ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ADRIEN DOUADY
JACQUES FRISCH
ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Recouvrements privilégiés

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 4 (1972), p. 59-96
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_4_59_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 4 (1972), 59-96.

RECOUVREMENTS PRIVILÉGIÉS

par A. DOUADY, J. FRISCH et A. HIRSCHOWITZ

Une fourmi de dix-huit mètres
Avec un chapeau sur la tête
Ça n'existe pas
Ça n'existe pas
....
Et pourquoi pas?

Dans [1], on est gêné par le fait que, même si l'espace analytique donné X est une variété, on ne dispose pas de recouvrements (K_i) tels que les K_i et les $K_{ij} = K_i \cap K_j$ soient privilégiés pour le faisceau F donné. On s'en tire, mais par une astuce (espace Θ et morphisme θ du § 9) qui ne se généralise pas à d'autres situations, et qui ne permet donc pas de résoudre d'autres problèmes de modules.

Si X est une variété et F un faisceau sur X, nous définissons ici les compacts F-privilégiés, en utilisant l'espace de Hilbert H(K) des fonctions holomorphes de carré intégrable sur $\mathring{K}$ et non plus l'espace de Banach B(K) des fonctions continues sur K et holomorphes sur $\mathring{K}$, ce qui nous permet d'appliquer un résultat de Hörmander. Ces compacts ne sont plus nécessairement des polycylindres. Un *recouvrement privilégié* est une famille (K_i) de compacts telle que les $\mathring{K}_i$ recouvrent X et que les $K_{i_0, \dots i_p}$ soient privilégiés. Nous montrons que pour certaines variétés, que nous appelons « cylindrables », il existe pour tout faisceau F des recouvrements privilégiés arbitrairement fins.

Malheureusement, les recouvrements privilégiés seraient surtout utiles pour des espaces compacts, et nous n'avons comme exemples de variétés compactes cylindrables que les tores complexes et les variétés projectives. Mais pour les variétés projectives, les problèmes de modules relèvent des méthodes de la géométrie algébrique.

Nous ignorons si les résultats que nous présentons ici peuvent avoir directement des applications importantes. Mais ils changent les idées que l'on avait sur les recouvrements privilégiés.

1. Compacts privilégiés.

Soit X un ouvert de $\mathbf{C}^n$, et soit K un compact de X. On note H(K) l'espace vectoriel des fonctions $\mathbf{C}$-analytiques et de carré intégrable sur l'intérieur $\mathring{K}$ de K. Muni de la structure induite par $\mathbf{L}^2(\mathring{K})$, c'est un espace de Hilbert (mais non pas une algèbre). Lorsque $K = K' \times K''$, où K' est un compact de $\mathbf{C}^{n'}$ et K'' un compact de $\mathbf{C}^{n''}$, on a

$$H(K) = H(K') \mathbin{\widehat{\otimes}} H(K''),$$

le produit tensoriel étant muni de la norme hilbertienne.

Supposons désormais K contenu dans un ouvert de Stein U relativement compact dans X. Pour tout faisceau cohérent F sur U, posons

$$H(K, F) = H(K) \otimes_{O(K)} F(K),$$

où O désigne le faisceau des fonctions analytiques sur X. L'espace $H(K, F)$ ne dépend pas du choix de U (ouvert de Stein relativement compact dans X, contenant K et sur lequel F est défini).

Soit L un faisceau localement libre sur U, c'est-à-dire le faisceau des sections analytiques d'un fibré vectoriel analytique L de base X, localement trivial et de rang fini. Dans ce cas, $H(K, L)$ s'identifie à l'espace des sections de L analytiques et de carré intégrable sur $\mathring{K}$. On le munit de la topologie induite par l'espace $\mathbf{L}^2(\mathring{K}, L)$ des classes de sections de L de carré intégrable sur $\mathring{K}$, ce qui en fait un espace hilbertisable.

Soit F un faisceau cohérent sur U; la topologie (non nécessairement séparée) sur H(K, F) obtenue en prenant une résolution $L_\bullet$ de F sur un voisinage de Stein de K par des faisceaux localement libres et en identifiant H(K, F) au conoyau du morphisme

$$\mathrm{H}(\mathrm{K}, L_1) \to \mathrm{H}(\mathrm{K}, L_0)$$

ne dépend pas du choix de la résolution $L_\bullet$. On munira désormais H(K, F) de cette topologie (si F est localement libre, on retrouve la topologie précédemment définie).

Soit K un compact de X, et soit F un faisceau cohérent sur un voisinage de Stein de K dans X. On dira que K est *F-privilégié* s'il existe un voisinage ouvert de Stein U de K, relativement compact dans X et sur lequel F est défini, et une résolution localement libre

$$L_\bullet : 0 \to L_p \to \cdots \to L_1 \to L_0$$

de F sur U telle que le complexe d'espaces hilbertisables

$$\mathrm{H}(\mathrm{K}, L_\bullet) : 0 \to \mathrm{H}(\mathrm{K}, L_p) \to \cdots \to \mathrm{H}(\mathrm{K}, L_1) \to \mathrm{H}(\mathrm{K}, L_0)$$

soit une suite exacte stricte.

(Comme les espaces H(K, L_i) sont hilbertisables, dire que la suite exacte est stricte équivaut à dire que tous les morphismes sont directs, ou encore que le dernier est d'image fermée.)

Lorsque K est F-privilégié, H(K, F) est un espace hilbertisable.

Pour que K soit F-privilégié, il faut et il suffit que l'espace H(K, F) soit séparé, et que

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}(\mathrm{K})}(\mathrm{F}(\mathrm{K}), \mathrm{H}(\mathrm{K}))$$

soit nul pour tout $i > 0$. Il en résulte que pour toute résolution localement libre $L_\bullet$ de F sur un voisinage ouvert de Stein de K, la suite H(K, $L_\bullet$) est exacte stricte.

La théorie développée dans [1] pour le foncteur B(K, •) se transpose sans difficulté au foncteur H(K, •). Énonçons sans démonstration les deux principaux résultats.

1° (Théorème d'existence de voisinages privilégiés). Soit a un point de X, et soit F un faisceau cohérent sur X;

il existe un polycylindre $\mathcal{F}$-privilégié K contenu dans X et contenant a dans son intérieur.

2° (Scholie de platitude et privilège). Soit S un espace analytique, soit X un ouvert de $\mathbf{C}^n$, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent et S-plat sur $S \times X$, et soit K un compact contenu dans un ouvert de Stein de X. L'ensemble S' des points s de S tels que K soit $\mathcal{F}(s)$-privilégié est ouvert dans S et les espaces hilbertisables $H(K, \mathcal{F}(s))$ sont les fibres d'un fibré analytique localement trivial $H(K, \mathcal{F})$ de base S'.

On laisse au lecteur le soin d'étendre ce qui précède au cas où X est un ouvert d'une variété C-analytique contenu dans le domaine d'une carte : la seule chose à montrer est que les deux espaces $H(K, \mathcal{F})$ correspondant à deux cartes différentes sont canoniquement isomorphes.

2. Fermés localement privilégiés.

Soit X un ouvert de $\mathbf{C}^n$, soit A un fermé de X, et soit L un faisceau localement libre sur X, i.e. le faisceau des sections analytiques d'un fibré vectoriel L de rang fini et de base X. Pour tout ouvert U de X, on note $\mathbf{L}^2_{\mathring{A}, \mathrm{loc}}(U, L)$ l'espace des restrictions à $\mathring{A} \cap U$ des éléments de $\mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(A \cap U, L)$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des classes de sections de L sur $\mathring{A} \cap U$ qui sont de carré intégrable au voisinage de chaque point de A. On munit cet espace de la topologie de la convergence en moyenne quadratique sur les compacts de $A \cap U$, ce qui en fait un espace de Fréchet. On pose

$$H_A(U, L) = \mathbf{L}^2_{\mathring{A}, \mathrm{loc}}(U, L) \cap L(\mathring{A} \cap U).$$

Le faisceau $H_A(L)$: $U \to H_A(U, L)$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \to \mathbf{L}^2(\mathring{A} \cap U, L) \cap L(\mathring{A} \cap U)$; il est porté par A.

Soit U un ouvert de Stein relativement compact dans X. Si A est compact et contenu dans U, alors

$$H_A(U, L) = H(A, L).$$

Remarquons aussi que si U est réunion d'une suite d'ouverts (U_k), telle que U_k soit relativement compact dans U_{k+1} pour tout k, on a

$$H_A(U, L) = \varprojlim H_A(U_k, L) = \varprojlim H(A \cap \bar{U}_k, L).$$

Lorsque $L = O$, on écrit simplement H_A et $H_A(U)$ au lieu de $H_A(O)$ et $H_A(U, O)$. Si L est un faisceau localement libre de rang fini sur X, L est facteur direct d'un O_X-module libre de rang fini, d'où l'isomorphisme topologique

$$H_A(U, L) \approx H_A(U) \otimes_{O(U)} L(U).$$

Théorème (2.1). — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *soit* A *un fermé de* X *dont l'intérieur* $\mathring{A}$ *est de Stein, et soit* L *un faisceau localement libre sur* X. *On a pour tout ouvert de Stein* U *de* X

$$H^q(U, H_A(L)) = \begin{cases} H_A(U, L) & \text{si} \quad q = 0, \\ 0 & \text{si} \quad q > 0. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le résultat de Hörmander que voici (théorème 2.2.3. de [6]) :

Soit Ω un ouvert borné et pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$, de diamètre δ, et soit φ une fonction plurisous-harmonique dans Ω. Pour tout $f \in \mathbf{L}^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$, avec $q > 0$, telle que $d''f = 0$, il existe $g \in \mathbf{L}^2_{(p,q-1)}(\Omega, \varphi)$ telle que $d''g = f$ et que

$$q \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi}\, dV \leqslant \rho\delta^2 \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi}\, dV.$$

(Dans cet énoncé, dV désigne l'élément de volume;

$$\mathbf{L}^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$$

est l'espace des formes différentielles de type (p, q) dont chaque coefficient f_1 est une fonction sur Ω telle que

$$\int_\Omega |f_1|^2 e^{-\varphi}\, dV < +\infty).$$

Nous utiliserons ce résultat sous la forme suivante:

Lemme (2.2.). — *Soit* U *un ouvert de Stein de* $\mathbf{C}^n$, *soit* A *un fermé borné de* U *tel que* $\mathring{A}$ *soit de Stein, et soit* L *un* *fibré vectoriel analytique de rang fini sur* U. *Pour tout entier* $q > 0$ *et pour toute forme différentielle* d''*-fermé de type* $(0, q)$ *à coefficients dans* $\mathbf{L}^2_{\mathring{A},\mathrm{loc}}(U, L)$, *il existe une forme* g *de type* $(0, q-1)$ *à coefficients dans* $\mathbf{L}^2_{\mathring{A},\mathrm{loc}}(U, L)$ *telle que* $d''g = f$.

Démonstration. — On peut supposer que L est le fibré trivial $U \times \mathbf{C}$. Ceci étant, soit σ une fonction de classe C^∞, positive, strictement plurisous-harmonique et propre sur U. On peut choisir une fonction convexe χ sur $\mathbf{R}$, nulle sur la demi-droite négative, et croissant assez vite pour que f soit dans l'espace $\mathbf{L}^2_{(0,q)}(\mathring{A}, \chi \circ \sigma)$. D'après le théorème de Hörmander ci-dessus, il existe donc $g \in \mathbf{L}^2_{(0,q)}(\mathring{A}, \chi \circ \sigma)$ telle que $d''g = f$. Comme la fonction $e^{-\chi \circ \sigma}$ est localement minorée sur A, les coefficients de g sont dans $\mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathring{A})$, ce qui démontre le lemme.

