ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HENRI HOGBE-NLEND

Topologies et bornologies nucléaires associées. Applications

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 4 (1973), p. 89-104
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_4_89_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 4 (1973), 89-104.

TOPOLOGIES ET BORNOLOGIES NUCLÉAIRES ASSOCIÉES APPLICATIONS

par Henri HOGBE-NLEND

Introduction.

Soit E un espace localement convexe séparé (elcs) (resp. un espace bornologique convexe séparé (ebcs) [5] complet). Il existe sur E une topologie (resp. une bornologie) nucléaire qui est la plus fine (resp. la moins fine) de toutes les topologies (resp. bornologies) nucléaires sur E moins fines (resp. plus fines) que la topologie (resp. bornologie) donnée sur E. On l'appelle la topologie (resp. bornologie) nucléaire associée à E ou associée à la topologie (resp. bornologie) de E. Le présent article est consacré à l'étude de cette topologie (resp. bornologie). La topologie (resp. bornologie) nucléaire associée peut se construire explicitement de la manière suivante : soit d'abord $(E, \mathcal{B})$ un ebc complet [5]. Une partie A de E est bornée pour la bornologie nucléaire associée à E si et seulement si il existe une suite croissante $(A_n)(n = 1, 2, \ldots)$ de disques bornés de $(E, \mathcal{B})$ et des injections nucléaires $E_{A_n} \to E_{A_{n+1}}$ telles que A soit absorbé par A_1. Soit maintenant F un elcs et $E = F'$ son dual muni de la bornologie équicontinue. La topologie nucléaire associée à F est la topologie de la convergence uniforme sur la bornologie nucléaire associée à $E = F'$. Une construction interne directe de cette topologie en terme de voisinages est possible et immédiate : elle est duale de la construction précédente. L'espace E étant un ebc complet, il résulte du théorème de Kömura-bornologique ([5] p. 86) et de sa réciproque ([5] théorème 1; p. 85) que la bornologie nucléaire associée sur E est identique à la bornologie à décroissance rapide ([5] p. 84) de E, notée $s(E)$. Il en résulte que la topologie nucléaire associée sur un elcs E n'est autre que la topologie de la convergence uniforme sur les parties à décroissance rapide [5] de E', dual de E muni de la bornologie équicontinue. On notera $s(E, E')$ cette topologie. Son étude est alors naturellement basée sur la notion fondamentale *de bornologie à décroissance rapide.* Résumons nos principaux résultats :

Aux paragraphes 1, 2 et 3 nous montrons que la classe des espaces ultrabornologiques est strictement équivalente à la classe des duals forts d'espaces nucléaires complets (resp. duals forts d'espaces de Schwartz complets; resp. duals forts d'espaces infra-Schwartz (§ 1) complets. Ce résultat est basé sur la démonstration de la réciproque d'un théorème de L. Schwartz : le dual fort d'un espace de Schwartz complet est ultrabornologique ([12] p. 43). A priori la réciproque de ce théorème semblait peu attendue car (théorème 2-1) les duals forts d'espaces nucléaires complets sont des limites inductives séparées de familles (E_α) d'espaces de Banach, les injections $E_\alpha \rightarrow E_\beta$ étant *nucléaires* donc apparemment, des cas très particuliers d'espaces ultrabornologiques.

Cette réciproque permet de fournir très simplement un exemple d'espace nucléaire complet dans le dual fort duquel il existe des suites de Cauchy non convergentes (Remarque 3.8), problème posé et résolu par A. Grothendieck [4] sur la base de techniques de produits tensoriels topologiques. Il permet également d'établir diverses propriétés de permanence des espaces duals forts d'espaces nucléaires complets puisque ces derniers ne sont autres que les espaces ultrabornologiques.

Le § 4 est relatif au problème de la conucléarité ([5] p. 69) des espaces nucléaires *complets* à bornés métrisables. Les techniques développées dans les paragraphes précédents nous permettent ici de résoudre par la négative le problème suivant : tout espace nucléaire *complet* à bornés métrisables a-t-il nécessairement un dual fort nucléaire. On infirme ainsi la forme achevée d'une conjecture de A. Grothendieck ([4], Chap. II; p. 42; Remarque 7).

