}_{(j)}]$$

où $\hat{u}^{(A)}_{(j)}, \hat{v}^{(B)}_{(j)} \in N_0$. On en déduit que $\hat{t}_\nu$ appartient à $[N_0, N_0]$. Il en est donc de même pour $\hat{t}$.

PROPOSITION 2. – *L'algèbre de Lie* N_0 *coïncide avec son idéal dérivé.*

17. *Dérivations de* N *et* N_0.

a) Le lemme suivant nous sera utile.

LEMME. – *Si* Z *est un élément de* L^c, *on a pour tout p-tenseur* $t \in T^p$

$$\mathcal{L}(Z)\,\delta t = \delta\,\mathcal{L}(Z)\,t \tag{17-1}$$

En effet, sur le domaine U d'une carte locale, $\mathcal{L}(Z)\,\delta t$ a pour composantes

$$-\mathcal{L}(Z)\left\{\frac{1}{k_U(\eta)}\,\partial_r\,(t^{ri_2\ldots i_p}\,k_U(\eta))\right\}$$

soit en explicitant et, compte-tenu de $\mathcal{L}(Z)\,k_U(\eta) = K_Z k_U(\eta)$:

$$-\frac{1}{k_U(\eta)}\,\partial_r\,\{(\mathcal{L}(Z)\,t)^{ri_2\ldots i_p}\,k_U(\eta)\}$$

qui ne sont autres que les composantes de $\delta\,\mathcal{L}(Z)\,t$.

Cela posé, soit t un élément de T^2 ; il résulte du lemme que si t est δ-exact (resp. δ-fermé), $\mathcal{L}(Z)\,t$ est δ-exact (resp. δ-fermé). On peut donc poser, par définition :

$$\mathcal{L}(Z)\,\hat{t} = (\mathcal{L}(Z)\,t)^{\wedge} \quad , \quad \mathcal{L}(Z)\,\tilde{t} = (\mathcal{L}(Z)\,t)^{\sim} \tag{17-2}$$

pour tout représentant t de la classe envisagée.

Identifions $\tilde{N}$ à L^* par l'application bijective $\tilde{t} \to X = \delta\tilde{t}$. Notons $\tilde{N}_0$ l'idéal défini par les éléments $\tilde{t}$ de $\tilde{N}$ tels que $\tilde{t}$ contienne un 2-tenseur à support compact ; $\tilde{N}_0$ se trouve alors identifié à L^*_0. Dans l'identification précédente de $\tilde{N}$ avec L^*, $\mathcal{L}(Z)\,\tilde{t} = (\mathcal{L}(Z)t)^{\sim}$ s'identifie à :

$$\delta\,\mathcal{L}(Z)\,t = \mathcal{L}(Z)\,\delta t = \mathcal{L}(Z)\,X\,.$$

Comme toute dérivation de L^* (resp. L_0^*) est définie par $X \to \mathcal{L}(Z)\, X$, où $Z \in L^c$, on voit que toute dérivation D de $\tilde{N}$ (resp. $\tilde{N}_0$) peut être définie par $D : \tilde{t} \to \mathcal{L}(Z)\, \tilde{t}$, où $Z \in L^c$.

b) Proposons-nous de déterminer les dérivations $\mathcal{D}$ de N (resp. N_0). Pour tout couple $\hat{t}$, $\hat{u}$ d'éléments de N (resp. N_0), on a :

$$\mathcal{D}\,[\hat{t}\,,\hat{u}] = [\mathcal{D}\hat{t}\,,\hat{u}] + [\hat{t}\,,\mathcal{D}\hat{u}] \tag{17-3}$$

Montrons que $\pi\mathcal{D}\hat{t}$ ne dépend que de $\pi\hat{t} = \tilde{t}$, ou, ce qui est équivalent, que si $\tilde{t} = 0$, on a $\pi\mathcal{D}\hat{t} = 0$. En effet si $\tilde{t} = 0$, on a :

$$[\hat{t}\,,\hat{u}] = 0$$

pour tout $\hat{u}$ de N. Il résulte par suite de (17-3) que :

$$[\mathcal{D}\hat{t}\,,\hat{u}] = 0$$

pour tout $\hat{u}$ de N_0. On en déduit en particulier que le 2-tenseur :

$$\delta\mathcal{D}\hat{t} \wedge \delta\hat{u}$$

est *δ-fermé*. Posons :

$$X = \delta\hat{u} \qquad Y = \delta\mathcal{D}\hat{t}$$

On a donc, d'après (15-1),

$$[Y\,,X] = 0 \tag{17-4}$$

pour tout élément X de L_0^*.

