ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES CHAZARAIN

ALAIN PIRIOU

Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 4 (1972), p. 193-237

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_4_193_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 4 (1972), 193-237.

CARACTÉRISATION DES PROBLÈMES MIXTES HYPERBOLIQUES BIEN POSÉS

par Jacques CHAZARAIN et Alain PIRIOU

SOMMAIRE

1. Introduction.

Récemment, R. Sakamoto [10] a démontré, sous une hypothèse dite de Lopatinski uniforme, l'existence et l'unicité de la solution du problème mixte hyperbolique dans des espaces de Sobolev convenables; mais cette hypothèse de Lopatinski uniforme exclut par exemple le cas de l'équation des ondes avec condition de dérivée oblique sur le bord. Dans ce travail, on se propose, en se restreignant au cas d'opérateurs homogènes à coefficients constants, d'étendre les résultats de [10] sous une hypothèse de Lopatinski non nécessairement uniforme et de caractériser les problèmes mixtes hyperboliques bien posés. Pour cela, on se ramène à un problème équivalent sur le bord en adaptant au cas hyperbolique la technique du projecteur de Calderòn.

Cet article est divisé en deux parties : résolution dans les espaces de fonctions C^∞, puis résolution dans les espaces de Sobolev, où on établit une inégalité de l'énergie dans laquelle la non uniformité de la condition de Lopatinski se traduit par une perte de régularité que l'on précise.

2. Énoncé des principaux résultats.

Précisons tout d'abord quelques notations. Le point générique de $\mathbf{R}^{n+1}$ est noté (x, y, t) avec $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, $t \in \mathbf{R}$; la variable duale de (x, y, t) est (ξ, η, τ); on pose aussi $z = (y, t)$, $\zeta = (\eta, \tau)$. Soit $\mathbf{R}_+^{n+1} = \{(x, y, t) \in \mathbf{R}^{n+1} | x > 0\}$; si $u \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}^{n+1})$ et $k \in \mathbf{N}$, on pose $\gamma_k u = (D_x^k u)|_{x=0}$ (avec $D_x = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$; $C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1})$ (resp. : $C_+^\infty(\mathbf{R}^n)$) désigne l'espace des fonctions $u = u(x, y, t)$ de $C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1})$ (resp. : des fonctions $v = v(y, t)$ de $C^\infty(\mathbf{R}^n)$) qui sont nulles pour $t < 0$; enfin, les espaces de fonctions à support compact sont indiqués par un zéro en indice (exemples : $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1})$).

Soit $P(D_x, D_y, D_t)$ un opérateur différentiel à coefficients constants homogène de degré m. On fait l'hypothèse

(A) | P est hyperbolique dans la direction du « temps » $N_0 = (0, 0, 1)$ et l'hyperplan $\{x = 0\}$ n'est pas caractéristique pour P.

On se donne μ' opérateurs différentiels homogènes à coefficients constants $B_j(D_x, D_y, D_t)$ ($j = 0, \ldots, \mu' - 1$; degré $B_j = b_j$) d'ordre au plus $m - 1$ par rapport à D_x. On considère le problème mixte $(*)$:

$$(*) \quad \begin{cases} P(D_x, D_y, D_t)u = f(x, y, t) & \text{pour } (x, y, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} \\ B_j(D_x, D_y, D_t)u|_{x=0} = g_j(y, t) & \text{pour } (y, t) \in \mathbf{R}^n; \\ j = 0, \ldots, \mu' - 1, \end{cases}$$

où on traduira éventuellement la nullité des données de Cauchy en imposant $u = 0$ pour $t < 0$.

Nous poserons

$$B_j(D_x, D_y, D_t) = \sum_{k=0}^{m-1} B_{j,k}(D_z)D_x^k \quad (j = 0, \ldots, \mu' - 1)$$

et nous considérerons la matrice

$$B(D_z) = (B_{j,k}(D_z))_{\substack{j=0,\ldots,\mu'-1 \\ k=0,\ldots,m-1}}$$

Il sera souvent commode d'exprimer les conditions aux limites dans $(*)$ sous la forme condensée $B(D_z)\gamma u = g$, avec $\gamma u = (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)$, $g = (g_0, \ldots, g_{\mu'-1})$.

Afin de caractériser les opérateurs-frontière B_j pour lesquels le problème $(*)$ est bien posé dans des sens convenables, il est utile d'introduire ce que nous appellerons la « matrice de Lopatinski ». Pour cela, désignons par Γ la composante connexe de N_0 dans l'ensemble des $N \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $P(N) \neq 0$; on sait (voir [4]) que Γ est un cône convexe ouvert et que P est hyperbolique par rapport à tout $N \in \Gamma$. Posons $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{\xi = 0\}$. Pour $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0$, désignons par $\xi_j^+(\zeta)$ ($j = 0, \ldots, \mu - 1$) les zéros en ξ, distincts ou non, du polynôme $P(\xi, \zeta)$ tels que $\operatorname{Im} \xi > 0$; il est facile de voir que le nombre total μ de ces zéros est indépendant de $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0$; suivant Agmon [2], on fait l'hypothèse

(B) | Le nombre μ' d'opérateurs-frontière intervenant dans $(*)$ est précisément μ.

Pour $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0$, posons $P^+(\xi, \zeta) = \prod_{j=0}^{\mu-1}(\xi - \xi_j^+(\zeta))$, et désignons par $B'_j(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{j,k}(\zeta)\xi^k$ le reste de la division euclidienne, entre polynômes en ξ, de $B_j(\xi, \zeta)$ par $P^+(\xi, \zeta)$ $(j = 0, \ldots, \mu - 1)$; nous appellerons matrice de Lopatinski (pour le problème $(*)$) la matrice carrée

$$B'(\zeta) = (B'_{j,k}(\zeta))_{j,k=0,\ldots,\mu-1}$$

Notons que son déterminant $R(\zeta)$ est précisément le déterminant de Lopatinski associé au système de polynômes en ξ $(P^+; B_j\ (j = 0, \ldots, \mu - 1))$ (voir [6]); enfin, lorsque la condition de Lopatinski $R(\zeta) \neq 0$ est vérifiée, désignons par $A(\zeta) = (A_{j,k}(\zeta))_{j,k=0,\ldots,\mu-1}$ la matrice inverse de la matrice de Lopatinski $B'(\zeta)$.

Pour étudier le problème $(*)$ dans les espaces de fonctions C^∞, introduisons la condition

(L)

Il existe un cône ouvert convexe $\tilde{\Gamma}_0$, avec

$$N_0 \in \tilde{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0,$$

tel que pour tout cône fermé épointé $K \subset \tilde{\Gamma}_0$ il existe $c > 0$ et $\theta \geqslant 0$ satisfaisant.

$$|R(\zeta)| \geqslant c|\operatorname{Im} \zeta|^\theta$$

pour

$$\zeta \in \mathbf{R}^n - iK \quad \text{et} \quad |\zeta| = 1.$$

Signalons que cette condition est réalisée dès que $R(z) \neq 0$ pour $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\tilde{\Gamma}_0$ (voir [3'], [8']).

Le but de la première partie de cet article est essentiellement d'introduire les opérateurs qui serviront à discuter le problème $(*)$ dans les espaces de Sobolev; toutefois, notons qu'on établira le

THÉORÈME 1. — *On se place sous les hypothèses* (A) *et* (B). *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour toutes* $f \in C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1})$, $g \in C_+^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$, *le problème* $(*)$ *admet une solution unique* $u \in C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1})$.

(ii) *La condition* (L) *est satisfaite.*

Un théorème analogue, mais relatif aux systèmes du 1er ordre a été indiqué par R. Hersch [5″] et précisé par K. Kasahara [8′].

Avant d'énoncer les résultats de la seconde partie, précisons les espaces que nous utiliserons (voir [4]). Pour s, $r \in \mathbf{R}$ et $\gamma > 0$, désignons par $\mathrm{H}_{s,r;\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$ l'espace des $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ telles que $e^{-\gamma t}u \in \mathrm{H}_{s,r}(\mathbf{R}^{n+1})$; la norme dans $\mathrm{H}_{s,r;\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$ est définie par

$$\|u\|^2_{s,r;\gamma} = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} (\xi^2 + |\zeta|^2)^s |\zeta|^{2r} |\widehat{e^{-\gamma t}u}(\xi, \eta, \sigma)|^2 \, d\xi \, d\eta \, d\sigma$$

où $\zeta = (\eta, \sigma - i\gamma)$, $|\zeta|^2 = |\eta|^2 + \sigma^2 + \gamma^2$, $|\eta|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j^2$, et où $\widehat{e^{-\gamma t}u}$ est la transformée de Fourier de $e^{-\gamma t}u$.

On définit de même $\mathrm{H}_{s;\gamma}(\mathbf{R}^n)$, avec

$$\langle v \rangle^2_{s;\gamma} = \int_{\mathbf{R}^n} |\zeta|^{2s} |\widehat{e^{-\gamma t}v}(\eta, \sigma)|^2 \, d\eta \, d\sigma.$$

Enfin, $\mathrm{H}_{s,r;\gamma}(\mathbf{R}^{n+1}_+)$ est l'espace des restrictions à $\mathbf{R}^{n+1}_+$ des distributions appartenant à $\mathrm{H}_{s,r;\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$; il est muni de la norme-quotient correspondante, que l'on note $|u|_{s,r;\gamma}$. Lorsque $r = 0$, on posera $\mathrm{H}_{s,r;\gamma} = \mathrm{H}_{s;\gamma}$ et $|u|_{s,r;\gamma} = |u|_{s;\gamma}$. Nous emploierons les notations $\mathrm{H}_{+\infty;\gamma} = \bigcap_{s \in \mathbf{R}} \mathrm{H}_{s;\gamma}$ et $\mathrm{H}_{-\infty;\gamma} = \bigcup_{s \in \mathbf{R}} \mathrm{H}_{s;\gamma}$.

Pour étudier le problème (*) dans ces espaces de Sobolev, nous renforcerons l'hypothèse (A) en la remplaçant par

(A′) | P est strictement hyperbolique dans la direction N_0, et l'hyperplan $\{x = 0\}$ n'est pas caractéristique pour P,

et nous utiliserons la condition suivante, où θ est un réel $\geqslant 0$.

(L_θ) | Il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que la matrice $\mathrm{A}(\zeta)$ vérifie $|\mathrm{A}_{j,k}(\zeta)| \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{\gamma^\theta}$ pour $\zeta = (\eta, \sigma - i\gamma)$, $\gamma > 0$, $(\eta, \sigma) \in \mathbf{R}^n$, $|\zeta| = 1$; $j, k = 0, \ldots, \mu - 1$.

Signalons que si $\mathrm{R}(\zeta) \neq 0$ pour $\gamma > 0$, alors il existe θ tel que (L_θ) soit vérifiée (voir [3′], [8′]).

On démontre le

THÉORÈME 2. — *On se place sous les hypothèses* (A′) *et* (B). *Soit* θ *un réel* $\geqslant 0$. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $\gamma > 0$, *pour toutes* $f \in H_{0,\theta;\gamma}(\mathbf{R}_{+}^{n+1})$,

$$g_j \in H_{m-1-b_j+\theta;\gamma}(\mathbf{R}^n) \ (j = 0, \ldots, \mu - 1),$$

le problème $(*)$ *admet une solution unique* $u \in H_{m,-1;\gamma}(\mathbf{R}_{+}^{n+1})$, *qui vérifie*

$$\gamma |u|_{m,-1;\gamma}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u \rangle_{m-1-j;\gamma}^2 \leqslant \frac{C}{\gamma^{2\theta}} \left(\frac{1}{\gamma} |f|_{0,\theta;\gamma}^2 + \sum_{j=0}^{\mu-1} \langle g_j \rangle_{m-1-b_j+\theta;\gamma}^2 \right),$$

où C *est une constante indépendante de* f, g, γ. *De plus, si* f, g *sont nulles pour* $t < 0$, *alors* u *est nulle pour* $t < 0$; *enfin, si* $f \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}_{+}^{n+1})$, $g \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$, *alors*

$$u \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}_{+}^{n+1}).$$

(ii) *La condition* (L_θ) *est satisfaite.*

Notons que dans le cas particulier $\theta = 0$, la condition (L_θ) est précisément la condition de Lopatinski uniforme [2], [10]), et l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est alors démontrée dans [10]. Dans certains cas non uniformes $(\theta > 0)$, des résultats moins explicites ont été donnés par Agemi et Shirota dans [1]. Dans le cas uniforme, il y a également des résultats pour les systèmes du 1^{er} ordre : H. O. Kreiss [8″] et J. Rauch [9′].

