ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE NIVAT

Transductions des langages de Chomsky

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 1 (1968), p. 339-455
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_1_339_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 1 (1968), 339-456

TRANSDUCTIONS DES LANGAGES DE CHOMSKY

par Maurice NIVAT

Introduction.

I. L'origine de ce travail est pratique. Les langages de programmation sont définis par des règles précises qui en font pour l'essentiel des langages "context-free", (désignés plus loin sous le nom de C-langages). Ce fut le mérite de N. Chomsky d'introduire à des fins purement linguistiques cette structure [2], et celui des créateurs du langage Algol de voir tout le parti qu'en pouvait tirer les utilisateurs de machines à calculer [14] : restaient à résoudre deux problèmes d'ailleurs étroitement liés l'un à l'autre :

– décrire des algorithmes de reconnaissance, c'est-à-dire des algorithmes permettant de décider connaissant les règles de formation des phrases d'un tel langage si une phrase donnée appartient ou non à ce langage et retrouver en cas de réponse favorable la suite des règles au moyen desquelles cette phrase peut être formée (comme phrase du langage). C'est le problème de l'analyse syntaxique (cf. [11] [28]).

– définir une classe raisonnable d'applications entre phrases écrites au moyen d'alphabets différents qui pourraient formaliser ce que l'on entend par traduction ou, pour employer le terme consacré quand il s'agit de langage de programmation par "compilation".

Une première étude de la syntaxe d'Algol que nous avions entreprise sous la direction de Mr. Nolin, nous avait naturellement amenés à nous poser ces problèmes, parmi d'autres essentiellement liés à la programmation des ordinateurs. Si toutefois, nous n'avions rencontré Mr. M.P. Schützenberger ce travail serait tout autre. Toute formalisation n'est pas bonne en effet, et c'est Mr. Schützenberger qui nous a engagés à approfondir à sa suite, les structures algébriques sur lesquelles peut s'appuyer une théorie mathématique des C-langages. Les problèmes évoqués plus haut peuvent ainsi se reformuler en terme rigoureux et les énoncés gagner en généralité.

Deux objets fondamentaux se trouvent à la base de la théorie :

– *les séries algébriques* en des variables non commutatives : ce sont les éléments de l'algèbre large d'un monoïde libre, sur l'anneau des entiers, qui sont solution d'un système d'équations (systèmes que l'on résoud par des méthodes classiques d'approximation). On retrouve les C-langages comme support de celles de ces séries qui sont solution d'un système à coefficients non négatifs. Cet objet semble avoir été introduit pour la première fois en 1959 [25] et le chapitre III de ce travail reprend jusqu'aux notations de [20] [21] [22] et [23] qui constituent la bibliographie essentielle sur ce sujet. Tout au plus avons-nous clarifiés quelques points de détail (e.g. système impropre, chapitre III).

– *les transductions.* Il s'agit là d'applications d'un monoïde libre soit dans un semi-anneau, soit cas particulier important, dans un autre monoïde, applications que l'on peut définir suivant la voie tracée en [24], au moyen de représentations matricielles. L'intérêt de cet objet vient de ce qu'il est une généralisation naturelle des homomorphismes de monoïde libre. En effet, toute transduction apparaît comme composée d'un homomorphisme inverse, de l'application identique sur un sous-ensemble particulier (langage de Kleene ou K-langage) et d'un homomorphisme (cf. chapitre I). On peut par ailleurs étendre aux transductions injectives la plupart des propriétés des monomorphismes de monoïdes libres, eux-mêmes objets, sous le nom de codages, de nombreux travaux (cf. [16], [24]).

L'objet de ce travail est alors double : en premier lieu dégager une définition convenable des transductions et en établir les propriétés fondamentales, composition, itération, inversion.

Ensuite étudier le comportement des séries algébriques au regard de cette classe d'applications, en particulier chercher des représentations canoniques de séries algébriques comme image transductée de séries particulières (c'est ainsi que mathématiquement peut se présenter le problème de l'analyse syntaxique).

II. *Résumé de notre travail.*

Le premier chapitre introduit une définition des transductions, considérées comme parties du produit cartésien de deux monoïdes libres. L'idée de considérer ainsi les transductions comme relations, ainsi que le théorème de Kleene pour les transductions (Th. I.1.1) revient à C. Elgot et J. Mezei [3]. Nous avons cependant dégagé la définition des transductions de la notion d'automate, notion que nous n'utilisons dans ce chapitre que pour établir des équivalences entre notre définition et celle de [3] reprise dans [6] d'une part, entre notre définition et celle de M.P. Schützenberger [19] dans le cas de transductions univoques d'autre part. Nous pouvons ainsi utiliser comme outil principal de démonstration les propriétés des K-langages locaux introduits dès 1957 par J. Myhill [13], et par ailleurs généraliser certains énoncés de [5] : théorème I.5.2. L'intérêt principal de ce chapitre réside cependant dans l'introduction des représentations matricielles qui font apparaître les transductions comme des objets très naturels d'un point de vue mathématique, (th. I.6.1 et 2). Grâce à cette nouvelle définition, la notion de transduction se généralise facilement à des applications dans un monoïde quelconque et au chapitre II à des morphismes d'algèbres larges de monoïdes (transductions généralisées). Le chapitre I s'achève sur la construction de transductions univoques inverses de monomorphismes de monoïdes libres, problème qui avait motivé l'étude de M.P. Schützenberger [19].

Le chapitre II est entièrement consacré à la construction en toute généralité de la transduction inverse d'une transduction donnée et aux nombreuses implications de cette construction qui ne peuvent être développées complètement qu'en se plaçant dans l'algèbre large d'un monoïde libre sur l'anneau des entiers. En effet, c'est de cette construction que découlent la plupart des propriétés des séries rationnelles en des variables non commutatives, définies et considérées pour la première fois en [20].

Dans ce même chapitre on relie la composition de deux transductions au produit de Kronecker des deux représentations supports de celle-ci [10].

Le chapitre III reprend la définition des séries algébriques et des C-langages donnée dans [21] et [22]. Nous nous sommes efforcés de donner dans ce chapitre des démonstrations et des énoncés complets concernant des résultats qui bien que connus, n'avaient été que fragmentairement exposés [3] [6]. C'est ainsi que nous établissons l'existence d'un système quadratique équivalent à tout système d'équations, que nous étendons le théorème de Chomsky-Schützenberger aux séries algébriques. (Théorème III.9.1). Ce ne sont là d'ailleurs que lemmes préparatoires à l'établissement du résultat fondamental, la stabilité par transduction de l'ensemble des séries algébriques (th. 3.10.1) dont un corollaire est le théorème de Jungen-Schützenberger. Nous avons été amenés pour cette étude à discuter l'existence de solutions pour les systèmes impropres d'équations, question à laquelle on peut répondre complètement (lemmes III. 2 et 3).

Le problème de l'analyse syntaxique consiste à représenter un C-langage comme image transductée inverse de certains ensembles particuliers, et il est naturel de considérer en premier lieu à cette fin, ce que nous appelons l'ensemble de Dyck et l'ensemble de semi-Dyck. Une telle représentation est toujours possible en vertu du théorème de Shamir [27] en utilisant des transductions d'image fini. Nous en fournissons au chapitre IV une nouvelle preuve s'appuyant sur le théorème de Greibach [9] établi lui-même fort simplement grâce à un argument de Schützenberger. Nous complétons l'énoncé de Shamir (Th. IV.5.1) en montrant qu'il est toujours possible d'employer l'ensemble de Dyck au lieu de l'ensemble de semi-Dyck utilisé en [27] ce qui présente un intérêt théorique certain du fait que l'ensemble de Dyck est le noyau d'un homomorphisme dans un groupe libre. Il était tentant d'étudier alors la famille des langages qui sont images d'un ensemble de Dyck dans l'inverse d'une transduction univoque : ce sont les langages compilables dont l'étude termine le chapitre IV. Les propriétés de ces langages sont assez voisines de celles des langages que S. Ginsburg et S. Greibach ont étudiés sous le nom de langages déterministes [8], bien que nous montrions que ces deux familles sont distinctes.

C'est cette similitude et cette différence qui nous ont conduits à introduire au chapitre V un modèle très général pour l'analyse syntaxique des C-langages. Nous utilisons toujours le même schéma consistant à représenter un langage comme image transductée inverse, en ce cas du complémentaire de 0 dans le carré d'un monoïde libre, auquel on a ajouté un zéro et sur lequel on a défini une loi de composition particulière : le produit sélectif. C'est là le modèle mathématique qui correspond à l'automate à mémoire pile, introduit par N. Chomsky [2] tel qu'il est étudié par S. Ginsburg [6], et dans le cas particulier des langages déterministes (qui se traduit par des restrictions évidentes sur la transduction en question) c'est aussi le modèle correspondant à un automate introduit et étudié par MP Schützenberger [23]. Comme corollaire des résultats de ce chapitre nous obtenons ainsi l'équivalence des familles d'automates déterministes de [6] et des automates de [23], qui n'avait jamais été établie.

La préparation et la rédaction de cette thèse, commencée à l'Institut de Programmation de la Faculté des Sciences de Paris, achevée au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de la Faculté des Sciences de Grenoble, n'aurait pas été possible sans la compréhension, le soutien matériel et moral, l'amitié parfois de certaines personnes que je tiens à remercier ici chaleureusement. Il s'agit essentiellement de Mrs H. Cartan, R. de Possel, J. Arsac, A. Lentin, L. Nolin, à Paris, de Mrs L. Weil et J. Kuntzmann à Grenoble.

Tout au long de ce travail entrepris, poursuivi, achevé sous sa direction Mr M.P. Schützenberger n'a cessé d'être un maitre exigeant, attentif, sensible, amical. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement aussi Mr C. Ehresmann qui a bien voulu présider le jury de soutenance et Mr. P. Lelong qui m'a donné un sujet de deuxième thèse.

Je remercie Mr. J. Koszul qui a bien voulu ouvrir à ce travail les pages des Annales de l'Institut Fourier.

Je signale enfin que nombres de résultats inclus dans ce travail ont été acquis dans le cadre du contrat AF 61 (052) 945. Je remercie l'Office of Aerospace Research dont l'aide m'a permis, entre autres, de nouer de nombreux contacts avec des mathématiciens étrangers.

CHAPITRE 0

Tous les monoïdes libres considérés dans ce travail sont supposés finiment engendrés. Nous noterons X^* le monoïde libre engendré par l'ensemble fini X, souvent appelé alphabet. L'élément neutre de X^*, le mot vide, est désigné par e et le produit de concaténation dans X^* noté multiplicativement.

L'homomorphisme de X^* dans $\mathbf{Z}^+$, monoïde additif des entiers non négatifs, qui associe à tout mot sa "longueur" ou degré total est $f \longrightarrow |f|$.