Le § 5 traite des relations entre la topologie faible et la topologie nucléaire associée sur un espace localement convexe séparé. Des résultats obtenus ici améliorent certains résultats de Bourbaki [1].

Le § 6 introduit les notions de topologie et bornologie de Schwartz associées à partir des suites bornologiquement convergentes et donne un critère général de réflexivité « à la Kôthe » [11]. On termine au § 7 en donnant diverses caractérisations des espaces ultrabornologiques basées sur la notion de bornologie à décroissance rapide, caractérisations simples qui améliorent pratiquement tous les critères analogues connus ([1], [2], [3], [11]).

Certains de nos résultats ont été annoncés aux Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris [6] et [7]. Notre terminologie usuelle est généralement celle de Bourbaki [1] sauf sur la définition des espaces ultrabornologiques, elcs limites inductives séparées d'espaces de Banach. Nous supposons connues les notions élémentaires de Bornologie [5].

1. Dual ultra fort d'un espace infra-Schwartz.

Soit E un espace localement convexe séparé. On appelle [13] *topologie ultraforte* sur son dual E' et on note TE', la topologie dont une base de voisinages de zéro est formée de disques (convexes équilibrés) absorbant les parties équicontinues de E'. C'est la topologie limite inductive localement convexe des espaces de Banach E_B lorsque B parcourt l'ensemble des disques équicontinus faiblement fermés de E' autrement dit la topologie bornologique associée à la bornologie équicontinue de E'. Cette topologie est donc, par définition, une topologie ultrabornologique et est toujours plus fine que la topologie forte sur E'. Le *dual ultrafort* de E est son dual E' muni de la topologie ultraforte. On note $(E')^\times$ le dual topologique du dual ultrafort de E. C'est l'espace des formes linéaires bornées sur les parties équicontinues de E'. On dit que E est ε- réflexif si $E = (E')^\times$. Un tel espace est a fortiori semi-réflexif.

Rappelons qu'un espace localement convexe séparé E est dit *infra-Schwartz* [5] en abrégé *infra-*(S) si toute application linéaire continue de E dans un espace de Banach est faiblement compacte. De nombreux espaces usuels de l'Analyse sont infra-Schwartz et non Schwartz. Par exemple tout espace (DF) réflexif ou tout dual fort d'espace ($\mathscr{L}$F) réflexif est du type infra-(S). Cette classe a les mêmes propriétés de stabilité que les espaces nucléaires. Une autre propriété importante de ces espaces est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit* E *un espace infra-*(*S*) *complet. Le dual fort et le dual ultrafort de* E *sont identiques.*

Démonstration. — Nous allons montrer tout d'abord que E est ε-réflexif. Soit $u \in (E')^{\times}$. En vertu du théorème de complétion de Grothendieck, il suffit de montrer que la restriction de u à tout disque équicontinu faiblement fermé de E′ est continue pour la topologie $\sigma(E', E)$. Par hypothèse, un tel disque A est faiblement compact dans un espace de Banach E'_B où B est un disque équicontinu faiblement fermé de E′. Donc sur A la topologie $\sigma(E', E)$ coïncide avec la topologie affaiblie de E'_B. Mais u est continue sur E'_B donc continue sur A muni de $\sigma(E', E)$ donc $u \in E$ et par conséquent E est ε-réflexif. Le théorème sera alors conséquence du résultat général suivant, bien connu :

LEMME 1.2. — *Soit* E *un espace ε-réflexif. Le dual fort et le dual ultrafort de* E *sont identiques.*

Démonstration du lemme. — L'égalité algébrique $E = (E')^{\times} = (TE')$ prouve que la topologie TE′ est compatible avec la dualité entre E′ et E donc est moins fine que la topologie de Mackey $\tau(E', E)$. Mais $\tau(E', E) = \beta(E', E)$ car E est semi-réflexif et TE′ est toujours plus fine que la topologie forte $\beta(E', E)$, Ces deux topologies sont donc identiques ce qui démontre le lemme et achève la démonstration du théorème 1.1.