Démonstration du théorème (2.1). — Comme dans la démonstration des théorèmes A et B (cf. par exemple [5]), on se ramène au cas où l'ouvert U est borné. Le faisceau L est le faisceau des sections analytiques d'un fibré vectoriel analytique L de rang fini et de base X. Pour tout ouvert V de X, l'espace $\mathbf{L}^2_{\mathring{A},\mathrm{loc}}(V, L)$ est un module sur l'anneau $C^\infty(V)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur V. Le faisceau C^∞ étant mou, $\mathbf{L}^2_{\mathring{A},\mathrm{loc}}(L)$ est un faisceau fin.

Pour tout entier r, soit $\Omega^{0,r}_{\mathring{A}}(L)$ le faisceau des formes différentielles f de type $(0, r)$ à coefficients dans $\mathbf{L}^2_{\mathring{A},\mathrm{loc}}(L)$ telles que $d''f$ ait aussi ses coefficients dans $\mathbf{L}^2_{\mathring{A},\mathrm{loc}}(L)$. Comme $\Omega^{0,r}_{\mathring{A}}(L)$ est aussi un C^∞-module, c'est un faisceau fin. La suite de faisceaux

$$0 \to H_A(L) \to \Omega^{0,0}_{\mathring{A}}(L) \xrightarrow{d''} \Omega^{0,1}_{\mathring{A}}(L) \xrightarrow{d''} \cdots \to \Omega^{0,n}_{\mathring{A}}(L) \to 0$$

est exacte, car d'après le lemme (2.2), on a pour tout ouvert de Stein V de X la suite exacte

$$(*) \quad 0 \to H_A(V, L) \to \Omega^{0,0}_{\mathring{A}}(V, L) \to \cdots \to \Omega^{0,n}_{\mathring{A}}(V, L) \to 0.$$

Ainsi le complexe $\Omega^{0,\bullet}_{\mathring{A}}(L)$ est une résolution fine de $H_A(L)$, donc pour tout q

$$H^q(U, H_A(L)) = H^q(\Omega^{0,\bullet}_{\mathring{A}}(U, L)).$$

En réappliquant l'exactitude du complexe (*) avec $V = U$, on obtient

$$H^q(U, H_A(L)) = \begin{cases} H_A(U, L) & \text{si} \quad q = 0 \\ 0 & \text{si} \quad q > 0. \end{cases}$$

C.Q.F.D.

Soit F un faisceau cohérent sur X. Pour tout ouvert de Stein U relativement compact dans X, on pose

$$H_A(U,\ F) = H_A(U) \otimes_{\mathcal{O}(A \cap U)} F(A \cap U).$$

On définit ainsi un préfaisceau, et l'on note $H_A(F)$ le faisceau associé. C'est un faisceau porté par A. Si F admet sur U une présentation

$$L_1 \xrightarrow{\alpha} L_0 \to F \to 0$$

par des faisceaux localement libres, on en déduit une suite exacte

$$H_A(U,\ L_1) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} H_A(U,\ L_0) \to H_A(U,\ F) \to 0$$

où l'application $\tilde{\alpha}$ est continue. On munira $H_A(U,\ F)$ de la topologie quotient. Celle-ci n'est en général pas séparée, mais elle ne dépend pas de la présentation.

On dira que le fermé A est localement F-privilégié si pour tout point $a \in A$, il existe un système fondamental de voisinages compacts K de a dans X tels que $A \cap K$ soit F-privilégié et que $\mathring{K}$ soit de Stein.

Proposition (2.3). — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *soit* A *un fermé de* X, *soit* F *un faisceau cohérent sur* X *et soit* $L_\bullet$ *une résolution localement libre de* F *sur* X. *Si* A *est localement* F*-privilégié, le complexe de* H_A*-modules localement libres* $H_A(L_\bullet)$ *est une résolution du faisceau* $H_A(F)$.

Démonstration. — Soit a un point de A. Pour tout voisinage compact de Stein K de a tel que $A \cap K$ soit F-privilégié, le complexe $H(A \cap K,\ L_\bullet)$ est une résolution de $H(A \cap K,\ F)$, d'où le résultat par passage à la limite inductive.

Théorème (2.4). — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *soit* F *un faisceau cohérent sur* X, *soit* A *un fermé localement* F-

privilégié de X *dont l'intérieur* $\mathring{A}$ *est de Stein, soit* U *un ouvert de Stein relativement compact dans* X *et soit* $L_\bullet$ *une résolution localement libre de* F *sur* U. *Dans ces conditions,*

(i) *le complexe* $H_A(U, L_\bullet)$ *est une résolution de* $H_A(F)(U)$;

(ii) *on a* $H^q(U, H_A(F)) = 0$ *pour* $q > 0$;

(iii) *on a* $H_A(F)(U) = H_A(U, F)$ *et cet espace est séparé*;

(iv) *le complexe d'espaces de Fréchet* $H_A(U, L_\bullet)$ *est une suite exacte stricte.*

Démonstration. — (i) Puisque $H_A(L_\bullet)$ est une résolution du faisceau $H_A(F)$, l'assertion résulte du théorème (2.1) par un argument classique de Rham (cf. par exemple [5], théorème C4).

(ii) résulte immédiatement de (i).

(iii) L'égalité est évidente, puisque $H_A(U, F)$ et $H_A(F)(U)$ sont tous deux conoyau de l'application $H_A(U, L_1) \rightarrow H_A(U, L_0)$. Montrons que l'espace $H_A(U, F)$ est séparé. Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts contenus dans U, dont les intérieurs recouvrent U et tels que $A \cap K_i$ soit F-privilégié pour tout $i \in I$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_A(U,F) & \xrightarrow{\gamma} & \prod_i H(A \cap K_i, F) \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ H_A(F)(U) & \xrightarrow{\delta} & \prod_i H_A(F)(\mathring{K}_i). \end{array}$$

Nous avons vu que α est bijectif. D'autre part, δ est injectif car $H_A(F)$ est un faisceau. Donc γ est injectif. Comme $\prod_i H(A \cap K_i, F)$ est un espace séparé et que l'application γ est continue, l'espace $H_A(U, F)$ est séparé.

(iv) Il suffit de vérifier que le dernier morphisme

$$H_A(U, L_1) \rightarrow H_A(U, L_0)$$

est d'image fermée, ce qui est évident puisque nous avons démontré que son conoyau $H_A(U, F)$ est séparé.

Corollaire (2.5). — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *soit* F *un faisceau cohérent sur* X, *soit* A *un fermé localement* F*-privilégié de* X *dont l'intérieur est de Stein, et soit* U *un* *ouvert de Stein de* X. *On a*

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{U}, H_{\mathrm{A}}(F)) = \begin{cases} H_{\mathrm{A}}(\mathrm{U}, F) & \text{si} \quad q = 0 \\ 0 & \text{si} \quad q > 0. \end{cases}$$

Démonstration. — Comme U est réunion d'une suite (U_i) d'ouverts de Stein telle que U_i soit relativement compact dans U_{i+1} pour tout i, donc telle que F admette sur chaque U_i une résolution localement libre, le corollaire résulte de l'assertion (iii) de la proposition précédente par un argument classique de limite projective.

Corollaire (2.6). — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *soit* F *un faisceau cohérent sur* X, *et soit* K *un compact de* X *contenu dans un ouvert de Stein de* X, *et tel que* $\mathring{\mathrm{K}}$ *soit de Stein. Pour que* K *soit* F*-privilégié, il suffit que* K *soit localement* F*-privilégié.*

Démonstration. — Soit $L_\bullet$ une résolution localement libre de F dans un voisinage de Stein U de K dans X. La suite $H_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}, L_\bullet)$ est exacte stricte, et pour tout j

$$H_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}, L_j) = \mathrm{H}(\mathrm{K}, L_j)$$

puisque K est contenu dans U. Cela démontre le corollaire.

Remarque (2.7). — Nous conjecturons la réciproque.

3. Privilège géométrique.

Soit X une variété $\mathbf{C}$-analytique. On appelle *filtration* de X une suite croissante et stationnaire $S = (\mathrm{S}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de sous-ensembles analytiques de X vérifiant pour tout i la condition $\dim \mathrm{S}_i \leqslant i$. Si $S = (\mathrm{S}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ et $S' = (\mathrm{S}'_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ sont deux filtrations de X, on dit que S contient S' si l'on a $\mathrm{S}_i \supset \mathrm{S}'_i$ pour tout i.

Soit F un faisceau cohérent sur X. Pour tout entier i, soit $\mathrm{S}_i(F)$ l'ensemble des points de X où F est de profondeur $\leqslant i$. La suite $S(F) = (\mathrm{S}_i(F))_{i \in \mathbf{Z}}$ est une filtration de X; on dira que c'est la *filtration associée au faisceau* F.

Soit maintenant X un ouvert de $\mathbf{C}^n$, soit $\mathfrak{X} = (\mathrm{X}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ une filtration de X, et soit A un fermé de X. On dira que A est $\mathfrak{X}$*-privilégié* si pour tout entier p et tout point x

de $X_p - X_{p-1}$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un morphisme analytique π de U dans une variété analytique Y de dimension p vérifiant les conditions suivantes :

(i) il existe un isomorphisme analytique α de U sur $Y \times D''$, où D'' est le polydisque-unité ouvert de $\mathbf{C}^{n-p}$, tel que $\pi = pr_1 \circ \alpha$;

(ii) pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$ et pour tout $y \in Y$, on a

$$\dim \pi^{-1}(y) \cap X_{p+k} \leqslant k;$$

(iii) il existe un fermé A' de Y tel que

$$A \cap U = \pi^{-1}(A').$$

Voici un exemple. Soit $K = K_1 \times \cdots \times K_n$ un polycylindre de $\mathbf{C}^n$, compact et d'intérieur non vide. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, posons

$$K^{(p)} = \bigcup_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} K^{(i_1, \ldots, i_p)}$$

où

$$K^{(i_1, \ldots, i_p)} = K'_1 \times \cdots \times K'_n,$$

avec

$$K'_j = \begin{cases} K_j & \text{si} \quad j \in \{i_1, \ldots, i_p\} \\ \partial K_j & \text{si} \quad j \in \{i_1, \ldots, i_p\}. \end{cases}$$

On a ([7])

Proposition (3.1). — *Soit* K *un polycylindre de* $\mathbf{C}^n$, *compact et d'intérieur non vide, et soit* F *un faisceau cohérent au voisinage de* K. *Pour que* K *soit* $S(F)$*-privilégié, il faut et il suffit que pour tout entier* $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ *et pour tout point* x *de* $K^{(p)}$, *on ait* $\operatorname{prof}_x F \geqslant n - p$.

L'intérêt de la notion de privilège relatif à une filtration réside dans le théorème suivant.

Théorème (3.2). — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *soit*

$$\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in \mathbf{Z}}$$

une filtration de X, *et soit* A *un fermé* $\mathfrak{X}$*-privilégié de* X. *Pour tout faisceau cohérent* F *sur* X *tel que* $\mathfrak{X}$ *contienne la filtration* $S(F)$ *associée à* F, *le fermé* A *est localement* F*-privilégié.*

Démontrons d'abord la

Proposition (3.3). — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^{n-p}$, *soit* $x = (x', x'')$ *un point de* X, *et soit* F *un faisceau cohérent sur* X *tel que* $\operatorname{prof}_x F = p$. *Notons* π *la première projection. Si l'on a pour tout* $k \in \{0, \ldots, n-p-1\}$

$$\dim \pi^{-1}(x') \cap \mathrm{S}_{p+k}(F) \leqslant k,$$

le faisceau F *est* π*-plat en* x.