On termine ce travail par l'exemple de l'équation des ondes avec condition de dérivée oblique au bord.

Une partie des résultats de cet article a été annoncée dans une note aux *C.R. Acad. Sci.*, t. 272, p. 868-871 (1971).

PREMIÈRE PARTIE

Étude du problème mixte dans les espaces de fonctions C^∞.

Nous supposerons, pour cette première partie, que P, B vérifient les hypothèses (A) et (B).

3. Réduction à un problème sur le bord.

Soit E la solution élémentaire de $P(D_x, D_y, D_t)$ définie par

$$(3.1) \quad \langle \check{E}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-(n+1)} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} \frac{\varphi(\xi, \eta, \sigma - i\gamma)}{P(\xi, \eta, \sigma - i\gamma)} \, d\xi \, d\eta \, d\sigma \quad (^1)$$

($\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$ arbitraire).

On sait (voir [4]) que le support de E est contenu dans le cône $\Gamma^* = \{V \in \mathbf{R}^{n+1} | V.N \geqslant 0 \text{ pour tout } N \in \Gamma\}$, cône dual du cône Γ. Si $f \in C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1})$, en considérant un prolongement $\tilde{f} \in C_+^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ de f, et remplaçant u par

$$u - (E * \tilde{f})|_{x>0},$$

on voit qu'on ne change pas la condition (i) du Théorème 1 quand on se restreint au cas $f = 0$. Dans cette première partie,

(1) Dans tout ce travail, les transformées de Fourier-Laplace seront le plus souvent signalées seulement par la présence des variables duales ξ, η, $\tau = \sigma - i\gamma$, $\zeta = (\eta, \tau)$ des variables x, y, t, $z = (y, t)$; ainsi, les notations $\varphi(\xi, \zeta)$ et

$$\hat{\varphi}(\xi, \zeta) = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} e^{-ix\xi - iz\zeta} \varphi(x, z) \, dx \, dz$$

seront synonymes; de même, la transformée de Fourier-Laplace partielle

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-iz\zeta} \varphi(x, z) \, dz$$

sera notée $\varphi(x, \zeta)$.

nous allons donc considérer le problème mixte

$$(3.2) \qquad \begin{cases} P(D_x, D_z)u = 0 & \text{pour} \quad x > 0 \\ B(D_z)\gamma u = g \end{cases}$$

et étudier la condition

(3.2)′ | Pour toute $g \in C_+^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$, il existe $u \in C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}})$ unique vérifiant (3.2).

Pour cela, nous allons transformer (3.2) en un problème équivalent sur le bord $\{x = 0\}$ en adaptant au cas hyperbolique la méthode des potentiels telle qu'elle est développée dans [5], [9]. Rappelons tout d'abord la formule des sauts : à toute fonction $u \in C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}})$ associons la fonction u^0 égale à u pour $x \geqslant 0$ et nulle pour $x < 0$; alors, si $Pu = 0$ pour $x > 0$, on a

$$(3.3) \qquad P(u^0) = \tilde{P}(\gamma u)$$

où, pour $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}) \in C_+^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$, on a posé

$$(3.4) \qquad \tilde{P}\varphi = \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1-j} P_{j+l+1}(D_z)(D^j\delta(x) \otimes \varphi_l(z))$$

(δ désignant la mesure de Dirac en O dans $\mathbf{R}$) avec

$$P(D_x, D_z) = \sum_{k=0}^{m} P_k(D_z)D_x^k.$$

Si $u \in C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}})$, vérifie $Pu = 0$ pour $x > 0$, il résulte de (3.3) que l'on a :

$$(3.5) \qquad u = (E * \tilde{P}(\gamma u))|_{x>0}$$

et on est donc conduit à l'étude d'un tel potentiel de multicouche.

PROPOSITION 3.1. — *Soit un entier $j \geqslant 0$; alors l'application*

$$\psi(y, t) \longmapsto \varphi = (E * (D^j\delta(x) \otimes \psi))|_{x>0}$$

applique $C_+^\infty(\mathbf{R}^n)$ dans $C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}})$. Pour tout entier $k \geqslant 0$ on a $\gamma_k\varphi = E_{k,j} * \psi$, où $E_{k,j}$ est une distribution (indépendante de ψ) homogène de degré $-n+m-j-k-1$, à *support dans le cône* Γ_0^*, *et qui admet la transformée de Laplace*

$$(3.6)\quad E_{k,j}(\zeta) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{\xi^{j+k}}{P(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi} \quad (\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0),$$

où $C^+(\zeta)$ *est un contour de* $\{\operatorname{Im} \xi \geqslant 0\}$ *entourant les zéros* $\xi^+(\zeta)$ $(j = 0, \ldots, \mu - 1)$ *de* $P(\xi, \zeta)$.

La démonstration de cette proposition est une adaptation de la preuve du théorème 2.1.4 de [5]; on commence par établir le

Lemme 3.1. — *Avec les notations de la proposition* 3.1., *on a, pour* $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, *l'expression suivante du potentiel*

$$(3.7)\quad (E * (D^j\delta \otimes \psi))(x, z) = (2\pi)^{-n-1} \int_{\mathbf{R}^n} e^{iz\zeta}\psi(\zeta)\, d\eta\, d\sigma \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}\, \xi^j}{P(\xi, \zeta)}\, d\xi$$

$(x > 0,\ z \in \mathbf{R}^n,\ \zeta = (\eta, \sigma - i\gamma))$.

Démonstration. — Si $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ avec $\operatorname{Supp} \rho \subset]-\infty, 0[$, l'égalité (3.1) montre, grâce à une déformation de contour, qu'on a :

$$(3.8)\quad (E * (\rho \otimes \psi))(x, z) = (2\pi)^{-n-1} \int_{\mathbf{R}^n} e^{iz\zeta}\psi(\zeta)\, d\eta\, d\sigma \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}\rho(\xi)}{P(\xi, \zeta)}\, d\xi$$

$(x \geqslant 0,\ z \in \mathbf{R}^n,\ \zeta = (\eta, \sigma - i\gamma))$.

Puisque P est homogène, on peut choisir $C^+(\zeta)$ de la forme $C^+(\zeta) = |\zeta| C^+$ où C^+, contour borné de $\{\operatorname{Im} \xi \geqslant 0\}$, entoure $\{\xi_j^+(\zeta) | j = 0, \ldots, \mu - 1;\ |\zeta| = 1,\ \gamma > 0\}$ (on notera que cet ensemble est borné puisque $\{x = 0\}$ n'est pas caractéristique pour P). Supposons maintenant que $\int \rho(x)\, dx = 1$; pour $\varepsilon > 0$, posons $\rho_\varepsilon(x) = D_x^j\left(\frac{1}{\varepsilon}\, \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$, de sorte que $\rho_\varepsilon \to D^j\delta$ dans $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Montrons que le second membre de (3.8) (avec $\rho = \rho_\varepsilon$) converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^{n+1})$ quand $\varepsilon \to 0$; on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}\xi^j\rho(\varepsilon\xi)}{P(\xi, \zeta)}\, d\xi = \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}\xi^j}{P(\xi, \zeta)}\, d\xi$$

avec $\left|\int_{|\zeta|C^+} \frac{e^{ix\xi}\xi^j\rho(\varepsilon\xi)}{P(\xi,\zeta)}\,d\xi\right| \leqslant C\,\frac{|\zeta|^{j+1}}{\gamma^m}$ $(x \geqslant 0,$ C constante)
cette majoration résultant de la construction de C^+ et de la minoration immédiate

$$(3.9)\quad |P(\xi,\ \zeta)| \geqslant |P(0,\ \operatorname{Im}\zeta)| \quad (\zeta \in \mathbf{R},\quad \zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0)$$

du polynôme hyperbolique homogène P.

L'égalité (3.7) s'obtient donc en faisant tendre ε vers 0 dans l'égalité (3.8) correspondant à $\rho = \rho_\varepsilon$.

Revenons à la démonstration de la proposition (3.1); par dérivation sous le signe somme, on vérifie que le second membre de (3.7) est dans $C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1})$, et par conséquent $\varphi \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1})$ lorsque ψ est à support compact; ce résultat subsiste si on ne suppose plus ψ à support compact, car la restriction de φ à un ouvert relativement compact ne dépend que des valeurs de $D^j\delta \otimes \psi$ dans le cône rétrograde issu de cet ouvert, qui ne dépendent elles-mêmes que de la restriction de ψ à un ouvert relativement compact. En supposant de nouveau ψ à support compact, il découle de (3.7) que :

$$\gamma_k\varphi(z) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{iz\zeta}E_{k,j}(\zeta)\psi(\zeta)\,d\eta\,d\sigma,$$

où

$$(3.10)\quad E_{k,j}(\zeta) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{\xi^{j+k}}{P(\xi,\ \zeta)}\,\frac{d\xi}{2\pi} \quad (\zeta = (\eta,\ \sigma - i\gamma),\ \gamma > 0).$$

Or, le second membre de (3.10) garde un sens pour

$$\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0,$$

et définit alors $E_{k,j}(\zeta)$ comme fonction holomorphe de ζ, homogène de degré $-m + j + k + 1$, avec

$$|E_{k,j}(\zeta)| \leqslant C\,\frac{|\zeta|^{j+k+1}}{|P(0,\ \operatorname{Im}\zeta)|} \quad (\text{C constante}).$$

Pour achever la démonstration de la proposition 3.1, il suffit donc d'appliquer la proposition suivante, dont la preuve figure en appendice :

Proposition 3.2. — *Soit* Γ_1 *un cône ouvert convexe non vide de* $\mathbf{R}^n$*; considérons son cône dual* $\Gamma_1^* = \{z \in \mathbf{R}^n | z.\zeta \geqslant 0$ *pour tout* $\zeta \in \Gamma_1\}$*. Pour qu'une fonction* F *soit la transformée* *de Laplace d'une distribution homogène de degré d, à support dans* Γ_1^*, *il faut et il suffit que* F *soit holomorphe dans* $\mathbf{R}^n - i\Gamma_1$, *homogène de degré* $-n-d$, *et telle que pour tout cône fermé épointé* $K \subset \Gamma_1$, *il existe* $\theta \in \mathbf{R}$ *et* $C > 0$ *satisfaisant* $|F(\zeta)| \leqslant C|\operatorname{Im} \zeta|^\theta$ *pour* $\zeta \in \mathbf{R}^n - iK$, $|\zeta| = 1$.

Remarque 3.1. — Le fait que $\operatorname{Supp} E_{k,j}$ soit contenu dans Γ_0^* résulte directement de la propriété $\operatorname{supp} E \subset \Gamma^*$; nous avons préféré l'établir en utilisant la transformation de Laplace, car une technique analogue sera indispensable plus loin.

Introduisons maintenant le projecteur de Calderon. Si $k \in \mathbf{N}$, la proposition 3.1 et (3.4) montrent que pour toute $\varphi \in C_+^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$, on a :

$$\gamma_k[(E * \tilde{P}\varphi)|_{x>0}] = \sum_{l=0}^{m-1} Q_{k,l} * \varphi_l \tag{3.11}$$

où $Q_{k,l}$, distribution à support dans Γ_0^*, admet la transformée de Laplace,

$$Q_{k,l}(\zeta) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{1}{P(\xi, \zeta)} \sum_{j=0}^{m-1-l} P_{j+l+1}(\zeta)\xi^{j+k} \frac{d\xi}{2i\Pi} \qquad (\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0) \tag{3.12}$$

homogène de degré $k - l$, avec

$$|Q_{k,l}(\zeta)| \leqslant C \frac{|\zeta|^{m+k+l}}{|P(0, \operatorname{Im} \zeta)|} \tag{3.13}$$

Définition 3.1. — *On appelle projecteur de Calderon l'opérateur de convolution associé à la matrice carrée de distributions*

$$Q = (Q_{k,l})_{k,l=0,\ldots,m-1} \tag{3.14}$$

De (3.5), (3.11), (3.14) et de la proposition 3.1, on déduit la

Proposition 3.3. — *Pour que* u *vérifie*

$$\begin{cases} u \in C_+^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^{n+1}) \\ Pu = 0 \quad \textit{pour} \quad x > 0 \end{cases}$$

il faut et il suffit que $\varphi = \gamma u$ *vérifie*

$$\begin{cases} \varphi \in C_+^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m) \\ Q * \varphi = \varphi \end{cases}$$

et on a alors $u = (E * \tilde{P}\varphi)|_{x>0}$

4. Image du projecteur de Calderòn.

Tout d'abord, l'application de la proposition précédente à la fonction $u = (E * \tilde{P}\varphi)_{|x>0}$ avec $\varphi \in C^{\infty}_{+}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$ arbitraire, montre que $Q * Q * \varphi = Q * \varphi$, et donc que

$$Q^2(\zeta) = Q(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0),$$

ce qui justifie le nom de projecteur donné à Q.