On tire alors du théorème 1.1 le corollaire suivant; qui apparemment améliore le théorème de L. Schwartz (cf. Introduction) mais qui en réalité lui est équivalent comme on le prouvera dans la suite (théorème 3.1).

COROLLAIRE 1.3. — *Le dual fort d'un espace infra-*(*S*) *complet est ultrabornologique.*

En particulier, le dual fort d'un espace nucléaire complet est ultrabornologique. Au paragraphe 3 suivant nous démontrerons la réciproque de cette assertion. Tout d'abord, donnons une description interne du type d'espace ultrabornologique qui représente *a priori* les duals forts d'espaces infra-(S) complets.

2. Structure interne du dual fort d'un espace nucléaire complet.

THÉORÈME 2.1. — *Soit* E *un espace localement convexe. Les deux assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) E *est le dual fort d'un espace nucléaire complet*; (*resp. d'un espace de Schwartz complet*; *resp. d'un espace infra-Schwartz complet*).

(ii) E *est limite inductive séparée d'une famille* (E_α) *d'espaces de Banach indexée par un ensemble d'indices filtrant supérieurement par des applications injectives* $E_\alpha \to E_\beta$ *pour* $\alpha \leqslant \beta$ *nucléaires* (*resp. compactes*; *resp. faiblement compactes*).

Démonstration. — Il est clair, en vertu du théorème 1.1 que (i) entraîne (ii) en prenant pour (E_α) la famille d'espaces de Banach engendrée par les disques équicontinus faiblement fermés. Inversement, supposons (ii). Soit E_0 l'espace vectoriel E, limite inductive bornologique des E_α, c'est-à-dire l'espace vectoriel E muni de la bornologie $\mathscr{B}_0$ engendrée par les boules unités des espaces E_α. Une forme linéaire sur E est continue si et seulement si elle est bornée sur les éléments de $\mathscr{B}_0$. L'espace E_0 est donc un ebc infra-(S) séparé par son dual bornologique $E_0^\times$ donc est un ebc réflexif ([5] prop. 1; p. 59) autrement dit on a l'égalité bornologique $E_0 = (E_0^\times)'$ où $E_0^\times$ est muni de sa topologie naturelle (convergence uniforme sur les éléments de $\mathscr{B}_0$) et $(E_0^\times)'$ de sa bornologie équicontinue. Soit $F = E_0^\times$. La bornologie équicontinue du dual de F étant du type infra-(S) (resp. de Schwartz, resp. nucléaire; cf. [5], chap. VII et VIII) l'espace localement convexe séparé F est infra-(S) (resp. de Schwartz, resp. nucléaire) et il est complet. En vertu du théorème 1.1, il est clair que son dual fort est $E(F'_\beta = TF' = T(E_0^\times)' = TE_0 = E$ notations de [5]) d'où le théorème.

Remarque 2.2. — Dans le cas où l'ensemble d'indices est dénombrable le théorème 2.1 décrit la structure interne du dual fort d'un espace de Fréchet nucléaire (resp. de Fréchet-Schwartz, resp. de Fréchet infra-Schwartz).

3. Espaces ultrabornologiques et duals forts d'espaces nucléaires complets.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de démontrer la réciproque du corollaire du théorème 2.1 :

Théorème 3.1. — *Tout espace ultrabornologique* (*en particulier tout espace de Banach*) *est dual fort d'un espace nucléaire complet.*