Démonstration. — Soit Z l'ensemble des points de X où F n'est pas π-plat. On sait que Z est un sous-ensemble analytique fermé de X, et que si $z = (z', z'')$ est un point de Z où F est de profondeur $\geqslant p + k$, la dimension du germe en z'' de $\mathrm{Z}(z')$ est $> k$, (cf. [2]). (On pose $\mathrm{Z}(z') = \mathrm{Z} \cap \pi^{-1}$ (z').)

Cela dit, supposons que $x \in \mathrm{Z}$. On ne peut avoir

$$\dim_x \mathrm{Z}(x') = n - p.$$

En effet, puisque $\dim \mathrm{S}_{n-1}(F)(x') \leqslant n - p - 1$, l'ensemble $\mathrm{Z}(x')$ contiendrait dans ce cas des points où F est localement libre (i.e. de profondeur n), ce qui est absurde. Soit

$$q = \dim_x \mathrm{Z}(x').$$

On a donc $q \leqslant n - p - 1$. Puisque

$$\dim_x \mathrm{S}_{p+q-1}(F)(x') \leqslant q - 1,$$

l'ensemble $\mathrm{Z}(x')$ contient des points arbitrairement voisins de x en lesquels F est de profondeur $\geqslant p + q$. En un tel point, la dimension de $\mathrm{Z}(x')$ est $> q$, ce qui est absurde puisque $\dim_x \mathrm{Z}(x') = q$. La proposition est démontrée.

Démonstration du théorème (3.2). — Si $a \in \mathrm{X} - \mathrm{X}_{n-1}$, le faisceau F est localement libre au voisinage de a et la condition de privilège local est évidemment vérifiée en a. Dans le cas contraire, soit $p \leqslant n - 1$ l'entier tel que $a \in \mathrm{X}_p - \mathrm{X}_{p-1}$. Puisque A est X-privilégié, on peut supposer ceci :

1° L'ouvert X est le produit d'un ouvert X′ de $\mathbf{C}^p$ et d'un ouvert X″ de $\mathbf{C}^{n-p}$ et π est la première projection de $\mathrm{X}' \times \mathrm{X}''$ sur X′ : posons $a = (a', a'')$;

2° Pour $k \in \{0, \ldots, n-p-1\}$ et pour $x' \in X'$, on a $\dim X_{p+k}(x') \leqslant k$;

3° Il existe un fermé A' de X' tel que $A = A' \times X''$.

Comme $S_{p+k}(F)$ est contenu dans X_{p+k}, la condition 2° implique, d'après la proposition (3.3), que F est π-plat.

Cela étant, soit U'' un polydisque ouvert de centre a'' contenu dans X'' tel que $\overline{U}''$ soit un compact $F(a')$-privilégié (on applique ici le théorème d'existence des voisinages privilégiés). Du scholie de platitude et privilège, il résulte facilement qu'il existe un voisinage ouvert V' de a' dans X' tel que pour tout compact K' de V', le compact $K = K' \times \overline{U}''$ soit F-privilégié. Prenons pour K' un compact dont l'intérieur est de Stein. Alors l'intérieur de K est de Stein, et

$$A \cap K = (A' \cap K') \times \overline{U}''$$

est F-privilégié. Cela démontre le théorème.

Remarque (3.4). — En particulier, pour qu'un fermé A soit localement privilégié, il suffit que A soit $S(F)$-privilégié. Au moins dans le cas où A est un polycylindre, nous conjecturons que cette condition est aussi nécessaire.

Soit X une variété analytique complexe. On dit qu'une filtration $\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de X est une *stratification* si pour tout i, l'ensemble $S_i - S_{i-1}$ est lisse de dimension i.

Soit $\mathfrak{X}$ une stratification de X. Un *cylindrage* de $\mathfrak{X}$ est une suite $\gamma = (V_i, \pi_i)_{i \in \mathbf{Z}}$, où V_i est un voisinage ouvert de $X_i - X_{i-1}$ dans X, et où π_i est une rétraction et une submersion de V_i sur $X_i - X_{i-1}$, vérifiant la condition suivante : pour $j \leqslant i$, on a

$$\pi_j \circ \pi_i (x) = \pi_j(x)$$

en tout point x où les deux membres sont définis.

On dira qu'un fermé A de X est γ-*privilégié* si pour tout $i \in \mathbf{Z}$, et pour tout $a \in X_i - X_{i-1}$, il existe un voisinage ouvert U de a dans X, un voisinage ouvert U' de $\pi_i(a)$ dans $X_i - X_{i-1}$, et un fermé A' de U' tels que $A \cap U = \pi_i^{-1}(A') \cap U$.

Il est clair que si $\mathfrak{X}$ est une stratification de $\mathfrak{X}$, si γ est un cylindrage de $\mathfrak{X}$, et si A est un fermé γ-privilégié de X, c'est *a fortiori* un fermé $\mathfrak{X}$-privilégié de X. Par suite, le théorème (3.2) a la conséquence suivante :

Corollaire (3.5). — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *soit* $\mathfrak{X}$ *une stratification de* X, *soit* γ *un cylindrage de* $\mathfrak{X}$, *et soit* A *un fermé* γ-*privilégié de* X. *Pour tout faisceau cohérent* F *sur* X *tel que* $\mathfrak{X}$ *contienne la filtration* $S(F)$, *le fermé* A *est localement* F-*privilégié.*

L'intérêt de la notion de γ-privilège réside dans la proposition suivante :

Proposition (3.6). — *Soit* $\mathfrak{X}$ *une variété analytique complexe, soit* X *une stratification de* X, *et soit* γ *un cylindrage de* $\mathfrak{X}$. *Si* A *et* B *sont deux fermés* γ-*privilégiés de* X, *le fermé* $A \cap B$ *est aussi* γ-*privilégié.*

Démonstration. — Évident.

4. Construction de recouvrements privilégiés.

Soit X une variété analytique complexe paracompacte, et soit $K = (K_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de compacts de X dont les intérieurs recouvrent X. Pour toute partie finie J de I, on pose $K_J = \bigcap_{i \in J} K_i$. On dira que la famille est de Stein si tous les K_i (donc aussi leurs intersections finies) ont un intérieur $\mathring{K}_i$ de Stein.

Soit F un faisceau cohérent sur X. On dira que K est un recouvrement F-privilégié (resp. localement F-privilégié) de X si pour toute partie finie J de I, le compact K_J est F-privilégié (resp. localement F-privilégié). D'après le corollaire (2.6), un recouvrement localement F-privilégié et de Stein est aussi F-privilégié.

Soit $\mathfrak{X}$ une filtration de X (resp. soit γ un cylindrage d'une stratification $\mathfrak{X}$ de X). On dira que K est $\mathfrak{X}$-privilégié (resp. γ-privilégié) si pour toute partie finie J de X, le compact K_J est $\mathfrak{X}$-privilégié (resp. γ-privilégié). D'après la proposition (3.6) pour que K soit un recouvrement γ-privilégié, il suffit que pour tout $i \in I$, le compact K_i soit γ-privilégié.

THÉORÈME (4.1). — *Soit* X *une variété analytique complexe, soit* $\mathfrak{X} = (X_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ *une stratification de* X, *soit* $\gamma = (V_k, \pi_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ *un cylindrage de* $\mathfrak{X}$, *et soit* a *un point de* x. *Il existe un voisinage compact* K *de* a *dont l'intérieur est de Stein, et qui est* γ*-privilégié.*

(Par suite, le point a possède un système fondamental de tels voisinages.)

Pour démontrer ce théorème, on supposera (cela ne restreint pas la généralité) que X est un ouvert de Stein de $\mathbf{C}^n$. Nous utiliserons les définitions suivantes.

Soit k un entier $\leqslant n$, et soit L un compact de X_k. On dira que L est γ-privilégié dans X_k si pour tout $i \leqslant k$ et pour tout $x \in L \cap (X_i - X_{i-1})$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X_k contenu dans V_i tel que

$$L \cap U = (\pi_i^k)^{-1} (L_i) \cap U,$$

où $L_i = L \cap X_i$ (π_i^k désigne la restriction de π_i à $X_k \cap V_i$).

Soit toujours k un entier $\leqslant n$ et soit K un compact de X. On dira que K est (γ, k)-privilégié si pour tout $i \leqslant k$ et tout $x \in K \cap (X_i - X_{i-1})$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que

$$K \cap U = (\pi_i)^{-1}(K_i) \cap U,$$

où $K_i = K \cap X_i$.

Ces définitions posées, nous allons ramener la démonstration du théorème à celle du lemme suivant :

LEMME (4.2). — *Soit* k *un entier, soit* L *un compact* γ*-privilégié de* X_k *dont l'intérieur (dans* X_k*) est de Stein. Il existe un compact* K *de* X *dont l'intérieur est de Stein, qui est* (γ, k)*-privilégié, et tel que* $K \cap X_k = L$.

Démonstration du théorème (4.1), à partir du lemme (4.2).

Soit j_0 l'entier tel que $a \in X_{j_0} - X_{j_0-1}$, et soit L_{j_0} un voisinage compact de a dans $X_{j_0} - X_{j_0-1}$, dont l'intérieur (dans cet espace) est de Stein; L_{j_0} est nécessairement γ-privilégié dans X_{j_0}. Construisons par récurrence une suite $(L_j, K_j)_{j \geqslant j_0}$, où L_j est un compact de X_j dont l'intérieur dans X_j est de Stein et qui est γ-privilégié dans X_j, et où K_j est un compact (γ, j)-privilégié de X dont l'intérieur est de Stein, tel que $K_j \cap X_j = L_j$. Le compact L_j étant construit, on construit K_j en utilisant le lemme (4.2), puis on pose $L_{j+1} = K_j \cap X_{j+1}$. Le compact K_n est alors un voisinage γ-privilégié de a dont l'intérieur est de Stein, et le théorème est démontré.

Démonstration du lemme (4.2).

1° Soit F le faisceau des parties fermées de X. Pour tout ouvert U de X, l'ensemble $F(\mathrm{U})$ est l'ensemble des parties de U qui sont fermées dans U; pour tout $x \in \mathrm{X}$, la fibre F_x est l'ensemble des germes en x de parties fermées de X. Soit Y une partie fermée de X. L'ensemble $F(\mathrm{Y})$ des sections de F sur Y (i.e. des sections continues sur Y de l'espace étalé associé au faisceau F) s'identifie à $\varinjlim F(\mathrm{U})$, où U parcourt les voisinages de Y (cf. [3], corollaire 1 du théorème 3.3.1).

