ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL REVUZ

Sur la théorie du potentiel pour les processus de Markov récurrents

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 3 (1971), p. 245-262

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_245_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,3 (1971), 245-262

SUR LA THÉORIE DU POTENTIEL POUR LES PROCESSUS DE MARKOV RÉCURRENTS

par Daniel REVUZ (1)

Dans ce travail nous essayons d'étendre au cas récurrent la caractérisation des opérateurs potentiels des processus de Markov par les propriétés de maximum, comme cela a été fait pour un espace d'états discret par Kondo [11]. Nous traitons ici le cas où l'espace est compact et le noyau fortement fellerien ; le principe du maximum qui intervient est une forme stricte du principe semi-complet du maximum étudié par Herz [9], Durier [6] et Kondo [11]. La première partie de l'article visera à construire les opérateurs potentiels et à montrer leurs propriétés de maximum, ainsi qu'à énoncer certaines propriétés de limites.

Je remercie G. Mokobodzky des indications qu'il m'a données pour ce travail.

I. Notations et préliminaires.

I-1. Dans tout ce travail les notations qui n'auraient pas été précisées seraient celles de [4]. Nous considérons un processus de Markov

$$X = \{\Omega\ ,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\in \mathbf{R}_+}\ ,\ (X_t)_{t\in \mathbf{R}_+}\ ,\ (\theta_t)_{t\in \mathbf{R}_+}\ ,\ (P_x)_{x\in E}\}$$

à valeur dans un espace LCD$(E\ ,\mathcal{E})$ et récurrent au sens de Harris ([1], [2]), c'est-à-dire qu'il existe une mesure invariante μ pour la résolvante $U^\alpha(\alpha\mu U^\alpha = \mu\ \forall\alpha > 0)$ telle que $\mu(\Gamma) > 0$ entraîne

$$\int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds = \infty \quad P_x - ps \quad \text{pour tout } x \in E\ .$$

---

(1) Equipe de recherches n° 1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la section n° 2 "Théories physiques et probabilités" associée au C.N.R.S.

I-2. Soient b_1, $b_2 \in b\,\mathcal{E}_+$; on pose

$$B_t^i = \int_0^t b_i(X_s)\, ds$$

et

$$W^i f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-B_t^i} f(X_t)\, dt .$$

on a alors la proposition suivante énoncée par Hunt dans [10].

PROPOSITION. — *Si* $\int_0^\infty (b_1(X_s) - b_2(X_s))ds = +\infty$ *p.s, on a*

$$\begin{aligned} W^1 f(x) - W^2 f(x) &= W^1((b_1 - b_2)\, W^2 f)(x) \\ &= W^2((b_1 - b_2)\, W^1 f)(x) . \end{aligned}$$

Soit τ_t^i le changement de temps associé à B_t^i et V_i^α la résolvante correspondante ; on a

$$V_i^1 f(x) = W^i \ (b_i f)(x) .$$

Il n'est pas difficile de montrer en utilisant la proposition ci-dessus que si U^α est fortement fellerienne V_i^α est également fortement fellerienne.

Si $b_1 = 1_A$ où $A \in \mathcal{E}_n$ on notera W^A et V_A^α les noyaux W^1 et V_1^α . Rappelons que la restriction μ_A de μ à A est invariante par le semi-groupe P_{τ_t} ; dans la suite si $\mu(A) < \infty$ nous supposerons toujours que μ_A est normalisée ($\mu_A(A) = 1$).

II. Ensembles bornés.

II-1. DEFINITION. — *Un ensemble* $A \in \mathcal{E}$ *est dit borné si*

i) $\mu(A) < \infty$,

ii) $\displaystyle\sup_{x, y \in A \times A} \frac{1}{2} \| V_A^1(x, .) - V_A^1(y, .) \| \leqslant k_A < 1$.

THEOREME. — E *est réunion dénombrable d'ensembles bornés.*

Démonstration. – L'hypothèse de récurrence entraîne $\mu \ll U^1(x,.)$ pour tout x de E. On peut donc écrire la décomposition de Lebesgue de $U^1(x,.)$ par rapport à μ

$$U^1(x\,,A) = \int_A U^1(x\,,y)\,\mu(dy) + \widetilde{U}^1(x\,,A)\ ,$$

où $\widetilde{U}^1(x,.)$ est la partie singulière de $U^1(x,.)$, portée par un ensemble N_x de μ-mesure nulle. Pour tout x de E, la densité $U^1(x\,,y)$ est strictement positive μ-*ps* ; en effet si l'ensemble $\{y : U^1(x\,,y) = 0\}$ était chargé par μ, l'ensemble $\Gamma = \{y : U^1(x\,,y) = 0\} - N_x$ le serait aussi et l'on aurait $U^1(x\,,\Gamma) = 0$ ce qui est contradictoire.

Posons pour $A \in \mathcal{E}$, $0 < \mu(A) < \infty$ et $r \in]1/2\,,1[$,

$$K(A\,,r\,,n) = \left\{x \in A : \mu\left\{y \in A : U^1(x\,,y) > \frac{1}{n}\right\} > r\,\mu(A)\right\}\ .$$

Il est facile de voir que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(A\,,r\,,n)$.