Démonstration. — Soit E un espace ultrabornologique. E est donc limite inductive localement convexe d'une famille (E_B) d'espaces de Banach de boule unité B. Soit $\mathscr{B}_0$ la bornologie limite inductive des E_B et notons E_0 l'espace vectoriel E muni de cette bornologie. Une famille H de formes linéaires sur E est équicontinue si et seulement si elle est bornée sur les éléments de $\mathscr{B}_0$. En particulier si l'on note $E_0^\times$ l'espace des formes linéaires sur E bornées sur les éléments de $\mathscr{B}_0$, on a l'égalité algébrique $E_0^\times = E'$. Soit $s(E_0)$ la bornologie à décroissance rapide de E_0 ([5]; p. 84) et E'_s l'espace vectoriel E' muni de la $s(E_0)$-topologie. L'espace E'_s est un espace nucléaire complet : en effet, soit $(E, s(E_0))^\times$ l'espace des formes linéaires sur E bornées sur les éléments de $s(E_0)$; on a l'égalité algébrique $E_0^\times = (E, s(E_0))^\times$ ([5]; prop. 1; p. 85 généralisé par le lemme 3.2 ci-dessous). D'où E'_s est algébriquement et topologiquement égal à $(E, s(E_0))^\times$ lorsqu'on munit ce dernier espace de la $s(E_0)$-topologie. Il en résulte donc que E'_s est complet et comme la bornologie $s(E_0)$ est nucléaire ([5]; th. 1; p. 85) cet espace localement convexe est nucléaire, d'où notre assertion. Il suffit donc de montrer que E est le dual de E'_s. Algébriquement, E coïncide bien avec le dual de $E'_s = (E, s(E_0))^\times$ en vertu du théorème de Mackey-Arens. Il suffit donc de montrer que les bornés de E'_s sont précisément les parties équicontinues de E'.

Soit H un borné de E'_s. C'est une partie de $E_0^\times$ bornée sur toute suite à décroissance rapide de E_0 ; elle est donc bornée sur tout borné de E_0 (lemme 3.2, ci-dessous). L'ensemble H est donc une partie équicontinue de E'. Comme inversement toute partie équicontinue de E' est évidemment bornée dans E'_s, le théorème 3.1 est alors complètement démontré moyennant le lemme suivant :

LEMME 3.2. — *Soient* E *un espace vectoriel bornologique et* F *un espace localement convexe. Toute famille* H *d'applications linéaires de* E *dans* F *bornée sur les suites à décroissance rapide de* E *est bornée sur tout borné de* E.

Démonstration. — Supposons H non bornée sur un borné B de E. Il existe alors un voisinage disque V de zéro dans F, de jauge $\|.\|$ tel que pour tout entier n, il existe $h_n \in$ H et $x_n \in$ B tel que $\|h_n(x_n)\| > e^{2n}$. La suite $y_n = e^{-n}x_n$ est à décroissance rapide dans E et H n'est pas bornée sur (y_n).

Remarque 3.3. — Le lemme 3.2 peut être amélioré, suivant les besoins, en considérant des suites à décroissance de plus en plus rapide [8], [9] par exemple à « décroissance exponentielle ».

Remarque 3.4. — Le lemme 3.2 est en général faux si l'on remplace la bornologie topologique de F par une bornologie convexe arbitraire. En effet soit E un espace de Banach de dimension infinie et F = (E, s) l'espace E muni de sa bornologie à décroissance rapide. L'identité E $\rightarrow$ F est bornée sur les suites à décroissance rapide de E sans être bornée sur la boule unité de E.

La conjonction du théorème 3.1 et de sa réciproque (corollaire du théorème 1.1) entraîne :

THÉORÈME 3.5. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

i) E *est ultrabornologique*;

ii) E *est le dual fort d'un espace nucléaire complet*;

iii) E *est le dual fort d'un espace de Schwartz complet*;

iv) E *est le dual fort d'un espace infra-Schwartz complet.*

Remarque 3.6. — On connaît les propriétés de permanence classiques des espaces ultrabornologiques, notamment leur stabilité par limite inductive arbitraire et par quotient séparé. Le théorème ci-dessus assure des propriétés de permanence analogues pour les classes d'espaces envisagées en (ii), (iii), (iv); par exemple toute limite inductive séparée d'une famille d'espaces (E_i), isomorphes à des duals forts d'espaces infra-Schwartz complets (resp. de Schwartz complets, resp. nucléaires complets) est nécessairement du même type.

Remarque 3.7. — On peut obtenir beaucoup plus facilement une caractérisation du type ci-dessus des espaces tonnelés; *un espace localement convexe séparé est tonnelé si et seulement si il est le dual fort d'un espace nucléaire quasi-complet.* En effet, d'une part, tout espace tonnelé est le dual fort de son dual faible, espace nucléaire quasi-complet (et non complet dès que la topologie de E n'est pas la topologie localement convexe la plus fine); d'autre part il est bien connu que le dual fort d'un espace semi-réflexif est tonnelé d'où notre assertion. Comme il existe des espaces tonnelés non bornologiques, il existe des espaces duals forts d'espaces nucléaires quasi-complets et non duals forts d'espaces nucléaires complets. Ceci entraîne en particulier l'existence d'espaces nucléaires quasi-complets E et des bornés du complété E adhérents à aucun borné de E, assertion qu'on peut d'ailleurs vérifier directement.