2° Associons à L une section $\tilde{\mathrm{L}}$ de F sur X_k en posant pour tout $i \leqslant k$

$$\tilde{\mathrm{L}}|_{\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_{i-1}} = \text{image de } \pi_i^{-1}(\mathrm{L}_i) \in F(\mathrm{V}_i) \quad \text{dans} \quad F(\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_{i-1}),$$

(rappelons que $\mathrm{L}_i = \mathrm{L} \cap \mathrm{X}_i$). Nous allons vérifier que la section $\tilde{\mathrm{L}}$ ainsi définie sur X_k est continue. Soit $i \leqslant k - 1$, et soit $x \in \mathrm{X}_i - \mathrm{X}_{i-1}$. Puisque L est un compact γ-privilégié de X_k, il existe un voisinage ouvert U de x dans X_k contenu dans V_i tel que $\mathrm{L} \cap \mathrm{U} = (\pi_i^k)^{-1} (\mathrm{L}_i \cap \mathrm{U})$. Soit $y \in \mathrm{U}$, et soit j l'entier $(i \leqslant j \leqslant k)$ tel que $y \in \mathrm{X}_j - \mathrm{X}_{j-1}$. On a par définition

$$\tilde{\mathrm{L}}(y) = (\pi_j^{-1}(\mathrm{L}_j))_y$$

(l'indice y signifie : germe en y). Or au voisinage de y, les applications π_i, π_j et $\pi_i \circ \pi_j$ sont définies et l'on a $\pi_i = \pi_i^j \circ \pi_j$. Par suite

$$\tilde{\mathrm{L}}(y) = ((\pi_j^k)^{-1}(\mathrm{L}_j))_y = ((\pi_j^k)^{-1}((\pi_i^j)^{-1}(\mathrm{L}_i)))_y = ((\pi_i^k)^{-1}(\mathrm{L}_i))_y.$$

Ainsi $\tilde{\mathrm{L}}$ coïncide sur U avec la section de F définie par $(\pi_i^k)^{-1}(\mathrm{L}_i)$. Cela prouve bien que la section $\tilde{\mathrm{L}}$ est continue sur X_k.

3° D'après le théorème de Godement rappelé plus haut, il existe donc un compact A de X tel que pour $i \leqslant k$

et pour $x \in X_i - X_{i-1}$, les ensembles A et $\pi_i^{-1}(L_i)$ coïncident au voisinage de x. Cela entraîne que $\mathring{A}$ est de Stein au voisinage de tout point de X_k.

4° L'ensemble A' des points x de la frontière de A au voisinage desquels A n'est pas de Stein est compact. Puisque X est de Stein, il existe un voisinage ouvert de Stein V de X_k dans X tel que $\overline{V}$ ne rencontre pas A'. Le compact $K = A \cap \overline{V}$ est (γ, k)-privilégié, et vérifie $K \cap X_k = L$. De plus $\mathring{K}$ est de Stein au voisinage de tout point-frontière, donc $\mathring{K}$ est de Stein.

Le lemme (4.2) est démontré, et le théorème (4.1) aussi.

On laisse au lecteur scrupuleux le soin de vérifier qu'on peut faire dépendre la construction précédente des paramètres réels, qu'on peut construire un recouvrement γ-privilégié localement fini dépendant de paramètres réels et que, grâce au théorème de Sard, on peut choisir les paramètres de façon que chaque intersection finie de compacts du recouvrement soit une variété à coins égale à l'adhérence de son intérieur : la démonstration est pénible mais ne présente pas d'obstacle majeur.

Le théorème (4.1) a les conséquences immédiates suivantes :

Corollaire (4.3). — *Soient* X *une variété analytique complexe paracompacte,* $\mathcal{X}$ *une stratification de* X, *et* γ *un cylindrage de* $\mathcal{X}$. *La variété* X *admet des recouvrements* γ*-privilégiés et de Stein arbitrairement fins.*

Corollaire (4.4.) — *Soient* X *une variété analytique complexe paracompacte, et* F *un faisceau cohérent sur* X. *Si la filtration* $S(F)$ *associée à* F *est contenue dans une stratification cylindrable, la variété* X *admet des recouvrements localement* F*-privilégiés et de Stein (donc* F*-privilégiés) arbitrairement fins.*

5. Variétés cylindrables.

Soit X une variété analytique complexe. On dit que X est une variété cylindrable si pour toute filtration T de X, il existe une stratification S de X contenant T et admettant un cylindrage.

PROPOSITION (5.1). — *Soit* X *une variété cylindrable. Toute sous-variété de* X *est cylindrable.*

Démonstration. — Introduisons quelques définitions. Une filtration $T = (\mathrm{T}_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ est dite pure si $\mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{i-1}$ est de dimension pure i pour tout i. Si T est une filtration quelconque de X, on lui associe la filtration pure

$$T^* = (\mathrm{T}_i^*)_{i\in\mathbf{Z}},$$

où T_i^* est la réunion des composantes irréductibles de dimension $\leqslant i$ des ensembles T_j pour $j \geqslant i$. Comme T^* contient T, pour qu'une variété X soit cylindrable, il suffit que toute filtration pure T de X soit contenue dans une stratification admettant un cylindrage.

Soit maintenant Y une sous-variété fermée de X, et soit S une filtration pure de X. On définit une filtration pure $S_{\mathrm{Y}} = ((\mathrm{S}_{\mathrm{Y}})_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ de Y en prenant pour $(\mathrm{S}_{\mathrm{Y}})_i$ la réunion de $(\mathrm{S}_{\mathrm{Y}})_{i-1}$ et des composantes irréductibles de S_i contenues dans Y. Si S est une stratification de X, alors S_{Y} est une stratification de Y. D'autre part, si S' et S'' sont deux filtrations pures de X telles que $S' \subset S''$, alors on a aussi $S'_{\mathrm{Y}} \subset S''_{\mathrm{Y}}$.

Enfin, soit S une stratification de X, et soit

$$\gamma = (\mathrm{V}_i, \ \pi_i)_{i\in\mathbf{Z}}$$

un cylindrage de S. Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, soit $(\mathrm{W}_{\mathrm{Y}})_i$ l'ensemble des points $x \in \mathrm{V}_i \cap \mathrm{Y}$ tels que l'on ait $\pi_i(x) \in (\mathrm{S}_{\mathrm{Y}})_i$. L'application $\pi_i|_{(\mathrm{W}_y)i}$ est une rétraction, et il existe un voisinage ouvert $(\mathrm{V}_{\mathrm{Y}})_i$ de $(\mathrm{S}_{\mathrm{Y}})_i - (\mathrm{S}_{\mathrm{Y}})_{i-1}$ dans Y, contenu dans $(\mathrm{W}_{\mathrm{Y}})_i$, tel que $(\pi_{\mathrm{Y}})_i = \pi_i|_{(\mathrm{V}_{\mathrm{Y}})i}$ soit de plus une submersion. Alors $\gamma_{\mathrm{Y}} = ((\mathrm{V}_{\mathrm{Y}})_i, \ (\pi_{\mathrm{Y}})_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ est un cylindrage de la stratification S_{Y} de Y.

Cela dit, montrons que si Y est une sous-variété fermée d'une variété cylindrable X, c'est une variété cylindrable. Soit T une filtration pure de Y. Il existe une stratification S de X contenant T et admettant dans X un cylindrage γ. Alors S_{Y} est une stratification de Y contenant T et admettant dans Y le cylindrage γ_Y, ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME (5.2). — *Soit* $P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ *l'espace projectif complexe de dimension* n. *Toute variété étalée au-dessus de* P *est cylindrable.*

La démonstration de ce théorème nécessite, hélas, quelques lemmes.

Soit H une sous-variété linéaire de P. Si $a \in P - H$, on note (H, a) la sous-variété linéaire de P engendrée par H et le point a. Si $\varphi : X \to P$ est étale et si $x \in X$, on pose $(H, x) = \varphi^{-1}((H, \varphi(x)))$.

Soit $\varphi : X \to P$ étale et soit S un sous-ensemble analytique de X. On note S'_H (contour apparent de S vu de H) l'ensemble des points $x \in S$ pour lesquels on n'a pas à la fois

1° $\varphi(x) \notin H$,
2° S est lisse en x,
3° la variété (H, x) est transverse en x à S.

LEMME (5.3). — *Soit* $\varphi : X \to P$ *étale, et soit* H *une sous-variété linéaire de* P, *et soit* S *un sous-ensemble analytique de* X. *L'ensemble* S'_H *est analytique dans* X.

Démonstration. — Soit k la dimension de H. Soit H′ une sous-variété linéaire de P de dimension $n - k - 1$, ne rencontrant pas H. Soit $\tilde{P} \subset P \times H'$ la variété obtenue en éclatant P suivant H, c'est-à-dire

$$\tilde{P} = \{(x, y) \in P \times H' ; \ x \in (H, y)\},$$

soit $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ l'application naturelle de $\tilde{P}$ dans $P \times H'$, soit $\tilde{S}$ le produit fibré $S \times_P \tilde{P}$, et soit $\tilde{\varphi} : \tilde{S} \to \tilde{P}$ l'application déduite de φ par changement de base. Ainsi, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{P} & \xrightarrow{\pi_2} & H' \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \\ S & \xrightarrow{\varphi} & P & & \end{array}$$

le carré est cartésien. Soit $\tilde{S}'$ l'ensemble des points de $\tilde{S}$ où le morphisme $\pi_2 \circ \tilde{\varphi}$ n'est pas lisse. C'est un ensemble analytique, et d'après le théorème de Remmert, $\tilde{\pi}_1(\tilde{S}')$ est un sous-ensemble analytique de S. Comme

$$S'_H = \tilde{\pi}_1(\tilde{S}') \cup \varphi^{-1}(H),$$

on en déduit que S'_H est analytique, et le lemme est démontré.

On dira qu'une partie A d'une variété X est de dimension $\leqslant k$ si elle est contenue dans une réunion dénombrable de sous-variétés analytiques localement fermées de dimension $\leqslant k$. Un ensemble analytique de dimension $\leqslant k$ est un ensemble de dimension $\leqslant k$ en ce sens. L'image d'un ensemble de dimension $\leqslant k$ par une application analytique est un ensemble de dimension $\leqslant k$.

Lemme (5.4). — *Soit* V *une partie de dimension* $\leqslant k$ *de l'espace projectif* $\mathbf{P}^r(\mathbf{C})$. *Il existe une partie* A *de dimension* $\leqslant k$ *de* $\mathbf{P}^r(\mathbf{C})$ *telle que pour tout point* a *de* $\mathbf{P}^r(\mathbf{C}) - A$ *et pour toute droite* D *de* $\mathbf{P}^r(\mathbf{C})$ *passant par* a, *l'ensemble* $D \cap Y$ *soit dénombrable.*

Démonstration. — On peut supposer que V est une sous-variété fermée d'un ouvert convexe Ω de $\mathbf{C}^r$. L'ensemble U des droites D de $\mathbf{C}^r$ telles que $D \cap \Omega \neq \emptyset$ est ouvert dans une grassmannienne, et l'on voit que l'ensemble E des droites D de U telles que $D \cap \Omega = D \cap V$ est un sous-ensemble analytique de U. Soit $L \subset E \times \mathbf{C}^r$ l'ensemble des couples (D, x) tels que $x \in D$, soit $\pi : L \to \mathbf{C}^r$ la seconde projection et soit $W = \pi^{-1}(\Omega)$. L'ensemble M des points de L où π est de rang $\leqslant k$ est analytique dans L et contient W, donc est égal à L. L'ensemble $A = \pi(L)$ est de dimension $\leqslant k$, et vérifie les conditions requises.