Soit x_0 un point arbitraire de W. Nous avons vu (§ 10, a) qu'on peut choisir $X \in L_0^*$ de façon que :

$$X(x_0) = 0 \qquad j^1(X)(x_0) \text{ régulier}$$

Il en résulte que $Y(x_0) = 0$. Ainsi $\delta\mathcal{D}\hat{t} = 0$ sur W, ou, ce qui est équivalent $\pi\mathcal{D}\hat{t} = 0$.

On peut aussi définir une application linéaire D de $\tilde{N}$ dans $\tilde{N}$ (resp. $\tilde{N}_0$ dans $\tilde{N}_0$) par :

$$D : \tilde{t} = \pi\hat{t} \to \pi\mathcal{D}\hat{t}$$

Cette application D vérifie par définition :

$$D\pi = \pi\mathcal{D} \tag{17-5}$$

Appliquons π à (17-3). Il vient, compte-tenu de (17-5),

$$D\pi[\hat{t}, \hat{u}] = \{D\pi\hat{t}, \pi\hat{u}\} + \{\pi\hat{t}, D\pi\hat{u}\}$$

Ainsi, en appliquant de nouveau (17-5), on a pour tout couple $\tilde{t}, \tilde{u}$:

$$D\{\tilde{t}, \tilde{u}\} = \{D\tilde{t}, \tilde{u}\} + \{\tilde{t}, D\tilde{u}\}$$

Ainsi l'application D est une dérivation de $\tilde{N}$ (resp. $\tilde{N}_0$) et peut être définie par :

$$D : \tilde{t} \to \mathcal{L}(Z)\,\tilde{t} \tag{17-6}$$

où $Z \in L^c$.

c) La dérivation (17-6) de $\tilde{N}$ (resp. $\tilde{N}_0$) étant donnée, cherchons inversement une dérivation $\mathcal{D}$ de N (resp. N_0) telle que (17-5) soit satisfaite. Montrons d'abord qu'une telle dérivation est unique, ou, ce qui est équivalent, que $\pi\mathcal{D} = 0$ implique $\mathcal{D} = 0$.

En effet si $\pi\mathcal{D} = 0$, on a pour tout $\hat{t}$

$$\delta\mathcal{D}\hat{t} = 0$$

La relation (17-3) qui caractérise les dérivations nous donne alors :

$$\mathcal{D}[\hat{t}, \hat{u}] = 0$$

$\mathcal{D}$ est donc nul sur l'idéal dérivé de N (resp. N_0) donc sur N (resp. N_0).

Cela posé, si Z est l'élément de L^c définissant D, introduisons l'application linéaire de N dans N (resp. N_0 dans N_0) définie par :

$$\mathcal{D} : \hat{t} \to \mathcal{L}(Z)\,\hat{t}$$

Pour un représentant t de $\hat{t}$, on a :

$$\pi\mathcal{D}\hat{t} = \pi\,\mathcal{L}(Z)\,\hat{t} = \pi(\mathcal{L}(Z)\,t)\hat{}$$

soit :

$$\pi\mathcal{D}\hat{t} = (\mathcal{L}(Z)\,t)^{\sim} = \mathcal{L}(Z)\,\tilde{t} = D\tilde{t} = D\pi\hat{t}$$

et l'on voit que (17-5) est satisfaite.

Montrons enfin que $\mathcal{D}$ est une dérivation. Si $t, u \in T^2$, considérons

$$B(t, u) = -\,\delta t \wedge \delta u$$

$\mathcal{L}(Z)$ commutant avec δ, il vient :

$$\mathcal{L}(Z)\,B(t, u) = -\,\delta\,\mathcal{L}(Z)\,t \wedge \delta u - \delta t \wedge \delta\,\mathcal{L}(Z)\,u$$

soit :

$$\mathcal{L}(Z)\, B(t\,,u) = B(\mathcal{L}(Z)\, t\,,u) + B(t\,,\mathcal{L}(Z)\, u)$$

On en déduit :

$$\mathcal{L}(Z)\,[\hat{t}\,,\hat{u}] = [\mathcal{L}(Z)\,\hat{t}\,,\hat{u}] + [\hat{t}\,,\mathcal{L}(Z)\,\hat{u}]$$

et $\mathcal{D}$ est bien une dérivation. Nous remarquons que si $\mathcal{L}(Z)\,\hat{t} = 0$ pour tout $\hat{t} \in N_0$, il est clair que l'on a $Z = 0$. Nous avons ainsi établi.