Remarque 3.8. — Il semble non trivial de donner des exemples d'espaces nucléaires complets à duals forts non quasi-complets, ce qui implique notamment que de tels espaces ne sont pas tonnelés. A. Grothendieck a construit de tels espaces en se basant sur des techniques fines de produits tensoriels topologiques ([4]; chap. II; § 3; n° 3; exemple 4 (avec F nucléaire) et § 4; en particulier n° 1; prop. 14). *Le théorème* 3.1 *permet de donner un exemple simple d'espace nucléaire complet dans le dual fort duquel il existe des suites de Cauchy au sens de Mackey et non Mackey-convergentes* (c'est-à-dire des suites de Cauchy bornologiques non bornologiquement convergentes); *a fortiori* il existe dans ce dual des suites de Cauchy non convergentes : Soit E un espace localement convexe séparé limite inductive localement convexe d'une suite (E_n) d'espaces de Banach et tel qu'il existe dans E un borné inclus dans aucun E_n (cf. par exemple [10] p. 434; exemple 6). Un tel borné n'est donc contenu dans aucun disque borné complétant de E en vertu du théorème du graphe fermé. Par conséquent, la bornologie de E n'est pas complète et comme c'est une bornologie topologique il existe dans E des suites de Cauchy-Mackey non Mackey-convergentes. Comme E est ultrabornologique, E est le dual fort d'un espace nucléaire complet (th. 3.1) d'où notre assertion.

4. Espaces nucléaires complets à bornés métrisables.

Les techniques développées aux paragraphes précédents permettent de démontrer qu'un espace localement convexe séparé nucléaire et *complet* ayant des bornés métrisables n'est pas nécessairement conucléaire, c'est-à-dire n'a pas nécessairement un dual fort nucléaire et de détruire ainsi la « forme achevée » d'une conjecture de A. Grothendieck ([4]; chap. II; p. 42, remarque 7). Nous avons déjà remarqué ailleurs qu'un espace nucléaire mais *non complet* à bornés métrisables n'était pas nécessairement conucléaire (cf. [5]; p. 89). Nous aurons besoin des résultats auxiliaires suivants :

PROPOSITION 4.1. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé bornologique. Son dual* E′ *muni de la topologie de la convergence uniforme sur les suites à décroissance rapide de* E *est complet.*

La démonstration de cette proposition se fait par un raisonnement classique à partir de la condition « V.F. » (voisinages fermés) en tenant compte du fait qu'une forme linéaire sur E est bornée dès qu'elle est bornée sur les suites à décroissance rapide de E (lemme 3.2). Ce résultat améliore un résultat de G. Köthe [11];

Soit E un espace localement convexe séparé, bornologiquement complet, c'est-à-dire que dans E toute suite de Cauchy au sens de Mackey est Mackey-convergente ce qui est réalisé si E est semi-complet. Notons E'_s le dual de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les suites à décroissance rapide de E, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. — *L'espace* E'_s *est nucléaire.*

Démonstration. — La topologie de E'_s a pour base les polaires dans E' des enveloppes disquées fermées A des suites à décroissance rapide de E. Comme la bornologie de E est complète, toute suite à décroissance rapide de E converge vers zéro dans un Banach E_B. Son enveloppe disquée fermée dans E_B est donc compacte dans E_B, donc dans E donc identique à A. Or on sait que dans un espace de Banach, l'enveloppe disquée fermée d'une suite (x_n) convergeant vers zéro est égale à son enveloppe l^1-disquée ([5]; p. 82) qui est l'ensemble des sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ où (λ_n) appartient à la boule unité de l^1. Donc l'ensemble des disques A est précisément une base de la bornologie à décroissance rapide associée à la bornologie de von Neumann de E ([5]; p. 84). Comme cette bornologie est nucléaire ([5]; p. 85; th. 1), elle engendre par polarité dans E' une topologie nucléaire, d'où la proposition.