Corollaire (5.5). — *Soit* $\varphi : X \to P$ *étale, soit* T_k *un sous-ensemble analytique de* X *de dimension* $\leqslant k$, *et soit* H_{n-k-2} *une sous-variété linéaire de* P *de dimension* $n-k-2$ *telle que*

a) l'ensemble $T_k \cap \varphi^{-1}(H_{n-k-2})$ *soit vide,*

b) pour tout $x \in T_k$, *l'ensemble* $T_k \cap (H_{n-k-2}, x)$ *soit dénombrable.*

Il existe une sous-variété linéaire H_{n-k-1} *de* P, *de dimension* $n-k-1$, *contenant* H_{n-k-2}, *telle que*

a) *l'ensemble* $T_k \cap \varphi^{-1}(H_{n-k-1})$ *soit vide*,

b) *pour tout* $x \in T_k$, *l'ensemble* $T_k \cap (H_{n-k-1}, x)$ *soit dénombrable*,

c) *l'ensemble analytique* $(T_k)'_{H_{n-k-1}}$ *soit de dimension* $\leqslant k-1$.

Démonstration. — Soit H'_{k+1} une sous-variété linéaire de P de dimension $k+1$ ne rencontrant pas H_{n-k-2} et soit $\pi_{k+1} : x \longmapsto (H_{n-k-2}, x) \cap H'_{k+1}$ la projection de $P - H_{n-k-2}$ sur H'_{k+1}. L'ensemble $V = \pi_{k-1} \circ \varphi(T_k)$ est de dimension $\leqslant k$. D'après le lemme (5.4), il existe un point $a \in H'_{k+1} - V$ tel que toute droite de H'_{k+1} passant par a rencontre V suivant un ensemble dénombrable. La sous-variété linéaire $H_{n-k-1} = (H_{n-k-2}, a)$ vérifie les conditions *a*) et *b*).

Soit H'_k une sous-variété linéaire de P de dimension k ne rencontrant pas H_{n-k-1}, et soit π_k la projection de $P - H_{n-k-1}$ sur H'_k. L'application $\pi_k \circ \varphi|_{T_k}$ est localement finie, donc l'ensemble des points où elle n'est pas étale est un sous-ensemble analytique de dimension $\leqslant k-1$, d'où la condition *c*).

Soit $S = (S_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ une filtration de X, et soit

$$H = (H_0, \ldots, H_{n-2})$$

un $(n-2)$-drapeau de P, c'est-à-dire une suite croissante de sous-variétés linéaires de P de dimensions $0, \ldots, n-2$. Définissons par récurrence descendante sur k une suite $(H * S)$ de sous-ensemble de X par

$$(H * S)_{n-1} = S_{n-1}$$
$$(H * S)_k = S_k \cup [(H * S)_{k+1}] \quad (0 \leqslant k < n-1).$$

D'après le lemme (5.3), l'ensemble $(H * S)_k$ est analytique.

LEMME (5.6). — *Soit* $\varphi : X \to P$ *étale, et soit* $S = (S_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ *une filtration de* X. *Il existe un* $(n-2)$-*drapeau*

$$H = (H_0, \ldots, H_{n-2})$$

de P *tel que pour* $k = 0, \ldots, n$:

a) *l'ensemble* $(H * S)_k \cap \varphi^{-1}(H_{n-k-2})$ *soit vide*, *b) pour tout* $x \in (H * S)_k$, *l'ensemble* $(H * S)_k \cap (H_{n-k-2}, x)$ *soit dénombrable,*

c) l'ensemble analytique $(H * S)_k$ *soit de dimension* $\leqslant k$.

Démonstration. — On construit les H_i par récurrence sur i en utilisant le corollaire (5.5).

Lemme (5.7). — *Soit* $\varphi : X \to P$ *étale, soit* Y *un sous-ensemble analytique de* X *de dimension* $\leqslant k$, *et soit* L *une sous-variété linéaire de* P *de dimension* $n - k - 1$ *ne rencontrant pas* $\varphi(Y)$. *Il existe un voisinage ouvert* W *de* $Y - Y'_L$ *dans* X, *et une rétraction analytique lisse* π *de* W *sur* $Y - Y'_L$ *telle que pour tout* $y \in Y - Y'_L$, *l'ensemble* $\pi^{-1}(y)$ *soit un ouvert de* (L, y).

Démonstration. — Soit $\tilde{W} \subset X \times (Y - Y'_L)$ l'ensemble des couples (x, y) tels que $(L, x) = (L, y)$. Notons ψ et $\tilde{\pi}$ les projections de $\tilde{W}$ sur $(Y - Y'_L)$. Le morphisme ψ est étale. Pour tout $y \in Y - Y'_L$, l'application ψ définit donc un morphisme étale de $\tilde{\pi}^{-1}(y)$ sur (L, y). Comme l'application diagonale $y \longmapsto (y, y)$ est une section continue de ψ sur $Y - Y'_L$, il existe d'après un théorème de Godement déjà utilisé ([3], th. 3.3.1) un voisinage ouvert W de $Y - Y'_L$ dans X et une section continue σ de ψ sur W. L'application $\pi = \tilde{\pi} \circ \sigma$ est donc une rétraction analytique lisse de W sur $Y - Y'_L$ et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème (5.2). — Soit $\varphi : X \to P$ étale, et soit $S = (S_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ une filtration de X. Soit

$$H = (H_0, \ldots, H_{n-2})$$

un $(n-2)$-drapeau de P vérifiant les conditions du lemme (5.6). Posons

$$T_k = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad k < 0 \\ (H * S)_k & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ P & \text{si} \quad k \geqslant n. \end{cases}$$

La suite $T = (T_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est une stratification de X contenant S, et nous allons voir qu'elle admet un cylindrage. D'après le lemme (5.7), on peut, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, choisir un voisinage ouvert W'_k de $T_k - T_{k-1}$ dans X, et une rétraction analytique lisse π'_k de W'_k sur $T_k - T_{k-1}$ telle que pour tout $x \in T_k - T_{k-1}$, l'ensemble $(\pi'_k)^{-1}(X)$ soit ouvert dans (H_{n-k-1}, x). Pour achever la démonstration, il reste à trouver pour chaque k un voisinage ouvert W_k de $T_k - T_{k-1}$ contenu dans W'_k tel que, en posant $\pi_k = \pi'_k|_{W_k}$, on ait pour $j \leqslant k$

$$\pi_j(x) = \pi_j \circ \pi_k(x)$$

en tout point x où les deux membres sont définis. Commençons par choisir pour chaque k un voisinage ouvert W''_k de $T_k - T_{k-1}$ dans $X - T_{k-1}$ tel que l'adhérence $\overline{W}''_k$ de W''_k dans $X - T_{k-1}$ soit contenue dans W'_k. Soit W_k l'ensemble des points $x \in W''_k$ tels que l'on ait pour $j \leqslant k$

$$[x \in \overline{W}''_k \quad \text{et} \quad \pi'_k(x) \in \overline{W}''_j] \Longrightarrow \pi'_j \circ \pi'_k(x) = \pi'_j(x).$$

Cet ensemble est ouvert dans X et contient $T_k - T_{k-1}$. Posons $\pi_k = \pi'_k|_{W_k}$. La famille (W_k, π_k) est un cylindrage de T, et le théorème est démontré.

Commentaire (5.8). — Par des méthodes analogues, on peut démontrer que toute variété étalée au-dessus d'un tore complexe est cylindrable. Il en est probablement de même pour un groupe de Lie complexe. Il est aussi vraisemblable que toute variété X de dimension $\leqslant 2$ est cylindrable. De toute façon, on peut montrer par une méthode différente (utilisant des cylindrages différentiables) que pour tout faisceau cohérent F sur une variété X de dimension $\leqslant 2$, il existe des recouvrements localement F-privilégiés et de Stein de X arbitrairement fins.

Nous ne connaissons pas d'exemple de variété non cylindrable.

6. Complexe associé à un recouvrement privilégié.

Soit X une variété analytique complexe, soit F un faisceau cohérent sur X, soit $K = (K_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ un recouvrement localement F-privilégié de X. Posons pour tout entier p

$$C^p_K(F) = \prod_{(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}} H_{K_{i_0}, \ldots, i_p}(F),$$

et définissons par la formule de Čech une différentielle

$$\delta : C_K^p(F) \to C_K^{p+1}(F)$$

en posant pour tout ouvert U de X et pour tout élément $f = (f_{i_0, \ldots, i_p})$ de $C_K^p(F)(\mathrm{U})$

$$(\delta f)_{i_0, \ldots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k [\text{image de} f_{i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{p+1}} \text{dans} H_{\mathrm{K}_{i_0}, \ldots, i_p}(F)(\mathrm{U})].$$

On obtient ainsi un complexe de faisceaux sur X.

Proposition (6.1). — *Soit* X *une variété analytique complexe, soit* F *un faisceau cohérent sur* X, *et soit* $\mathrm{K} = (K_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *un recouvrement localement* F*-privilégié de* X. *La suite de faisceaux*

$$0 \to F \to C_K^0(F) \to C_K^1(F) \to \cdots \to C_K^p(F) \to \cdots$$

est exacte.

Démonstration. — Posons $C^p = C_K^p(F)$ pour $p \geqslant 0$, $C^{-1} = F$, $C^p = 0$ pour $p < -1$. Soit $x \in \mathrm{X}$; montrons que le complexe $C_K^\bullet$ est acyclique. Il existe un indice $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $x \in \mathring{\mathrm{K}}_\alpha$. On a donc

$$(H_{\mathrm{K}_{i_0}, \ldots, i_p}(F))_x = (H_{\mathrm{K}\alpha, i_0, \ldots, i_p}(F))_x.$$

Définissons une application $\sigma : C_x^p \to C_x^{p-1}$ pour $p \geqslant 0$ en posant pour $f \in \mathbf{C}_x^p$

$$\sigma f = g$$

où

$$g_{i_0, \ldots, i_p} = f_{\alpha, i_0, \ldots, i_p}$$

(en particulier, si $p = 0$, on a $g = f_\alpha \in F_x$). On vérifie que σ est une homotopie, i.e. que $\delta\sigma + \sigma\delta = id$, et cela prouve que le complexe $C_x^\bullet$ est acyclique. La proposition est démontrée.

Supposons maintenant que K soit un recouvrement F-privilégié de X. Posons pour tout entier p

$$\mathbf{C}_K^p(F) = \prod_{(i_0, \ldots, i_p) \in \mathrm{I}^{p+1}} \mathrm{H}(_{\mathrm{K}_{i_0}, \ldots, i_p}, F),$$

et définissons encore une différentielle $\delta : \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^p(F) \to \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{p+1}(F)$ par la formule de Čech. Lorsque le support de F est compact, le complexe $C^\bullet_K(F)$ ainsi défini est un complexe d'espaces de Hilbert et d'applications linéaires continues.

Théorème (6.2). — *Soient* X *une variété analytique complexe,* F *un faisceau cohérent sur* X *dont le support est compact, et* $K = (K_i)_{i\in I}$ *un recouvrement localement* F*-privilégié et de Stein de* X. *Dans ces conditions,*

(i) *le recouvrement* K *est* F*-privilégié;*

(ii) *on a pour tout entier* p

$$H^q(X, C^p_K(F)) = \begin{cases} C^p_K(F) & \textit{pour} \quad q = 0 \\ 0 & \textit{pour} \quad q > 0; \end{cases}$$

(iii) *on a pour tout entier* q

$$H^q(C^\bullet_K(F)) = H^q(X, F);$$

(iv) *le complexe d'espaces de Hilbert et d'applications linéaires continues* $C^\bullet_K(F)$ *est quasi acyclique et direct.*

Démonstration. — (i) L'assertion est conséquence du corollaire (2.6).