1. Algèbre large d'un monoïde libre sur l'anneau des entiers.

Nous noterons $\mathbf{Z} \ll X \gg$ et appellerons algèbre large du monoïde libre X^* sur l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers l'ensemble des sommes formelles, dites aussi séries formelles

$$a = \Sigma \{(a, f) f \mid f \in X^*\} \quad \text{où} \quad (a, f) \in \mathbf{Z}$$

(De fait a est une application de X^* dans $\mathbf{Z}$, mais noter a comme une série est à la fois commode et traditionnel).

$\mathbf{Z} \ll X \gg$ est un anneau si l'on définit

– la somme $a + a'$ par :

$$\forall f \in X^* : (a + a', f) = (a, f) + (a', f)$$

– le produit (parfois dit de Cauchy)

$$\forall f \in X^* : (aa', f) = \Sigma \{(a, f')(a', f'') \mid f'f'' = f\}$$

C'est aussi un $\mathbf{Z}$-module si pour tout $a \in \mathbf{Z} \ll X \gg$ et $\lambda \in \mathbf{Z}$ on définit le produit λa par

$$(\lambda a, f) = \lambda(a, f)$$

Il s'agit bien ainsi d'une algèbre.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Z}$ nous noterons λ la série telle que $(\lambda, e) = \lambda$ et

$$\forall f \in \mathrm{X}^* \backslash \{e\} : (\lambda, f) = 0 .$$

Ainsi 0 (resp. 1) est élément neutre pour l'addition (resp. le produit) dans $\mathrm{Z} \ll \mathrm{X} \gg$.

Nous appellerons polynômes les séries $a \in \mathrm{Z} \ll \mathrm{X} \gg$ telles que l'ensemble $\mathrm{supp}(a) = \{f \in \mathrm{X}^* \mid (a, f) \neq 0\}$ est fini.

Désignons $\mathrm{Z} \ll \mathrm{X} \gg$ par A, pour plus de commodité. La série $a \in \mathrm{A}$ est dite homogène de degré m si et seulement si $\forall f \in \mathrm{X}^*$:

$$(a, f) \neq 0 \longrightarrow |f| = m .$$

L'ensemble formé de la série nulle et des séries homogènes de degré m est un sous-groupe (pour l'addition) de A, soit $\mathrm{A}^{(m)}$ et A est la somme directe des sous-groupes $\mathrm{A}^{(m)}$. De plus pour tout $m, m' \in \mathrm{Z}^+$:

$$\mathrm{A}^{(m)}\, \mathrm{A}^{(m')} \subset \mathrm{A}^{(m+m')} .$$

Ainsi A est un anneau gradué [18]. C'est aussi un anneau filtré par la suite des sous-groupes

$$\mathrm{B}^{(m)} = \sum_{p \geqslant m} \mathrm{A}^{(p)} \quad \text{(somme directe)},$$

filtration $\mathfrak{M}$-adique si $\mathfrak{M}$ est l'idéal $\mathrm{A} \backslash \mathrm{A}^{(0)}$.

Nous considérerons désormais A muni de la topologie associée à la filtration $(\mathrm{B}^{(m)})_{m \in \mathrm{Z}^+}$, topologie pour laquelle la suite $(\mathrm{B}^{(m)})$ est la base fondamentale de voisinages de 0. Tout ceci est classique [18].

L'élément $a \in \mathrm{A}$ est dit quasi-inversible si et seulement si il existe a' tel que $aa' + a = a'$ (ou $a'a + a = a'$). On a : $a \in \mathrm{A}$ est quasi-inversible si et seulement si $(a, e) = 0$. Il existe alors un seul élément, noté a^* et dit quasi-inverse de a, tel que $aa^* + a = a^*$, a^* est donné par

$$a^* = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{k=m} a^k .$$

L'élément a est inversible si et seulement si $a = 1 - a'$ ou $a = (-1) + a'$ où a' est inversible.

L'inverse de a est alors :

$$a^{-1} = 1 + a'^* \quad \text{si} \quad a = 1 - a'$$

$$a^{-1} = -(1 + a'^*) \quad \text{si} \quad a = (-1) + a'$$

Le demi-anneau des séries positives.

La série $a \in \mathrm{A}$ est dite positive si et seulement si $\forall f \in \mathrm{X}^* : (a, f) \geqslant 0$. Nous noterons $\mathrm{A}^+ = \mathbf{Z}^+ \ll \mathrm{X} \gg$ le demi-anneau des séries positives qui est un demi-anneau topologique pour la topologie induite par celle de A, (la graduation et la filtration considérées sur A induisent une graduation et une filtration sur A^+).

Considérons maintenant l'ensemble des parties de X*, muni de deux opérations d'union et de produit (produit induit par celui de X*) qui en font un demi-anneau. L'application support définie par : $\mathrm{supp}(a) = \{f \in \mathrm{X}^* \mid (a, f) \neq 0\}$ est un homomorphisme de demi-anneau.

Nous supposerons toujours l'ensemble des parties de X* muni de la topologie la plus fine pour laquelle l'application support est continue. Dans cette topologie une base fondamentale de voisinage de $\emptyset = \mathrm{supp}(0)$ est constituée par $\mathrm{X}^* \backslash \mathrm{X}^m \mathrm{X}^* = \mathrm{supp}(\mathrm{B}^{(m)} \cap \mathrm{A}^+)$.

2. Séries rationnelles.

DEFINITION. – *Nous appellerons ensemble des séries rationnelles (resp. ensemble des séries rationnelles positives) sur* X *et noterons* Rat(X) *(resp.* $\mathrm{Rat}^+(\mathrm{X})$*) le plus petit sous-anneau de* A *(resp. sous demi-anneau de* A^+*) qui contienne le quasi-inverse de chacun de ses éléments quasi-inversible ainsi que les séries* 1 *et* (x) *pour tout* $x \in \mathrm{X}$. *(*(x) *est la série définie par* $((x), x) = 1$ *et* $\forall f \in \mathrm{X}^* \backslash \{x\} : ((x), f) = 0$).

Nous avons le théorème dû à MP Schützenberger [S.2].

THEOREME 1. – *La série* $a \in \mathrm{A}$ *(resp.* $a \in \mathrm{A}^+$*) est une série rationnelle (resp. une série rationnelle positive) si et seulement si il existe :*

– *une représentation de* X* *par des matrices carrées à éléments dans* $\mathbf{Z}$ *(resp. dans* $\mathbf{Z}^+$*) soit*

$$\mu : \mathrm{X}^* \longrightarrow \mathbf{Z}^{\mathrm{N} \times \mathrm{N}} \quad (\textit{resp. } \mu : \mathrm{X}^* \longrightarrow (\mathbf{Z}^+)^{\mathrm{N} \times \mathrm{N}})$$

– une matrice $\nu \in Z^{N \times N}$ *(resp.* $\nu \in (Z^+)^{N \times N}$*) telles que pour tout* $f \in X^*$ $(a, f) = \mathrm{Tr}(\nu \cdot \mu f)$.

Remarque. – On notera que $\mathrm{Rat}^+(X)$ n'est pas égal à $\mathrm{Rat}(X) \cap A^+$. D'autre part, on a [20] : pour tout $a \in \mathrm{Rat}(X)$ il existe $a', a'' \in \mathrm{Rat}^+(X)$ avec $a = a' - a''$.

3. K-langages.

Conformément à la tradition nous appellerons langage sur X (ou sur X*) toute partie de X*. Une famille importante de langages sur X* nous servira tout au long de ce travail, la famille des K-langages, K(X) dont on peut donner les trois définitions équivalentes suivantes :

DEFINITIONS. 1. – K(X) *est l'ensemble des supports des séries rationnelles positives sur* X.

2. – K(X) *est l'ensemble des parties* L *de* X* *telles que pour un homomorphisme* φ *de* X* *sur un monoïde fini on ait* $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$.

3. – K(X) *est la plus petite famille de parties de* X* *qui contienne les parties finies et soit fermée par les opérations d'union, produit, étoile.*

(Si $L \subset X^*$, l'étoile de L, L*, est le sous-monoïde engendré par L). L'équivalence de ces trois définitions découle simplement du théorème 1. Deux autres caractérisations des K-langages sont utiles et seront fréquemment utilisés dans la suite.

K-*Langages locaux* : Soient donnés les deux sous-ensembles X_1 et X_2 de X et un sous-ensemble V de X^2. L'ensemble $(X_1 X^* \cap X^* X_2) \backslash X^* V X^*$ est par définition un K-langage local.

L'homomorphisme φ de X* dans Y* (qui est entièrement défini par la donnée des $\varphi(x)$, $x \in X$) est dit alphabétique si et seulement si $\forall x \in X : \varphi(x) \in X \cup \{e\}$.

Nous avons alors [13].

PROPOSITION 1. – *Le langage* L *sur* X *est un* K*-langage si et seulement si il existe un monoïde libre* Z^*, *un* K*-langage local* M *sur* Z^* *et un homomorphisme alphabétique* φ *de* Z^* *dans* X^* *tels que* $L = \varphi(M)$.

Automates finis [2]. Un automate fini sur X est constitué par la donnée de :

– un ensemble fini dit ensemble d'états S, ensemble dans lequel on a distingué un élément s_0 dit état initial et un sous-ensemble S' dit ensemble des états finaux.

– une application $\delta : S \times X \longrightarrow S$ que l'on étend en une application δ de $S \times X^*$ dans S en posant pour tout $s \in S$, $x \in X$, $f \in X^*$: $\delta(s, e) = s$, $\delta(s, fx) = \delta(\delta(s, f), x)$.

Le langage reconnu par cet automate est :

$$L = \{f \in X^* \mid \delta(s \;\; , f) \in S'\}$$

PROPOSITION 2. – *Le langage* L *sur* X *est un* K*-langage si et seulement si il existe un automate fini* $\mathcal{A}$ *sur* X *tel que* L *soit le langage reconnu par* $\mathcal{A}$.

En effet se donner un automate fini sur X équivaut à se donner un homomorphisme de X^* sur un monoïde fini.

CHAPITRE 1

K-RELATIONS ET K-TRANSDUCTIONS

1. DEFINITION 1. – *Nous appellerons* K-*relation (binaire) sur* X* *toute partie* R *de* X* × X* *qui peut se mettre sous la forme :*

$$R = \{(\varphi f , \Psi f) \mid f \in K\} \quad où$$

– K = AY* ∩ Y*B\Y*VY* *est un* K-*langage local sur* Y*, *monoïde libre sur* Y.

– φ *et* Ψ *sont deux homomorphismes de* Y* *dans* X*.

2. Théorème de Kleene pour les K-relations.

DEFINITION 1. – *Soient* R *et* R′ *deux parties de* X* × X*, *ou si l'on veut deux relations sur* X* :

– *leur produit* R . R′ *est défini comme*

$$R . R' = \{(r_1 r'_1 , r_2 r'_2 \mid (r_1 , r_2) \in R , (r'_1 . r'_2) \in R'\}$$

– *l'étoile de l'une d'elles, soit* R *est définie comme*

$$R^* = \{(e , e)\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k\right) \quad où$$

$$R^1 = R \quad \textit{et pour tout } k : R^{k+1} = R^k . R$$

DEFINITION 2. – *Soit* S *une famille de relations sur* X*. *La fermeture de Kleene de* S *est la plus petite famille de relations sur* X* *soit* kl(S) *telle que*

1) S ∈ kl(S).