4.3. — *Application à la conjecture de Grothendieck.*

Soit F un espace de Banach de dimension infinie et séparable et $E = F'_s$ le dual de F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les suites à décroissance rapide de F. L'espace F'_s est nucléaire (prop. 4.2) et complet (prop. 4.1). Une partie de F'_s est bornée si et seulement si elle est bornée sur les suites à décroissance rapide de F, donc (lemme 3.2) si et seulement si elle est bornée sur tout borné de F, c'est-à-dire est équicontinue. Or, F étant séparable, les parties équicontinues de F' sont métrisables pour la topologie faible, donc métrisables pour la topologie de la convergence compacte. Comme la topologie F'_s est intermédiaire entre ces deux topologies, les parties équicontinues de F', c'est-à-dire les bornés de F'_s sont métrisables dans F'_s. L'espace E est donc un espace nucléaire *complet* à bornés métrisables et il est clair que son dual fort est F, donc non nucléaire.

5. Topologie nucléaire associée et topologie faible.

Soit E un espace localement convexe séparé. Il existe sur E deux topologies nucléaires naturelles; la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$ et la topologie nucléaire associée $s(E, E')$. De même si E est bornologiquement complet, on peut considérer sur son dual la topologie $\sigma(E', E)$ et la topologie $s(E', E)$ de la convergence uniforme sur les suites à décroissance rapide de E, topologies qui sont nucléaires. Il est naturel de se demander à quelles conditions ces deux topologies sont identiques. Les réponses sont conséquences immédiates du lemme 3.2.

PROPOSITION 5.1. — *Les notations étant celles ci-dessus, pour que les deux topologies* $s(E', E)$ *et* $\sigma(E', E)$ *sur* E' *soient identiques, il faut (et il suffit) que tout borné de* E *soit de rang fini.*

Démonstration. — En effet, les deux topologies sur E' sont identiques si et seulement si la bornologie à décroissance rapide de E est identique à sa bornologie de dimension finie (bornologie somme directe de droites). Comme celle-ci est une bornologie topologique, tout borné de E est alors de rang fini (lemme 3.1) d'où la proposition.

COROLLAIRE 5.2. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé, bornologique et semi-complet. Si les topologies* $\sigma(E', E)$ *et* $s(E', E)$ *sont identiques,* E *est isomorphe à une somme directe topologique de droites (réciproque évidente).*

Démonstration. — En vertu de la proposition 5.1, la bornologie de von Neumann de E est isomorphe à la bornologie d'un espace $\mathbf{R}^{(I)}$. Comme E est bornologique, les topologies de E et de $\mathbf{R}^{(I)}$ sont isomorphes.

Remarque 5.3. — Le corollaire de la prop. 5.1 améliore et démontre simplement un résultat de Bourbaki ([1]; chap. VI; § 2; Ex : 4). On obtient des améliorations de la proposition 5.1 et de son corollaire suivant les améliorations voulues du lemme 3.2 (cf. remarque 3.3).

Un raisonnement analogue à celui qui précède donne immédiatement :

Proposition 5.4. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé, métrisable. Les topologies* $\sigma(E, E')$ *et* $s(E, E')$ *coïncident sur* E *(si et) seulement si* E *est isomorphe à un sous espace dense d'un produit dénombrable de droites.*

En particulier *si* E *est un espace de Banach de dimension infinie, la topologie nucléaire associée sur* E *et la topologie affaiblie de* E *ne sont jamais identiques.*