(ii) Puisque le faisceau F est à support compact, et que la famille K est localement finie, C^p_K est somme directe finie de faisceaux $H_{K_{i_0},\ldots,i_p}(F)$. L'assertion résulte donc du corollaire (2.5).

(iii) Comme le complexe $C^\bullet_K(F)$ est une résolution de F (proposition (6.1)) par des faisceaux acycliques (assertion (ii)), l'argument de Rham ([3], théorème 4.7.1) fournit le résultat.

(iv) Puisque le faisceau F est à support compact, les groupes de cohomologie $H^q(X, F)$ sont de dimension finie, c'est le théorème de finitude de Cartan-Serre. Le complexe $C^\bullet_K(F)$ est donc quasi-acyclique. Comme c'est un complexe d'espaces de Hilbert et d'applications continues, il est direct.

7. Espaces fonctés.

Soit S un espace topologique. On note $\mathcal{C}_S$ le foncteur de la catégorie des ouverts d'espaces de Banach sur **C** et applications analytiques dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur S qui à U associe le faisceau des applications continues de S dans U.

On appelle *espace foncté* un espace topologique S muni d'un foncteur $\mathcal{O}_S$ covariant de la catégorie des ouverts d'espaces de Banach sur $\mathbf{C}$ et applications analytiques dans celle des faisceaux d'ensembles sur S et d'un morphisme fonctoriel μ de $\mathcal{O}_S$ dans $\mathcal{C}_S$ (si f est une section de $\mathcal{O}_S(U)$ dans S′, on note $|f|$ la section de $\mathcal{C}_S$ dans S′ que μ lui associe) vérifiant :

EF_0 : $\mathcal{O}_S(\varnothing) = \varnothing$.

EF_1 : $\mathcal{O}_S$ commute aux limites projectives finies.

EF_2 : Pour toute injection ouverte $U \to V$, le diagramme fonctoriel

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S(U) & \to & \mathcal{O}_S(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_S(U) & \to & \mathcal{C}_S(V) \end{array}$$

est cartésien.

Remarque (7.1). — L'axiome EF_1 permet de munir de façon naturelle $\mathcal{O}_S(\mathbf{C})$ d'une structure de faisceau de $\mathbf{C}$-algèbres sur S et pour tout espace de Banach E, $\mathcal{O}_S(E)$ d'une structure de $\mathcal{O}_S(\mathbf{C})$-module.

Exemples. — Les espaces topologiques, les variétés de classe C^r (de dimension finie ou banachiques), les espaces analytiques (de dimension finie ou banachiques, cf. [1]) sont des espaces fonctés.

Soit S un espace foncté. On étend le foncteur $\mathcal{O}_S$ à la catégorie des espaces de Fréchet de la façon suivante. Soit E un espace de Fréchet, et soit $(\gamma_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable cofinale de semi-normes continues sur E; notons E_{γ_i} le séparé-complété de E pour la semi-norme γ_i. On a

$$E = \varprojlim E_{\gamma_i},$$

et l'on pose

$$\mathcal{O}_S(E) = \varprojlim \mathcal{O}_S(E_{\gamma_i}).$$

Le faisceau ainsi obtenu ne dépend pas du système cofinal $(\gamma_i)_{i \in I}$.

Remarque (7.2). — Soit E un espace de Fréchet, limite projective d'espace de Banach E_i. Si les applications $E \to E_i$ sont d'image dense, on a $\mathcal{O}_S(E) = \varprojlim \mathcal{O}_S(E_i)$.

Dans le cas contraire, l'égalité peut être fausse, même si S est un espace analytique banachique.

Proposition (7.3). — *Soit* $0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ *une suite exacte stricte d'espaces de Fréchet, et soit* S *un espace foncté. On suppose que chacun des espaces* E, F, G *possède un système cofinal de semi-normes hilbertiennes continues* (*c'est le cas d'espaces nucléaires*). *Alors la suite*

$$0 \to \mathcal{O}_S(E) \to \mathcal{O}_S(F) \to \mathcal{O}_S(G)$$

est exacte.

Démonstration. — Supposons d'abord v surjectif. Soit $(\gamma_i)_{i\in I}$ un système cofinal de semi-normes hilbertiennes continues de F. Pour tout $i \in I$, soit γ'_i la semi-norme induite sur E par γ_i, et soit γ''_i la semi-norme quotient sur G. On a une suite exacte (nécessairement directe) d'espaces de Hilbert.

$$0 \to E_{\gamma'_i} \to F_{\gamma_i} \to G_{\gamma''_i} \to 0,$$

d'où la suite exacte de faisceaux sur S

$$0 \to \mathcal{O}_S(E_{\gamma'_i}) \to \mathcal{O}_S(F_{\gamma_i}) \to \mathcal{O}_S(G_{\gamma''_i}) \to 0.$$

En passant à la limite projective, on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_S(E) \to \mathcal{O}_S(F) \to \mathcal{O}_S(G).$$

Dans le cas général, on a les deux suites exactes

$$0 \to E \to F \to \operatorname{Im} v \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Im} v \to G \to \operatorname{Coker} v \to 0.$$

D'où les deux suites exactes

$$0 \to \mathcal{O}_S(E) \to \mathcal{O}_S(F) \to \mathcal{O}_S(\operatorname{Im} v)$$
$$0 \to \mathcal{O}_S(\operatorname{Im} v) \to \mathcal{O}_S(G) \to \mathcal{O}_S(\operatorname{Coker} v),$$

qui fournissent la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_S(E) \to \mathcal{O}_S(F) \to \mathcal{O}_S(G).$$

PROPOSITION (7.4). — *Soient* S *un espace foncté, et* X *un espace analytique complexe. Il existe sur* $S \times X$ *un faisceau* $O_{S\times X}$ *et un seul tel que l'on ait pour tout ouvert* $S' \times X'$, *où* X' *est de Stein*

$$O_{S\times X}(S' \times X') = O_S(S', O_X(X')).$$

Démonstration. — L'unicité est évidente. Notons $\tilde{O}_{S\times X}$ le faisceau associé au « préfaisceau » $S' \times X' \to O_S(S', O_X(X'))$ défini sur les ouverts de la forme $S' \times X'$, où X' est un ouvert de Stein de X. Il faut démontrer que pour un tel ouvert, on a $\tilde{O}_{S\times X}(S' \times X') = O_S(S', O_X(X'))$. On utilise le lemme suivant.

LEMME (7.5). — *Soient* S *et* X *deux espaces topologiques,* B *une base d'ouverts de* X, *et* F *un préfaisceau défini sur les ouverts de* $S \times X$ *de la forme* $U \times V$, *où* $V \in B$. *On fait les hypothèses suivantes :*

a) pour tout ouvert U *de* S, *le préfaisceau* $V \longmapsto F(U \times V)$ *défini sur* B *est un faisceau sur* X;

b) pour tout $V \in B$, *le préfaisceau* $U \to F(U \times V)$ *est un faisceau sur* S;

c) l'espace X *est localement compact;*

d) pour tout $V \in B$, *il existe une suite croissante* V_n *d'ouverts de* B *relativement compacts dans* V *telle que, pour tout ouvert* U *de* S, *on ait*

$$F(U \times V) = \varprojlim F(U \times V_n).$$

Alors, en notant $\tilde{F}$ *le faisceau associé à* F, *pour tout ouvert de* $S \times X$ *de la forme* $U \times V$, *où* $V \in B$, *on a*

$$\tilde{F}(U \times V) = F(U \times V).$$

Plan de démonstration du lemme. — On prouve successivement les trois assertions suivantes :

1° Soient U un ouvert de S, V et V′ des ouverts de B tels que $V' \subset V$. Soit $f \in F(U \times V)$ et soit $\tilde{f} \in \tilde{F}(U \times V)$ la section correspondante. Si $\tilde{f} = 0$, alors $f|_{U\times V'} = 0$.

2° Soient U, V et V′ comme ci-dessus, et soit

$$\sigma \in \tilde{F}(\mathrm{U} \times \mathrm{V}).$$

Il existe un élément $f \in F(\mathrm{U} \times \mathrm{V}')$ tel que $\tilde{f} = \sigma|_{\mathrm{U}\times\mathrm{V}'}$.

3° On a $F(\mathrm{U} \times \mathrm{V}) = \tilde{F}(\mathrm{U} \times \mathrm{V})$ pour tout ouvert U de S et tout $\mathrm{V} \in B$.

Fin de la démonstration de la proposition (7.4). — Appliquons le lemme en prenant pour B l'ensemble des ouverts de Stein de X. Vérifions les hypothèses du lemme.

a) Soit $(\mathrm{V}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'ouverts de Stein de X, dont la réunion est un ouvert de Stein V. On a la suite exacte stricte d'espaces de Fréchet nucléaires

$$0 \to O(\mathrm{V}) \to \prod_i O(\mathrm{V}_i) \to \prod_{i,j} O(\mathrm{V}_i \cap \mathrm{V}_j).$$

D'après la proposition (7.3), on a pour tout ouvert U la suite exacte

$$0 \to O_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, O(\mathrm{V})) \to O_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \prod_i O(\mathrm{V}_i)) \to O_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \prod_{i,j} O(\mathrm{V}_i \cap \mathrm{V}_j)).$$

b) et *c*) sont vérifiés par hypothèse.

d) Soit V un ouvert de Stein de X. On prend pour suite V_n une suite croissante d'ouverts de Stein relativement compacts et de Runge dans V. Pour tout ouvert U de S, on a $O_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, O_{\mathrm{X}}(\mathrm{V})) = \varprojlim O_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, O_{\mathrm{X}}(\mathrm{V}_n))$ d'après la remarque (7.2). Le lemme fournit donc la conclusion de la proposition (7.4).

Remarque (7.6). — Soient S un espace foncté, X un espace analytique, et (s, x) un point de $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$. Pour tout voisinage ouvert de Stein V de x dans X, on a une application ε : $O_{\mathrm{S}}(\mathrm{V}))_s \to O(\mathrm{V})$, qui à f associe $|f|(s)$, où $|f|$ désigne le germe d'application sous-jacente à f. On en déduit un homomorphisme, $O_{\mathrm{S}\times\mathrm{X},(s,x)} \to O_{\mathrm{X},x}$ en passant à la limite inductive sur V. Cet homomorphisme fait de $O_{\mathrm{X},x}$ un $O_{\mathrm{S}\times\mathrm{X},(s,x)}$-module.

8. Faisceaux dépendant d'un paramètre.

PROPOSITION (8.1). — *Soient* S *un espace foncté,* X *un ouvert de Stein de* $\mathbf{C}^n$, *et* K *un compact de* X *tel que* $\mathring{K}$ *soit de Stein. Pour tout ouvert* $S' \times X'$ *de* $S \times X$, *où* X' *est de Stein, posons*

$$H_{K,S}(S' \times X') = \mathcal{O}_S(S', H_K(X')).$$

1° *Le préfaisceau* $H_{K,S}$ *sur* $S \times X$ *est un faisceau* (i.e. *l'espace des sections sur* $S' \times X'$ (*où* X' *est de Stein*) *du faisceau associé s'identifie à* $H_{K,S}(S' \times X')$).

2° *Soit* π *la première projection de* $S \times X$; *on a*

$$R^q\pi_* H_{K,S} = \begin{cases} \mathcal{O}_S(H(K)) & si \quad q = 0 \\ 0 & si \quad q > 0. \end{cases}$$

Démonstration. — C'est une variante de celle du théorème (2.1). On utilisera encore les faisceaux fins $\Omega_K^{(0,j)}$ déjà introduits au cours de cette démonstration.