On se propose maintenant de caractériser le sous-espace de $\mathbf{C}^m$ image du projecteur $Q(\zeta)$ $(\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0)$.

LEMME 4.1. — *Soit* $w = (w_0, \ldots, w_{m-1}) \in \mathbf{C}^m$; *on a* $Q(\zeta)w = w$ *si et seulement si la solution* $U(x)$ *du problème de Cauchy ordinaire*

$$(4.1) \quad \begin{cases} P(D_x, \zeta)\, U(x) = 0 & (\textit{avec}\ \ \gamma U = (U(0), \ldots, D^{m-1}(0)) \\ \gamma U = w \end{cases}$$

est bornée pour $x \geqslant 0$.

Démonstration. — Si $w = Q(\zeta)w$, posons

$$(4.2) \quad U(x) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{1}{P(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1 \leqslant m} P_{j+l+1}(\zeta) w_l \xi^j e^{ix\xi} \frac{d\xi}{2i\Pi}.$$

Il est clair que $U(x)$ est bornée pour $x \geqslant 0$, et que $P(D_x, \zeta)U(x) = 0$; d'autre part, (3.12) montre que

$$\gamma U = Q(\zeta)w,$$

donc $\gamma U = w$. Réciproquement, si la solution U de (4.1) est bornée pour $x \geqslant 0$, il est immédiat, à l'aide de formules analogues à (3.3), (3.4), (3.5), qu'on a l'égalité (4.2) pour $x \geqslant 0$, et par conséquent $w = \gamma U = Q(\zeta)w$.

Donnons une deuxième caractérisation de l'image de $Q(\zeta)$; par définition de $P^+(\xi, \zeta)$ (voir le § 2), les solutions bornées pour $x \geqslant 0$ de $P(D_x, \zeta)U(x) = 0$ sont exactement les solutions de $P^+(D_x, \zeta)U(x) = 0$; elles se représentent, en fonction des données initiales arbitraires $D^kU(0) = w_k$

($k = 0, \ldots, \mu - 1$) au moyen de la formule analogue à (4.2) :

$$(4.3)\quad U(x) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{1}{P^+(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1 \leqslant \mu^*} P^+_{j+l+1}(\zeta) w_l \xi^j e^{ix\xi} \frac{d\xi}{2i\pi}$$

où on a posé $P^+(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^{\mu} P^+_j(\zeta)\xi^j$.

En calculant les traces de U à l'aide de (4.3), on obtient le

LEMME 4.2. — *Soit* $w = (w_0, \ldots, w_{m-1}) \in \mathbf{C}^m$; *on a* $Q(\zeta)w = w$ *si et seulement si* $w'' = Q^+(\zeta)w'$, *où on a posé* $w = (w', w'')$, $w' = (w_0, \ldots, w_{\mu-1})$, $w'' = (w_\mu, \ldots, w_{m-1})$ *et* $Q^+(\zeta) = (Q^+_{k,l}(\zeta))_{\substack{k=\mu, \ldots, m-1 \\ l=0, \ldots, \mu-1}}$, *avec*

$$(4.4)\quad Q^+_{k,l}(\zeta) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{1}{P^+(\xi, \zeta)} \sum_{j=0}^{\mu-1-l} P^+_{j+l+1}(\zeta)\xi^{j+k} \frac{d\xi}{2i\Pi} \qquad (\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0).$$

Notons que $Q^+_{k,l}(\zeta)$ est holomorphe en $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0$, homogène de degré $k - l$, et bornée pour $|\zeta| = 1$ comme le montre l'expression du second membre de (4.4) à l'aide de résidus à l'infini; on a donc

$$(4.5)\quad |Q^+_{k,l}(\zeta)| \leqslant C|\zeta|^{k-l} \quad (\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0,\ C \text{ constante}),$$

et $Q^+_{k,l}(\zeta)$ est par conséquent, d'après la proposition 3.2, la transformée de Laplace d'une distribution $Q^+_{k,l}$ à support dans Γ^*_0; si on considère la matrice de distribution

$$Q^+ = (Q^+_{k,l})_{\substack{k=\mu, \ldots, m-1 \\ l=0, \ldots, \mu-1}},$$

le lemme 4.2 implique, avec des notations évidentes, la

PROPOSITION 4.1. — *Soit* $v = (v', v'') \in C^\infty_+(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$; *alors, la condition* $Q * v = v$ *équivaut à la condition*

$$(4.6)\qquad v'' = Q^+ * v'$$

Revenons maintenant au problème mixte (3.2); nous allons transformer la condition aux limites $B(D_z)\gamma u = g$ en tenant compte de la relation $Q * \gamma u = \gamma u$.

Pour cela, considérons $\varphi \in C_+^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$ telle que $Q * \varphi = \varphi$; on a alors

$$(4.7)\qquad B(D_z)\varphi = T * \varphi, \qquad \text{avec} \qquad T = B(D_z)Q.$$

D'après (3.12) la transformée de Laplace

$$T(\zeta) = (T_{j,l}(\zeta))_{\substack{j=0,\dots,\mu-1\\ l=0,\dots,m-1}}$$

de T est donnée par

$$T_{j,l}(\zeta) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{B_j(\xi, \zeta)}{P(\xi, \zeta)} \sum_{r=0}^{m-1-l} P_{r+l+1}(\zeta)\xi^r \frac{d\xi}{2i\Pi} \qquad (\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0).$$

Mais $B_j(\xi, \zeta)$ est égal à $B'_j(\xi, \zeta)$ modulo $P^+(\xi, \zeta)$, ce qui permet de remplacer $B_j(\xi, \zeta)$ par $B'_j(\xi, \zeta)$ dans l'intégrale précédente, et d'écrire :

$$(4.8)\qquad T_{j,l}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{j,k}(\zeta)Q_{k,l}(\zeta) \quad (j = 0, \dots, \mu - 1;\ l = 0, \dots, m - 1).$$

Remarquons que $B'_{j,k}(\zeta)$ est holomorphe en $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0$, homogène de degré $b_j - k$ et bornée pour $|\zeta| = 1$; on a donc

$$(4.9)\qquad |B'_{j,k}(\zeta)| \leqslant C|\zeta|^{b_j-k} \quad (\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0)$$

et $B'_{j,k}(\zeta)$ est la transformée de Laplace d'une distribution $B'_{j,k}$ à support dans Γ_0^*, ce qui permet d'écrire (4.8) sous la forme

$$T = B' * Q'$$

où B' est la matrice carrée de distributions $(B'_{j,k})_{j,k=0,\dots,\mu-1}$ et $Q' = (Q_{k,l})_{\substack{k=0,\dots,\mu-1\\ l=0,\dots,m-1}}$.

En revenant à (4.7), on obtient finalement

$$B(D_z)\varphi = B' * \varphi',$$

d'où le

Lemme 4.3. — *Si* $\varphi \in C_+^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$ *vérifie* $Q * \varphi = \varphi$, *alors*

$$(4.10)\qquad B(D_z)\varphi = B' * \varphi'.$$

En combinant les propositions 3.3, 4.1 et le lemme 4.3, il vient la

PROPOSITION 4.2. — *Soit* $g \in C^\infty_+(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$; *pour que* u *vérifie*

$$u \in C^\infty_+(\overline{\mathbf{R}}^{n+1}_+)$$

$$\begin{cases} \mathrm{P}u = 0 & \textit{pour} \quad x > 0 \\ \mathrm{B}(\gamma u) = g \end{cases}$$

il faut et il suffit que $\varphi = \gamma u$ *vérifie*

$$\begin{cases} \varphi = (\varphi', \varphi'') \\ \varphi' \in C^\infty_+(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu) \\ \mathrm{B}' * \varphi' = g \\ \varphi'' = \mathrm{Q}^+ * \varphi' \end{cases}$$

et on a alors $u = (\mathrm{E} * \tilde{\mathrm{P}}\varphi)_{|x>0}$.

5. Résolution du problème sur le bord.

La proposition 4.2 montre que la condition (3.2)′ équivaut à la condition suivante :

(5.1) | Pour toute $g \in C^\infty_+(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$, il existe $\varphi' \in C^\infty_+(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ unique vérifiant $\mathrm{B}' * \varphi' = g$.

Par conséquent, la démonstration du théorème 1 est ramenée à celle de la

PROPOSITION 5.1. — *Les conditions* (5.1) *et* (L) *sont équivalentes.*

Commençons par montrer que (L) implique (5.1). D'après la proposition 3.2, l'hypothèse (L) signifie précisément que la matrice $\mathrm{A}(\zeta)$ inverse de $\mathrm{B}'(\zeta)$ $(\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0)$ est la transformée de Laplace d'une matrice de distributions

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{j,k})_{j,k=0,\ldots,\mu-1}$$

à support dans $\tilde{\Gamma}^*_0$. On a alors

$$\mathrm{A} * \mathrm{B}' = \mathrm{B}' * \mathrm{A} = \delta \otimes \mathrm{I} \tag{5.2}$$

ce qui prouve que la condition (5.1) est satisfaite, avec

$$\varphi' = \mathrm{A} * g. \tag{5.3}$$

Montrons maintenant que (5.1) implique (L); l'hypothèse (5.1) signifie que l'opérateur B' : $\varphi \longmapsto B' * \varphi$ est un isomorphisme de $C_+^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$; puisque tous les opérateurs considérés commutent avec les translations, l'isomorphisme inverse $\mathcal{A}$ de B' est nécessairement de la forme $\mathcal{A}\varphi = \check{A} * \varphi$ $(\varphi \in C_+^\infty(\mathbf{R}^n))$ où $(A = (A_{j,k})_{j,k=0,\ldots,\mu-1}$ est une matrice de distributions.

En remarquant que $\langle \check{A}, \varphi\rangle = (A * \varphi)(0) = (\mathcal{A}\varphi)(0)$ pour $\varphi \in C_0^\infty$, on obtient

$$\text{(5.4)} \qquad \operatorname{Supp} A \subset \{t \geqslant 0\}$$

d'où

$$\text{(5.5)} \qquad A * B' = \delta \otimes I$$

D'autre part, pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$, la distribution A se prolonge en une forme linéaire continue $\varphi \longmapsto (\mathcal{A}\check{\varphi})(0)$ sur l'espace des $\varphi \in C^\infty$ nulles pour $t > t_0$, ce qui implique :

(5.6) L'intersection du support de A avec tout demi-espace $\{t \leqslant t_0\}$ est compacte.

Les propriétés (5.5), (5.6) permettent d'égaler les déterminants (au sens de la convolution) dans l'égalité (5.5), d'où

$$\text{(5.7)} \qquad (\det A) * (\det B') = \delta.$$

De cette égalité et de l'homogénéité de $\det B'$, on va déduire que $\det A$ est homogène; en effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on peut écrire $\varphi = (\widetilde{\det} B') * \psi$, avec $\psi \in C^\infty$, nulle pour t assez grand $(\psi = (\widetilde{\det} A) * \varphi)$; pour $\lambda > 0$, posons $\varphi_\lambda(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$; si d est le degré d'homogénéité de $\det B'$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\langle \det A, \varphi_\lambda\rangle &= \langle \det A, ((\widetilde{\det} B') * \psi)_\lambda\rangle \\
&= \lambda^{-n-d}\langle \det A, (\widetilde{\det} B') * \psi_\lambda\rangle \\
&= \lambda^{-n-d}\langle \det A * \det B', \check{\psi}_\lambda\rangle = \lambda^{-n-d}\psi(0) \\
&= \lambda^{-n-d}\langle \det A, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\det A$ est homogène de degré $-2n-d$.

L'homogénéité de $\det A$ et les propriétés (5.4), (5.6) du support de A impliquent que l'enveloppe convexe du support de $\det A$ est un cône de la forme Γ_1^*, où Γ_1 est un cône convexe ouvert contenant N_0. En notant $\det A(\zeta)$ ($\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_1$) la transformée de Laplace de $\det A$, on déduit de (5.7) que $\det A(\zeta) \det B'(\zeta) = 1$ pour

$$\zeta \in \mathbf{R}^n - i(\Gamma_0 \cap \Gamma_1)\,;$$

puisque $\det B'(\zeta) = R(\zeta)$, la validité de la condition (L) découle alors de l'application de la proposition 3.2 à la fonction $\det A(\zeta)$ dans le cône $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$. La proposition 5.1 est donc complètement démontrée.