2) *Si* R_1 *et* R_2 *appartiennent à* kl(S) *il en va de même pour* $R_1 \cup R_2$, R_1 , R_2 .

3) *Si* R ∈ kl(S) *alors* R* ∈ kl(S).

THEOREME 1. – [5]. *La famille des* K-*relations (binaires) sur* X^* *est identique à la fermeture de Kleene de la famille des relations finies (binaires) sur* X^*.

Nous commençons par établir un certain nombre de lemmes.

LEMME 1. – *Si* R *et* R′ *sont deux* K-*relations sur* X^*, $R \cup R'$, $R.R'$ *sont aussi deux* K-*relations sur* X^*.

Démonstration. – Soients $R = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K\}$ où

$$K = AY^* \cap Y^*B \backslash Y^*VY^*$$

est un K-langage local sur Y^*,

$$\varphi : Y^* \longrightarrow X^* \quad \text{et} \quad \Psi : Y^* \longrightarrow X^*$$

sont deux homomorphismes

$$\text{et} \quad R' = \{(\varphi' g, \Psi' g) \mid g \in K'\} \quad \text{où} \quad K' = A'Y' \cap Y'^*B' \backslash Y'^*VY'^*$$

est un K-langage local sur Y'^*

$$\varphi' : Y' \longrightarrow X^* \quad \text{et} \quad \Psi' : Y' \longrightarrow X^*$$

sont deux homomorphismes.

Nous pouvons toujours supposer Y et Y′ disjoints et poser $Z = Y \cup Y'$. Définissons sur Z^* les deux K-langages locaux

$$K_1 = A_1 Z^* \cap Z^* B_1 \backslash Z^* V_1 Z^*$$

et

$$K_2 = A_2 Z^* \cap Z^* B_2 \backslash Z^* V_2 Z^*$$

où $A_1 = A \cup A'$, $B_1 = B \cup B'$, $V_1 = V \cup V' \cup YY' \cup Y'Y$

et $A_2 = A$, $B_2 = B'$, $V_2 = V \cup V' \cup Y'Y \cup (YY' \backslash BA')$

Posons $\bar{\varphi}(z) = \varphi(z)$ si $z \in Y$, $\bar{\varphi}(z) = \varphi'(z)$ si $z \in Y'$

$$\bar{\Psi}(z) = \Psi(z) \text{ si } z \in Y, \quad \bar{\Psi}(z) = \Psi'(z) \text{ si } z \in Y'.$$

Nous avons $R \cup R' = \{(\bar{\varphi} h, \bar{\Psi} h) \mid h \in K_1\}$

et $R.R' = \{(\bar{\varphi} h, \bar{\Psi} h) \mid h \in K_2\}$.

La vérification est immédiate.

LEMME 2. – *Si* R *est une* K-*relation,* RR* *en est une aussi.*

Démonstration. – Soit $R = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K\}$ où Y, K, φ, Ψ sont comme plus haut.

Définissons $K' = A'Y^* \cap Y^*B' \setminus Y^*V'Y^*$ où

$$A' = A, \quad B' = B,$$

$$V' = V \setminus BA.$$

Nous avons $$RR^* = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K'\}.$$

En effet, soit $(r, r') \in R^*$: $(r, r') = (r_1 r_2 \ldots r_n, r'_1 \ldots r'_n)$ où pour tout $i = 1, \ldots, n$: $(r_i, r'_i) \in R$ ce que nous pouvons encore écrire $(r, r') = (\varphi(f_1 f_2 \ldots f_n), \Psi(f_1 f_2 \ldots f_n))$ où pour tout $i = 1, \ldots, n$: $f_i \in K$. D'où clairement $f_1 f_2 \ldots f_n \in K'$ et l'inclusion

$$RR^* \subset \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K'\} \quad \text{est vérifiée}.$$

L'inclusion inverse se prouve en remarquant que tout $f \in K'$ se factorise en $f = f_1 f_2 \ldots f_n$ où $f_i \in K$ pour tout i (il suffit de considérer les apparitions d'une transition de BA). Q.E.D.

LEMME 3. – *Toute relation finie sur* X* *est une* K-*relation.*

Démonstration. – Ordonnons les éléments de R, supposé fini. en posant :

$$y_i = (h_i, k_i) \in R, i = 1 \ldots, n.$$

Considérons sur $Y = \{y_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ le K-langage local : $K = AY^* \cap Y^*B \setminus Y^*VY^*$ où $A = B = Y$, $V = Y^2$ et soient φ et Ψ, homomorphismes définis par : $\varphi(y_i) = h_i$, $\Psi(y_i) = k_i$.

Nous avons $$R = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K\}$$ Q.E.D.

LEMME 4. – *Si* K *est un* K-*langage quelconque sur* Y, φ et Ψ *deux homomorphismes de* Y* *dans* X*.

l'ensemble $$R = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K\} \subset X^* \times X^*$$

est une K-*relation sur* X*.

Démonstration. – En effet pour tout K, K-langage sur Y^* il existe L, K-langage local sur Z^* et un homomorphisme $\theta : Z^* \longrightarrow Y^*$ tels que $K = \theta L$.

D'où $R = (\varphi\theta g, \Psi\theta g) \mid g \in L$ est une K-relation puisque $\varphi\theta$ et $\Psi\theta$ sont deux homomorphismes de Z^* dans X^*. Q.E.D.

LEMME 5. – *Soient* K, K′ *deux* K*-langages sur* Y^*, φ *et* Ψ *deux homomorphismes de* Y^* *dans* X^* *et*

$$R = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K\}, \; R' = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K'\}.$$

Les relations suivantes sont vérifiées :

$$R \cup R' = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K \cup K'\}$$

$$R . R' = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K . K'\}$$

$$R^* = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K^*\}$$

La vérification est immédiate. Q.E.D.

D'où le théorème :

– l'inclusion de la fermeture de Kleene des relations finies dans l'ensemble des K-relations résulte directement des lemmes 1, 2 et 3.

– la réciproque découle du fait que tout K-langage est obtenu à partir de langages finis par application d'un nombre fini d'unions, produits et étoiles et de la remarque évidente que si $K \subset Y^*$ est fini, φ et Ψ sont deux homomorphismes de Y^* dans X^* alors $\{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K\}$ est fini. Q.E.D.

3. Quelques K-relations particulières.

PROPOSITION 1. – *Si* φ *est un homomorphisme de* X^* *dans lui-même la relation* $R = \{(f, \varphi f) \mid f \in X^*\}$ *est une* K*-relation (ainsi que* $\{(\varphi f, f) \mid f \in X^*\}$).

En effet $R = R'^*$ où $R' = \{(x, \varphi x) \mid x \in X\}$ est une relation finie.

PROPOSITION 2. – *Si* K *et* L *sont deux* K*-langages sur* X^*, *la relation* $R = K \times L \subset X^* \times X^*$ *est une* K*-relation.*

En effet $K \times L = (\{e\} \times L)(K \times \{e\})$ et chacun des facteurs est une K-relation puisque par exemple

$$(\{e\} \times K_1) \cup (\{e\} \times K_2) = \{e\} \times (K_1 \cup K_2),$$

$$(\{e\} \times K_1)(\{e\} \times K_2) = \{e\} \times K_1 K_2,$$

$$(\{e\} \times K)^* = \{e\} \times K^* .$$

PROPOSITION 3. – *Si φ et Ψ sont des homomorphismes alphabétiques de* X^* *dans* Y^*, *la relation :* $R = \{(f, g) \mid \varphi f = \Psi g\}$ *est une* K-*relation.*

La preuve est directe :

Soit $Z = Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$ la réunion des trois ensembles de couples :

$$Z_0 = \{(x, y) \mid x, y \in X, \varphi x = \Psi y\},$$

$$Z_1 = \{(x, \omega) \mid x \in X, \varphi x = e\},$$

$$Z_2 = \{(\omega, y) \mid y \in X, \Psi y = e\}.$$

ω est un symbole quelconque supposé non dans X.

Définissons les deux homomorphismes φ' et Ψ' de Z^* dans X^* :

$$\varphi'(x, y) = x \quad , \quad \varphi'(x, \omega) = \varphi'(\omega, y) = e \quad ,$$

$$\Psi'(x, y) = y \quad , \quad \Psi'(x, \omega) = e \quad , \quad \Psi'(\omega, y) = y \quad .$$

Nous avons $R = \{(\varphi' h, \Psi' h) \mid h \in Z^*\}$.

En effet :

$$\varphi\varphi'(x, y) = \varphi x = \Psi y = \Psi\Psi'(x, y),$$

$$\varphi\varphi'(x, \omega) = \varphi x = e = \Psi e = \Psi\Psi'(x, \omega),$$

$$\varphi\varphi'(\omega, y) = \varphi e = e = \Psi y = \Psi\Psi'(\omega, y).$$

Donc $\varphi\varphi' h = \Psi\Psi' h$ pour tout $h \in Z^*$ et ceci prouve que

$$\{(\varphi' h, \Psi' h) \mid h \in Z^*\} \subset R .$$

Réciproquement soient deux mots f et g, $\varphi f = \Psi g$. Posons $f = x_1 x_2, \dots x_n$, $g = x'_1 \dots x'_n$. Soient $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ et $x'_{j_1}, \dots, x'_{j_k}$ la suite des éléments de X dans f et g dont les images par φ et Ψ respectivement sont différentes de e.

Nous avons : $\varphi x_{i_1} = \Psi x'_{j_1}, \ldots, \varphi x_{i_k} = \Psi x'_{j_k}$. Considérons alors le mot $h \in Z^*$: $h = (x_{i_1}, x'_{j_1}), \ldots, (x_{i_k}, x'_{j_k})$. Il est clair qu'il suffit d'intercaler entre les lettres de h les symboles de la forme (x, ω) ou (ω, y) nécessaire pour avoir $f = \varphi' h'$ $g = \Psi' h'$. De façon précise :

$$h' = (x_1, \omega) \ldots (x_{i_1 - 1}, \omega)(\omega, x'_1) \ldots (\omega, x'_{j_1 - 1})(x_{i_1}, x'_{j_1})(x_{i_1 + 1}, \omega) \ldots$$
$$(x_{i_2 - 1}, \omega)(\omega, x'_{j_1 + 1}) \ldots (\omega, x'_{j_2 - 1})(x_{i_2}, x'_{j_2}) \ldots$$
$$\ldots (x_{i_k}, x'_{j_k})(x_{i_k + 1}, \omega) \ldots (x_n, \omega)(\omega, x_{j_k + 1}) \ldots (\omega, x'_{n'}) .$$

Et ceci démontre la proposition 3. Enfin nous avons l'importante

PROPOSITION 4. – *Toute* K-*relation* R *sur* X^* *peut se mettre sous la forme* $R = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K\}$ *où* $K \subset Z^*$ *est un* K-*langage local*, φ *et* Ψ *sont deux homomorphismes alphabétiques de* Z^* *dans* X^*.