Posons pour tout ouvert $S' \times X'$ de $S \times X$, où X' est de Stein

$$\Omega_{K,S}^{(0,j)}(S' \times X') = \mathcal{O}_S(S', \Omega_K^{(0,j)}).$$

On définit ainsi un préfaisceau sur $S \times X$ qui est en fait un faisceau (on le voit en appliquant le lemme (7.5)).

Pour tout compact A de X tel que $\mathring{A}$ soit de Stein, on a la suite exacte (directe) d'espaces de Hilbert

$$(*) \quad 0 \to H(K \cap A) \to \mathbf{L}^2_{(0,0)}(\mathring{K} \cap \mathring{A}) \to \dots \to \mathbf{L}^2_{(0,n)}(\mathring{K} \cap \mathring{A}) \to 0,$$

c'est le théorème de Hörmander déjà cité.

D'autre part, pour tout ouvert de Stein X' de X, on a

$$\Omega_K^{(0,j)}(X') = \varprojlim \mathbf{L}^2_{(0,j)}(\mathring{K} \cap U),$$

la limite projective étant prise sur l'ensemble filtrant des ouverts de Stein U relativement compacts dans X'. De plus, l'application

$$\Omega_K^{(0,j)}(X') \to \mathbf{L}^2_{(0,j)}(\mathring{K} \cap U)$$

est d'image dense.

Cela dit, faisons intervenir S. En appliquant à la suite (*) le foncteur O_S, on obtient la suite exacte de faisceaux sur S

$$(**) \quad 0 \to O_S(H(K \cap A)) \to O_S(L^2_{(0,0)}(\mathring{K} \cap \mathring{A}) \dots$$
$$O_S(L^2_{(0,n)}(\mathring{K} \cap \mathring{A})) \to 0.$$

Par passage à la limite projective, on a pour tout ouvert de Stein X' de X la suite exacte

$$0 \to O_S(H_K(X')) \to O_S(\Omega_K^{(0,0)}(X')) \to O_S(\Omega_K^{(0,1)}(X')).$$

Cela prouve que le préfaisceau $H_{K,S}$ est un faisceau (un préfaisceau noyau d'un morphisme de faisceaux est un faisceau).

Pour calculer les faisceaux $R^q\pi_* H_{K,S}$, plaçons-nous en un s_0 de S. On a

$$(R^q\pi_* H_{K,S})_{s_0} = H^q(\{s_0\} \times X, \ H_{K,S})$$

puisque le support $S \times K$ de $H_{K,S}$ est propre au-dessus de S. Considérons la suite exacte (**) et passons à la limite inductive sur les voisinages de Stein $\mathring{A}$ d'un point x de X. On en déduit la suite exacte de faisceaux sur $S \times X$

$$0 \to H_{K,S} \to \Omega_{K,S}^{(0,0)} \to \cdots \to \Omega_{K,S}^{(0,n)} \to 0.$$

D'autre part, on a

$$R^q\pi_*\Omega_{K,S}^{(0,j)} = \begin{cases} O_S(L^2_{(0,j)}(\mathring{K})) & \text{si} \quad q = 0 \\ 0 & \text{si} \quad q > 0 \end{cases}$$

car le faisceau $\Omega_{K,S}^{(0,j)}|_{\{s_0\} \times X}$ est fin. Donc $R^q\pi_* H_{K,S}$ s'identifie au q-ième faisceau de cohomologie du complexe

$$0 \to O_S(L^2_{(0,0)}(\mathring{K})) \to \cdots \to O_S(L^2_{(0,n)}(\mathring{K})) \to 0.$$

La suite

$$0 \to H(K) \to L^2_{(0,0)} \to \cdots \to L^2_{(0,n)}(\mathring{K}) \to 0$$

étant exacte directe, l'assertion 2° est démontrée.

Soit S un espace foncté, soit X un espace analytique, et soit F un $O_{S\times X}$-module. On dit que F est S-anaplat si pour tout point (s, x) de $S \times X$ il existe un voisinage ouvert $S' \times X'$ de (s, x) et une résolution

$$0 \to L_p \to \cdots \to L_0 \to F \to 0$$

de F sur $S' \times X'$ par des $\mathcal{O}_{S\times X}$-modules libres de type fini telle que

$$0 \to L_p(s) \to \cdots \to L_0(s) \to F(s) \to 0$$

soit une suite exacte.

(Pour la notion d'anaplatitude, voir [1]. On rappelle que $F(s)$ est le faisceau sur X défini par

$$F(s)_x = F_{(s,x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U,(s,x)}} \mathcal{O}_{U,x}.)$$

Soient S un espace foncté, X un ouvert de $\mathbf{C}^n$, et F un faisceau S-anaplat sur $S \times X$. Soit $S_1 \times X'$ un ouvert de $S \times X$ sur lequel F admette une résolution finie $\mathcal{O}_{S\times X}$-libre de $\mathbf{L}_\bullet$, soit s_0 un point de S_1, et soit K un compact localement $F(s_0)$-privilégié de X' dont l'intérieur est de Stein (K est donc $F(s_0)$-privilégié). On note π la première projection de $S \times X$.

Le complexe $L_\bullet$ donne naissance à un complexe $H(K, L_\bullet)$ de fibrés hilbertiens sur S qui est exact (direct) en s_0, donc sur un voisinage ouvert S' de s_0. On note $H(K, F)$ le conoyau du morphisme $H(K, L_1) \to H(K, L_0)$. De la suite exacte (directe) de fibrés sur S'

$$0 \to H(K, L_p) \to \cdots \to H(K, L_0) \to H(K, F) \to 0,$$

on déduit une suite exacte de faisceaux sur S'

$$0 \to \mathcal{O}_{S'}(H(K, L_p)) \to \cdots \to \mathcal{O}_{S'}(H(K, L_0)) \\ \to \mathcal{O}_{S'}(H(K, F)) \to 0.$$

D'autre part, définissons sur $S \times X$ les faisceaux

$$H_K(L_i) = H_{K,S} \otimes_{\mathcal{O}_{S\times X}} L_i$$
$$H_K(F) = H_{K,S} \otimes_{\mathcal{O}_{S\times X}} F.$$

Les $H_K(L_i)$ sont des $H_{K,S}$-modules libres de type fini, et l'on a le complexe

$$0 \to H_K(L_p) \to \dots \to H_K(L_0) \to H_K(F) \to 0.$$

Proposition (8.2). — *Dans la situation ci-dessus*

a) le complexe $H_K(L_\bullet)$ *est une résolution du faisceau* $H_K(F)$ *sur* $\{s_0\} \times X$;

b) on a

$$(\mathrm{R}^q\pi_* H_{\mathrm{K}}(F))_{s_0} = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{H}(\mathrm{K}, F))_{s_0} & \textit{si} \quad q = 0 \\ 0 & \textit{si} \quad q > 0. \end{cases}$$

Démonstration. — *a*) Soit $x_0 \in \mathrm{X}$. Puisque K est localement $F(s_0)$-privilégié, x_0 possède un système fondamental de voisinages compacts A tels que $\mathring{\mathrm{A}}$ soit de Stein et que $\mathrm{K} \cap \mathrm{A}$ soit $F(s_0)$-privilégié. Pour un tel A, le complexe de fibrés hilbertiens

$$0 \to \mathrm{H}(\mathrm{K} \cap \mathrm{A}, L_p) \to \dots \to \mathrm{H}(\mathrm{K} \cap \mathrm{A}, L_0) \\ \to \mathrm{H}(\mathrm{K} \cap \mathrm{A}, F) \to 0$$

défini au voisinage de s_0 dans S est exact (direct) en s_0, donc au voisinage de s_0, d'où la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{S},s_0}(\mathrm{H}(\mathrm{K} \cap \mathrm{A}, L_p)) \to \dots \\ \to \mathcal{O}_{\mathrm{S},s_0}(\mathrm{H}(\mathrm{K} \cap \mathrm{A}, L_0)) \to \mathcal{O}_{\mathrm{S},s_0}(\mathrm{H}(\mathrm{K} \cap \mathrm{A}, F)) \to 0.$$

En passant à la limite inductive sur A, on obtient la suite exacte

$$0 \to H_{\mathrm{K}}(L_p)_{(s_0,x_0)} \to \dots \to H_{\mathrm{K}}(L_0)_{(s_0,x_0)} \to H_{\mathrm{K}}(F)_{(s_0,x_0)} \to 0,$$

ce qui démontre *a*).

b) Résulte de *a*) et de ce que *b*) est vrai pour chaque L_i d'après la proposition (8.1).

Proposition (8.3). — *Supposons de plus que le compact* K *soit* $S(F(s_0))$*-privilégié. Alors il existe un voisinage ouvert* S′ *de* s_0 *dans* S *tel que*

a) Le complexe $H_{\mathrm{K}}(L_\bullet)$ *soit une résolution de* $H_{\mathrm{K}}(F)$ *sur* $\mathrm{S}' \times \mathrm{X}$;

b) on ait sur S′

$$\mathrm{R}^q\pi_* H_{\mathrm{K}}(F) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{H}(\mathrm{K}, F)) & \textit{si} \quad q = 0 \\ 0 & \textit{si} \quad q > 0. \end{cases}$$

Démonstration. — La proposition résulte de la proposition précédente et du lemme suivant :

Lemme (8.4). — *Soient* S *un espace foncté,* X *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *et* F *un faisceau* S*-anaplat sur* $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$. *Soit* s_0

un point de S *et soit* K *un compact* $S(F(s_0))$*-privilégié de* X. *Alors il existe un voisinage* S′ *de* s_0 *dans* S *tel que* K *soit* $S(F(s))$*-privilégié pour tout point* s *de* S′.

Démonstration. — Le lemme (8.4) résulte immédiatement des deux lemmes suivants :

Lemme (8.5). — *Soit* F *un faisceau* S*-anaplat sur* $S \times X$. *Pour tout* $k \in \mathbf{Z}$, *soit* $S_k(F)$ *l'ensemble des points* (s, x) *de* $S \times X$ *tels que* $x \in S_k(F(s))$. *L'ensemble* $S_k(F)$ *est fermé dans* $S \times X$, *et ses* π*-fibres sont des sous-ensembles analytiques de* X.

Lemme (8.6). — *Soit* S *un espace foncté, soient* X *et* Y *des ouverts de* $\mathbf{C}^n$ *et* $\mathbf{C}^p$ *respectivement, soit* φ *un* S*-morphisme de* $S \times X$ *dans* $S \times Y$, *et soit* Z *un sous-ensemble fermé de* $S \times X$ *dont les* π*-fibres sont analytiques. Posons pour* $z \in Z$

$$d(z) = \dim_z Z(\varphi(z)).$$

La fonction d *est semi-continue supérieurement.*

Démonstration du lemme (8.5). — Soit (s_0, x_0) un point de $S \times X$ tel que $\mathrm{prof}_{x_0} F(s_0) \geqslant k$. Cela signifie qu'il existe une résolution O_x-libre de longueur $\leqslant n - k$ du faisceau $F(s_0)$ au voisinage de x_0 dans X. D'après [1], 8, prop. 5, celle-ci provient d'une résolution $O_{S\times X}$-libre

$$0 \to L_{n-k} \to \cdots \to L_0 \to F \to 0$$

de F au voisinage de (s_0, x_0), et la suite

$$0 \to L_{n-k}(s)_x \to \cdots \to L_0(s)_x \to F(s)_x \to 0$$

est exacte pour tout (s, x) assez voisin de (s_0, x_0), d'où le lemme.