Soit maintenant un ensemble $B \subset K(A\,,\nu\,,n)$ pour un ν et un n fixé choisis de telle façon que $(1-\nu)\,\mu(A)/\mu(B) < 1/2$. On peut donc trouver un $r \in]\frac{1}{2}\,,1[$ et tel que $(1-r) \geqslant (1-\nu)\,\mu(A)/\mu(B)$. On a alors $B = K(B\,,r\,,n)$; en effet si $x \in B$

$$\begin{aligned}\mu\left\{y \in B : U^1(x\,,y) \leqslant \frac{1}{n}\right\} &\leqslant (1-\nu)\,\mu(A) = ((1-\nu)\,\mu(A)/\mu(B))\,\mu(B)\\ &\leqslant (1-r)\,\mu(B)\ .\end{aligned}$$

L'ensemble A est donc réunion dénombrable d'ensembles B tels que $B = K(B\,,r\,,n)$ pour un r et un n bien choisis. Il suffit donc de démontrer qu'un tel ensemble est borné.

Soit donc $B = K(B\,,r\,,n)$ et $C \subset B$; on a

$$\begin{aligned}V_B^1(x\,,C) &= E_x \int_0^{\infty} e^{-B_t}\,1_C(X_t)\,dt\\ &\geqslant E_x \int_0^{\infty} e^{-t}\,1_C(X_t)\,dt = U_1(x\,,C)\ .\end{aligned}$$

Par suite la densité $U_1^B(x, y)$ de V_1^B par rapport à μ_B peut être choisie supérieure à $U^1(x, y)$ sur B. Par construction, pour tout $x \in B$ il existe un ensemble $\Gamma_x \subset B$ tel que

$$\mu(\Gamma_x) > r\mu(B) \quad \text{et} \quad U_1^B(x, y) > 1/n$$

pour $y \in \Gamma_x$. Si x et x' sont deux points quelconques de E, $\Gamma_x \cap \Gamma_{x'}$ a une mesure au moins égale à $(2r - 1)\,\mu(B)$; les mesures $V_B^1(x, .)$ et $V_B^1(x', .)$ peuvent donc s'écrire comme somme de la mesure $\frac{1}{n}\,\mu_B(\Gamma_x \cap \Gamma_{x'} \cap .)$ et d'une mesure de masse totale strictement inférieure à 1, par suite

$$\frac{1}{2}\,\| V_B^1(x, .) - V_B^1(x', .) \| \leqslant 1 - (2r - 1)/n < 1 .$$

Comme r et n ne dépendent pas de x et x', l'ensemble B est borné. Il en résulte que tout ensemble de mesure finie est réunion dénombrable d'ensembles bornés, et donc que E est réunion dénombrable d'ensembles bornés.

II-2. DEFINITION. — *On appellera charges nulles les fonctions nulles en dehors d'un ensemble borné et d'intégrale nulle* $\left(\int f d\mu = 0\right)$.

On notera **N** l'ensemble de toutes les charges nulles et $\mathbf{N}^A$ l'ensemble des charges nulles à support dans l'ensemble borné A.

Dans la suite nous allons étudier le comportement de $U^\alpha f$ lorsque $\alpha \to 0$ pour $f \in \mathbf{N}$. Il serait donc intéressant de pouvoir décrire les ensembles bornés et notamment de trouver des conditions portant sur le semi-groupe permettant d'affirmer que les compacts sont bornés. Nous allons donner deux résultats partiels dans cette direction qui seront importants pour la fin de cet article.

II-3. PROPOSITION. — *Si* U^1 *transforme les fonctions continues à support compact en fonctions continues, la mesure* μ *est de Radon.*

Démonstration. — Comme μ est σ-finie, on peut trouver un compact K tel que $0 < \mu(K) < \infty$. La fonction 1_K est limite décroissante de fonctions $f_n \in C_C^+$ et comme $U^1(x, .)$ est une mesure de Radon

$$U^1(x\,,K) = \lim_{n\to\infty} \downarrow U^1(x\,,f_n)$$

donc $U^1(x\,,K)$ est SCS. Posons $E_n = \{x : U^1(x\,,K) \geqslant 1/n\}$; comme $\mu(K)$ est positif, $U^1(x\,,K)$ est positif pour tout x de E et E est donc la réunion des E_n. Le théorème de Baire entraîne que l'un des E_n soit E_p est d'intérieur non vide ; il existe une fonction φ non nulle de C_K^+ à support dans $\overset{\circ}{E}_p$ et l'on a

$$\int \varphi\, d\mu < \|\varphi\|\, \mu(E_p) < p\, \|\varphi\|\, \mu(K) < \infty\,.$$

Soit maintenant H un compact arbitraire de E. Posons $a = \inf_{x\in H} U^1\varphi(x)$, l'hypothèse de récurrence entraîne $a > 0$; or on a

$$\mu(H) = \leqslant \int_H \mu(dx)\, \frac{U^1\,\varphi(x)}{a} \leqslant \int \varphi\, d\mu/a\,.$$

La proposition est donc démontrée.

II-4. THEOREME. — *Si la résolvante est fortement fellerienne, c'est-à-dire si U^α transforme les fonctions boréliennes bornées en fonctions continues, les ensembles compacts sont bornés.*

Démonstration. — Sur la vue de la proposition précédente il suffit de démontrer la deuxième condition de la définition 1.