En effet, d'après le lemme 2.3. cela est vrai pour les relations finies. Si l'on considère maintenant les démonstrations des lemmes 2.1 et 2.2 on voit que si cela est vrai pour R et R′ cela est aussi vrai pour $R \cup R'$, RR' et RR^*. D'où le lemme et par suite la proposition 3 pour φ et Ψ homomorphismes quelconques.

4. K-transductions et produit de composition.

DEFINITION 1. – *Nous appellerons transduction de* X^* *dans* Y^* *toute partie* R *de* $X^* \times Y^*$.

Nous appellerons K-*transduction de* X^* *dans* Y^* *toute transduction de* X^* *dans* Y^* *qui peut se mettre sous la forme*

$$R = \{(\varphi f, \Psi f) \mid f \in K\} \quad \textit{où}$$

– $K = AZ^* \cap Z^*B \backslash Z^*VZ^*$ *est un* K-*langage local sur* Z^*.

– φ *et* Ψ *homomorphismes de* Z^* *dans* X^* *et* Y^* *respectivement.*

Les propriétés déjà démontrées pour les K-relations (qui ne sont qu'un cas particulier des K-transductions) s'étendent aux K-transductions avec les définitions appropriées. D'où :

THEOREME 1. – [5]. *La famille des* K-*transductions de* X^* *dans* Y^* *est identique à la fermeture de Kleene de la famille des* K-*transductions finies de* X^* *dans* Y^*.

PROPRIETE 1. – *Si* $\varphi : X^* \longrightarrow Z^*$ *et* $\Psi : Y^* \longrightarrow Z^*$ *sont deux homomorphismes alphabétiques, la transduction :*

$$R = \{(f, g) \mid \varphi f = \Psi g\} \quad \textit{est une K-transduction.}$$

DEFINITION 2. – *Si* $R \subset X^* \times Y^*$ *et* $R' \subset Y^* \times Z^*$ *sont deux transductions, nous appellerons produit de composition de* R *par* R' *et noterons* $R \circ R'$ *la transduction :*

$$R \circ R' = \{(f, g) \mid f \in X^*, g \in Z^*, \exists\, h \in Y^* : (f, h) \in R \quad et \quad (h, g) \in R'\}$$

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème dû à Elgolt et Mezei.

THEOREME 2. – *Le produit de composition de deux* K-*transductions est une* K-*transduction.*

Nous supposerons ce qui est loisible en vertu de la proposition 4 du paragraphe précédent que les deux transductions sont définies par des homomorphismes alphabétiques.

Les conditions de l'énoncé sont résumées dans le schéma :

$$\begin{tikzcd}
 & K \subset S^* \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\Psi"] & & K' \subset S'^* \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\Psi'"] & \\
X^* & & Y^* & & Z^*
\end{tikzcd}$$

D'après la propriété 1 de ce paragraphe $R_1 = \{(s, s') \mid s \in S^*, s' \in S'^*, \Psi s = \varphi' s'\}$ est une K-transduction. C'est dire qu'il existe $T'^*, L' \subset T'^*$ un K-langage et φ'_1, Ψ'_1 homomorphismes de T'^* dans S^* et S'^* respectivement tels que :

$$R_1 = \{(\varphi'_1 t, \Psi'_1 t) \mid t \in L'\}$$

Or $$R \circ R' = \{(\varphi s, \Psi' s') \mid (s, s') \in (K \times K') \cap R_1\}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$R \circ R' = \{(\varphi\varphi'_1\, t\, ,\ \Psi'\Psi'_1\, t) \mid t \in L'\, ,\ \varphi'_1\, t \in K\, ,\ \Psi'_1\, t \in K'\}$$

Mais $\varphi_1'^{-1}(K) = K_1$ et $\Psi_1'^{-1}(K') = K'_1$ sont deux K-langages sur T'^* donc $L'' = L' \cap K \ \cap K'$ est un K-langage, et

$$R \circ R' = \{(\varphi\varphi'_1\, t\, ,\ \Psi\Psi'_1\, t) \mid t \in L''\}$$

est une K-transduction d'après le lemme I.2.4.

Q.E.D.

Le théorème 1 nous permet d'énoncer un résultat très général, analogue au théorème de Kleene, pour caractériser les K-transductions dans l'ensemble des transductions d'un monoïde libre dans un autre, théorème qui étend un résultat de Elgolt et Mezei.

Nous dénoterons par $\mathcal{C}$ la classe de toutes les transductions et $\mathcal{C}_K$ la classe de toutes les K-transductions.

DEFINITION 3. – *Si* $R \subset X^* \times Y^*$ *est une transduction son inverse* R^{-1} *est définie par* $R^{-1} = \{(g\, ,\ f) \mid (f\, ,\ g) \in R\}$.

DEFINITION 4. – *Une transduction est dite ponctuelle si elle se réduit à un élément.*

THEOREME 3. – $\mathcal{C}_K$ *est la plus petite sous-classe de* $\mathcal{C}$ *contenant les transductions ponctuelles et fermée par union, produit, étoile, produit de composition et inversion.*

L'inclusion dans un sens découle immédiatement des résultats de ce chapitre et de la remarque immédiate que R^{-1} est une K-transduction si et seulement si R en est une.

Réciproquement considérons : $R = \{(\varphi f\, ,\ \Psi f) \mid f \in K\}$ où $K \subset Z^*$ est un K-langage et $\varphi : Z^* \longrightarrow X^*$, $\Psi : Z^* \longrightarrow Y^*$ sont deux homomorphismes.

Clairement $R = R_1 \circ R_2 \circ R_3$ où

$R_1 \subset X^* \times Z^*$ est donné par $R_1 = \{(\varphi f\, ,\ f) \mid f \in Z^*\}$,

$R_2 \subset Z^* \times Z^*$ est donné par $R_2 = \{(f\, ,\ f) \mid f \in K\}$,

$R_3 \subset Z^* \times Y^*$ est donné par $R_3 = \{(f\, ,\ \Psi f) \mid f \in Z^*\}$.

Nous avons déjà remarqué que $\{(f, \varphi f) \mid f \in X^*, \varphi : X^* \longrightarrow Y^*\}$ est égal à $\{(x, \varphi x) \mid x \in X\}^*$.

Ainsi une telle K-transduction est bien décomposable en transductions ponctuelles. Il en va de même pour

$$\{(\varphi f, f) \mid f \in X^*, \varphi : X^* \longrightarrow Y^*\},$$

inverse de la précédente.

Enfin, considérons R_2 : K sur Z^* est obtenu à partir d'ensembles réduits à un mot par une suite finie d'union, produit, étoile ; il en va de même de R_2 puisque :

$$\{(f, f) \mid f \in K_1 \cup K_2\} = \{(f, f) \mid f \in K_1\} \cup \{(f_1 f) \mid f \in K_2\},$$

$$\{(f, f) \mid f \in K_1 K_2\} = \{(f, f) \mid f \in K_1\}\{(f, f) \mid f \in K_2\}$$

et $$\{(f, f) \mid f \in K^*\} = \{(f, f) \mid f \in K\}^* .$$

Q.E.D.

5. K-transductions et K-transducteurs.

C. Elgot et J. Mezei utilisent une définition des K-transductions immédiatement équivalente à la définition 1.1, que nous introduisons ici pour des raisons de commodité.

DEFINITION 1. – *Nous appellerons* K-*transducteur de* X^* *dans* Y^*, *l'objet* T *défini par la donnée de*

– *un ensemble fini* Q *d'états*

– *un ensemble fini* E *de quadruples de la forme*

$$(q, u, v, q') \quad \text{où} \quad q, q' \in Q, u \in X \cup \{e\}, v \in Y \cup \{e\}$$

T *définit* (card Q)^2 *transductions de* X^* *dans* Y^*, *une pour chaque paire d'états. Soient fixés* q_0, q'_0 : *la transduction correspondante* T_{q_0, q'_0} *est l'ensemble des couples* f, g *pour lequels il existe une suite dite admissible de quadruples* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *avec*

$$\forall_i = 1, \ldots, n-1 : q'_i = q_{i+1}, q_1 = q_0, q'_n = q'_0$$

et $$f = u_1 u_2 \ldots u_n \quad , \quad g = v_1 v_2 \ldots v_n$$

Une telle transduction est dite associée à T.

PROPOSITION 1. – *Toute transduction associée à* T *est une* K-*transduction.* Ceci résulte immédiatement de ce que l'ensemble des suites admissibles de quadruples forme un K-langage sur E.

PROPOSITION 2. – *Toute* K-*transduction est égale à une* K-*transduction associée à un* K-*transducteur.*

– cela est vrai d'une K-transduction finie (prendre Q à un seul état - cf. Lemme 1.2.3.).

– si R et R′ sont associés à des K-transducteurs $R \cup R'$, RR', R^* sont associées à des K-transducteurs.

Nous avons besoin d'un lemme :

LEMME 1. – *Toute transduction associée à un* K-*transducteur est équivalente à une transduction simple associée à un* K-*transducteur.*

DEFINITION 1. – T_{q_0, q'_0} *est dite simple si pour toute suite admissible de quadruples* $e_1, \ldots, e_n$, *on a*

$$\forall_i = 1, \ldots, n-1 \quad : \quad q'_i \neq q'_0$$

et

$$\forall_i = 2, \ldots, n \quad : \quad q_i \neq q_0 \, .$$

Si T_{q_0, q'_0} n'est pas simple, on considèrera le transducteur T′ défini par $Q' = Q \cup \{\alpha, \omega\}$, où α et ω sont deux symboles non dans Q, et $E' = E \cup \{(\alpha, e, e, q_0), (q'_0, e, e, \omega)\}$. Il est clair que

$$T'_{\alpha,\omega} = T_{q_0, q'_0}, T'_{\alpha,\omega}$$

est simple.

Démonstration. – Considérons alors $R = T_{\alpha, \omega}$, $R' = T'_{\alpha', \omega'}$ où T est défini par Q et E, T′ par Q′ et E′. R et R′ sont supposées simples. Soient

$Q'' = Q \cup Q' \cup \{\alpha'', \omega''\}$,

$E'' = E \cup E' \cup \{(\alpha'', e, e, \alpha), (\alpha'', e, e, \alpha'), (\omega, e, e, \omega''), (\omega', e, e, \omega'')\}$.

Il est clair que : $R \cup R' = T''_{\alpha'', \omega''}$.

Soit maintenant $Q'' = Q'$, $E'' = E \cup E' \cup \{(\omega, e, e, \alpha')\}$: Nous avons $RR' = T''_{\alpha, \omega'}$.