Démonstration du lemme (8.6). — Soit $z_0 = (s_0, x_0)$ un point de Z, et soit k la dimension en z_0 de $Z(\varphi(z_0))$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées dans $\mathbf{C}^n$, on peut, en posant $x_0 = (x_0', x_0'')$, $x_0' \in \mathbf{C}^k$, $x_0'' \in \mathbf{C}^{n-k}$, trouver un voisinage compact K″ de x_0'' dans $\mathbf{C}^{n-k}$ tel que

$$Z(\varphi(z_0)) \cap \{(s_0, x_0')\} \times \partial K'' = \emptyset.$$

Il existe donc un voisinage S' de s_0 dans S et un voisinage U' de x'_0 dans $\mathbf{C}^k$ tel que pour tout

$$z = (s, x', x'') \in S' \times U' \times K',$$

on ait encore

$$Z(\varphi(z)) \cap \{(s, x')\} \times \partial K'' = \emptyset,$$

cela résulte de ce que Z est fermé. Comme les fibres de Z sont analytiques, on en déduit $d(z) \leqslant k$ pour tout

$$z \in S' \times U' \times K'' \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

9. Applications.

Dans tout ce chapitre, on considère la situation que voici. On se donne un espace foncté S, un point s_0 de S, une variété cylindrable X de dimension n et un faisceau S-propre et S-anaplat F sur $S \times X$. On note π la première projection de $S \times X$.

Choisissons un cylindrage γ du faisceau $F(s_0)$, puis un recouvrement γ-privilégié et de Stein $K = (K_i)_{i \in I}$ de X. Comme F est S-propre, le support de $F(s_0)$ ne rencontre qu'un nombre fini de compacts K_i. On peut donc, puisque F est S-anaplat, choisir le recouvrement K assez fin pour que F admette sur chaque compact $\{s_0\} \times K_i$ une résolution finie par des $O_{S \times X}$-modules libres de type fini. D'après les résultats du chapitre précédent, on peut donc trouver un voisinage ouvert S' de s_0 dans S ayant les vertus suivantes :

V_1) l'ensemble J des indices $i \in I$ tels qu'il existe $s \in S'$ tel que $K_i \cap \operatorname{Supp} F(s) = \emptyset$ est fini;

V_2) pour tout entier $p \geqslant 0$, tout $(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$ et tout $s \in S'$, le compact $K_{i_0, \ldots, i_p}$ (dont l'intérieur est de Stein) est localement $F(s)$-privilégié;

V_3) pour tout entier $p \geqslant 0$ et tout $(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$, les espaces de Hilbert $H(K_{i_0, \ldots, i_p}, F(s))$, $s \in S'$, s'organisent en un fibré $H(K_{i_0, \ldots, i_p}, F)$ de base S' (réduit à 0 si $(i_0, \ldots, i_p) \notin J^{p+1}$);

V_4) pour tout entier $p \geqslant 0$ et tout $(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$, on a sur S'

$$R^q\pi_* H_{K_{i_0,\ldots,i_p}}(F) = \begin{cases} \mathcal{O}_{S'}(H(K_{i_0,\ldots,i_p}, F)) & \text{si} \quad q = 0 \\ 0 & \text{si} \quad q > 0. \end{cases}$$

Cela étant, posons pour tout entier $p \geqslant 0$

$$C_K^p(F) = \prod_{(i_0,\ldots,i_p)\in I^{p+1}} H_{K_{i_0,\ldots,i_p}}(F),$$

et définissons par la formule de Čech une différentielle

$$\delta^p : C_K^p(F) \to C_K^{p+1}(F).$$

On obtient ainsi un complexe $C_K^\bullet(F)$ de faisceaux sur $S' \times X$.

Proposition (9.1). — *La suite de faisceaux sur* $S' \times X$

$$0 \to F \to C_K^0(F) \to \cdots \to C_K^p(F) \to \cdots$$

est exacte.

Démonstration. — Elle est isomorphe à celle de la proposition (6.1).

Posons aussi

$$\mathrm{C}_K^p(F) = \prod_{(i_0,\ldots,i_p)\in I^{p+1}} H(K_{i_0,\ldots,i_p}, F)$$

et définissons par la formule de Čech une différentielle

$$\delta^p : \mathrm{C}_K^p(F) \to \mathrm{C}_K^{p+1}(F).$$

On obtient ainsi un complexe $\mathrm{C}_K^\bullet(F)$ de fibrés hilbertiens de base S'.

Proposition (9.2). — *Soit* $\varphi : T \to S'$ *un morphisme d'espaces fonctés. Posons* $F(T) = (\varphi \times id_X)^* F$. *On a*

$$\mathrm{C}_K^\bullet(F(T)) = \varphi^* \mathrm{C}_K^\bullet(F).$$

Démonstration. — L'assertion résulte de ce que les propriétés V_1, V_2, V_3, V_4 se conservent par changement de base.

Proposition (9.3). — *Soit* $\varphi : T \to S'$ *un morphisme d'espaces fonctés. Notons encore* π *la première projection de* $T \times X$.

(i) *On a pour tout entier* p

$$\mathrm{R}^q\pi_* C_K^p(F(\mathrm{T})) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathrm{T}}(\mathrm{C}_K^p(F(\mathrm{T})) & \text{si} \quad q = 0 \\ 0 & \text{si} \quad q > 0. \end{cases}$$

(ii) *On a pour tout entier* q

$$\mathrm{R}^q\pi_* F(\mathrm{T}) = H^q(\mathcal{O}_{\mathrm{T}}(\mathrm{C}_K^\bullet(F(\mathrm{T})))), \quad \textit{noté aussi} \quad H^q(\mathrm{C}_K^\bullet(F(\mathrm{T}))).$$

(iii) *Le complexe de fibrés hilbertiens* $\mathrm{C}_K^\bullet(F(\mathrm{T}))$ *est quasi-acyclique direct nul en degrés* $> n$.

Démonstration. — (i) Comme $C_K^p(F)$ est une somme directe finie de faisceaux $H_{\mathrm{K}_{i_0,\ldots,i_p}}(F)$ d'après V_1, l'assertion résulte de V_4.

(ii) Comme le complexe $\mathrm{C}_K^\bullet(F(\mathrm{T}))$ est une résolution du faisceau F (prop. 1) par des faisceaux S-acycliques (assertion (i)), on obtient le résultat par le raisonnement de de Rham déjà utilisé.

(iii) Il suffit de vérifier que, pour chaque s de S', le complexe d'espaces de Hilbert $\mathrm{C}_K^\bullet(F(s))$ est quasi-acyclique. Or on a d'après (ii)

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{C}_K^\bullet(F(s))) = \mathrm{R}^q\pi_* F(s) = \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \ F(s)).$$

L'assertion résulte donc du théorème de finitude de Cartan-Serre.

Lemme (9.4.). — *Soient* S *un espace foncté,* s_0 *un point de* S, *et soit*

$$\mathrm{E}^\bullet : 0 \to \mathrm{E}^0 \to \cdots \to \mathrm{E}^i \xrightarrow{d^i} \mathrm{E}^{i+1} \to \cdots \to \mathrm{E}^n \to 0$$

un complexe quasi-acyclique direct de fibrés banachiques de base S. *Il existe un voisinage ouvert* S' *de* s_0 *dans* S, *un complexe acyclique direct* $\mathrm{A}^\bullet$ *de fibrés banachiques sur* S' *et un complexe* $\mathrm{F}^\bullet$ *de fibrés de rang fini de base* S' *tels que l'on ait au-dessus de* S'

$$\mathrm{E}^\bullet = \mathrm{A}^\bullet \oplus \mathrm{F}^\bullet \quad (\textit{somme directe topologique})$$

Pour une démonstration, voir Bourbaki, théories spectrales, chapitre 3, ou L. Illusie, exposés au séminaire Shi-Wei-Shu à l'I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, 1965.

THÉORÈME (9.5). — *Soient* S *un espace foncté,* s_0 *un point de* S, *soit* X *une variété cylindrable de dimension n, et soit* F *un faisceau* S-*propre et* S-*anaplat sur* $S \times X$. *Notons* π *la première projection de* $S \times X$ *sur* S.

Il existe un voisinage ouvert S′ *de* s_0 *dans* S *et un complexe*

$$F^\bullet : 0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots \to F^n \to 0$$

de fibrés de rang fini sur S′ *tel que pour tout morphisme* $T \to S'$ *d'espaces fonctés, on ait*

$$R^q\pi_* F(T) = H^q(F^\bullet(T)).$$

(On note encore π la première projection de $T \times X$ sur T, et $H^q(E^\bullet(T))$ désigne le q-ième faisceau d'homologie du complexe $\varphi^*E^\bullet$ de fibrés de base T).

Démonstration. — On applique le lemme (9.4) au complexe de fibrés $C^\bullet_K(F)$. On obtient une décomposition

$$C^\bullet_K(F) = A^\bullet \oplus F^\bullet,$$

où $A^\bullet$ est un complexe acyclique direct et $F^\bullet$ un complexe de rang fini sur un voisinage S′ de s_0 dans S. Pour tout morphisme $\varphi : T \to S'$, on a

$$\begin{aligned} R^q\pi_* F(T) &= H^q(C^\bullet_K(F(T))) = H^q(C^\bullet_K(F)(T)) \\ &= H^q(A^\bullet(T) \oplus F^\bullet(T)) = H^q(A^\bullet(T)) \oplus H^q(F^\bullet(T)) \\ &= H^q(F^\bullet(T)). \end{aligned}$$

Du théorème (9.5), on déduit immédiatement les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE (9.6). — *Supposons les hypothèses du théorème* (9.5) *satisfaites, et supposons de plus le faisceau* $O_S(\mathbf{C})$ *cohérent. Alors les faisceaux* $R^q\pi_* F$ *sont cohérents.*

COROLLAIRE (9.7). — *Supposons les hypothèses du théorème* (9.5) *satisfaites. Pour tout entier* k *et tout entier* q, *l'ensemble des points* s *de* S *tels que* : $\dim H^q(X, F(s)) \geqslant k$ *est localement décrit par un nombre fini d'équations* $|f_i| = 0$, *où* $|f_i|$ *est la fonction sous-jacente à une section* f_i *de* $O_S(\mathbf{C})$.

Patrick LE BARZ, dans une récente note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (t. 274, p. 1354) a donné un exemple de variété non cylindrable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 16 (1966).

[2] J. FRISCH et J. GUENOT, Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, *Invent. Math.*, 7 (1969).

[3] R. GODEMENT, Théorie des faiceaux (Hermann, 1964).

[4] H. GRAUERT, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, *Publ. Math. Inst. des Hautes Études Scientifiques*, 5 (1960).

[5] R. GUNNING et H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall (1965).

[6] L. HÖRMANDER, L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, *Acta Math.*, 113 (1965).

[7] G. POURCIN, Polycylindres privilégiés (à paraître).

Manuscrit reçu le 18 décembre 1972.
accepté par B. Malgrange

Adrien DOUADY
Service de Mathématiques,
Université de Paris XI, 91-Orsay.

J. FRISCH,
Département de Mathématiques,
B.P. 347,
Université de Reims 1, 51-Reims.

A. HIRSCHOWITZ,
Département de Mathématiques,
Université de Nice I,
Parc Valrose, 06-Nice.