Annales de l'institut Fourier

Alain Goullet de Rugy

Une nouvelle définition des cônes biréticulés

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 3 (1974), p. 37-41

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_37_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,3 (1974), 37-41

UNE NOUVELLE DÉFINITION DES CÔNES BIRÉTICULÉS

par Alain GOULLET de RUGY (*)

1. *Notations.* – Les espaces vectoriels considérés ici sont réels. On rappelle que si E est un espace vectoriel topologique, E^* désigne son dual algébrique et E' son dual topologique. La seule topologie qu'on considèrera sur E^* ou E' sera la topologie faible $\sigma(E^*, E)$ ou $\sigma(E', E)$.

Dans toute la suite, X désignera un cône convexe saillant complet dans un espace localement convexe séparé *faible*. Par abus de langage, une application de X dans un espace vectoriel sera dite *linéaire* si elle est additive et positivement homogène. On note $L_c(X)$ l'espace vectoriel des formes linéaires définies et continues sur X. On rappelle ([2], déf. 1.7) que X est dit *biréticulé,* si $L_c(X)$ est réticulé pour l'ordre usuel (associé à un espace de fonctions réelles).

2. DEFINITION. – *On dit qu'un espace vectoriel ordonné* E *est un* prédual *de* X *s'il existe une bijection linéaire bicontinue de* X *sur le cône convexe* E_+^* *des formes linéaires positives sur* E *muni de la topologie faible* $\sigma(E_+^*, E)$.

3. THEOREME. – *Pour que* X *soit biréticulé, il faut et il suffit qu'il ait au moins un prédual réticulé.*

Démonstration. – La condition est nécessaire puisque $L_c(X)$ est un prédual de X (lemme 3.16 de [2]). Réciproquement, soit E un prédual réticulé de X. Supposons d'abord que E_+^* sépare les points de E. D'après le théorème 23.15 de [5], il revient au même de dire que le cône positif E_+ de E est fermé pour $\sigma(E, E_+^* - E_+^*)$. Alors,

(*) Equipe de Recherches associée au C.N.R.S. n° 294.

d'après l'exemple 1.11 de [2], E_+^*, donc aussi X, est biréticulé. Supposons maintenant que E_+^* ne sépare plus, à priori, les points de E. Considérons l'intersection I des noyaux des éléments de E_+^*. Montrons que I est un idéal d'ordre de E. D'abord, il est clair que $I_+ = I \cap E_+$ est une face de E_+. Reste à voir que I est positivement engendré. Soit donc $x \in I$. Montrons que x_+ et $x_- \in I$. Supposons par exemple que $x_+ \notin I$. Alors, il existe $L \in E_+^*$ telle que $L(x_+) > 0$. D'après un résultat classique (th. 2.6.4 de [4]), il existe $L' \in E_+^*$ telle que $0 \leqslant L' \leqslant L$, $L'(x_+) = L(x_+) > 0$ et $L'(x_-) = 0$. Alors $L'(x) = L'(x_+) > 0$, ce qui contredit la définition de I. Ainsi, I est un idéal d'ordre et $F = E/I$ est un espace vectoriel réticulé (prop. 2.2.13 de [4]). Ainsi F est un prédual de X tel que E_+^* sépare les points de F. Par suite, comme on l'a déjà vu, X est biréticulé.

4. Cela conduit à la définition suivante : on dit que X est *biréticulé* s'il possède un prédual réticulé. Cette définition équivalente à la définition initiale par le théorème précédent est particulièrement agréable en ce sens qu'elle évite toute référence à l'espace $L_c(X)$, parfois mal commode à déterminer.

5. Inversement cette définition pose au moins un problème que nous allons examiner : reconnaître $L_c(X)$ parmi les préduaux de X.

Dans ce qui suit, si E est un espace vectoriel réticulé, on pose $E_b = E_+^* - E_+^*$.

6. LEMME. – *Soit* E *un espace vectoriel réticulé tel que* E_b *sépare les points de* E. *Considérons l'application canonique* j *de* E *dans* E^{**} *et l'application* i de E *dans* $L_c(E_+^*)$ *définie par* $i(e) = j(e) \mid E_+^*$. *Alors* i *est une injection linéaire telle que*

$$i(e \vee f) = \sup_a (i(e), i(f)) \quad (\forall e, f \in E)$$

où $\sup_a (i(e), i(f))$ *désigne la borne supérieure de* $i(e)$ *et* $i(f)$ *dans* $L_c(E_+^*)$.

Démonstration. – Que i soit une injection linéaire tient à ce que E^* sépare les points de E. Par ailleurs, i conserve l'ordre, c'est-à-dire que : $e \geqslant 0$ si et seulement si $i(e) \geqslant 0$ ($\forall e \in E$). Cela étant posons $1 = \sup_a (i(e), i(f))$. On a $i(e \vee f) \geqslant 1$. Si $H = \{h \in E ; i(h) \geqslant 1\}$, on a :

$$1 = \inf \{i(h) ; h \in H\}, \tag{6.1}$$

par un théorème d'approximation bien connu (cf. p. 87 de [1]). Mais, si $h \in H$, on a $i(h) \geqslant i(e), i(f)$, donc, comme i conserve l'ordre, on a $h \geqslant e \vee f$. De (6.1) on déduit l'égalité annoncée : $i(e \vee f) = 1$.