6. Topologies et bornologies de Schwartz associées.

Soit E un espace bornologique convexe. On dit qu'une partie K de E est *strictement compacte* dans E si elle est compacte dans un E_B, B disque borné de E. L'ensemble des disques strictement compacts de E engendre une bornologie convexe complète sur E dite *bornologie strictement compacte* de E, on définit de façon analogue la bornologie strictement faiblement compacte de E. Supposons E complet. L'enveloppe l^1-disquée ([5]; p. 82) dans E de toute suite bornologiquement convergente de E est strictement compacte dans E et toute partie strictement compacte de E est contenue dans l'enveloppe l^1-disquée d'une telle suite. Autrement dit, si l'on appelle (c_0)-*bornologie* de E la bornologie sur E engendrée par les enveloppes l^1-disquées des suites bornologiquement convergentes, la (c_0)-bornologie coïncide (E étant complet) avec la bornologie strictement compacte de E. Les assertions qui suivent montrent que *la* (c_0)-*bornologie est aux espaces de Schwartz ce que la* (s)-*bornologie est aux espaces nucléaires.* La vérification de ces assertions est immédiate.

Proposition 6.1. — *Soit* E *un ebc complet. La* (c_0)-*bornologie de* E *est de type* (S), *c'est-à-dire une bornologie de Schwartz.*

Proposition 6.2. — *Toute partie bornée d'un ebc de Schwartz est contenue dans l'enveloppe* l^1-*disquée d'une suite bornologiquement convergente.*

Les propositions 6.1 et 6.2 entraînent aussitôt la caractérisation suivante des ebc de Schwartz :

PROPOSITION 6.3. — *Soit* E *un ebc complet.*
Pour que E *soit de Schwartz, il faut et il suffit que sa bornologie coïncide avec sa* c_0*-bornologie.*

COROLLAIRE 6.4. — *Soit* E *un ebc complet. Toute application linéaire bornée d'un ebc de Schwartz* F *dans* E *est bornée de* F *dans* E *muni de sa* c_0*-bornologie. En particulier, la* c_0*-bornologie de* E *est la moins fine des bornologies de Schwartz sur* E *plus fines que la bornologie initiale de* E.

La c_0-bornologie d'un ebc complet E sera donc légitimement appelée la *bornologie de Schwartz associée* à E.

COROLLAIRE 6.5. — *La* (c_0)*-bornologie de la* (c_0)*-bornologie de* E *est identique à la* (c_0)*-bornologie de* E, *autrement dit* $c_0\,(c_0(\mathrm{E})) = c_0(\mathrm{E})$.

Soient maintenant E *un espace localement convexe séparé* et E′ son dual topologique muni de la bornologie équicontinue. On note $c_0(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ la topologie sur E de la convergence uniforme sur les disques strictement compacts de E′. C'est, en vertu de ce qui précède la topologie de Schwartz la plus fine de toutes les topologies de Schwartz moins fines que la topologie initiale de E. On l'appellera donc légitimement *la topologie de Schwartz associée* à E. On peut faire pour cette topologie une étude parallèle à celle faite dans le cas nucléaire. Nous ne le ferons pas ici, les démonstrations étant analogues et beaucoup plus faciles. Signalons toutefois le critère suivant de réflexivité à la Köthe [11]. L'équivalence entre (i) et (iii) est connue (cf. [14]).

PROPOSITION 6.6. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) E *est* ε*-réflexif ;*

(ii) E *est complet pour sa topologie nucléaire associée ;*

(iii) E *est complet pour sa topologie de Schwartz associée ;*

(iv) E *est complet pour sa topologie infra-Schwartz associée.*

Démonstration. — Le complété de E pour sa topologie nucléaire (resp. de type (S), resp. infra (S)) associée est précisément $(E')^{\times}$ en vertu de la conjonction du théorème de complétion de Grothendieck; du théorème de Mackey-Arens et du lemme 3.2 d'où le théorème.

En particulier *un espace de Fréchet est réflexif si et seulement si il est complet pour sa topologie nucléaire (resp. Schwartz, resp. infra-Schwartz) associée.*

7. Caractérisations des espaces ultrabornologiques.

Nous donnons dans ce paragraphe diverses caractéristiques des espaces ultrabornologiques en terme de suites à décroissance rapide.

PROPOSITION 7.1. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé.*

Pour que E *soit ultrabornologique, il faut et il suffit que* E *soit bornologique et qu'il existe sur* E *une bornologie complète compatible avec la dualité (bornologique) entre* E *et l'espace des formes linéaires bornées sur* E.