Soit $Q'' = Q$, $E'' = E \cup \{(\omega, e, e, \alpha)\}$: Nous avons $R^* = T''_{\alpha,\omega}$.

La proposition 2 résulte alors du théorème de Kleene pour les K-transductions (1.4.1).

6. Définition matricielle des K-transductions.

Rappelons que si M est un monoïde quelconque, on définit sur $\mathfrak{p}(M)$, ensemble des parties de M un produit induit par celui de M :

$$N_1 N_2 = \{m_1 m_2 \mid m_1 \in N_1 , m_2 \in N_2\} \quad \text{si} \quad N_1 \subset M \quad N_2 \subset M .$$

Cette opération définie dans $\mathfrak{p}(M)$ jointe à l'union, sur laquelle elle distribue, fait de $\mathfrak{p}(M)$ un semi-anneau. Il est standard de considérer alors les matrices à éléments dans $\mathfrak{p}(M)$. Nous noterons $\mathfrak{p}(M)^{n \times n}$ l'ensemble des $n \times n$ matrices à éléments dans $\mathfrak{p}(M)$ qui est muni d'une structure de monoïde :

– $(m . m')_{i,j} = \bigcup_k m_{i,k} . m'_{k,j}$ définit la loi de multiplication.

– l'élément neutre est défini par

$$I_{i,j} \begin{cases} = \emptyset & \text{si} \quad i = j \\ = e_M & \text{si} \quad i = j . \end{cases}$$

Soit maintenant donné $R \subset X^* \times Y^*$ une transduction : $\vec{R}$ désigne l'application de X^* dans $\mathfrak{p}(Y^*)$, canoniquement associée,

$$\vec{R}(f) = \{g \in Y^* \mid (f, g) \in R\} .$$

THEOREME 1. – *Pour toute* K-*transduction* R *de* X^* *dans* Y^* *il existe un entier n, une représentation* μ *de* X^* *dans* $\mathfrak{p}(Y^*)^{n \times n}$, *et une matrice* $\nu \in \mathfrak{p}(Y^*)^{n \times n}$, *fixe, tels que :*

$$\forall f \in X^* \ : \ \vec{R}(f) = \mathrm{Tr}(\nu . \mu f)$$

D'après les résultats du § 5, il suffit de montrer ce résultat pour $R = T_{q_0, q'_0}$ transduction associée au K-transducteur T. (Q et E désignent l'ensemble des états et l'ensemble des quadruples de T).

Définissons pour tout $q, q' \in Q$:

$$H_{q,q'} = \{v_1 v_2 \dots v_n \in Y^*\}$$

tels que $(q, e, v_1, q_1)(q_1, e, v_2, q_2) \dots (q_{n-1}, e, v_n, q')$

est une suite de quadruples de E.

μ sera alors définie par la donnée des matrices μx, $x \in X$:

$$\mu x_{q,q'} = \cup \{v_1 H_{q_1,q'} \mid (q, x, v_1, q_1) \in E\}$$

et la matrice ν est :

$$\nu_{q,q'} \begin{cases} = \emptyset & \text{si} \quad q \neq q'_0 \\ = H_{q_0,q'} & \text{si} \quad q = q'_0 \end{cases}$$

Montrons $\vec{T}_{q_0,q'_0} f = \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ où $f = x_1 x_2 \dots x_n$.

$$\mathrm{Tr}(\nu . \mu f) = \sum_{q_1} \nu_{q'_0,q_1} \cdot \mu f_{q_1,q'_0}$$

$$= \sum_{q_1,q_2,\dots,q_n} \nu_{q'_0,q_1} \, \mu x_{1_{q_1,q_2}}, \dots, \mu x_{k_{q_k,q_{k+1}}}, \dots, \mu x_{n_{q_n,q'_0}}$$

$$= \sum_{q_1,q_2,\dots,q_n} H_{q_0,q_1} \, \nu_1 \, H_{q'_1,q_2} \, \nu_2 \, H_{q'_2,q_3}, \dots, \nu_n \, H_{q'_{n_1} q'_0} \, .$$

La condition $(q_i, x_i, \nu_i, q'_i) \in E$ pour tout $i = 1, \dots, n$ entraîne $\mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f) \subset T_{q_0,q'_0}(f)$.

L'inclusion inverse vient de ce que si

$$(q_0, u_1, \nu_1, q_1)(q_1, u_2, \nu_2, q_2), \dots, (q_{p-1}, u_p, \nu_p, q'_0)$$

est une suite admissible de quadruples telle que :

$$u_1 u_2 \dots u_p = f = x_1 x_2 \dots x_n$$

il existe une suite d'indices $i_1, i_2, \dots, i_n$ telle que

– pour tout $j = 1, \dots, n : u_{i_j} = x_j$

– pour tout $j = 1, \dots, n : k \neq i_j \longrightarrow u_k = e$

Q.E.D.

Le théorème 1 admet une réciproque.

THEOREME 2. – *Si* μ *est une représentation de* X^* *dans* $\mathfrak{p}(Y^*)^{n\times n}$ *et* ν *une matrice de* $\mathfrak{p}(Y^*)^{n\times n}$ *satisfaisant :*

$$\forall x \in X , \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}:$$

$\mu x_{i,j}$ *et* $\nu_{i,j}$ *sont finis.*

La transduction $R \subset X^* \times Y^*$ *définie par*

$$R = \{(f, g) \mid f \in X^* , \operatorname{Tr}(\nu . \mu f) \neq \emptyset , g \in \operatorname{Tr}(\nu . \mu f)\}$$

est une K-transduction.

Montrons d'abord que dans les conditions de cet énoncé :

$$R_{i,j} = \{(f, g) \mid f \in X^* , \mu f_{i,j} \neq \emptyset , g \in \mu f_{i,j}\}$$

est une K-transduction, quelque soient i et j.

Posons $\overline{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ et considérons l'ensemble Z des quadruples (k, x, g, l) où k, $l \in \overline{N}$, $x \in X$, $g \in Y^*$ sont tels que $g \in \mu x_{k,l}$.

Définissons le K-langage :

$$K = AZ^* \cap Z^*B \backslash Z^*VZ^* \subset Z^*$$

où $A = \{(k, x, g, l) \in Z \mid k = i\}$,

$B = \{(k, x, g, l) \mid l = j\}$,

$V = \{(k, x, g, l)(k', x', g', l') \in Z^2 \mid l \neq k'\}$.

Soient $\varphi : Z^* \longrightarrow X^*$, $\Psi : Z^* \longrightarrow Y^*$

les homomorphismes :

$$\varphi(k, x, g, l) = x \quad , \quad \Psi(k, x, g, l) = g .$$

Nous avons $R_{i,j} = \{(\varphi h , \Psi h) \mid h \in K\}$. La vérification est immédiate. Maintenant

$$\operatorname{Tr}(\nu . \mu f) = \bigcup_{i,j} \nu_{j,i} . \mu f_{i,j}$$

d'où $$R = \bigcup_{i,j} \{(f, g) \mid f \in X^* , g \in \nu_{j,i} . \mu f_{i,j}\}$$

ou encore

$$R = \bigcup_{i,j} (\{e\} \times \nu_{j,i}) . R_{i,j}$$

Ainsi avec les hypothèses que nous avons faites R est une union finie de produits de deux transductions dont l'une est une K-transduction d'après la première partie de la démonstration, l'autre une K-transduction parce que finie.

Q.E.D.

Introduisons les définitions :

DEFINITION 1. – *La* K-*transduction* $R \subset X^* \times Y^*$ *est dite d'image finie si et seulement si :* $\forall f \in X^*$, $\vec{R}(f) = \{g \mid (f, g) \in R\}$ *est un ensemble fini.*

DEFINITION 2. – *La* K-*transduction* $R \subset X^* \times Y^*$ *est dite finiment représentable si et seulement si il existe une représentation* μ *de* X^* *dans* $\mathfrak{p}(Y^*)^{n \times n}$ *et* $\nu \in \mathfrak{p}(Y^*)^{n \times n}$ *satisfaisant :*

$\forall x \in X \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $\mu x_{i,j}$ *et* $\nu_{i,j}$ *sont des ensembles finis*

telles que $\vec{R}(f) = \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ *pour tout* $f \in X^*$.

Nous pouvons énoncer le corollaire immédiat des théorèmes 1 et 2.

COROLLAIRE 1. – *La* K-*transduction* $R \subset X^* \times Y^*$ *est d'image finie si et seulement si elle est finiment représentable.*

Nous remarquerons que toute K-transduction n'est pas d'image finie. D'où l'intérêt de la définition et du théorème suivant :

DEFINITION 3. – *La transduction* $R \subset X^* \times Y^*$ *est dite* K-*représentable si et seulement si il existe une représentation* μ *de* X^* *dans* $\mathfrak{p}(Y^*)^{n \times n}$ *et* $\nu \in \mathfrak{p}(Y^*)^{n \times n}$ *satisfaisant :*

$\forall x \in X$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\mu x_{i,j}$ *et* $\nu_{i,j}$ *sont des* K-*langages sur* Y^*

telles que $\vec{R}(f) = \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ *pour tout* $f \in X^*$.

THEOREME 3. – *La transduction* $R \subset X^* \times Y^*$ *est une* K-*transduction si et seulement si elle est* K-*représentable.*

Une partie du théorème résulte directement du théorème 1 si l'on remarque que $\nu_1 \, H_{q_1, q'}$ est un K-langage sur Y^* (comme image homomorphe d'un K-langage local).

Pour démontrer la réciproque nous reprenons la preuve du théorème 2. Introduisons les alphabets $Z_{k,x,l}$, les K-langages locaux $K_{k,x,l} \subset Z^*_{k,x,l}$ définis par

$$K_{k,x,l} = a_{k,x,l}\, Z^*_{k,x,l} \cap Z^*_{k,x,l}\, b_{k,x,l} \backslash Z^*_{k,x,l}\, V_{k,x,l}\, Z^*_{k,x,l}$$

supposés tels que pour des homomorphismes $\varphi_{k,x,l} : Z^*_{k,x,l} \longrightarrow Y^*$ on ait $\mu x_{k,l} = \varphi_{k,x,l}(K_{k,x,l})$ et d'autre part

$$\forall z \in Z_{k,x,l} : z\, a_{k,x,l} \in V \quad , \quad b_{k,x,l}\, z \in V\, .$$

Nous allons prendre $Z = \bigcup_{k,x,l} Z_{k,x,l}$, les $Z_{k,x,l}$ étant disjoints,

$$A_i = \bigcup_{k=i} A_{k,x,l} \quad , \quad B_j = \bigcup_{l=j} B_{k,x,l}\, ,$$

$$Z^2 \backslash V = \bigcup_{k,x,l} (Z^2_{k,x,l} \backslash V_{k,x,l}) \cup \Big(\bigcup_{l=k'} b_{k,x,l}\, a_{k',x',l'} \Big)$$

et définir $\varphi : Z^* \longrightarrow X^*$ par

$\varphi(a_{k,x,l}) = x$, $\varphi(z) = e$ si $z \neq a_{k,x,l}$ et $\Psi : Z^* \longrightarrow Y^*$ par

$$\Psi(z) = \varphi_{k,x,l}(z) \text{ si et seulement si } z \in Z_{k,x,l}\, .$$

Si nous posons $K_{i,j} = A_i Z^* \cap Z^* B_j \backslash Z^* V Z^*$ nous avons

$$R_{i,j} = \{(\varphi(h)\, , \Psi(h) \mid h \in K_{i,j}\}$$

Le reste de la preuve est identique à celle du théorème 2.