Soit K un ensemble compact ; la résolvante étant fortement fellerienne satisfait à l'hypothèse de continuité absolue ([4], V. 1.3) ainsi que la résolvante V_K^α ; les mesures $V_K^1(x,.)$ sont donc équivalentes.

D'autre part il résulte du théorème de Mokobodzky ([14]) que l'application qui à x fait correspondre $V_K^1(x,.)$ est continue pour la norme. Il en résulte que K est bornée ; en effet il existerait sinon un couple $(x\,,y) \in K \times K$ tel que

$$\|V_K^1(x,.) - V_K^1(y,.)\| = 2$$

ce qui contredirait le fait que $V_K^1(x,.)$ et $V_K^1(y,.)$ sont équivalentes.

III. Opérateurs et noyaux potentiels.

III-1. DEFINITION. – *On appelle opérateur potentiel un opérateur linéaire* U *de* N *dans* $b\mathcal{E}$, *tel que pour tout* $f \in \mathrm{N}$ *on aie*

$$\mathrm{U}f - \mathrm{U}^{\alpha}f - \alpha \mathrm{U}^{\alpha}\mathrm{U}f = 0 .$$

On appelle *noyau potentiel* un noyau $\mathrm{U}(x, .)$ sur E dont la restriction aux charges nulles est un opérateur potentiel.

Nous allons démontrer qu'il existe dans de nombreux cas des opérateurs potentiels. Nous aurons besoin du

III-2. LEMME. – *Si* P *est une fonction de transition ayant une mesure invariante* ν *finie et normalisée* ($\nu(\mathrm{E}) = 1$), *on a*

$$\sup_{x \in \mathrm{E}} \| \mathrm{P}^n(\mathrm{X}, .) - \nu(.) \| \leqslant 2^{-n+1} \Big(\sup_{x, y} \| \mathrm{P}(x, .) - \mathrm{P}(y, .) \| \Big)^n .$$

Démonstration. – Ueno ([18]) a montré que

$$\sup_{x, y} \| \mathrm{P}^n(x, .) - \mathrm{P}^n(y, .) \| \leqslant 2^{-n+1} \Big(\sup_{x, y} \| \mathrm{P}(x, .) - \mathrm{P}(y, .) \| \Big)^n .$$

Soit alors E^+ et E^- les ensembles de la décomposition de Jordan-Hahn de $\mathrm{P}^n(x, .) - \nu(.)$; on a

$$\| \mathrm{P}^n(x, .) - \nu(.) \| = \mathrm{P}^n(x , \mathrm{E}^+) - \nu(\mathrm{E}^+) - \mathrm{P}^n(x , \mathrm{E}^-) + \nu(\mathrm{E}^-)$$

et comme ν est invariante, ceci est égal à

$$\int_{\mathrm{E}} \nu(dy) (\mathrm{P}^n(x , \mathrm{E}^+) - \mathrm{P}^n(y , \mathrm{E}^+) - \mathrm{P}^n(x , \mathrm{E}^-) + \mathrm{P}^n(y , \mathrm{E}^-)) ;$$

on a donc finalement

$$\begin{aligned} \| \mathrm{P}^n(x, .) - \nu(.) \| &\leqslant \int_{\mathrm{E}} \nu(dy) \Big(\sup_{y} \| \mathrm{P}^n(x, .) - \mathrm{P}^n(y, .) \| \Big) \\ &\leqslant \sup_{x, y} \| \mathrm{P}^n(x, .) - \mathrm{P}^n(y, .) \| \\ &\leqslant 2^{-n+1} \Big(\sup_{x, y} \| \mathrm{P}(x, .) - \mathrm{P}(y, .) \| \Big)^n . \end{aligned}$$

III-3. THEOREME. – *Soit* A *un ensemble borné.*

1) *Il existe une constante* M_A *telle que*

$$\forall f \in N^A \ , \ \forall \alpha > 0, |U^\alpha f| \leqslant M_A \| f \| \ .$$

2) *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) *Pour toute fonction* f *de* N^A, *la limite* $\lim\limits_{\alpha \to 0} U^\alpha f$ *existe,*

ii) *Pour tout* x de E *et tout* $\Gamma \in \mathcal{E}$, $\alpha U^\alpha V_A(x , \Gamma)$ *converge lorsque* α *tend vers zéro,*

iii) *Il existe une mesure* λ_A *telle que pour toute fonction* $g \in \mathcal{C}\mathcal{E}$

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha U^\alpha V_A g(x) = \int_E g(x) \lambda_A(dx) .$$

Démonstration. – Comme A est borné, en appliquant le lemme précédent on obtient

$$\sup_{x \in A} \| V_A^n(x, .) - \mu_A(.) \| \leqslant 2 k_A^n \ , \ (k_A < 1) \ ,$$

où V_A^n est le $n^{\text{ième}}$ itéré du noyau V_A, et par suite il existe une constante M_A telle que

$$\sum_0^\infty \sup_{x \in A} \| V_A^n(x, .) - \mu_A(.) \| \leqslant M_A/2 < \infty \ .$$

Soit alors $f \in N^A$, comme $\langle \mu_A , f \rangle = 0$, l'expression $g(x) = \sum\limits_0^\infty V_A^n f(x)$ converge et définit une fonction bornée sur A, que l'on prolonge par zéro hors de A ; cette fonction vérifie alors

$$(V_A - I) g(x) = - f(x)$$

pour tout x de E et $\| g \| \leqslant M_A \| f \|/2$.