Pour la résolution du problème mixte dans les espaces C^∞, notons qu'on obtient, en combinant la proposition 4.2 et (5.3), la

PROPOSITION 5.2. — *Quand la condition* (L) *est satisfaite, l'unique solution* $u \in C^\infty_+(\overline{\mathbf{R}}{}^{n+1}_+)$ *du problème mixte* (3.2), *avec* $g \in C^\infty_+(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$, *est donnée par*

$$(5.8) \qquad u = (E * \tilde{P}v)_{|x>0} \quad \text{où} \quad v = (v', v''), \qquad v' = A * g, \quad v'' = Q^+ * v',$$

et où A *a pour transformée de Laplace la matrice-inverse* $A(\zeta)$ *de la matrice de Lopatinski* $B'(\zeta)$.

Terminons ce paragraphe par deux remarques.

Remarque 5.1. — Sur le cas des données de Cauchy non nulles.

Lorsque les hypothèses (A), (B), (L) sont vérifiées, on peut déduire du théorème 1 un résultat d'existence et d'unicité pour le problème mixte dans le quadrant $\{x \geqslant 0,\ y \in \mathbf{R}^{n-1},\ t \geqslant 0\}$ avec données de Cauchy pour $t = 0$, sous réserve que les données vérifient des conditions naturelles de compatibilité pour $t = x = 0$.

Remarque 5.2. — Sur la vitesse de propagation.

Dans le cas du problème de Cauchy pour P, la vitesse de propagation est définie par la donnée de l'enveloppe convexe Γ^* du support de la solution élémentaire E. Dans le cas du problème mixte, et sous l'hypothèse (L), les formules (5.8) montrent qu'on obtient encore une vitesse de propagation finie, puisque $\operatorname{Supp} Q^+ \subset \Gamma_0^*$, $\operatorname{Supp} A \subset \tilde{\Gamma}_1^*$, où on a désigné par $\tilde{\Gamma}_1$ le plus grand cône $\tilde{\Gamma}_0$ pour lequel la condition (L) soit réalisée. La vitesse de propagation pour le problème mixte peut être supérieure à la vitesse de propagation pour le problème de Cauchy; ce fait a déjà été précisé dans [7], [12], et le cas de l'équation des ondes avec condition de dérivée oblique au bord sera détaillé au § 13.

6. Cas des espaces $H_{\pm\infty;\gamma}$.

En vue de la seconde partie, nous reprenons rapidement certains des points précédents dans les espaces de Sobolev $H_{\pm\infty;\gamma}$ (voir le § 2); dans tout ce paragraphe, on pose

$$\zeta = (\eta,\ \sigma - i\gamma),$$

avec $\eta \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\sigma \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$, et on continue à se placer sous les hypothèses (A), (B).

D'après les majorations (3.9), (3.13), (4.5), (4.9), les opérateurs de convolution par E, Q, Q^+, B' se prolongent en opérateurs continus des espaces $H_{\pm\infty;\gamma}$ correspondants; de plus, lorsque la condition (L_θ) est satisfaite, $A(\zeta)$ est la transformée de Laplace d'une matrice de distributions

$$A = (A_{j,k})_{j,k=0,\ldots,\mu-1}$$

à support dans $\{t \geqslant 0\}$, qui vérifie

$$A * B' = B' * A = \delta \otimes I \tag{6.1}$$

et l'opérateur de convolution par A se prolonge aussi en opérateur continu de $H_{\pm\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n)$.

Proposition 6.1. — *Pour* $\varphi \in H_{-\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n)$, *les conditions* $Q * \varphi = \varphi$ *et* $\varphi'' = Q^+ * \varphi'$ *sont équivalentes. Si elles sont vérifiées, on a* $B(D_z)\varphi = B' * \varphi'$.

Démonstration. — Il suffit de reprendre, à partir du lemme 4.2, les preuves de la proposition 4.1 et du lemme 4.3.

De la proposition précédente et de (6.1), on déduit le

Corollaire 6.1. — *On suppose* (L_θ) *satisfaite; alors pour toute* $g \in H_{\pm\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$, *il existe* $\varphi \in H_{\pm\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ *unique* *vérifiant*

$$\begin{cases} B(D_z)\varphi = g \\ Q * \varphi = \varphi \end{cases} \tag{6.2}$$

et on a

$$\varphi = (\varphi', \varphi''), \qquad \varphi' = A * g, \qquad \varphi'' = Q^+ * \varphi' \tag{6.3}$$

Proposition 6.2. — *Soit* $u \in H_{m,-1;\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ *vérifiant* $Pu = 0$ *pour* $x > 0$. *Alors* $u = (E * \tilde{P}(\gamma u))|_{x>0}$ *et*

$$\gamma u = Q * \gamma u.$$

Démonstration. — On vérifie, par continuité, que la formule des sauts $P(u^0) = \tilde{P}(\gamma u)$ reste valable sous les hypothèses de la proposition 6.2; on en déduit $u = (E * \tilde{P}(\gamma u))|_{x>0}$, *puis* $\gamma u = Q * \gamma u$.

Corollaire 6.2. — *On suppose la condition* (L_θ) *satisfaite. Si* $u \in H_{m,-1;\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ *vérifie*

$$\begin{cases} Pu = 0 & \textit{pour} \quad x > 0 \\ B(\gamma u) = 0 \end{cases}$$

alors $u = 0$.

Démonstration. — Posons $\gamma u = \varphi$; d'après la proposition 6.2, φ vérifie (6.2) avec $g = 0$; le corollaire 6.1 montre alors que $\varphi = 0$, et donc $u = (E * \tilde{P}\varphi)|_{x>0} = 0$.

Proposition 6.3. — *L'opérateur* $\varphi \longmapsto (E * \tilde{P}\varphi)|_{x>0}$ *est continu de* $H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$ *dans* $H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$.

Démonstration. — Soit $j \in \mathbf{N}$; si $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, posons $\varphi = (E * (D^j\delta(x) \otimes \psi))|_{x>0}$. Soient $s', r \in \mathbf{R}$ et $\gamma > 0$; d'après (3.9), on a :

$$|\varphi|_{s',r;\gamma} \leqslant \|E * (D^j\delta \otimes \psi)\|_{s',r;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^m} \|D^j\delta \otimes \psi\|_{s',r;\gamma}$$

Or il est facile de voir que

$$\|D^j\delta \otimes \psi\|_{s',r;\gamma} \leqslant C_{s',r}\langle\psi\rangle_{s'+r+j+1/2;\gamma} \qquad \text{si} \qquad s' + j < -\frac{1}{2},$$

d'où

$$|\varphi|_{s',r;\gamma} \leqslant \frac{C_{s',r}}{\gamma^m}\langle\psi\rangle_{s'+r+j+1/2;\gamma} \qquad \text{si} \qquad s' + j < -\frac{1}{2}. \tag{6.4}$$

D'autre part, puisque $P\varphi = 0$ pour $x > 0$, et puisque $\{x = 0\}$ n'est pas caractéristique pour P, on obtient, en adaptant la démonstration du lemme 2.1.1 de [5],

(6.5) $|\varphi|_{s;\gamma} \leqslant C_{s,r}|\varphi|_{s-r,r;\gamma}$ (s, r réels arbitraires).

Soit maintenant $s \in \mathbf{R}$ arbitraire; choisissons r tel que $s - r + j < -\frac{1}{2}$; il résulte alors de (6.5) et de (6.4) (avec $s' = s - r$) que

(6.6) $$|\varphi|_{s;\gamma} \leqslant C_{s,\gamma}\langle\psi\rangle_{s+j+1/2;\gamma}$$

ce qui établit la proposition 6.3.

Remarque 6.1. — On vérifie sans difficulté que l'égalité (3.7) reste valable lorsque $\psi \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n)$, de sorte que

$$\varphi = (E * (D^j\delta \otimes \psi))|_{x>0}$$

admet alors la transformée de Fourier-Laplace partielle

$$\varphi(x, \zeta) = \psi(\zeta)\int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}\xi^j}{P(\xi, \zeta)}\frac{d\xi}{2\Pi};$$

Notons en particulier que $P^+(D_x, \zeta)\varphi(x, \zeta) = 0$ $(x \geqslant 0)$.

Remarque 6.2. — On verra dans la seconde partie comment on peut améliorer les estimations du type (6.6) lorsqu'on suppose P strictement hyperbolique.

Les propositions 6.1, 6.2, 6.3 entraînent la

PROPOSITION 6.4. — *Soit* $g \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$. *Pour que* u *vérifie*

$$\begin{cases} u \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^{n+1}_+) \\ Pu = 0 \quad \textit{pour} \quad x > 0 \\ B(\gamma u) = g \end{cases}$$

il faut et il suffit que $v = \gamma u$ *vérifie*

$$\begin{cases} v = (v', v'') \\ v' \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu) \\ B' * v' = g \\ v'' = Q^+ * v' \end{cases}$$

et on a alors $u = (E * \tilde{P}v)_{|x>0}$.

COROLLAIRE 6.3. — *Quand la condition* (L_θ) *est vérifiée, l'unique solution* $u \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ *du problème* $(*)$, *avec* $f \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$, $g \in H_{+\infty;\mu}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ *est donnée par*

$$\gamma u = (E * \tilde{f})_{|x>0} + (E * \tilde{P}\varphi)_{|x>0}, \tag{6.7}$$

où $\tilde{f} \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$ *est un prolongement de* f, *et où*

$$\varphi = (\varphi', \varphi'') \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$$

est définie par

$$\begin{cases} \varphi' = A * (g - B\gamma(E * \tilde{f})) \\ \varphi'' = Q^+ * \varphi' \end{cases} \tag{6.8}$$

Démonstration. — En remplaçant u par $u - (E * \tilde{f})_{|x>0}$ et g par $g - B\gamma(E * \tilde{f})$, on se ramène au cas $f = 0$; il suffit alors d'appliquer la proposition 6.4 et (6.3).

DEUXIÈME PARTIE

RÉSOLUTION DU PROBLÈME MIXTE DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

Cette partie est consacrée pour l'essentiel à la démonstration du théorème 2. La démonstration de la suffisance de la condition (L_θ) constitue la partie délicate de ce travail et occupe les § 7-8-9-10, tandis que la nécessité de cette condition est établie au § 11. Dans § 12, on propose une autre méthode de démonstration de la suffisance de (L_θ). Enfin, au § 13, on applique le théorème 2 à un problème mixte relatif à l'équation des ondes.

On supposera dans cette deuxième partie, sauf mention du contraire, que les hypothèses (A′) et (B) sont satisfaites.

7. Suffisance de la condition (L_θ) : réduction du problème.

On suppose (L_θ) vérifiée; il s'agit de démontrer l'assertion (i) du théorème 2. L'unicité de u a déjà été démontrée : c'est le corollaire 6.2. Pour établir l'existence de u et l'inégalité d'énergie, on va se ramener au théorème suivant.

Théorème 7.1. — *On se place sans les hypothèses* (A′), (B), (L_θ); *alors il existe* C *telle que pour* $\gamma > 0$, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^{n+1})$, $g \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ *la solution unique* $u \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ *du problème mixte* $(*)$ *vérifie l'inégalité d'énergie* :

$$(7.1)\quad \gamma |u|^2_{m,-1;\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u \rangle^2_{m-1-j;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^{2\theta}} \left[\frac{1}{\gamma} |f|^2_{0,\theta;\gamma} + \sum_{j=0}^{\mu-1} \langle g_j \rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma} \right]$$

Admettons provisoirement ce théorème et montrons comment il implique les résultats cherchés.

En effet, étant données $f \in H_{0,\theta,\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$, $g_j \in H_{m-1-b_j+\theta;\gamma}(\mathbf{R}^n)$, on considère des suites $f_\nu \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^{n+1})$, $g_{j,\nu} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ $(j = 0, \ldots, \mu - 1)$ telles que $f_\nu \xrightarrow[\nu\infty]{} f$ et $g_{j,\nu} \xrightarrow[\nu\infty]{} g_j$ dans les espaces correspondants.