THEOREME 1. – *Toute dérivation $\mathcal{D}$ de* N *(resp.* N_0*) est donnée, à partir d'une transformation infinitésimale conforme unimodulaire* $Z \in L^c$, *par :*

$$\mathcal{D}\hat{t} = \mathcal{L}(Z)\,\hat{t}$$

L'algèbre de Lie des dérivations de N *(resp.* N_0*) est isomorphe à* L^c.

d) Etudions l'espace des dérivations intérieures à N ; $\mathcal{D}$ est une dérivation intérieure s'il existe $\hat{v} \in N$ tel que $\mathcal{D}$ soit défini par :

$$\mathcal{D} : \hat{u} \in N \to [\hat{v}\,,\hat{u}] = -(\delta\widetilde{v} \wedge \delta\widetilde{u})\hat{}$$

Si $\delta\widetilde{v} = 0$, on a manifestement $\mathcal{D} = 0$. Inversement si $\mathcal{D} = 0$, $\delta\widetilde{v} \wedge \delta\widetilde{u}$ est δ-exacte, donc δ-fermée pour tout $\widetilde{u} \in \widetilde{N}$. Ainsi :

$$[\delta\widetilde{v}\,,\delta\widetilde{u}] = 0$$

pour tout $\widetilde{u} \in \widetilde{N}$ et il résulte du raisonnement du b que $\delta\widetilde{v} = 0$. Ainsi pour que $\mathcal{D} = 0$, il faut et il suffit que $\delta\widetilde{v} = 0$. On en déduit que l'espace des dérivations intérieures à N est isomorphe à $\widetilde{N}$, c'est-à-dire à L^*.

Il vient ainsi comme au § 14, c.

THEOREME 2. – *L'espace de cohomologie* $H^1(N)$ *est isomorphe à* L^c/L^*, *donc à* $H^1(L^*)$.

18. *Cohomologie de* N *à supports compacts.*

Soit $(W\,,\eta)$ une variété unimodulaire supposée *non compacte.* La "cohomologie à supports compacts" de l'algèbre de Lie N correspondante peut être définie à partir des cochaînes de N à valeurs dans l'idéal N_0, les *o*-cochaînes s'identifiant aux éléments de N_0.

a) Nous nous proposons d'étudier les 1-cochaînes fermées à valeurs dans N_0, c'est-à-dire les dérivations $\mathcal{L}(Z)$ de N (où $Z \in L^c$)

telles que pour tout $\hat{t} \in N$, on ait $\mathcal{L}(Z)\,\hat{t} \in N_0$. Pour déterminer ces dérivations, nous utilisons les deux lemmes suivants.

LEMME 1. – *Soit* Z *un élément de* L^c *et* P *un pavé différentiable ouvert de* W *de centre* x_0 *tel que* $Z(x_0) \neq 0$. *Etant donné un réel strictement positif* k, *on peut trouver un* $(n-2)$ *cycle différentiable compact* C *à support dans* P *et une* $(n-2)$*-forme* ψ *à support compact* $S(\psi) \subset P$ *tels que :*

$$\int_C (\mathcal{L}(Z)\,\psi - K_Z\,\psi) = k \tag{18-1}$$

En effet, s'il en était autrement, on aurait pour tout $(n-2)$ cycle C et $(n-2)$-forme ψ satisfaisant aux hypothèses du lemme :

$$\int_C (\mathcal{L}(Z)\,\psi - K_Z\,\psi) = 0$$

C étant nécessairement homologue à 0, pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que pour toute $(n-2)$-forme ψ à support compact $S(\psi) \subset P$, on ait

$$\mathcal{L}(Z)\,d\psi = K_Z\,d\psi \tag{18-2}$$

Introduisons le vecteur $X = *^{-1}\,d\psi$. On déduit immédiatement des propriétés de Z que :

$$\mathcal{L}(Z) * X = K_Z * X + * \mathcal{L}(Z)\,X$$

Il résulte de (18-2) que l'on a :

$$\mathcal{L}(Z)\,X = 0$$

pour tout élément X de L_0^* à support dans P. On en déduit que $Z(x_0) = 0$ contrairement à l'hypothèse.

b) LEMME 2. – *Introduisons une suite infinie de pavés différentiables ouverts* $\{P_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, *deux à deux disjoints, de centres* $\{x_\nu\}$. *Soit* $\hat{t}$ *un élément de* N_0 *; pour toute suite* $\{C_\nu\}$ *de* $(n-2)$*-cycles différentiables compacts tels que* $S(C_\nu) \subset P_\nu$, *on a :*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{C_\nu} * \hat{t} < \infty \tag{18-3}$$