D'autre part, comme $\mu(A) < \infty$, il résulte de [1] (Th. II-2) que $t^{-1} \int_0^t 1_A(X_s) \, ds$ converge *p.s.* vers zéro dans le cas nul ($\mu(E) = \infty$) et vers $\mu(A)$ dans le cas positif ($\mu(E) = 1$). Ceci entraîne que pour α assez petit on peut utiliser la proposition I.2 avec $a = \alpha$ et $b = 1_A$ ce qui donne

$$W_A g - U^\alpha g = U^\alpha \{(\alpha - 1_A) W_A g\}$$

soit encore, comme $1_A g = g$,

$$U^\alpha(1_A(V_A - I)g) = - V_A g + \alpha U^\alpha V_A g ,$$

$$U^\alpha f = V_A g - \alpha U^\alpha V_A g .$$

Il est alors clair que $|U^\alpha f| \leqslant M_A \|f\|$; d'autre part cette formule montre clairement l'équivalence de i) et ii) de 2). L'équivalence de ii) et iii) résulte du théorème de Vitali-Hahn-Saks et du fait que les limites des αU^α, si elles existent, sont invariantes donc constantes.

III-4. Definition. — *Un processus vérifiant les trois conditions équivalentes de la partie 2) du théorème précédent sera dit normal.*

Les résultats de [1] prouvent que tout processus positif est normal. Comme dans [5] il est facile de voir à partir des résultats de Spitzer [17] et Ornstein [15] que les processus à accroissements indépendants sur **R** ou Z sont normaux.

Enfin si le processus est normal, la limite $Uf = \lim\limits_{\alpha \to \infty} U^\alpha f$ définit un opérateur potentiel.

III-5. Supposons le processus normal et à résolvante fortement fellerienne et soit C_c l'espace des fonctions continues à support compact ; nous remarquons $\mathbf{N} \cap C_c$ est de codimension 1 dans C_c. Choisissons une fonction f_0 de C_c telle que $< \mu , f_0 > = 1$; soit K_0 son support. Pour toute fonction f de C_c, la fonction $f - < \mu , f > f_0$ est dans **N** et par suite la limite

$$\lim_{\alpha \to 0} U^\alpha (f - < \mu , f > f_0)$$

existe. Pour toute fonction f à support dans K on a

$$|\lim_{\alpha \to 0} U^\alpha(f - < \mu , f > f_0)| \leqslant M_{K \cup K_0}(1 + \mu(K) \|f_0\|) \|f\| .$$

Si l'on pose alors, pour toute fonction f de C_c

$$Uf(x) = \lim_{\alpha \to 0} U^\alpha(f - < \mu , f > f_0)(x) ,$$

ceci coïncide avec $\lim\limits_{\alpha \to 0} U^\alpha f(x)$ pour $f \in \mathbf{N} \cap C_c$, et pour tout x de E l'application $f \to Uf(x)$ est une mesure de Radon. On a donc

THEOREME. *Si le processus est normal et à résolvante fortement fellerienne il existe un noyau potentiel* U *ayant les propriétés suivantes :*

1) *Pour tout* x *de* E, U$(x, .)$ *est une mesure de Radon sur* E ;

2) *Le noyau* U *transforme les fonctions bornées à support compact en fonctions continues bornées ;*

3) *Pour toute fonction* f *de* **N**, U$f(x)$ *est égal à* $\lim_{\alpha \to 0} U^\alpha f(x)$.

III-6. La convergence de $U^\alpha f$ étant une convergence bornée, on peut dans la situation précédente passer à la limite dans l'équation résolvante pour obtenir entre les noyaux U et U^α la relation

$$U = U^\alpha - U^\alpha f_0 \otimes \mu + \alpha U^\alpha U \ ;$$

ceci permet d'énoncer

PROPOSITION. – *Si* f *et* g *sont deux fonctions telles que*

$$< \mu , f > = < \mu , g >$$

et que Uf *et* Ug *soient dans* $\mathcal{L}^1(\mu)$, *l'expression*

$$U^\alpha f(x) - U^\alpha g(x)$$

a une limite lorsque α *tend vers zéro.*

Démonstration. – De la relation ci-dessus on déduit

$$U^\alpha f - U^\alpha g = Uf - Ug - \alpha U^\alpha Uf + \alpha U^\alpha Ug \, .$$

Comme Uf et Ug sont dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ il résulte de [1] prop. III.1 que les deux derniers termes de cette expression tendent vers zéro.

Remarques :

1) On aurait pu énoncer cette proposition en disant : pour toute fonction f telle que $< \mu , f > = 0$ et $Uf \in \mathcal{L}'(\mu)$, la limite $\lim_{\alpha \to 0} U^\alpha f$ existe et est égale à Uf.

2) Il est aussi facile de déduire de là que si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mu)$ telles que Uf et Ug soient dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ alors

$$U^\alpha f(x)/U^\alpha g(x) \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} <\mu, f> / < \mu , g > \, .$$

Mais en fait il semble très vraisemblable que ce résultat est vrai pour toutes les fonctions de $\mathcal{L}^1(\mu)$ et sans hypothèse spéciale sur le processus.