D'après le corollaire 6.3, on sait que le problème $(*)$ admet une solution unique $u_\nu \in H_{+\infty,\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ pour les données $\{f_\nu, g_{j,\nu}\}$. L'inégalité (7.1) montre que u_ν (resp. $\gamma_j u_\nu$) est une suite de Cauchy dans $H_{m,-1;\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ (resp. dans $H_{m-1-j;\gamma}(\mathbf{R}^n)$), donc u_ν converge vers une limite u dans $H_{m,-1;\gamma}$ et $\gamma_j u_\nu$ a une limite dans $H_{m-1-j;\gamma}$; d'autre part, le théorème des traces (cf. [4]) montre que $\gamma_j u_\nu \to \gamma_j u$ dans $H_{m-1-j-1/2;\gamma}$ et par conséquent $\gamma_j u_\nu \to \gamma_j u$ dans $H_{m-1-j;\gamma}$ ce qui prouve à la limite que u, γu, f, g, vérifient $(*)$ et l'inégalité (7.1).

Enfin, d'après le corollaire 6.3, on sait aussi que si f_ν et $g_{j,\nu}$ sont nulles pour $t < 0$ alors u_ν l'est aussi et à la limite il en est de même de u.

Il ne reste donc qu'à démontrer le théorème 7.1; pour cela, on commence par exprimer γu, u en fonction de f et g.

8. Expressions de γu et u en fonction des données.

Sous les hypothèses du théorème 7.1, l'existence et l'unicité de $u \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ découlent du corollaire 6.3, il suffit donc de démontrer l'inégalité d'énergie (7.1). On a déjà obtenu l'expression suivante de u

$$u^0 = E * f + E * \tilde{P}\varphi$$

avec $\varphi \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$, de sorte que (voir remarque 6.1) la transformée Fourier-Laplace partielle $u(x, \zeta)$ de $u(x, z)$ vérifie

$$(8.1)\quad P^+(D_x, \zeta)u(x, \zeta) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ix\xi}f(\xi, \zeta)}{P^-(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi} \quad (x \geqslant 0)$$

où on a posé $P(\xi, \zeta) = P^+(\xi, \zeta)P^-(\xi, \zeta)$.

Par définition des polynômes $B'_j(., \zeta)$, on a :

$$(8.2)\quad B_j(D_x, \zeta) = S_j(D_x, \zeta)P^+(D_x, \zeta) + B'_j(D_x, \zeta)$$

où S_j est un polynôme en ξ que l'on note

$$S_j(\xi, \zeta) = \sum_{h=0}^{m-1} S_{j,h}(\zeta)\xi^h.$$

Par déformation de contour dans (8.1), et compte tenu de (8.2), il vient

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{j,k}(\zeta)\gamma_k u(\zeta) = g_j(\zeta) - \sum_{h=0}^{m-1} S_{j,h}(\zeta) \int_{C^-(\zeta)} \frac{\xi^h f(\xi, \zeta)}{P^-(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi}$$

où $C^-(\zeta)$ désigne un contour de demi-plan $\{\operatorname{Im} \xi < 0\}$ entourant les zéros $\xi_j^-(\zeta)$ $(j = 0, \ldots, m - \mu)$ du polynôme $P(\xi, \zeta)$ tels que $\operatorname{Im} \xi < 0$, c'est-à-dire les zéros de $P^-(\xi, \zeta)$.

L'inversibilité de la matrice de Lopatinski permet d'écrire

$$(8.3) \quad \gamma_k u(\zeta) = \sum_{j=0}^{\mu-1} A_{k,j}(\zeta) g_j(\zeta) - \sum_{j,h} A_{k,j}(\zeta) S_{j,h}(\zeta) \int_0^{+\infty} f(x, \zeta) \left(\int_{C^-(\zeta)} \frac{\xi^h e^{-ix\xi}}{P^-(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\Pi} \right) dx$$

$(k = 0, \ldots, \mu - 1)$.

Notons pour la suite que l'hypothèse (L_θ) et l'homogénéité des polynômes B_j et P permettent d'obtenir facilement les majorations suivantes, avec une constante C indépendante de $\gamma > 0$:

$$(8.4) \quad \begin{cases} |A_{k,j}(\zeta)| \leqslant \dfrac{C}{\gamma^\theta} |\zeta|^{k-b_j+\theta} \\ |S_{j,k}(\zeta)| \leqslant C\,|\zeta|^{b_j+h+\mu} \\ |P_j^+(\zeta)| \leqslant C\,|\zeta|^{\mu-j}. \end{cases}$$

D'autre part, en écrivant P^+ sous la forme

$$P^+(D_x, \zeta) = D_x^\mu + \sum_{j=0}^{\mu-1} P_j^+(\zeta) D_x^j$$

on obtient, compte tenu de l'expression (8.1), les égalités suivantes qui permettent d'exprimer n'importe quelle trace de u en fonction des μ premières.

$$(8.5) \quad \gamma_{h+\mu} u(\zeta) = - \sum_{j=0}^{\mu-1} P_j^+(\zeta) \gamma_{h+j} u(\zeta) + \int_0^{+\infty} f(x, \zeta) \left(\int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix\xi} \xi^h}{P^-(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi} \right) dx$$

pour $h \in \mathbf{N}$.

Donnons maintenant une expression de u qui sera utile au § 12.

La formule des sauts, pour l'opérateur différentiel $P^+(D_x, \zeta)$, s'écrit :

$$P^+(D_x, \zeta)(u^0(x, \zeta)) = (P^+(D_x, \zeta)u(x, \zeta))^0 + \frac{1}{i} \sum_{j+l+1 \leqslant \mu} P^+_{j+l+1}(\zeta) D_x^j \delta \otimes \gamma_l u(\zeta)$$

ce qui amène à poser

$$u^0(x, \zeta) = v(x, \zeta) + w(x, \zeta) \tag{8.6}$$

où v et w ont pour transformées de Fourier en x

$$v(\xi, \zeta) = \frac{1}{P^+(\xi, \zeta)} \mathcal{F}_x(P^+(D_x, \zeta)u(x, \zeta))^0 \tag{8.7}$$

$$w(\xi, \zeta) = \frac{1}{iP^+(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1 \leqslant \mu} P^+_{j+l+1}(\zeta)\gamma_l u(\zeta)\xi^j; \tag{8.8}$$

et de façon analogue à la proposition 3.1, on a la représentation

$$D_x^k w(x, \zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C+(\zeta)} \frac{e^{+ix\xi}}{P^+(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1 \leqslant \mu} P^+_{j+l+1}(\zeta)\gamma_l u(\zeta)\xi^{j+k}\, d\xi \quad (x \geqslant 0). \tag{8.9}$$

Nous allons maintenant démontrer l'inégalité d'énergie (7.1) dans un cas particulier, celui où l'on a les conditions de Dirichlet au bord et $f = 0$.

9. Cas des conditions au bord de Dirichlet.

Dans ce cas, on peut établir l'inégalité d'énergie au moyen d'une technique du type inégalité de Gärding. On commence par une proposition, d'abord démontrée par Sakamoto [10], et que l'on reprend ici.

Proposition 9.1. — *Soit* $P(D_x, D_y, D_t)$ *un opérateur de degré* m *satisfaisant à l'hypothèse* (A'). *Alors il existe* C *telle que pour tout* $\gamma > 0$, *on ait*

$$\gamma |u|^2_{m-1;\gamma} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}|Pu|^2_{0;\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u \rangle^2_{m-1-j;\gamma}\right)$$

pour tout $u \in H_{m;\gamma}(\mathbf{R}^{n+1}_+)$.

Par densité, il suffit de la démontrer pour $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}})$.

En adaptant une technique maintenant classique introduite par Leray, on pose

$$Q(\xi, \eta, \tau) = \frac{\partial P}{\partial \tau}(\xi, \eta, \tau)$$

et l'on va démontrer le

LEMME 9.1. — *Il existe des constantes* C *et* $c > 0$ *telles que*

$$(9.2)\quad -\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\gamma t} Pu.\overline{Qu}\, dx\, dz \geqslant c\gamma |u|^2_{m-1;\gamma} - C\sum_{j=0}^{m-1}\langle \gamma_j u\rangle^2_{m-1-j;\gamma}$$

pour $u \in C_0^{+\infty}(\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}})$ *et* $\gamma > 0$.

Ce lemme implique immédiatement la proposition précédente, puisque

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}\int e^{-2\gamma t} Pu.\overline{Qu}\, dx\, dz &\leqslant |Pu|_{0;\gamma}|Qu|_{0;\gamma} \\ &\leqslant C|Pu|_{0;\gamma}|u|_{m-1;\gamma} \\ &\leqslant \varepsilon\gamma|u|^2_{m-1;\gamma} + \frac{C}{4\varepsilon}\frac{1}{\gamma}|Pu|^2_{0;\gamma} \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration du Lemme 9.1. — Posons

$$P(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\zeta)\xi^j, \qquad Q(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(\zeta)\xi^j$$

(avec $P_m = 1$, $Q_m = 0$, $Q_{m-1}(\zeta)$ réel, $\zeta = (\eta, \sigma - i\gamma)$).

On peut écrire

$$(9.3)\quad -\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\gamma t} Pu\,\overline{Qu}\, dx\, dz = \int_0^{+\infty}\int\sum_{i,j=0}^{m}\tilde{a}_{i,j}(\zeta) D_x^i u(x, \zeta)\overline{D_x^j u(x, \zeta)}\, dx\, d\eta\, d\sigma$$

en posant

$$2i\tilde{a}_{kj}(\zeta) = -P_k(\zeta)\overline{Q_j(\zeta)} + \overline{P_j(\zeta)}Q_k(\zeta),$$

de sorte que $\tilde{a}_{ij}(\zeta)$ est un polynôme homogène en (η, σ, γ) de degré $2m - 1 - i - j$ et tel que

$$\sum_{i,j=0}^{m}\tilde{a}_{ij}(\zeta)\xi^{i+j} = -\operatorname{Im}(P(\xi, \zeta)\overline{Q(\xi, \zeta)}) \quad (\xi \in \mathbf{R})$$

Si on désigne par $\tau_k(\xi, \eta)$ $(k = 1, \ldots, m)$ les racines en τ de $P(\xi, \eta, \tau) = 0$ on obtient

$$\mathrm{Im}\,(P(\xi, \zeta)\overline{Q(\xi, \zeta)}) = \gamma \sum_{j=1}^{m} \Big(\prod_{k \neq j} |\tau - \tau_k(\xi, \eta)|^2\Big)$$

et comme le Σ du deuxième membre est une expression symétrique des racines τ_k, on peut l'écrire $\sum_{i,\, j=0}^{m-1} a_{ij}(\zeta)\xi^{i+j}$ où $a_{ij}(\zeta)$ est un polynôme homogène en (η, σ, γ) de degré $2m - 2 - i - j$; par conséquent, il vient

$$\sum_{i,\, j=0}^{m} \tilde{a}_{ij}(\zeta)\xi^{i+j} = \gamma \sum_{i,\, j=0}^{m-1} a_{ij}(\zeta)\xi^{i+j}. \tag{9.4}$$

Par intégrations par parties en x, on déduit de (9.4)

$$\int_0^{+\infty}\int \sum_{i,\, j=0}^{m} \tilde{a}_{ij}(\zeta) D_x^i u \overline{D_x^j u}\, dx\, d\eta\, d\sigma = \gamma \int_0^{+\infty}\int \sum_{i,\, j=0}^{m-1} a_{i,j}(\zeta) D_x^i u \overline{D_x^j u}\, dx\, d\eta\, d\sigma + R(u), \tag{9.5}$$

où $R(u)$ désigne les intégrales sur le bord $x = 0$, de sorte que

$$|R(u)| \leqslant C \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u \rangle^2_{m-1-j;\gamma} \tag{9.6}$$

L'homogénéité des a_{ij} permet d'écrire

$$\int_0^{\infty}\int \sum_{i,\, j=0}^{m-1} a_{ij}(\zeta) D_x^i u \overline{D_x^j u}\, dx\, d\eta\, d\sigma = \int_{\mathbf{R}^n} F(u)\, d\eta\, d\sigma \tag{9.7}$$

avec

$$F(u) = \sum_{i,\, j=0}^{m-1} |\zeta|^{2m-2-i-j} a_{ij}\Big(\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big) \int_0^{\infty} D_x^i u(x, \zeta)\overline{D_x^j u(x, \zeta)}\, dx.$$

Pour établir l'inégalité (9.2), il est commode de démontrer d'abord l'existence de constantes C et $c > 0$ telles que l'on ait

$$\sum_{i,\, j=0}^{m-1} a_{ij}\Big(\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big) \int_0^{\infty} D_x^i U(x)\, \overline{D_x^j U(x)}\, dx \geqslant c \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^{\infty} |D^j U(x)|^2\, dx - C \sum_{j=0}^{m-2} |D^j U(0)|^2 \tag{9.8}$$

pour tout $U \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^+})$ et $\gamma > 0$.