En effet, si t est un représentant quelconque de $\hat{t}$, on a :

$$t = t_0 + \delta w$$

où t_0 est à support compact et w est un 3-tenseur. On en déduit :

$$* \, t = * \, t_0 - d * w$$

Par définition

$$\int_{C_\nu} * \, \hat{t} = \int_{C_\nu} * \, t = \int_{C_\nu} * \, t_0$$

Comme $* \, t_0$ est à support compact, seul un nombre fini d'intégrales $\int_{C_\nu} * \, t_0$ sont non nulles, et

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{C_\nu} * \, \hat{t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{C_\nu} * \, t_0 < \infty$$

c) Montrons que les dérivations étudiées sont celles pour lesquelles Z est à support compact. En effet si Z n'est pas à support compact, il existe une suite $\{x_\nu\}$ de points de W tel que $Z(x_\nu) \neq 0$ et qui n'admet pas de points d'accumulation. Nous pouvons introduire une suite de pavés ouverts $\{P_\nu\}$, deux à deux disjoints, arbitrairement petits, ayant pour centres les x_ν. D'après le lemme 1, on peut trouver dans chaque P_ν un $(n-2)$-cycle différentiable compact C_ν à support dans P_ν et une $(n-2)$-forme ψ_ν à support compact $S(\psi_\nu) \subset P_\nu$ tels que :

$$\int_{C_\nu} (\mathcal{L}(Z)\, \psi_\nu - K_Z\, \psi_\nu) = k > 0 \tag{18-4}$$

Posons $t_\nu = *^{-1} \psi_\nu$. On a :

$$\mathcal{L}(Z) * t_\nu - K_Z * t_\nu = * \, \mathcal{L}(Z)\, t_\nu$$

et (18-4) peut s'écrire :

$$\int_{C_\nu} * \, \mathcal{L}(Z)\, t_\nu = k$$

Si $t = \Sigma\, t_\nu$, il vient pour la suite de $(n-2)$-cycles $\{C_\nu\}$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{C_\nu} * \, \mathcal{L}(Z)\, t = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{C_\nu} * \, \mathcal{L}(Z)\, t_\nu = +\infty$$

Il résulte du lemme 2 que $\mathcal{L}(Z)\,\hat{t}$ ne peut appartenir à N_0.

Ainsi Z est nécessairement à support compact. De la relation

$$K_Z \eta = di(Z)\,\eta$$

il résulte $K_Z = 0$ et par suite Z est un élément de L_0. Les 1-cochaînes fermées sont donc définies par $\mathcal{L}(Z)\,\hat{u}$, où $Z \in L_0$.

Etudions les 1-cochaînes exactes, différentielles de 0-chaînes. Une telle 1-cochaîne est donnée par :

$$\hat{u} \in N \to [\hat{t}\,,\hat{u}] = -(\delta\hat{t} \wedge \delta\hat{u})\hat{\ } \in N_0$$

où $\hat{t}$ est un élément de N_0 et $\delta\hat{t}$ un élément de L_0^*. Ainsi les 1-cochaînes exactes sont définies par $\mathcal{L}(Z)\,\hat{u}$ où $Z \in L_0^*$. On a

THEOREME. – *L'espace de cohomologie* ${}_0H^1(N)$ *est isomorphe à* L_0/L_0^* *et de dimension* $b^0_{n-1}(W)$, *où* $b^0_{n-1}(W)$ *est le* $(n-1)^e$ *nombre de Betti de* W *pour l'homologie à supports fermés.*

Annexe
Idéaux de L^c.

a) Les résultats de la partie III s'étendent sans difficultés au cas où l'on substitue à l'algèbre de Lie L, l'algèbre de Lie L^c. Pour le montrer, nous établissons.

PROPOSITION. – *Si f est un fermé de* W, $I_c(f)$ *est un idéal de* L^c.

En effet, si $X \in I_c(f)$, $Y \in L^c$, on a d'après (3-2) :

$$[X\,,Y] = -\,\delta(X \wedge Y) + K_Y X$$

Si $X = \delta t$, avec $S(t) \subset Cf$, il vient :

$$[X\,,Y] = -\,\delta\{X \wedge Y - K_Y t\}$$

où l'on a :

$$S(X \wedge Y - K_Y t) \subset S(t) \subset Cf$$

Ainsi $[X\,,Y] \in I_c(f)$, ce qui démontre la proposition.

On a, d'autre part, le lemme suivant qui est l'exacte extension du lemme du § 7, b.