III-7. Corollaire. — *Si* $\mu(\mathrm{E}) = 1$, *pour tout couple* f, g *de fonctions bornées à support compact telles que* $< \mu , f > = < \mu , g >$, *l'expression* $\mathrm{U}^\alpha f(x) - \mathrm{U}^\alpha g(x)$ *a une limite finie lorsque* α *tend vers zéro. Si de plus* E *est compact pour tout couple* $(x , y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}$

$$\mathrm{U}^\alpha f(x) - \mathrm{U}^\alpha g(y)$$

a une limite lorsque α *tend vers zéro.*

Démonstration. — La deuxième phase résulte de ce que $\mathrm{U}^\alpha f(x) - < \mu , f > / \alpha$ a une limite quelque soit $x \in \mathrm{E}$.

Remarque. — Lorsque E est compact on peut appliquer ce résultat en particulier à $f = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^\beta$ ou A est une fonctionnelle additive. Si ν_{A} est la mesure associée à A ([16]) on a le résultat suivant :

si A et B sont deux fonctionnelles additives de potentiels bornés

$$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^\alpha(x)/\mathrm{U}_{\mathrm{B}}^\alpha(y) \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} \| \nu_{\mathrm{A}} \| / \| \nu_{\mathrm{B}} \| \ ;$$

et si $\| \nu_{\mathrm{A}} \| = \| \nu_{\mathrm{B}} \|$, l'expression $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^\alpha(x) - \mathrm{U}_{\mathrm{B}}^\alpha(y)$ a une limite finie lorsque $\alpha \to 0$.

IV. Quelques propriétés des noyaux potentiels.

IV-1. Dans ce paragraphe nous supposerons qu'il existe un noyau potentiel U au sens de la définition III-1. et nous allons en étudier quelques propriétés élémentaires. Il sera clair que la plupart se transposent aux opérateurs potentiels.

Proposition. — *Si* f *est finement continue et dans* **N**, $\mathrm{U}f = 0$ *entraîne* $f = 0$.

Démonstration. — En effet de $\mathrm{U}f = \mathrm{U}^\alpha f + \alpha \mathrm{U}^\alpha \mathrm{U}f$ on déduit que $\mathrm{U}^\alpha f = 0$ pour tout α, et par suite $f = \lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha \mathrm{U}^\alpha f = 0$.

IV-2. PROPOSITION. — *Soit* U *un noyau potentiel ; un noyau* $\widetilde{U}$ *est un autre noyau potentiel si et seulement si, il existe une fonction* φ *et une mesure* ν *de base* μ *telles que*

$$\widetilde{U} = U + \varphi \otimes \mu + 1 \otimes \nu \, .$$

Démonstration. — Il est clair que le noyau $\widetilde{U}$ défini par la formule ci-dessus est un noyau potentiel. Inversement soit $\widetilde{U}$ un noyau potentiel ; pour toute fonction f de **N** on a

$$\widetilde{U}f = U^\alpha f + \alpha U^\alpha \widetilde{U} f \, ;$$

comme par hypothèse on a la même relation pour U, on obtient par différence

$$Uf - \widetilde{U}f = \alpha U^\alpha (Uf - \widetilde{U}f) \, .$$

Posons $g = Uf - \widetilde{U}f$; g est une fonction bornée et pour tout $\alpha > 0$, on a

$$g + \|g\| = \alpha U^\alpha (g + \|g\|) \, ,$$

ce qui entraîne que $g + \|g\|$ est invariante et par suite constante. Si x est un point arbitraire de E on a donc $g = \langle \nu , f \rangle$ avec $\nu = U(x,.) - \widetilde{U}(x,.)$.

Soit maintenant f_0 une fonction bornée à support borné telle que $\langle \mu , f_0 \rangle = 1$. D'après ce qui précède, on a

$$U(f - \langle \mu , f \rangle f_0) = \widetilde{U}(f - \langle \mu , f \rangle f_0) + \langle \nu , f - \langle \mu , f \rangle f_0 \rangle$$

soit

$$Uf = \widetilde{U}f - \langle \mu , f \rangle (\widetilde{U}f_0 - Uf_0 + \langle \nu , f_0 \rangle) + \langle \nu , f \rangle \, ;$$

il suffit de poser $\varphi = \widetilde{U}f_0 - Uf_0 + \langle \nu , f_0 \rangle$ pour obtenir le résultat désiré.

Remarque. — Dans le cas où il existe un point récurrent on peut prendre pour U le potentiel du processus tué à l'entrée en ce point.