Démonstration. — La nécessité est claire. Inversement, soit $\mathcal{B}_0$ une bornologie complète compatible; E_0 l'espace E muni de la bornologie $\mathcal{B}_0$ et $E_0^{\times}$ son dual bornologique. On a donc l'égalité topologique $E = \tau(E, E_0^{\times}) = \tau(E_0, E_0^{\times})$ et cette dernière topologie est ultrabornologique d'où la proposition.

Soit E un espace localement convexe séparé. S'il existe sur E une bornologie convexe complète $\mathcal{B}_0$ arbitraire compatible avec la dualité bornologique entre E et l'espace des formes linéaires bornées sur E, on dira pour abréger qu'il existe sur E une « bornologie complète compatible ».

La proposition 7.1 et le lemme 3.1 entraînent aussitôt :

PROPOSITION 7.2. — *Les notations étant celles ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) E *est ultrabornologique.*

(ii) E *possède une bornologie complète compatible* $\mathcal{B}_0$ *telle* *que, tout disque de* E *absorbant les éléments de* $\mathscr{B}_0$ *est un voisinage de zéro de* E.

(iii) E *possède une bornologie complète compatible telle que tout disque absorbant les suites à décroissance rapide de* $E_0 = (E, \mathscr{B}_0)$ *est un voisinage de zéro de* E.

(iv) E *possède une bornologie complète compatible telle que toute application linéaire de* E *dans un espace localement convexe séparé, bornée sur toute suite à décroissance rapide de* $E_0 = (E, \mathscr{B}_0)$ *est continue.*

Application. — Soit E un espace ultrabornologique. La bornologie engendrée par les disques complétants de E; la bornologie convexe compacte ou strictement compacte, la bornologie convexe faiblement compacte ou « strictement faiblement compacte » (§ 6), les bornologies à décroissance de plus en plus rapide associées à ces bornologies ou les bornologies engendrées par les suites bornologiquement convergentes pour ces bornologies... etc. sont des bornologies complètes compatibles, d'où les multiples critères « d'ultrabornologie », englobant pratiquement tous les critères analogues connus : A. Grothendieck ([3]; p. 199); M. de Wilde [2]; voir aussi Köthe [10] et Bourbaki [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Paris, 1964.

[2] M. De Wilde, Ultrabornological spaces and the closed graph theorem. *Bull. Soc. Roy. Se. Liège* (1971), nº 3-4, 116-118.

[3] A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques, Sao-Paulo, 1964.

[4] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mém. A.M.S., nº 16, (1966).

[5] H. Hogbe-Nlend, Théorie des Bornologies et Applications; Berlin; Springer-Verlag; Lectures Notes in Math. 213; 1971.

[6] H. Hogbe-Nlend, Sur un théorème de L. Schwartz. *C.R.A.S.*, t. 273; (1971); 1130-1131.

[7] H. Hogbe-Nlend, Sur la conucléarité des espaces nucléaires à bornés métrisables. *C.R.A.S.*, t. 273; (1971); 986-988.

[8] H. Hogbe-Nlend, Ultranucléarité et bornologie à décroissance très rapide; Paris, École Polytechnique Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1970-1971.

[9] H. Hogbe-Nlend, Sur les espaces ultranucléaires. Boll. U.M.I., (4), 5, (1972), 195-204.

[10] G. Kothe, Topological vector spaces I; Berlin; Springer-Verlag; (1969).
[11] G. Kothe, Une caractérisation des espaces bornologiques. Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle; Louvain; C.B.R.M.; (1961); 39-45.
[12] L. Schwartz, Théorie des distributions vectorielles. *Ann. Inst. Fourier*, Tomes VII et VIII; 1957-1958.
[13] W. Slowikowski, A topologisation of the conjugate space of locally convex linear space. Bull. Acad. Pol. des Sciences; cl. III; vol. V; n° 2; 1957; 113-115.
[14] I. A. Berezanski, Inductively reflexive, locally convex spaces. *Sov. Math. Dokl.* Vol. 9, n° 5, 1080-1082.

Manuscrit reçu le 21 novembre 1972.
Accepté par G. Choquet

Henri Hogbe-Nlend,
Département de Mathématiques,
Université de Bordeaux I,
33405 Talence.