Pour cela on définit :

$$(9.9)\quad \begin{cases} V(x) = U(x) - \left(\sum_{j=0}^{m-2} \frac{U^{(j)}(0)}{j!} x^j\right) \varphi(x) & \text{pour} \quad x \geqslant 0 \\ V(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

où $\varphi \in C_0^\infty(R)$ égale à 1 au voisinage de 0.

On a par construction $V \in C_0^{m-1}(\mathbf{R})$ et par Parseval

$$(9.10)\quad \sum_{i,j=0}^{m-1} a_{ij}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) \int_0^\infty D^i V(x) \overline{D^j V(x)}\, dx = \sum_{i,j=0}^{m-1} a_{ij}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) \int_{\mathbf{R}} \xi^{i+j} |\hat{V}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{2\pi}$$

On utilise maintenant le fait que les racines $\tau_k(\xi, \eta)$ sont réelles et distinctes deux à deux pour $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$, ce qui implique que l'on a avec $c > 0$

$$(9.11)\quad \sum_{i,j=0}^{m-1} a_{i,j}(\zeta) \xi^{i+j} \geqslant c(\xi^2 + |\zeta|^2)^{m-1}$$

pour $(\xi, \eta, \sigma - i\gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$ et $\gamma > 0$

et par conséquent il découle de (9.10)

$$(9.12)\quad \sum_{i,j=0}^{m-1} a_{ij}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) \int_0^{+\infty} D^i V(x) \overline{D^j V(x)}\, dx \geqslant c \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^\infty |D^i V(x)|^2\, dx$$

d'où l'on déduit l'inégalité (9.8) en remplaçant V par son expression (9.9) dans (9.12).

On applique alors l'inégalité (9.8) à $U(x) = u\left(\frac{x}{|\zeta|}, \zeta\right)$; il vient

$$F(u) \geqslant c \sum_{j=0}^{m-1} |\zeta|^{2(m-1-j)} \int_0^\infty |D_x^j u(x, \zeta)|^2\, dx - C \sum_{j=0}^{m-2} |\zeta|^{2(m-1-j-1/2)} |D_x^j u(0, \zeta)|^2$$

et compte tenu de (9.7) on en déduit après intégration en (η, σ)

$$(9.13)\quad \int_0^\infty \int \sum_{i,j=0}^{m-1} a_{ij}(\zeta) D_x^i u(x, \zeta) \overline{D_x^j u(x, \zeta)}\, dx\, d\eta\, d\sigma \geqslant c\, |u|^2_{m-1;\gamma} - C \sum_{j=0}^{m-2} \langle \gamma_j u \rangle^2_{m-1-j-1/2;\gamma}.$$

Enfin, en utilisant (9.6) et en remarquant que

$$\gamma\langle\gamma_j u\rangle^2_{m-1-j-1/2;\gamma} \leqslant \langle\gamma_j u\rangle^2_{m-1-j;\gamma}$$

l'inégalité (9.2) découle de (9.3), (9.5) et (9.13).

En appliquant ce qui précède au problème mixte avec les conditions au bord de Dirichlet et $f = 0$, on va démontrer la

Proposition 9.2. — *Pour tout* $g \in \mathrm{H}_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ *l'unique solution* $u \in \mathrm{H}_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^{n+1}_+)$ *de*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}u &= 0, & x &> 0 \\ \gamma_j u &= g_j, & j &= 0, \ldots, \mu - 1 \end{aligned}$$

vérifie l'inégalité

$$(9.14) \qquad \gamma|u|^2_{m-1;\gamma} \leqslant \mathrm{C}\sum_{j=0}^{\mu-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-j;\gamma}$$

avec une constante C *indépendante de* g *et* $\gamma > 0$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{P}u = 0$, il découle de (8.4) et (8.5)

$$\gamma\langle\gamma_{\mu+h}u\rangle^2_{m-1-\mu-h;\gamma} \leqslant \mathrm{C}\sum_{j=0}^{\mu-1}\langle\gamma_j u\rangle^2_{m-1-j;\gamma}$$

et l'on conclut en utilisant (9.1).

10. Majorations de γu et u dans le cas général.

Le point essentiel de la démonstration de l'inégalité d'énergie (7.1) réside dans la

Proposition 10.1. — *Soit un opérateur* P *vérifiant* (A′), *alors il existe* C *telle que :*

$$(10.1) \qquad \int_0^{+\infty}\left|\int_{\mathrm{C}^+(\zeta)}\frac{e^{ix\xi}\,\xi^h}{\mathrm{P}^+(\xi,\zeta)}\,d\xi\right|^2 dx \leqslant \frac{\mathrm{C}}{\gamma}|\zeta|^{2(-\mu+h+1)}$$

pour $\gamma > 0$,

$$(10.2) \qquad \int_0^{+\infty}\left|\int_{\mathrm{C}^-(\zeta)}\frac{e^{-ix\xi}\,\xi^h}{\mathrm{P}^-(\xi,\zeta)}\,d\xi\right|^2 dx \leqslant \frac{\mathrm{C}}{\gamma}|\zeta|^{2(m+\mu+h+1)}$$

pour $\gamma > 0$ $(h = 0, \ldots, m-1)$.

Démonstration. — Appliquons la proposition (9.2) en prenant

$$g_0 = \cdots = g_{\mu-2} = 0, \qquad g_{\mu-1} = g \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n)$$

on trouve

$$\gamma |u|^2_{m-1;\gamma} \leqslant C \langle g \rangle^2_{m-\mu;\gamma}$$

soit explicitement

$$\text{(10.3)} \quad \int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |\zeta|^{2(m-1-k)} |D_x^k u(x, \zeta)|^2 \, dx \, d\eta \, d\sigma$$
$$\leqslant \frac{C}{\gamma} \int_{\mathbf{R}^n} |\zeta|^{2(m-\mu)} |g(\zeta)|^2 \, d\eta \, d\sigma \ (k = 0, \ldots, m-1).$$

Comme $P_+(D_x, \zeta)u(x, \zeta) = 0$, il vient d'après (8.9)

$$\text{(10.4)} \quad D_x^k u(x, \zeta) = g(\zeta) \cdot \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi} \xi^k}{P^+(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi}$$

d'où en posant

$$\text{(10.5)} \quad h(\zeta) = |\zeta|^{m-\mu} g(\zeta)$$

et

$$I_k(\zeta) = \int_0^\infty \left| \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi} \xi^k}{P^+(\xi, \zeta)} d\xi \right|^2 dx,$$

et en reportant dans (10.3)

$$\text{(10.6)} \quad \int_{\mathbf{R}^n} |h(\zeta)|^2 |\zeta|^{2(\mu-k-1)} I_k(\zeta) \, d\eta \, d\sigma \leqslant \frac{C}{\gamma} \int_{\mathbf{R}^n} |h(\zeta)|^2 \, d\eta \, d\sigma.$$

On remarque alors que pour $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $h(\eta, \sigma - i\gamma)$ décrit, en tant que fonction de (η, σ), une partie dense de $L^2(\mathbf{R}^n)$; le théorème sur les multiplicateurs de $L^2(\mathbf{R}^n)$ nous montre que

$$|\zeta|^{2(\mu-k-1)} I_k(\zeta) \leqslant \frac{C}{\gamma}$$

ce qui prouve l'inégalité (10.1). Quant à (10.2) elle se déduit de (10.1) en remplaçant $P(\xi, \zeta)$ par le polynôme $P(-\xi, \zeta)$ qui vérifie aussi les hypothèses (A').

Démontrons maintenant la majoration (7.1) pour γu en se plaçant sous les hypothèses du théorème 7.1.

De la formule (8.3) et des inégalités (8.4), on tire

$$\langle\gamma_k u\rangle^2_{m-1-k;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^{2\theta}} \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}$$
$$+ \frac{C}{\gamma^{2\theta}} \sum_{h=0}^{m-1} \int |\zeta|^{2(m-\mu-h-1+\theta)} \left(\int_0^{+\infty} |f(x,\zeta)|^2\, dx\right)$$
$$\cdot \left(\int_0^{+\infty} \left|\int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix\xi}\,\xi^k}{P^-(\xi,\zeta)}\, d\xi\right|^2 dx\right) d\eta\, d\sigma \quad (k = 0, \ldots, \mu-1)$$

d'où, d'après (10.2), il vient pour $k = 0, \ldots, \mu - 1$

$$(10.7) \qquad \langle\gamma_k u\rangle^2_{m-1-k;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^{2\theta}}\left(\sum_{j=0}^{\mu-1} \langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma} + \frac{1}{\gamma}|f|^2_{0,\theta;\gamma}\right).$$

Pour les $m - \mu$ dernières traces, on utilise (8.5) et on majore encore grâce à (10.2)

$$(10.8) \qquad \langle\gamma_{h+\mu} u\rangle^2_{m-1-h-\mu;\gamma} \leqslant C \sum_{j=0}^{\mu-1} \langle\gamma_{h+j} u\rangle^2_{m-1-h-j;\gamma}$$
$$+ \frac{C}{\gamma}\int_0^{+\infty}\int_{R^n} |f(x,\zeta)|^2\, dx\, d\eta\, d\sigma \quad (h = 0, \ldots, m-\mu)$$

et en remarquant que

$$(10.9) \qquad \int_0^{\infty}\int_{R^n} |f(x,\zeta)|^2\, dx\, d\eta\, d\sigma \leqslant \frac{1}{\gamma^{2\theta}} |f|^2_{0,\theta;\gamma}$$

on en déduit que (10.7) reste vraie pour $k = 0, \ldots, m - 1$.

Pour majorer u, on combine (10.7) et la proposition 9.1, d'où

$$(10.10) \qquad \gamma|u|^2_{m-1;\gamma} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0;\gamma} + \frac{1}{\gamma^{2\theta+1}}|f|^2_{0,\theta;\gamma}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\gamma^{2\theta}} \Sigma \langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right),$$

et d'autre part l'hypothèse que $x = 0$ n'est pas caractéristique pour P permet d'obtenir (voir le lemme 2.1.1 de [5])

$$\gamma|u|^2_{m,-1;\gamma} \leqslant C\gamma(|f|^2_{0,-1;\gamma} + |u|^2_{m-1;\gamma}) \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0;\gamma} + \gamma|u|^2_{m-1;\gamma}\right)$$

soit, en reportant dans (10.10)

$$\gamma|u|^2_{m,-1;\gamma} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0;\gamma} + \frac{1}{\gamma^{2\theta+1}}|f|^2_{0,\theta;\gamma} + \frac{1}{\gamma^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\mu-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-j;\gamma}\right)$$

ce qui achève, compte tenu de (10.8) et (10.9), la démonstration de l'inégalité d'énergie (7.1).

11. Nécessité de la condition (L_θ).

Supposons maintenant que l'assertion (i) soit satisfaite pour un certain $\theta \geqslant 0$ et démontrons qu'alors (L_θ) est vérifiée.