IV-3. PROPOSITION. — *Si* A *est un ensemble presque borélien non polaire et* f *une fonction de* **N** *on a*

$$Uf(x) = E_x \int_0^{T_A} f(X_t)\, dt + P_{T_A} Uf(x) \, .$$

Démonstration. – Posons $g = \mathrm{U}f$, on a $g = \mathrm{U}^\alpha f + \alpha \mathrm{U}^\alpha g$, ce qui combiné avec la propriété de Markov forte donne

$$g(x) = \mathrm{E}_x \int_0^{\mathrm{T_A}} e^{-\alpha t} f(\mathrm{X}_t)\, dt + \mathrm{E}_x [e^{-\mathrm{T_A}} g(\mathrm{X}_{\mathrm{T_A}})] + \\ + \mathrm{E}_x \int_0^{\mathrm{T_A}} e^{-\alpha t} g(\mathrm{X}_t)\, dt\ .$$

Le théorème II-2.4. de [3] permet de passer à la limite lorsque α tend vers zéro pour obtenir

$$\lim_{\alpha \to 0} \mathrm{E}_x \int_0^{\mathrm{T_A}} e^{-\alpha t} f(\mathrm{X}_t)\, dt = \mathrm{E}_x \int_0^{\mathrm{T_A}} f(\mathrm{X}_t)\, dt$$

en dehors d'un ensemble polaire.

D'autre part

$$| \mathrm{E}_x \int_0^{\mathrm{T_A}} \alpha e^{-\alpha t} g(\mathrm{X}_t)\, dt | \leqslant \|g\| (1 - \mathrm{E}_x [e^{-\alpha \mathrm{T_A}}])\ ,$$

et comme A n'est pas polaire, cette expression tend vers zéro lorsque α tend vers zéro. On obtient donc la formule annoncée en dehors d'un ensemble polaire, puis partout par continuité fine.

IV-4. Dans ce numéro nous considérerons le noyau U fortement fellerien construit en III-5., mais les résultats s'étendent de manière évidente.

THEOREME. – *Si* $f \in \mathbf{N}$ *et* $a \in \mathbf{R}$, *alors* $\mathrm{U}f \leqslant a$ *sur* $\{f > 0\}$ *entraîne* $\mathrm{U}f \leqslant a$ *partout. Si de plus* f *est finement* SCS *on a* $\mathrm{U}f < a$ *sur* $\{f < 0\}$.

Démonstration. – Comme $\mathrm{U}f$ est continue, l'hypothèse entraîne $\mathrm{U}f \leqslant a$ sur $\overline{\mathrm{A}} = \overline{\{f > 0\}}$. Comme $\mathrm{P_A}$ ne charge que $\overline{\mathrm{A}}$, en appliquant la proposition précédente on trouve

$$\mathrm{U}f(x) \leqslant a + \mathrm{E}_x \int_0^{\mathrm{T_A}} f(\mathrm{X}_s)\, ds\ .$$

L'intégrale au second membre est négative ou nulle de par le choix de A. Si f est finement SCS, et si x appartient à l'ouvert fin $\{f < 0\}$ l'intégrale est strictement négative, d'où le résultat.

Pour les besoins du paragraphe suivant nous poserons en nous inspirant de [6], [9], [11] la définition suivante.

DEFINITION. — *Un opérateur* U *tel que, pour toute fonction continue f d'intégrale nulle,* $Uf \leqslant a$ *sur* $\{f > 0\}$ *entraîne* $Uf \leqslant a$ *partout et* $Uf < a$ *sur* $\{f < 0\}$ *sera dit satisfaire au principe semi-complet strict du Maximum* (en abrégé SCSM).

Remarque. — Le théorème précédent peut encore s'exprimer de la manière suivante : si f et g sont deux fonctions boréliennes telles que $|Uf| < \infty$ et $<\mu, f> \geqslant <\mu, g>$, et si l'inégalité $Uf \leqslant Ug + a$ a lieu sur $\{f > 0\}$ elle a lieu partout.

V. Construction de processus récurrents sur un espace compact.

V-1. Nous supposerons désormais que l'espace E est compact. Dans ce cas la démonstration du théorème(²) est plus simple puisqu'il suffit de travailler sur l'équation résolvante ordinaire. Comme dans ce cas la fonction $1 = 1_E$ est à support compact et d'intégrale égale à 1, on peut considérer qu'il existe un noyau potentiel canonique donné par

$$Uf(x) = \lim_{\alpha \to 0} (U^\alpha f(x) - <\mu, f>/\alpha) .$$

Nous allons reprendre la question en suivant des suggestions de Mokobodozky.

Le raisonnement fait dans la première partie prouve que

$$\sup_{x \in E} \| U^1(x, .) - \mu(.) \| \leqslant k < 1 .$$

Par ailleurs l'opérateur U^1 est un opérateur compact sur l'espace C des fonctions continues sur E, qui transforme $N \cap C$ dans lui-même. Il en résulte que la restriction de U^1 à $N \cap C$ est un opérateur compact de norme strictement inférieure à 1. Par suite la série $\sum_{n=1}^{\infty} (U^1)^n$ converge en norme vers l'opérateur U sur $N \cap C$. Comme limite en norme d'opérateurs compacts, U est un opérateur compact sur $N \cap C$. En passant à la limite dans l'équation résolvante et en utilisant le fait que E est compact on a

$$Uf - U^\alpha f = \alpha U^\alpha U f = \alpha U U^\alpha f \quad \text{pour tout} \quad f \in N \cap C .$$

(²) Théorème III.3.

Enfin l'image de $N \cap C$ par U est le domaine du générateur infinitésimal fort du semi-groupe, elle est donc dense dans $N \cap C$. Résumons ceci et les résultats du paragraphe précédent.