7. DEFINITION. – (G. Choquet). *On dit qu'un espace vectoriel ordonné* E *est intervallement-complet, en abrégé inter-complet si, tout filtre sur* E *ayant une base formée d'intervalles d'ordre, de Cauchy pour la topologie* $\sigma(E, E_b)$, *est convergent, pour* $\sigma(E, E_b)$, *vers un point* e *de* E.

Une autre formulation de cette définition est la suivante : Si A (resp. B) est une famille filtrante croissante (resp. décroissante) de points de E telle que :

$$\sup \{L(a) ; a \in A\} = \inf \{L(b) ; b \in B\} \quad (\forall L \in E_+^*)$$

il existe $e \in E$ tel que : $a \leqslant e \leqslant b$, $(\forall a \in A, \forall b \in B)$.

8. *Exemples.* – Tout espace complètement réticulé est trivialement inter-complet. Tout espace réticulé qui est un Fréchet ordonné normal est inter-complet (cf. [3]).

9. THEOREME. – *Soit* E *un espace vectoriel réticulé tel que* E_+^* *sépare les points de* E. *Pour que* E *soit isomorphe, en tant qu'espace vectoriel ordonné, à* $L_c(E_+^*)$ *il faut et il suffit qu'il soit inter-complet.*

Démonstration. – Comme l'inter-complétude se conserve par isomorphisme, la condition est nécessaire. Inversement, supposons E inter-complet et considérons l'injection linéaire i de E dans $L_c(E_+^*)$ définie au lemme précédent. Montrons qu'elle est surjective, ce qui achevera la démonstration. Fixons $1 \in L_c(E_+^*)$ et posons $A = \{e \in E : i(e) \leqslant 1\}$ et $B = \{e \in E : i(e) \geqslant 1\}$. Par le lemme précédent, on voit que A est filtrante croissante et B filtrante décroissante ; et par le théorème d'approximation déjà utilisé (p. 87 de [1]), on a

$$\sup \{L(a) ; a \in A\} = 1(L) = \inf \{L(b) ; b \in B\} \quad (\forall L \in E_+^*) \tag{9.1}$$

Comme E est inter-complet, il existe $e \in E$ tel que $a \leqslant e \leqslant b$ ($\forall a \in A$, $\forall b \in B$). Par (9.2) cela impose $i(e) = 1$.

Pour terminer donnons le résultat suivant qui semble utile pour déterminer l'espace inter-complet associé à un espace vectoriel réticulé :

10. PROPOSITION. – *Soient* E *(resp.* F*) un espace vectoriel réticulé tel que* E_+^* (resp. F_+^*) *sépare les points de* E (resp. F) *et i une injection linéaire de* E *dans F conservant l'ordre. On suppose que* :

i) F *est inter-complet*
ii) $i(E)$ *est cofinal dans* F
iii) $i(E)$ *est dense dans* F *pour la topologie* $\sigma(F, F_b)$.

Alors, F *est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel ordonné, à* $L_c(E_+^*)$.

Démonstration. – Considérons l'application $\hat{\imath}$ de F_b dans E_b définie par : $\hat{\imath}(L) = L \circ i \, (\forall L \in F_b)$. Puisque i est linéaire, $\hat{\imath}$ est linéaire. Puisque i est une injection, il résulte de iii) que $\hat{\imath}$ est injective. Puisque en outre, i conserve l'ordre, il résulte du théorème d'extension des formes linéaires positives (th. 1.6.1 de [4]) que $\hat{\imath}$ est injective et conserve l'ordre. Sa restriction à F_+^* est donc un isomorphisme du cône F_+^* sur E_+^*. Par ii), c'est même un isomorphisme lorsqu'on munit F_+^* (resp. E_+^*) de la topologie faible $\sigma(F_+^*, F)$ (resp. $\sigma(E_+, E)$). Les espaces $L_c(E^*)$ et $L_c(E_+^*)$ sont alors isomorphes en tant qu'espaces ordonnés et la conclusion résulte du théorème précédent.

11. *Problème.* – On pourrait affaiblir les hypothèses de certains de nos énoncés, par exemple le théorème 9, si l'on pouvait répondre positivement au problème suivant, du moins dans le cas où E_+^* est biréticulé :

Problème. – Soit E un espace vectoriel ordonné, inter-complet et séparé par E_+^*. Est-ce que E est isomorphe à $L_c(E_+^*)$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. 1 et 2. Paris, Hermann, 1966 (A.S.I. 1189).

[2] A. GOULLET de RUGY, La théorie des cônes biréticulés, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), 21, 4 (1971), 1-64.

[3] A. GOULLET de RUGY, Un théorème du genre Andô-Edwards pour les Fréchet ordonnés, *Pac. J. of Math.*, 46,1 (1973), 155-166.

[4] G. JAMESON, Ordered linear spaces, Berlin, Springer-Verlag 1970, (*Lectures notes in mathematics* 141).

[5] KELLEY-NAMIOKA, Linear Topological Spaces, Princeton, Van Nostrand, 1963.

Manuscrit reçu le 7 septembre 1973
accepté par G. Choquet.

Alain GOULLET de RUGY,
Equipe d'Analyse et Théorie du Potentiel
Université de Paris VI
75005 – Paris.