En prenant $f = 0$, l'assertion (i) implique en particulier, grâce à la proposition 6.4, que pour toute $g \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ il existe $\varphi' = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{\mu-1}) \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ unique telle que

$$B' * \varphi' = g,$$

l'inégalité d'énergie s'écrit

$$(11.1) \qquad \sum_0^{\mu-1}\langle \varphi_j\rangle^2_{m-1-j;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\mu-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma},$$

et de plus on sait que si g est nulle pour $t < 0$ alors φ' l'est aussi. L'application $g \to \varphi'$ définit donc un opérateur linéaire continu de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^\mu)$ qui commute avec les translations, il est donc de la forme

$$\varphi' = A * g$$

où $A = (A_{j,k})_{0\leqslant j,k\leqslant \mu-1}$ est une matrice distribution telle que

$$(11.2) \qquad \operatorname{Supp} A_{j,k} \subset \{t \geqslant 0\}.$$

On a par construction

$$(11.3) \qquad A * B' = \delta \otimes I,$$

on déduit, en procédant comme au § 5, que les $A_{j,k}$ sont des distributions homogènes et donc tempérées, dont on désigne la transformée de Laplace en z par

$$A(\zeta) = \widehat{e^{-\gamma t}A}(\eta, \sigma) \quad \text{pour} \quad \gamma > 0.$$

D'autre part, l'inégalité (11.1) montre que l'application

$$(\eta, \sigma) \to |\zeta|^{(b_k - j - \theta)} |A_{j,k}(\zeta)|$$

est un multiplicateur de $L^2(\mathbf{R}^n)$, de norme L^∞ majorée par C/γ^θ, c'est-à-dire

$$(11.4) \qquad \underset{(\eta,\sigma)\in\mathbf{R}^n}{\text{sup. ess}} |A_{j,k}(\zeta)| \leqslant \frac{C}{\gamma^\theta} |\zeta|^{j-b_k+\theta}.$$

D'après (11.3) on a également

$$A(\zeta)B'(\zeta) = I \quad \text{pour presque tous les } (\eta, \sigma) \in \mathbf{R}^n,$$

en particulier

$$\det A(\zeta) . R(\zeta) = 1 \text{ p.p.},$$

et d'après (11.4) on a pour presque tous les (η, σ)

$$(11.5) \quad |R(\zeta)| \geqslant \frac{\gamma^{\mu\theta}}{C^\mu} |\zeta|^\rho \quad \left(\rho = \frac{\mu(\mu-1)}{2} - \sum_{k=0}^{\mu-1} b_k + \mu\theta\right),$$

mais les deux membres de (11.5) sont C^∞ en (η, σ), donc l'inégalité (11.5) est vraie partout, ce qui prouve que $R(\zeta) \neq 0$ pour $\gamma > 0$ et par conséquent on a, d'après (11.4),

$$|A_{j,k}(\zeta)| \leqslant \frac{C}{\gamma^\theta}$$

pour $|\zeta| = 1$ et $\gamma > 0$, la condition (L_θ) est donc satisfaite et ceci termine la démonstration du théorème 2.

Remarque 11.1. — Pour θ réel $\geqslant 0$, introduisons la condition

$$(\mathcal{L}_\theta) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Il existe } C > 0 \text{ tel que} \\ \qquad\qquad |R(\zeta)| \geqslant C\gamma^\theta \\ \text{pour } \zeta = (\eta, \sigma - i\gamma),\ |\zeta| = 1 \text{ et } \gamma > 0. \end{array} \right.$$

Il est évident que $(\mathcal{L}_\theta)$ implique (L_θ); mais, réciproquement, (L_θ) implique seulement $(\mathcal{L}_{\mu\theta})$. Ceci prouve néanmoins que dans le cas $\theta = 0$ (condition de Lopatinski uniforme) ou dans le cas $\mu = 1$, la condition $(\mathcal{L}_\theta)$ est équivalente à (L_θ) et donc à la condition (i) du théorème 2.

12. Autre méthode de démonstration de la suffisance de (L_θ).

On se propose d'étudier les noyaux qui permettent d'exprimer la solution u de $(*)$ en fonction des données (voir (8.6), (8.7), (8.9)) quand $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^{n+1})$ et $g \in H_{+\infty;\gamma}$.
Posons

$$(12.1) \qquad \psi(x, \zeta) = P^+(D_x, \zeta)(E * f)(x, \zeta)$$

on sait que (voir (8.1)),

$$\psi^0(x, \zeta) = (P^+(D_x, \zeta)u(x, \zeta))^0$$

et par définition de v, on peut écrire

$$v(\xi, \zeta) = \frac{1}{P^+(\xi, \zeta)} \mathcal{F}_x(\psi^0(x, \zeta)).$$

Définissons

$$\psi^-(x, \zeta) = \psi(x, \zeta) - \psi^0(x, \zeta)$$

de sorte que

$$v(x, \zeta) = v_1(x, \zeta) - v_2(x, \zeta)$$

avec

$$(12.2) \qquad v_1(\xi, \zeta) = \frac{f(\xi, \zeta)}{P(\xi, \zeta)} \quad \text{et} \quad v_2(\xi, \zeta) = \frac{\psi^-(\xi, \zeta)}{P^+(\xi, \zeta)}$$

Explicitons le noyau qui permet d'exprimer v_2 en fonction de f

$$v_2(x, \zeta) = \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} \frac{\psi^-(\xi, \zeta)}{P^+(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi}$$

et par une déformation de contour facile à justifier

$$v_2(x, \zeta) = \int_{C^+(\zeta)} e^{ix\xi} \frac{\psi^-(\xi, \zeta)}{P^+(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi} \qquad \text{pour} \quad x > 0,$$

puis en remplaçant ψ^- par son expression (12.1)

$$v_2(x, \zeta) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}}{P^+(\xi, \zeta)} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-i\tilde{x}\xi} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\tilde{x}\xi'} f(\xi', \zeta)}{P^-(\xi', \zeta)} \frac{d\xi'}{2\pi} \right) d\tilde{x} \right) d\xi$$

et en remarquant que $f(x, \zeta) = 0$ pour $x \leqslant 0$ permet d'écrire

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\tilde{x}\xi'} f(\xi', \zeta)}{\mathrm{P}^-(\xi', \zeta)} d\xi' = \int_{\mathrm{C}^-(\zeta)} \frac{e^{i\tilde{x}\xi'} f(\xi', \zeta)}{\mathrm{P}^-(\xi', \zeta)} d\xi' \qquad \text{pour} \qquad \tilde{x} < 0$$

d'où finalement l'expression suivante de v_2

$$(12.3) \quad v_2(x, \zeta) = \int_0^{+\infty} \mathrm{G}(x, x', \zeta) f(x', \zeta)\, dx' \quad x > 0$$

avec le noyau G défini par :

$$(12.4) \quad \mathrm{G}(x, x', \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{C}^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}}{\mathrm{P}^+(\xi, \zeta)} \left(\int_{\mathrm{C}^-(\zeta)} \frac{e^{-ix'\xi'}}{(\xi - \xi')\mathrm{P}^-(\xi', \zeta)} d\xi' \right) d\xi.$$

En utilisant les inégalités vérifiées par la solution u de (*), on va en déduire les propriétés du noyau G. On a :

$$u = w + v_1 + v_2$$

or l'inégalité (10.1) permet de majorer w d'après son expression (8.9)

$$(12.5) \qquad |w|^2_{m-1;\gamma} \leqslant \frac{\mathrm{C}}{\gamma^{2\theta}} \sum_{j=0}^{\mu-1} \langle \gamma_j u \rangle^2_{m-1-j;\gamma},$$

on majore ensuite v_1 en utilisant le

Lemme 12.1 — *Soit un opérateur* P *de degré* m *vérifiant* (A′), *alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que :*

$$(12.6) \quad |\mathrm{P}(\xi, \zeta)|^2 \geqslant \mathrm{C}\gamma^2(|\zeta|^2 + \xi^2)^m |\zeta|^{-2} \qquad \textit{pour} \qquad \xi \in \mathbf{R}$$
$\zeta = (\eta, \sigma - i\gamma)$, $\gamma > 0$.

Démonstration. — La minoration

$$(12.7) \qquad |\mathrm{P}(\xi, \zeta)|^2 \geqslant \mathrm{C}\gamma^2(\xi^2 + |\zeta|^2)^{m-1}$$

est classique pour un opérateur strictement hyperbolique dans la direction t. Les deux membres de (12.6) sont homogènes de degré $2m$, il suffit donc d'établir (12.6) pour $\xi^2 + |\zeta|^2 = 1$.

Comme $\{x = 0\}$ n'est pas caractéristique, il existe $c > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que les conditions $|\zeta|^2 \leqslant \varepsilon$ $\xi^2 + |\zeta|^2 = 1$

impliquent $|P(\xi, \zeta)|^2 \geqslant C$ et *a fortiori*

$$|P(\xi, \zeta)|^2 \geqslant C \frac{\gamma^2}{|\zeta|^2};$$

lorsque $|\zeta| \geqslant \varepsilon$ et $\xi^2 + |\zeta|^2 = 1$, on a d'après (12.7)

$$|P(\xi, \zeta)|^2 \geqslant c\gamma^2 \geqslant c\varepsilon^2 \frac{\gamma^2}{|\zeta|^2}$$

ce que démontre le lemme.

On en déduit la majoration suivante de v_1

$$(12.8) \qquad |v_1|^2_{m,-1;\gamma} \leqslant \|v_1\|^2_{m,-1;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^2} |f|^2_{0,\gamma}$$

On est maintenant en mesure d'étudier le noyau G.

Proposition 12.1 — *Soit* P *vérifiant* (A′) *et* G *défini par* (12.4) *alors il existe* C *telle que*

$$(12.9) \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty |D_x^k G(x, x', \zeta)|^2 \, dx \, dx' \leqslant \frac{C}{\gamma^2} |\zeta|^{2(-m+k+1)}$$

$k = 0, \ldots, m-1$.

Démonstration. — Elle est analogue à celle de la proposition 10.1. Considérons la solution $u \in H_{+\infty;\gamma}$ du problème $(*)$ avec les conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} Pu = f \\ \gamma_j u = 0 \quad j = 0, \ \ldots, \ \mu - 1 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^{n+1})$$

Dans le cas de Dirichlet, on a $R(\zeta) = 1$ pour $\gamma > 0$, donc la condition L_0 est satisfaite et par conséquent l'inégalité (7.1) donne

$$|u|^2_{m,-1;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^2} |f|^2_{0;\gamma}$$

et comme ici $u = v_1 + v_2$, on déduit de (12.8)

$$|v_2|_{m,-1;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^2} |f|^2_{0;\gamma},$$

c'est dire en explicitant le premier membre

(12.10)
$$\sum_{k=0}^{m}\int_{0}^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|\zeta|^{2(m-1-k)}\left|\int_0^{+\infty} D_x^k G(x, x', \zeta)\, f(x', \zeta)\, dx'\right|^2 dx\, d\eta\, d\sigma \leqslant \frac{C}{\gamma^2}|f|_{0;\gamma}^2$$

et comme on a cette inégalité pour toute $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^{n+1})$ le théorème sur les multiplicateurs de $L^2(\mathbf{R}^n)$ implique que G satisfait bien à (12.9).

Remarque 12.1 — La démonstration des propositions 10.1 et 12.1 est basée sur les propositions 9.1 et 9.2 qui sont une des formes particulières de l'inégalité d'énergie dans le cas des conditions au bord de Dirichlet. D'autre part, les majorations (12.5) et (12.8) montrent qu'une démonstration directe des propositions 10.1 et 12.1, permettrait d'obtenir immédiatement l'inégalité d'énergie (7.1) sans avoir à traiter au préalable le cas particulier de Dirichlet. Ainsi, en explicitant par le théorème des résidus les intégrales $\int_{C^{\pm}(\zeta)}$ qui interviennent dans ces deux propositions, on pourrait espérer en déduire les majorations fondamentales (10.1), (10.2) et (12.9); malheureusement, nous n'y sommes complètement parvenus que dans des cas particuliers, par exemple si P vérifie la condition supplémentaire d'Agmon :

| Pour $\eta \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\sigma \in \mathbf{R}$ les zéros réels ξ de $P(\xi, \eta, \sigma) = 0$ sont de multiplicités au plus double.

13. Exemple : équation des ondes avec condition de dérivée oblique au bord.

On considère l'opérateur des ondes

$$P(D_x, D_y, D_t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (\text{ici} \quad \mu = 1)$$

et la condition de dérivée oblique définie par l'opérateur

$$B(D_x, D_y, D_t) = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j\frac{\partial}{\partial y_j} \quad (\beta_j \in \mathbf{R})$$

Les conditions (A′) et (B) sont satisfaites, par conséquent on pourra appliquer les théorèmes 1 et 2 si on montre la

PROPOSITION 13.1 — *Le problème mixte* (*) *relatif aux opérateurs* P, B *vérifie la condition* (L) *avec* $\tilde{\Gamma}_0 = \{(\eta, \tau) \in \mathbf{R}^n;$ $|\eta| < \dfrac{\tau}{\sqrt{1+|\beta|^2}}\}$ *et la condition* L_θ *avec* $\theta = 1$.

Pour $\zeta = (\eta, \tau) \in \mathbf{C}^n$ posons $q(\zeta) = \tau^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j^2$; on a par définition de Γ_0

$$\Gamma_0 = \{\zeta \in \mathbf{R}^n;\ q(\zeta) > 0 \quad \text{et} \quad \tau > 0\}$$

et pour $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0$ le déterminant de Lopatinski est donné par

$$\text{(13.1)} \qquad \mathrm{R}(\zeta) = \sqrt[+]{q(\zeta)} + \beta \cdot \eta$$

où $\sqrt[+]{\ }$ désigne la racine carrée de partie imaginaire > 0 et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$.