Remarque. – Cette dernière réciproque est une généralisation du théorème de substitution de Ginsburg [8]. En effet, elle implique que si R est une transduction K-représentable, donc une K-transduction $R \subset X^* \times Y^*$, pour tout K-langage L sur X^*, $\vec{R}(L)$ est un K-langage sur Y^*.

7. K-transductions univoques (ou fonctionnelles).

Une famille particulière de K-transductions constitue à proprement parler l'objet de ce travail. Nous les définissons maintenant.

DEFINITION 1. – *Une* K-*transduction* R *de* X* *dans* Y* *est dite univoque si et seulement si pour* $f \in X^*$: card $\vec{R}(f) = 0$ *ou* 1.

Dans ce cas nous allons donner à sa représentation matricielle une forme particulière. Supposons que pour tout $f \in X^*$:

$$\vec{R}(f) = \mathrm{Tr}(\bar{\nu}\,.\,\bar{\mu}f) \quad \text{où} \quad \bar{\nu}, \bar{\mu}f \in \mathfrak{p}\,(Y^*)^{n \times n} \ .$$

Considérons les matrices $\bar{\mu}f$ définies par : $\mu f_{i,j} = 1$ si et seulement si $\bar{\mu}f_{i,j} \neq \emptyset$, $\mu f_{i,j} = 0$ si $\bar{\mu}f_{i,j} \neq \emptyset$.

Et définissons ν de la même façon.

ν et μf sont dites matrices support de $\bar{\nu}$ et $\bar{\mu}f$ respectivement. Si nous considérons les matrices μf comme des éléments de $\mathbf{Z}^{n \times n}$ (monoïde multiplicatif des $n \times n$ matrices à éléments entiers naturels) il est clair que μ est une représentation de X* sur un sous demi-groupe multiplicatif de $Z^{n \times n}$ qui a la propriété que toutes les matrices qui le composent ont tous leurs éléments égaux à 0 ou 1. On peut sans encombre lui rajouter la matrice unité.

DEFINITION 2. – *Nous appellerons monoïde de matrices* 0, 1 *tout sous-monoïde de* $\mathbf{Z}^{n \times n}$, *soit* M *tel que :*

$$\forall m \in M\ , \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : m_{ij} = 0 \ \ ou \ \ 1$$

Nous appellerons 0, 1 *représentation de* X* *toute représentation de* X* *par des matrices qui forment un monoïde de matrices* 0, 1.

Nous dirons que $\nu \in \mathbf{Z}^{n \times n}$ *est compatible avec le monoïde de matrices* 0, 1, $M \subset \mathbf{Z}^{n \times n}$ *si et seulement si :*

$$\forall\, m \in M \ \mathrm{Tr}(\nu\,.\,m) = 0 \ \ ou \ \ 1\ .$$

Si μ est une 0, 1 représentation de X* et si $\hat{Y}$ désigne le monoïde $Y^* \cup \{0\}$ où $\forall y \in \hat{Y} : 0\,.\,y = y\,.\,0 = 0$, considérons une famille de matrices $\bar{\mu}x$, $x \in X$ où

$$\bar{\mu}x_{i,j} \in Y^* \quad \text{si} \quad \mu x_{i,j} = 1\ ,$$

$$\bar{\mu}x_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad \mu x_{i,j} = 0\ .$$

Nous pouvons faire le produit de deux matrices $\bar{\mu}x$, $\bar{\mu}y$ en posant

$$(\overline{\mu}x\,\overline{\mu}y)_{i,j}\begin{cases} = \overline{\mu}x_{i,k}\,\overline{\mu}y_{k,j} & \text{si il existe un indice } k \text{ tel que } \overline{\mu}x_{i,k} \\ & \text{et } \overline{\mu}y_{k,j} \text{ sont différents de 0 (en ce cas il existe} \\ & \text{un } k \text{ et un seul).} \\ = 0 & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$$

Et ainsi posant $\overline{\mu} \times y = \overline{\mu} \times \overline{\mu}y$ on définit une représentation de X* dans un monoıde de matrices à éléments dans $\hat{Y}$. (Par abus de notation nous dirons aussi représentation de X* dans $\hat{Y}^{n \times n}$ bien que $\hat{Y}^{n \times n}$ ne soit muni d'aucune structure de monoïde).

DEFINITION 3. – *Nous appellerons représentation de* X* *par des matrices à éléments dans* $\hat{Y}$ (*ou dans* $\hat{Y}^{n \times n}$) *toute représentation de* X*, *obtenue en substituant des éléments de* Y* *aux éléments non nuls des matrices* μx, $x \in X$ *où* μ *est une* 0, 1 *représentation de* X* (μ *est dite représentation support de la représentation ainsi définie*).

Il est clair aussi que si $\overline{\mu}$ est une représentation de X* dans $\hat{Y}^{n \times n}$, et si $\overline{\nu}$ est obtenu en substituant aux éléments non nuls d'une matrice ν compatible avec μX^*, des éléments de Y*, on peut calculer $\mathrm{Tr}(\overline{\nu}\,.\,\overline{\mu}f)$ qui est soit 0, soit un élément de Y*. En ce cas $\overline{\nu}$ est dite compatible avec $\overline{\mu}$.

Ainsi nous pouvons énoncer.

THEOREME 1. – *Si* R *est une* K-*transduction univoque de* X* *dans* Y* *il existe un entier n, une représentation* $\overline{\mu}$ *de* X* *dans* $\hat{Y}^{n \times n}$, *une matrice* $\overline{\nu} \in \hat{Y}^{n \times n}$ *compatible avec* $\overline{\mu}$ *tels que*

$$\forall f \in X^* \ \vec{R}(f) = \mathrm{Tr}(\overline{\nu}\,.\,\overline{\mu}f) \quad \text{si} \quad \vec{R}(f) \neq \emptyset$$

et

$$\vec{R}(f) = \emptyset \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(\overline{\nu}\,.\,\overline{\mu}f) = 0\,.$$

En effet, il existe $\overline{\mu}'$ représentation de X* dans $\mathfrak{p}(Y^*)^{n \times n}$ et $\overline{\nu}' \in \mathfrak{p}(Y^*)^{n \times n}$ satisfaisant : $\forall f \in X^* \ \vec{R}(f) = \mathrm{Tr}(\overline{\nu}'\,.\,\overline{\mu}' f)$.

Appelons accessible tout couple (i, j) d'indices tels qu'il existe $f', f'' \in X^*$, et des indices k et l tels que :

$$\overline{\nu}_{k,l} \neq \emptyset\,, \quad \overline{\mu}' f'_{l,i} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \overline{\mu}' f''_{j,k} \neq \emptyset$$

et permis tout couple (k, l) d'indices tels qu'il existe $f \in X^*$ avec

$$\overline{\nu}'_{k,l} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \overline{\mu}' f_{l,k} \neq \emptyset\,.$$

Définissons $\overline{\mu}$ et $\overline{\nu}$ par :

$$\forall\, x \in X\ \overline{\mu}x_{i,j} \begin{cases} = \overline{\mu}\, x & \text{si } (i\,,j) \text{ est accessible} \\ = \emptyset & \text{si } (i\,,j) \text{ n'est pas accessible} \end{cases}$$

$$\overline{\nu}_{k,l} \begin{cases} = \overline{\nu}'_{k,l} & \text{si } (k\,,l) \text{ est permis} \\ = \emptyset & \text{si } (k\,,l) \text{ n'est pas permis.} \end{cases}$$

Nous avons pour tout $f \in X^*$: $\mathrm{Tr}(\overline{\nu}' . \overline{\mu}' f) = \mathrm{Tr}(\overline{\nu} . \overline{\mu} f) = \vec{R}(f)$.

Le couple $\overline{\nu} . \overline{\mu}$ qui définit $\vec{R}$ est alors dit réduit et il est immédiat que l'univocité de $\vec{R}$ entraîne : $\forall f \in X^*$, $\forall i\,,j \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{card}\,(\overline{\mu} f_{i,j}) \leqslant 1$, $\mathrm{card}\,(\overline{\nu}_{i,j}) \leqslant 1$ et $\mathrm{card}\,(\mathrm{Tr}(\overline{\nu} . \overline{\mu} f)) \leqslant 1$.

Substituant 0 à $\emptyset$ et g à $\{g\}$ dans toutes les matrices $\overline{\nu}$ et $\overline{\mu} x$ nous obtenons la représentation du théorème 1.

Remarquons que la réciproque au théorème 1 découle immédiatement du théorème 6.2.

Terminologie.

Désormais le terme de K-transduction désignera aussi bien R que $\vec{R}$.

Un K-transducteur (resp. transducteur fini, resp. transducteur univoque) est une représentation de X^* par des $n \times n$ matrices dont les éléments sont des K-langages sur Y^* (resp. des langages finis sur Y^*, resp. des éléments de $\hat{Y}$).

Si μ est un transducteur, la K-transduction $\vec{R}$ définie par

$$\vec{R}(f) = \mathrm{Tr}(\nu . \mu f)$$

est dite associée au transducteur μ. Elle est dite élémentaire associée à μ si un seul élément de ν est différent de $\emptyset$. En ce cas on peut aussi écrire $\vec{R}(f) = \mu f_{i,j}$ pour un couple fixe d'indices $i\,,j$.

8. Transductions et automates finis bilatères.

Les K-transductions univoques sont susceptibles d'une définition en termes d'automates bilatères introduits pour la première fois par

M.P. Schützenberger et que nous présentons ci-dessous avec de légères (mais essentielles) modifications. cf. [19] et [4].