PROPOSITION. – *La restriction de* U *à* $N \cap C$ *est un opérateur compact d'image dense, satisfaisant au principe semi-complet strict du maximum.*

Remarque. – Dans le cas où E n'est pas compact et où $\|\mu\| = 1$, le processus est normal et pour f dans $N \cap C$, $U^\alpha f \to Uf$ bornément. On peut passer à la limite dans $<\mu, U^\alpha f>$ ce qui prouve que U transforme les fonctions de N en fonctions d'intégrale nulle mais plus forcément à support compact.

V-2. L'objet de ce paragraphe est de démontrer que ces propriétés sont caractéristiques.

THEOREME. – *Soient* E *un espace compact,* μ *une probabilité sur* E, $N \cap C$ *l'espace des fonctions continues sur* E *d'intégrale nulle par rapport à* μ. *Si* U *est un opérateur compact de* $N \cap C$ *dans lui-même satisfaisant au principe semi-complet strict du maximum et d'image dense il existe un semi-groupe de Markov sur* C *récurrent, unique, de mesure invariante* μ *et d'opérateur potentiel* U. *La résolvante correspondante est fortement fellerienne.*

Démonstration. – Nous allons la décomposer en plusieurs lemmes.

LEMME 1. – U *est un opérateur injectif.*

Démonstration. – Soit $f \in N \cap C$ et supposons que $Uf = 0$; ceci entraîne en particulier que $Uf \leqslant 0$ sur $\{f > 0\}$ donc d'après SCSM, $Uf < 0$ sur $\{f < 0\}$, ce qui n'est possible que si $\{f < 0\} = \emptyset$ et comme $f \in N$ que si $f = 0$. L'opérateur U est bijectif de $N \cap C$ sur son image $\mathrm{Im}\, U$.

LEMME 2. – *Il existe une résolvante* V^λ *sur* C *telle que* $V^0 f = Uf$ *pour* $f \in N \cap C$.

Démonstration. – Le lemme 1 permet de définir un opérateur A de domaine $\mathcal{D}_A = \mathrm{Im}\, U$, en posant $- AUf = f$. L'opérateur A satisfait au principe suivant dit "du maximum du module".

$$g \in \mathcal{D}_A \ , \ g(x) = \| g \| \quad \text{entraîne} \quad Af(x) \leqslant 0 \ .$$

En effet si $Uf(x) = \| Uf \| = \sup_{x \in E} | Uf(x) |$, comme $Uf \leqslant \| Uf \|$ partout donc en particulier sur $\{ f > 0 \}$, SCSM entraîne alors $Uf < \| Uf \|$ sur $\{ f < 0 \}$ et par suite$\{ x \in \ f \geqslant 0 \}$ donc

$$AUf(x) = - f(x) \leqslant 0 \ .$$

Suivons maintenant Faraut [7]. Sur l'espace de Banach $N \cap C$, nous définissons un semi-produit intérieur (Lumer-Philipps [12]) de la façon suivante : si $f \in N \cap C$, $| f |$ atteint son maximum en au moins un point, soit x_f, on pose

$$[f, g] = f(x_g)\, g(x_g) \ .$$

Il est alors facile de voir que l'opérateur A est dissipatif, c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathcal{D}_A$, on a $[Af, f] \leqslant 0$. Lumer et Philipps [12] montrent alors qu'il existe une résolvante V^λ de norme inférieure à $1/\lambda$ et qui est l'inverse de λ I-A. Cette résolvante est définie sur l'image de I-A. Montrons que I-A applique $\mathrm{Im}\, U$ *sur* $N \cap C$. A cet effet il faut montrer que si $g \in N \cap C$, il existe $f \in N \cap C$ telle que

$$(I - A)\, Uf = (I + U)\, f = g \ ;$$

il suffit donc de montrer que $(I + U)$ est surjectif et d'après le Théorème de l'indice([19])et la compacité de U que $I + U$ est injectif. Or si $Uf = - f$ cela entraîne $Uf \leqslant 0$ sur $f > 0$ donc d'après SCSM $Uf \leqslant 0$ partout, ce qui entraîne $Uf = f = 0$ puisque $Uf \in N$.

On a donc maintenant construit une résolvante sur $N \cap C$ qui est de co-dimension 1 dans C ; il suffit de prolonger V^λ par linéarité en posant $V^\lambda 1 = 1/\lambda$ pour obtenir la résolvante cherchée. En appliquant U à droite et à gauche aux deux membres des relations

$$V^\lambda(\lambda I - A) = I = (\lambda I - A)\, V^\lambda$$

et en utilisant le fait que U est l'opposé de l'inverse de A on obtient

$$Uf - V^\lambda f = \lambda\, U\, V^\lambda f = \lambda V^\lambda\, Uf$$

pour tout $f \in N \cap C$.

LEMME 3. — *La mesure* μ *est invariante pour la résolvante* V^λ.