Commençons par établir le

LEMME 13.1. — *Pour* $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0$ *on a*

$$\mathrm{Im}\sqrt[+]{q(\zeta)} \geqslant \sqrt{q(\mathrm{Im}\,\zeta)}.$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'on a l'inégalité

$$\text{(13.2)} \qquad \mathrm{Im}\sqrt[+]{(a+ib)^2 - c} \geqslant |b| \qquad \text{pour} \quad c \geqslant 0, a, b \in \mathbf{R}$$

qui se prouve par un calcul élémentaire.

Si on désigne encore par q la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q, il vient

$$\begin{aligned} q(\zeta) &= q(\mathrm{Re}\,\zeta) - q(\mathrm{Im}\,\zeta) + 2iq(\mathrm{Re}\,\zeta, \mathrm{Im}\,\zeta) \\ &= \left(\frac{q(\mathrm{Re}\,\zeta, \mathrm{Im}\,\zeta)}{\sqrt{q(\mathrm{Im}\,\zeta)}} + i\sqrt{q(\mathrm{Im}\,\zeta)}\right)^2 - \frac{1}{q(\mathrm{Im}\,\zeta)}\, d(\zeta) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$d(\zeta) = (q(\mathrm{Re}\,\zeta, \mathrm{Im}\,\zeta))^2 - q(\mathrm{Re}\,\zeta)q(\mathrm{Im}\,\zeta).$$

Le lemme 13.1 découle de l'application de (13.2) à cette expression de q, ce qui est licite si on vérifie que $d(\zeta) \geqslant 0$. Or, en explicitant

$$(13.3) \quad d(\zeta) = (\operatorname{Re} \tau)^2 |\operatorname{Im} \eta|^2 - 2(\operatorname{Re} \tau . \operatorname{Im} \tau)(\operatorname{Re} \eta . \operatorname{Im} \eta) + (\operatorname{Re} \eta . \operatorname{Im} \eta)^2 + |\operatorname{Re} \eta|^2 q(\operatorname{Im} \eta).$$

Le deuxième membre de (13.3) est un trinôme du second degré en $\operatorname{Re} \tau$, dont le discriminant

$$q(\operatorname{Im} \zeta)((\operatorname{Re} \eta . \operatorname{Im} \eta) - |\operatorname{Re} \eta|^2 |\operatorname{Im} \eta|^2)$$

est une quantité $\leqslant 0$ pour $\operatorname{Im} \zeta \in \Gamma_0$ et par conséquent

$$d(\zeta) \geqslant 0$$

ce qui termine la démonstration du lemme 13.1.

Démontrons maintenant la proposition 13.1.

On a :

$$|\mathrm{R}(\zeta)| \geqslant \operatorname{Im} \mathrm{R}(\zeta) = \operatorname{Im} \sqrt[+]{q(\zeta)} - \beta . \operatorname{Im} \eta$$

et grâce au lemme 13.1, il vient

$$(13.4) \quad |\mathrm{R}(\zeta)| \geqslant \sqrt{q(\operatorname{Im} \zeta)} - |\beta| . |\operatorname{Im} \eta| \quad \text{pour } \zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma_0.$$

Définissons le cône

$$\tilde{\Gamma}_0 = \{\zeta = (\eta, \tau) \in \Gamma_0 ;\ \sqrt{q(\zeta)} - |\beta||\eta| > 0\}$$

$$(13.5) \qquad = \left\{\zeta . ;\ |\eta| < \frac{\tau}{\sqrt{1 + |\beta|^2}}\right\}$$

Alors si K est un cône fermé épointé de $\tilde{\Gamma}_0$, (13,4) montre qu'il existe $c > 0$ telle que $|\mathrm{R}(\zeta)| \geqslant c|\operatorname{Im} \zeta|$ pour

$$\zeta \in \mathbf{R}^n - i\mathrm{K}, \qquad |\zeta| = 1,$$

ce qui démontre la proposition

Remarque 13.1. — L'application du théorème 2 avec $\theta = 1$ à ce problème mixte complète les résultats de [3], [7], [8] dans le cas particulier du problème mixte dans un demi-espace pour des opérateurs à coefficients constants.

Remarque 13.2. — Le cône dual de $\tilde{\Gamma}_0$ est défini par

$$\tilde{\Gamma}_0^{*} = \{(y, t) \in \mathbf{R}^n ;\ |y| < \sqrt{1 + |\beta|^2} . t\},$$

on en déduit, compte tenu de la remarque 5.2, que la vitesse de propagation sur le bord $x = 0$ est majorée par $\sqrt{1 + |\beta|^2}$. Mais par ailleurs on peut montrer que cette vitesse est effectivement atteinte [7], [12]; on a donc, si $|\beta| \neq 0$, l'exemple d'un problème mixte pour lequel la vitesse de propagation est strictement supérieure à celle du problème de Cauchy qui ici vaut 1.

Appendice.

Démonstration de la proposition 3.2.

On utilise les notations de cette proposition.

La condition est nécessaire. Soit T une distribution (de la variable $z \in \mathbf{R}^n$) homogène de degré d à support dans Γ_1^*; elle est donc tempérée et vérifie

$$e^{\mathrm{Im}\,\zeta.z}\,\mathrm{T} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \quad \text{pour} \quad -\mathrm{Im}\,\zeta \in \Gamma_1,$$

et donc (voir par exemple [11]) la transformée de Laplace F de T

$$\text{(A.1)} \qquad \mathrm{F}(\zeta) = \widehat{e^{\mathrm{Im}\,\zeta.z}\,\mathrm{T}}(\mathrm{Re}\,\zeta) = \langle \mathrm{T},\, e^{-i\zeta.z} \rangle$$

est holomorphe dans $\mathbf{R}^n - i\Gamma_1$ et vérifie la propriété suivante :

(A.2) pour tout compact $\tilde{\mathrm{K}}$ de Γ_1 il existe C et $\rho \in \mathbf{R}$ tels que

$$|\mathrm{F}(\zeta)| \leqslant \mathrm{C}(1 + |\zeta|)^\rho \quad \text{pour} \quad \zeta \in \mathbf{R}^n - i\tilde{\mathrm{K}}.$$

De (A.1) et de l'homogénéité de T on déduit que pour $\lambda > 0$

$$\mathrm{F}(\lambda\zeta) = \langle \mathrm{T}, e^{-i\lambda\zeta.z} \rangle = \lambda^{-d-n} \langle \mathrm{T}, e^{-i\zeta.z} \rangle = \lambda^{-d-n}\mathrm{F}(\lambda)$$

ce qui montre que F est homogène de degré $d' = -d - n$.

Si maintenant K est un cône fermé épointé de Γ_1, on obtient

$$\begin{aligned}|\mathrm{F}(\zeta)| &= |\mathrm{Im}\,\zeta|^{d'} \left|\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{Re}\,\zeta}{|\mathrm{Im}\,\zeta|} + i\,\frac{\mathrm{Im}\,\zeta}{|\mathrm{Im}\,\zeta|}\right)\right| \\ &\leqslant \mathrm{C}|\mathrm{Im}\,\zeta|^{d'}\left(1 + \left|\frac{\zeta}{\mathrm{Im}\,\zeta}\right|\right)^\rho \\ &\leqslant \mathrm{C}|\mathrm{Im}\,\zeta|^{d'-\rho}(|\mathrm{Im}\,\zeta| + |\zeta|)^\rho \\ &\leqslant \mathrm{C}'|\mathrm{Im}\,\zeta|^{d'-\rho} \quad \text{pour} \quad \zeta \in \mathbf{R}^n - i\mathrm{K} \quad \text{et} \quad |\zeta| = 1.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Soit F une fonction holomorphe dans $\mathbf{R}^n - i\Gamma_1$, homogène de degré d' et telle que :

$$\left|\begin{array}{l}\text{pour tout cône fermé épointé } K \subset \Gamma_1, \text{ il existe } C \geqslant 0 \text{ et } \theta \in \mathbf{R} \text{ tels que}\\ \qquad |F(\zeta)| \leqslant C|\operatorname{Im}\zeta|^\theta \quad \text{pour} \quad \zeta \in \mathbf{R}^n - iK\\ \text{et } |\zeta| = 1.\end{array}\right.$$

Si $\tilde{K}$ est un compact de Γ_1, on a :

$$|F(\zeta)| = |\zeta|^{d'}\left|F\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\right| \leqslant C|\zeta|^{d'}\left|\frac{\operatorname{Im}\zeta}{\zeta}\right|^\theta \leqslant C'|\zeta|^{d'-\theta},$$
$$\zeta \in \mathbf{R}^n - i\tilde{K},$$

ce qui montre que la propriété (A.2) est satisfaite et par conséquent (voir [11]) F est la transformée de Laplace d'une distribution T telle que $e^{\operatorname{Im}\zeta.z} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ pour $-\operatorname{Im}\zeta \in \Gamma_1$. On vérifie que T est homogène de degré $d = -d' - n$ par un calcul analogue à celui fait pour F.

Montrons enfin que $\operatorname{Supp} T \subset \Gamma_1^*$, soit $\beta \in \Gamma_1$ et

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$$

telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\beta.z < 0\}$, on a :

$$\text{(A.3)} \qquad \langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(\alpha - i\lambda\beta)\tilde{\varphi}(\alpha - i\lambda\beta)\, d\alpha$$

$\left(\text{avec } \lambda > 0 \text{ arbitraire et } \tilde{\varphi}(\zeta) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\zeta.z}\varphi(z)\, dz\right);$

or, par hypothèse

$$|F(\alpha - i\lambda\beta)| \leqslant C\lambda^\theta(\lambda + |\alpha|)^{d'-\theta}$$

et par Paley-Wiener, on a pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$|\tilde{\varphi}(\alpha - i\lambda\beta)| \leqslant \frac{C_k}{(1 + \lambda + |\alpha|)^k}$$

ce qui montre que le second membre de (A.3) tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$ d'où $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Agemi, T. Shirota, On necessary and sufficient conditions for L^2-well posedness of mixed problems for hyperbolic equations, *J. Fac. Sc. Hokkaido Univ.*, Vol. 21, n° 2 (1970).

[2] S. Agmon, Problème mixte pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, C.N.R.S., Paris (1962).

[3] J. Chazarain, Problèmes de Cauchy Abstraits et Applications à quelques problèmes mixtes, *J. of Funct. Analysis*, Vol. 7, n° 3 (1971).

[3′] J. Chazarain et A. Piriou, Remarques sur la caractérisation des problèmes mixtes bien posés pour un opérateur hyperbolique, Séminaire Leray, Collège de France (1971).

[3″] R. Hersh, Mixed problems in Several variables, *J. Math. and Mech.*, Vol. 12, n° 3 (1963).

[4] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer (1963).

[5] L. Hörmander, Pseudo-differential Operators and non elliptic boundary problems, *Ann. of Math.*, Vol. 83 (1966).

[6] L. Hörmander, On the regularity of solutions of boundary problems, *Acta Math.*, 99 (1958).

[7] M. Ikawa, Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, *Osaka J. Math.*, 7 (1970).

[8] A. Inoue, On the mixed problem for the wave equation with an oblique boundary condition, *J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo*, Vol. XVI, Part. 3 (1970).

[8′] K. Kasahara, On weak well posedness of mixed problems for hyperbolic systems, *Publ. Res. Just. Math. Sc. Kyoto Univ.*, Vol. 6, n° 3 (1971).

[8″] H. O. Kreiss, Initial boundary value problems for hyperbolic systems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1970).

[9] A. Piriou, Problèmes aux limites généraux pour des opérateurs différentiels paraboliques dans un domaine borné, *Annales Inst.Fourier*, XXI, fasc. 1 (1971).

[9′] J. Rauch, L^2 is a continuable initial condition for Kreiss' mixed problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, à paraître.

[10] R. Sakamoto, Mixed problems for hyperbolic equations (I) et (II) *J. of Math. Kyoto Univ.*, Vol. 10, n° 2 et n° 3 (1970).

[11] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, Paris (1966).

[12] T. Shirota, On the propagation speed of hyperbolic operator with mixed boundary conditions, preprint.

Manuscrit reçu le 29 novembre 1971.
accepté par B. Malgrange

Jacques Chazarain, Alain Piriou,
Département de Mathématiques,
Université de Nice I,
Parc Valrose, 06-Nice.