DEFINITION 1. – *Un automate fini bilatère (de* X^* *dans* Y^**).est constitué des objets suivants :*

– deux ensembles finis d'états S *et* T *dont les éléments sont respectivement dits états à gauche et états à droite.*

– deux applications (dites fonctions de transition) :

$$\sigma : S \times X^* \longrightarrow S \quad , \quad \textit{on notera } sx = \sigma(s\,,x) \textit{ et}$$

$$\tau : S \times T \longrightarrow T \quad , \quad \textit{on notera } xt = \tau(x\,,t)\,.$$

que l'on étend de façon canonique en deux applications

$$\sigma : S \times X^* \longrightarrow S \quad \textit{et} \quad \tau : X^* \times T \longrightarrow T \quad \textit{par}$$

$$\forall s \in S \;:\; s\,.\,e = s \;;\; \forall t \in T \;:\; et = t$$

$$\forall s \in S \;,\; \forall f \in X^* \;,\; \forall x \in X \;:\; s\,.\,(fx) = (sf)x$$

$$\forall t \in T \;,\; \forall f \in X^* \;,\; \forall f \in X \;:\; (xf)t = x(ft)$$

– une application $\eta \,:\, S \times X \times T \longrightarrow \hat{Y}$ *(monoïde* Y^* *avec zéro) que l'on étend en une application* $\eta \,:\, S \times X^* \times T \longrightarrow \hat{Y}$ *en posant :*

$$\forall s \in S \;,\; t \in T \;:\; \eta(s\,,e\,,t) = e$$

$$\forall s \in S \;,\; t \in T \;,\; \forall f \in X^* \;,\; \forall x \in X \;:$$

$$\eta(s\,,fx\,,t) = \eta(s\,,f\,,xt)\;\; \eta(sf\,,x\,,t)\,.$$

Ainsi un automate fini bilatère permet-il de définir (card S) $\times$ (card T) *applications de* X^* *dans* Y *à savoir :* $\eta_{s_0,t_0}(f) = \eta(s_0\,,f,\,t_0)$ *dites transductions associées à l'automate fini bilatère* η*.*

THEOREME 1. – *Les transductions associées à l'automate fini bilatère* η *sont des* K*-transductions univoques.*

Construisons les matrices $\bar{\mu}x$, $x \in X$, qui sont des $(S \times T) \times (S \times T)$ matrices à éléments dans $\hat{Y}$.

$$\overline{\mu}x_{(s,t),(s',t')} \begin{cases} = (s, x, t') & \text{si et seulement si } sx = s' \text{ et } xt' = t \\ = 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Les matrices support μx, engendrent un monoïde de matrices 0, 1 de façon évidente et par suite nous pouvons étendre la donnée des $\overline{\mu}x$ en une représentation $\overline{\mu}$ de X^* dans $\hat{Y}^{(S\times T)\times(S\times T)}$. Il n'est pas difficile de voir que :

$$\overline{\mu}f_{(s,t),s',t')} \begin{cases} = \eta(s, f, t') & \text{si et seulement si } sf = s' \text{ et } ft' = t \\ = 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Cela est en effet vrai pour $|f| = 1$. Supposons le vérifié par $|f| < n$ et montrons le pour $|f| = n$. Soit $f = gx$:

$$\overline{\mu}(gx)_{(s,t),s',t')} = \sum_{(s'',t'')} \overline{\mu}g_{(s,t),(s'',t'')}\, \overline{\mu}x_{(s'',t''),(s',t')}$$

Il y a dans cette somme au plus un terme non nul pour (s'', t'') vérifiant les conditions : $sg = s''$, $s''x = s'$, $gt'' = t$, $xt' = t''$, ce qui suppose $sgx = s'$ et $gxt' = t$.

D'après l'hypothèse de récurrence ce terme est alors égal à

$$\eta(s, g, xt') \,.\, \eta(sg, x, t') = \eta(s, gx, t') \cdot$$

Finalement considérons par s_0 , t_0 données la matrice ν

$$\overline{\nu}_{(s,t),(s',t')} = \begin{cases} - e & \text{si et seulement si } s' = s_0 \,,\, t = t_0 \\ - 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

et calculons :

$$\mathrm{Tr}(\overline{\nu}\,.\,\overline{\mu}f) = \sum_{(s',t')} \overline{\nu}_{(s,t),(s',t')}\, \overline{\mu}f_{(s',t'),(s,t)}$$

Dans cette somme un terme au plus est non nul à savoir

$$\overline{\nu}_{(s_0f,t_0),(s_0,ft_0)} \cdot \overline{\mu}f_{(s_0,ft_0)} = \eta(s_0, f, t_0)$$

ce qui prouve à la fois que $\overline{\nu}$ est compatible avec $\overline{\mu}$ et le théorème.

Q.E.D.

Il y a là aussi un théorème réciproque. Auparavant démontrons le lemme suivant dû à M.P. Schüzenberger.

LEMME 1. – *Si* μ *est une représentation de* X^* *dans* $S^{N\times N}$ *où* S *est un semi anneau,* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, *et* ν *une matrice de* $S^{N\times N}$, *il existe* $N' = \{1, 2, \ldots, n^2 + 2\}$, *une représentation* μ' *de* X^* *dans* $S^{N'\times N'}$ *tels que* $\forall f \in X^* : \mathrm{Tr}(\nu . \mu f) = \mu' f_{1,N'}$
μ' *est défini directement de la façon suivante :*

1 - $\mu' f_{n^2+2,j} = \mu' f_{j,1} = 0$ *pour tout* $j \in N'$

2 - $\mu' f_{1,1+j+(k-1)n} = (\nu . \mu f)_{j,k}$ *pour tout* $j, k \in N$

3 - $\mu' f_{1+j+(k-1)n,n^2+2} = (\mu f)_{j,k}$ *pour tout* $j, k \in N$

4 - $\mu' f_{1,n^2+2} = \mathrm{Tr}(\nu . \mu f)$

La vérification du lemme est un simple calcul.

LEMME 2. – *Si* $\bar{\mu}$ *est une représentation de* X^* *dans* $\hat{Y}^{N\times N}$, $\bar{\nu}$ *une matrice de* $\hat{Y}^{N\times N}$ *compatible avec* $\bar{\mu}$, *il existe* $N' = \{1, \ldots, n^2 + 2\}$ *et une représentation* $\bar{\mu}'$ *de* X^* *dans* $\hat{Y}^{N'\times N'}$ *tels que*

$$\forall f \in X^* : \mathrm{Tr}(\bar{\nu} . \bar{\mu} f) = \bar{\mu}' f_{1,N'}$$

Ce lemme n'est pas différent du précédent : c'est la simple constatation que dans la construction précédente, si μ support de $\bar{\mu}$ est une 0, 1 représentation de X^* et si ν, support de ν est compatible avec μ, μ' support de $\bar{\mu}'$ est encore une 0, 1 représentation.

THEOREME 2. – *Toute* K-*transduction univoque peut être associée à un automate fini bilatère.*

Démonstration. – Soit en effet $f \longrightarrow \bar{\mu} f_{1,n}$ une K-transduction univoque $\bar{\mu} : X^* \longrightarrow \hat{Y}^{n\times n}$ est un K-transducteur univoque. D'après le lemme 2 toute K-transduction univoque peut être mise sous cette forme.

Nous allons construire un automate fini bilatère, qui permet de définir cette transduction. Notons $M = \{\mu f \mid f \in X^*\}$, M est un monoïde de matrices 0, 1 (donc fini). Soient $S = T = M \times N$ où $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ et définissons les applications

$\sigma : S \times X \longrightarrow S$ par $\sigma((m, i), x) = (m . \mu x, i)$, et

$\tau : X \times T \longrightarrow T$ par $\tau(x, (m, i)) = (\mu x . m, i)$.

Les ensembles S et T seront les ensembles d'états de l'automate cherché, et σ et τ s'étendent aisément en $\sigma : S \times X^* \longrightarrow S$ et $\tau : X^* \times T \longrightarrow T$. Nous avons :

$$\sigma((m, i), f) = (m(\mu f), i) \quad \text{et} \quad \tau(f, (m, i)) = ((\mu f) m, i) .$$

Remarquons que M étant un monoïde de matrices 0, 1 si

$$m_1, m_2, \ldots, m_p$$

sont dans M et i, i' dans N, il existe au plus une suite de couples d'indices :

$$(i, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_k, i_{k+1}), \ldots, (i_{p-1}, i')$$

telle que

$$m_{1(i,i_1)}, m_{2(i,i_2)}, \ldots, m_{k+1(i_k, i_{k+1})} \;\; , \ldots, m_{p(i_{p-1}, i')}$$

sont tous non nuls.

Nous pouvons ainsi définir $\eta : S \times X \times T \longrightarrow \hat{Y}$ par

$$\eta((m, i), x, (m' . i')) = \begin{cases} - \; \mu x_{i_1, i_2} & \text{si il existe } i_1, i_2 \in N \\ & \text{tels que } m_{i, i_1}, \mu x_{i_1, i_2}, m'_{i_2, i'} \\ & \text{sont tous non nuls.} \\ - \; 0 \text{ dans le cas contraire.} & \end{cases}$$

C'est alors un simple calcul de vérifier que l'extension canonique $\eta : S \times X^* \times T \longrightarrow \hat{Y}$ est donnée par :

$$\eta((m, i), f, (m', i')) = \begin{cases} - \; \overline{\mu} f_{i_1, i_2} & \text{si il existe } i_1, i_2 \in N \text{ tels que} \\ & m_{i, i_1}, \mu f_{i_1, i_2}, m'_{i_2, i'} \text{ sont tous} \\ & \text{non nuls.} \\ - \; 0 \text{ dans le cas contraire.} & \end{cases}$$

Mais alors si e_M désigne la matrice unité de M

$$\eta((e_M, 1), f, (e_M, n)) \begin{cases} = \overline{\mu} f_{1,n} & \text{si celui-ci est} \neq 0 \\ = 0 \text{ dans le cas contraire.} & \end{cases}$$

Finalement dans tous les cas : $\overline{\mu} f_{1,n} = \eta((e_M, 1), f, (e_M, n))$

Q.E.D.

Remarque. – On remarquera ici que cette construction serait impossible dans le cas d'un automate fini bilatère multivoque où l'on remplacerait $\eta : S \times X \times T \longrightarrow \hat{Y}$ par $\eta : S \times X \times T \longrightarrow \mathfrak{p}(Y^*)$. Les transductions définies par un tel automate sont bien des K-transductions mais la réciproque est fausse.

9. Exemples.

A - *DECODAGE.*

Rappelons la définition. voir par exemple [16].

DEFINITION 1. – *Un code fini sur* X^* *est un ensemble fini* A *de mots de* X^* *tel que toute bijection* φ *d'un ensemble* Y *sur* A *s'étende canoniquement en un monomorphisme* φ *de* Y^* *dans* X^*.