Démonstration. — Si $f \in C$, la fonction $f - <\mu, f> 1$ est dans N et par suite

$$0 = <\mu, V^1(f - <\mu, f> 1)> = <\mu, V^1 f> - <\mu, f>,$$

ce qui démontre le lemme. On en déduit

LEMME 4. — *Pour* $g \in C$ *on a*

$$U(g - \lambda V^\lambda g) = V^\lambda g - <\mu, g>/\lambda .$$

Démonstration. — Si $f \in N \cap C$, alors d'après la fin du lemme 2

$$U(f - \lambda V^\lambda f) = V^\lambda f .$$

Si $g \in C$, la fonction $g - <\mu, g> l_E$ est dans $N \cap C$ et par suite

$$U(g - <\mu, g> l_E - \lambda V^\lambda g + <\mu, g> l_E) = V^\lambda(g - <\mu, g> l_E),$$

soit

$$U(g - \lambda V^\lambda g) = V^\lambda g - <\mu, g>/\lambda .$$

LEMME 5. — *Les opérateurs* V^λ *sont positifs.*

Démonstration. — Soit g une fonction négative ou nulle et supposons que $V^\lambda g$ prenne des valeurs strictement positives. Alors

$$0 < \sup_{x \in E} V^\lambda g(x) = \sup_{x \in E} \{U(g - \lambda V^\lambda g) + <\mu, g>/\lambda\} .$$

Mais $g - \lambda V^\lambda g \in N \cap C$, on peut donc appliquer SCSM pour obtenir

$$\sup_{x \in E} \{U(g - \lambda V^\lambda g)(x) + <\mu, g>/\lambda\} =$$
$$= \sup_{x \in \{g - \lambda V^\lambda g > 0\}} \{U(g - \lambda V^\lambda g)(x) + <\mu, g>/\lambda\},$$

soit finalement

$$0 < \sup_{x \in \{g - \lambda V^\lambda g > 0\}} V^\lambda g(x) ,$$

et ceci est contradictoire, puisque sur cet ensemble $V^\lambda g < g/\lambda \leqslant 0$.

LEMME 6. — *La résolvante* V^λ *est unique.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe une deuxième famille résolvante $\widetilde{V}^\lambda$ ayant les mêmes propriétés. On aurait alors d'une part $\widetilde{V}^\lambda 1 = V^\lambda 1$ et d'autre part pour toute fonction f de $N \cap C$.

$$V^\lambda f - \widetilde{V}^\lambda f = \lambda U(\widetilde{V}^\lambda f - V^\lambda f)$$

soit

$$(I + \lambda U)(V^\lambda f - \widetilde{V}^\lambda f) = 0 .$$

Or l'opérateur λU vérifie aussi le principe semi-complet strict du maximum et nous avons montré dans la démonstration du lemme 2 que $I + \lambda U$ est alors injectif. Il en résulte que $V^\lambda f = \widetilde{V}^\lambda f$.

Fin de la démonstration du Théorème. — On ne s'est pas encore servi du fait que $Im\, U$ est dense dans $N \cap C$. Avec cette hypothèse on peut appliquer le Théorème de Hille-Yosida ou encore faire appel à [12] pour obtenir le semi-groupe cherché. Il est facile de voir que les opérateurs V^λ sont compacts et donc fortement felleriens [8], [13].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie t. 8, 1967, 157-181.

[2] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Mesure invariante des processus de Markov récurrents. Séminaire de Probabilités 3, Université de Strasbourg 1967. Berlin Springer-Verlag, 1968 (Lecture Notes in Mathematics, 88).

[3] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Propriétés relatives des processus de Markov récurrents. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie.

[4] R.M. BLUMENTHAL et R.K. GETOOR, Markov processes and Potential theory Academic Press, 1968.

[5] M. DUFLO, Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov irréductibles. *Bulletin de la Soc. Math. France* 98, 1970, 127-163.

[6] M. Durier, Sur les noyaux-fonctions en théorie du Potentiel. Thèse Faculté des Sciences d'Orsay, 1969.

[7] Faraut, Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 20,1 (1970), 235-301.

[8] Girsanov, Strong Feller processus I. General properties, Theor. Probability and Appl. 5 (1960) 7-28.

[9] C. Herz, Les Théorèmes de renouvellement, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* t. 15 (1965), 169-188.

[10] G.A. Hunt, La Théorie du Potentiel et les processus récurrents, Ann. Inst. Fourier, Grenoble t. 15 (1965) 1. p. 3-12.

[11] R. Kondo, On a construction of recurrent Markov chains. *Osaka J. Math.* 6 (1969) 13-28.

[12] G. Lummer et R.S. Philipps, Dissipative operators in Banach spaces. *Pacific J. of Math.* 11 (1961), 679-698.

[13] P.A. Meyer, Les résolvantes fortement felleriennes d'après Mokobodzky. Séminaire de Probabilités II, Springer-Verlag 1968.

[14] P.A. Meyer, Probabilités et Potentiels, Hermann.

[15] D.S. Ornstein, Random walks I – *Trans. Amer. Math. Soc.* 138 (1969), 1-43.

[16] D. Revuz, Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov I. *Trans. Amer. Math. Soc.* 148 (1970) 501-531.

[17] F. Spitzer, Principle of Random walks. Princeton, Van Nostrand, (1960).

[18] T. Ueno, Some limit theorems for temporally discrete Markov processes *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* sert I. 7 (1957).

[19] Séminaire Cartan-Schwarz 16$^{\text{ème}}$ année (1963/69) Paris – Secrétariat Mathématique.

Manuscrit reçu le 30 novembre 1970

D. Revuz
20, Rue de Rome
78 – Les Essarts Le Roi