LEMME. — *Soit* M [*avec* $n(\mathrm{M}) = f$] *un sous-espace de* L^c *invariant par* $\mathrm{I}_c(f)$. *Si* $x_0 \in \mathrm{C}f$, *on peut trouver des domaines contractiles* U, U′ *de* W *avec* $x_0 \in \mathrm{U}'$, $\bar{\mathrm{U}}' \subset \mathrm{U} \subset \mathrm{C}f$ *tels que, si* (x^j) *est une carte canonique de domaine* U′, $[\mathrm{M}, \mathrm{I}_0(f)]$ *contient* n *vecteurs* $\mathrm{Z}_{(j)} \in \mathrm{L}_0^*$, *à supports* $\mathrm{S}(\mathrm{Z}_{(j)}) \subset \mathrm{U}$ *et vérifiant* $\mathrm{Z}_{(j)}|_{\mathrm{U}'} = \partial_j$.

Si $x_0 \in \mathrm{C}f$, il existe un élément T_0 de M tel que $\mathrm{T}_0(x_0) \neq 0$. Si $x \in \mathrm{I}_c(f)$, on a dans une carte locale :

$$[\mathrm{T}_0, \mathrm{X}^i](x_0) = \mathrm{T}_0^r(x_0)(\partial_r \mathrm{X}^i)(x_0) - \mathrm{X}^r(x_0)(\partial_r \mathrm{T}_0^i)(x_0)$$

D'après le § 10, b on peut choisir $\mathrm{X} \in \mathrm{I}_c(f)$ tel que :

$$\mathrm{X}(x_0) = 0 \qquad j^1(\mathrm{X})(x_0) \text{ régulier}$$

Il en résulte que M est transitif en x_0.

Cela posé, choisissons deux éléments T_0, T_1 de M prenant en x_0 des valeurs *non colinéaires.* Considérons le vecteur de M :

$$\mathrm{T} = \mathrm{K}_{\mathrm{T}_0}\mathrm{T}_1 - \mathrm{K}_{\mathrm{T}_1}\mathrm{T}_0$$

où $\mathrm{K}_{\mathrm{T}_0}$, $\mathrm{K}_{\mathrm{T}_1}$ sont les constantes associées à T_0, $\mathrm{T}_1 \in \mathrm{L}^c$. Le vecteur T appartient à $\mathrm{M} \cap \mathrm{L}$ et est $\neq 0$ en x_0. Le raisonnement du lemme du § 7, b est alors valable à partir de ce vecteur T.

Du lemme précédent, on déduit comme au § 7, c :

THEOREME. — *Si* M *est un sous-espace vectoriel de* L^c *tel que* $n(\mathrm{M}) = f$ *et est invariant par* $\mathrm{I}_c(f)$, on a

$$\mathrm{I}_c(f) \subset \mathrm{M} \qquad [\mathrm{M}, \mathrm{I}_c(f)] = \mathrm{I}_c(f)$$

b) Soit A une sous-algèbre de L^c contenant L_0^*. On déduit comme dans III des résultats précédents.

THEOREME. — 1) *Si* I *est un idéal de* A *tel que* $n(\mathrm{I}) = f$, *on a*

$$\mathrm{I}_c(f) \subset \mathrm{I} \qquad [\mathrm{I}, \mathrm{I}_c(f)] = \mathrm{I}_c(f)$$

2) *Tout idéal de* A *est semi-simple. En particulier* L^c *et tous ses idéaux sont semi-simples.*

3) *Le centralisateur* Z(I) *d'un idéal* I *dans* A *coïncide avec l'ensemble des éléments de* A *s'annulant en tout point de* $\overline{\mathrm{C}f}$.

Il en résulte :

THEOREME. – *Un idéal non trivial de* A *n'admet jamais un idéal supplémentaire dans* A. *Il en est ainsi en particulier pour* $A = L^c$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ARNOLD, Funk. Anal. i Priloz 3, (1969), 77-78.

[2] A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ, *C.R. Acad. Sc.* Paris, 275 (1972), 113.

[3] A. AVEZ, A. LICHNEROWICZ et A. DIAZ-MIRANDA, Sur les automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique, *J. of Diff. Geom.*, 9 (1974), 1-40.

[4] A. LICHNEROWICZ, *C.R. Acad. Sc.* Paris, 276 (1973), 55-60 ; 199-203, 1 113-1 118.

[5] A. LICHNEROWICZ, Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact, *J. de Math. pures et appl.*, 52 (1973), 473-508.

[6] B. ROSENFELD, Funk. Anal. i Priloz 4, (1970), 91-92.

[7] F. TAKENS, Derivations of vector fields, *Comp. Math.*, 26 (1973), 95-99.

Manuscrit reçu le 13 mars 1974
Accepté par J.L. Koszul.

André LICHNEROWICZ,
Collège de France
rue des Ecoles
Paris.