Si tel est le cas φ prend le nom de codage et l'application inverse φ^{-1}, également univoque, prend le nom de décodage. Nous savons que si φ est un codage de Y^* dans X^*, φ^{-1} est une K-transduction univoque. Nous nous proposons ci-dessous de la réaliser de deux façons :

1. *Comme transduction associée à un automate fini bilatère.*

Soit $\varphi(Y) = A$. Dénotons H, l'ensemble des facteurs gauches propres de mots de A :

$$H = \{h \in X^* \mid \exists\, a \in A,\ h' \in XX^* : hh' = a\}.$$

Nous prendrons comme ensembles d'états :

$$S = \{H' \subset H \mid \exists\, f \in X^*\ \forall h' \in H'\ \exists f' \in A^* : f = f'h'\} \quad \text{et}$$

$$T = \{H'' \subset H \mid \exists\, f \in X^*\ \forall h'' \in H'' : h''f \in A^*\}$$

et comme fonctions de transition :

$$\forall H' \in S : H'x = \begin{cases} \{h'x \mid h' \in H',\ h'x \in H\} & \text{si } H'\{x\} \cap A = \emptyset \\ \{h'x \mid h' \in H',\ h'x \in H\} \cup \{e\} & \text{si } H'\{x\} \cap A \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\forall H'' \in T : xH'' = \begin{cases} \{h'' \in H \mid h''x \in H''\} & \text{si } e \notin H'' \\ \{h'' \in H \mid h''x \notin H'' \cup A\} & \text{si } e \in H'' \end{cases}$$

on vérifie facilement que

$$\{e\}f = \{h \in \mathrm{H} \mid f = f'h \,, f' \in \mathrm{A}^*\}$$

et
$$f\{e\} = \{h \in \mathrm{H} \mid hf \in \mathrm{A}^*\} \,.$$

Soit alors $\eta : \mathrm{S} \times \mathrm{X} \times \mathrm{T} \longrightarrow \hat{\mathrm{Y}}$ donné par

$$\eta(\mathrm{H}', x, \mathrm{H}'') = \begin{cases} - e \ \text{ si } \exists h' \in \mathrm{H}', h'x \in \mathrm{H}'' \\ - \varphi^{-1}(h'x) \ \text{ si } \exists h' \in \mathrm{H}' : h'x \in \mathrm{A} \text{ et } e \in \mathrm{H}'' \\ - 0 \ \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

η est bien ainsi défini puisque les conditions $\exists h' \in \mathrm{H}'$, $h' x \in \mathrm{H}''$ et $\exists h' \in \mathrm{H}'$, $h' x \in \mathrm{A}$ et $e \in \mathrm{H}''$ s'excluent du fait que φ est un monomorphisme et de la définition de S et T.

Montrons que $\eta(\mathrm{H}', f, \mathrm{H}'') = \varphi^{-1}(h' f')$ si

$$\exists h' \in \mathrm{H}' \,; \exists f', f'' : f = f'f'' \,, h'f' \in \mathrm{A}^* \text{ et } f'' \in \mathrm{H}'' \,,$$

$\eta(\mathrm{H}', f, \mathrm{H}'')$ étant nul dans le cas contraire.

Supposons ceci vrai pour $|f| \leqslant n$ et montrons le pour fx :

$$\eta(\mathrm{H}', fx, \mathrm{H}'') = \eta(\mathrm{H}', f, x\mathrm{H}'')\, \eta(\mathrm{H}'f, x, \mathrm{H}'') = \varphi^{-1}(h'f')\, \eta(\mathrm{H}'f, x, \mathrm{H}'')$$

si il existe

$$h' \in \mathrm{H}', f', f'' \in \mathrm{X}^* \text{ tels que } f = f'f'' \,, h'f' \in \mathrm{A}^* \,, f'' \in x\mathrm{H}'' \,.$$

Mais alors – ou bien $f''x \in \mathrm{H}''$, $\eta(\mathrm{H}'f, x, \mathrm{H}'') = e$ et c' est vérifié

– ou bien $f''x \in \mathrm{A}$ et $e \in \mathrm{H}''$, $\eta(\mathrm{H}'f, x, \mathrm{H}'') = \varphi^{-1}(f''x)$,

$$\eta(\mathrm{H}', fx, \mathrm{H}'') = \varphi \quad (h'f) \text{ où } h'f \in \mathrm{A}^*, f = fe, \ e \in \mathrm{H}'' \,.$$

Nous avons donc

$$\eta(\{e\}, f, \{e\}) \begin{cases} = \varphi^{-1}(f) \ \text{ si } f \in \mathrm{A}^* \\ = 0 \ \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

2. *Comme transduction associée à un transducteur.* cf. [S6].

La construction est plus simple.

Considérons les $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ matrices $\bar{\mu}x$, $x \in \mathrm{X}$

$$\bar{\mu}x_{h,h'} \begin{cases} = e \text{ si } hx = h', h' \neq e \\ = \varphi^{-1}(hx) \text{ si } hx \in \mathrm{A} \text{ et } h' = e. \\ \neq 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

$$(\mu x_1 x_2 \ldots x_p)_{h,h'} = \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}} \bar{\mu}x_{1_{h,h_1}} \, \bar{\mu}x_{2_{h_1,h_2}} \ldots , \bar{\mu}x_{p_{h_{p-1},h'}}$$

Il y a dans cette somme au plus un terme non nul pour $h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}$ tels que (en posant $h_0 = h$, $h_p = h'$)

$$\forall i = 0, \ldots, p-1 \; : \; h_i x_{i+1} = h_{i+1} \text{ ou } h_i x_{i+1} \in \mathrm{A}, h_{i+1} = e$$

Or soient $i_1, i_2, \ldots, i_k$ la suite unique des indices tels que

$$\forall l = 1, \ldots, k \; : \; h_{il} = e.$$

Nous avons alors
$$\begin{cases} h_0 x_1 \ldots x_{i_1 - 1} = a_1 \in \mathrm{A} \\ x_{i_1} \ldots x_{i_2 - 1} \quad = a_2 \in \mathrm{A} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{il} \ldots x_{i_{l+1} - 1} = a_{l+1} \in \mathrm{A} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i_k} \ldots x_p \qquad = h_p \end{cases}$$

Ceci démontre que

$$(\bar{\mu}x_1 \ldots x_p)_{h,h'} \begin{cases} = \varphi^{-1}(f) \text{ si } hx_1 \ldots x_p = fh', f \in \mathrm{A}^*, h' \neq e \\ = \varphi^{-1}(hx_1 \ldots x_p) \text{ si } hx_1 \ldots x_p \in \mathrm{A}^* \text{ et } h' = e \\ = 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Donc en particulier :

$$(\bar{\mu}x_1 \ldots x_p)_{e,e} \begin{cases} = \varphi^{-1}(x_1 \ldots x_p) \text{ si } (x_1 \ldots x_p) \in \mathrm{A}^* \\ = 0 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

Q.E.D.

Nous verrons au chapitre II une façon sans doute plus canonique de réaliser les décodages comme transductions associées à un transducteur.

B - *APPLICATIONS SEQUENTIELLES OU K-TRANSDUCTION UNILATERE (UNIVOQUE).*

Il s'agit des K-transductions réalisables au moyen d'un automate fini pourvu d'une fonction de "sortie" cf. [2] et [6].

DEFINITION 1. – *Une application séquentielle droite de* X^* *dans* $Y^* \cup \{0\}$ *est définie par*

– *un ensemble* Q *d'états, dans lequel on distingue l'état initial* q_0.

– *une application* $\delta : Q \times X \longrightarrow Q$.

– *une application* $\lambda : Q \times X \longrightarrow Y^* \cup \{0\}$.

On étend δ et λ en des applications δ et λ de $Q \times X^*$ dans Q et $Y^* \cup \{0\}$ respectivement en posant

$$\delta(q\,,e) = q,\ \ \lambda(q\,,e) = e,\ \ \delta(q\,,fx) = \delta(\delta(q\,,f)\,,x),$$

$$\lambda(q\,,fx) = \lambda(q\,,f)\ \lambda(\delta(q\,,f)\,,x)\,.$$

L'application séquentielle définie ainsi est l'application $\rho(f) = \lambda(q_0\,,f)$ pour tout $f \in X^*$.

DEFINITION 2. – *La même donnée de* Q, δ, λ, q_0 *permet de définir une application séquentielle gauche* $\bar{\rho} : X^* \longrightarrow Y^* \cup \{0\}$ *à savoir* $f \longrightarrow \bar{\lambda}(q_0\,,f)$ *où*

$$\bar{\delta} : X^* \times Q \longrightarrow Q,\ \bar{\lambda} : X^* \times Q \longrightarrow Y^* \cup \{0\}$$

sont données par

$$\bar{\delta}(e\,,q) = q,\ \ \bar{\lambda}(e\,,q) = q$$

$$\bar{\delta}(x\,,q) = \delta(q\,,x),\ \ \bar{\lambda}(x\,,q) = \lambda(q\,,x),$$

$$\bar{\delta}(xf,\,q) = \bar{\delta}(x\,,\bar{\delta}(f,\,q)),$$

$$\bar{\lambda}(xf,\,q) = \bar{\lambda}(x\,,\bar{\delta}(f,\,q))\ \bar{\lambda}(f,\,q)\,.$$

Il est immédiat que les applications séquentielles gauche ou droite sont des K-transductions univoques, qui sont par définition dites unilatères. La propriété suivante justifie l'intérêt de ces applications séquentielles dans l'étude que nous poursuivons.

PROPRIETE 1. – *Toute K-transduction univoque est produit de composition de deux applications séquentielles.*

Considérons $\vec{R} : X^* \longrightarrow Y^* \cup \{0\}$ associée à l'automate fini bilatère défini par S, T, σ, τ, η et $\vec{R}(f) = \eta(s_0, f, t_0)$ pour tout $f \in X^*$.

Soit $Z = S \times X$ et ρ_1 l'application séquentielle droite

$$\rho_1 : X^* \longrightarrow Z^* \quad \text{définie par}$$

– l'ensemble d'états S et l'état initial s_0

– l'application $\sigma : S \times X \longrightarrow S$

– l'application $\lambda(s, x) = (s, x)$ de $S \times X$ dans Z^* et soit ρ_2 l'application séquentielle gauche $\rho_2 : Z^* \longrightarrow Y^* \cup \{0\}$ définie par

– l'ensemble d'états T, l'état initial t_0

– l'application

$$\tau' : T \times Z \longrightarrow T : \tau'(t, (s, x)) = \tau(x, t)$$

– l'application

$$\lambda' : T \times Z \quad > Y^* \cup \{0\} : \lambda'(t, (s, x)) = \eta(s, x, t)$$

Il est immédiat de vérifier que

$$\forall f \in X^* \ \vec{R}(f) = \rho_2(\rho_1(f))$$

Q.E.D.

CHAPITRE II

PROPRIETES DES TRANSDUCTIONS

1. Composition de deux transductions.

Il résulte des théorèmes 1 et 2 du paragraphe I-6 et du théorème 2 du paragraphe I-4 que le produit de composition de deux K-transductions univoques est une K-transduction. Il est clair que c'est une transduction univoque.

Nous allons définir la composition de deux telles transductions modulo un homomorphisme :

DEFINITION 1. – *Si* $\tau : X^* \longrightarrow \hat{Y}$ *et* $\tau' : X'^* \longrightarrow \hat{Y}'$ *sont deux transductions univoques et* α *un homomorphisme de* Y^* *dans* X^* *l'application* φ *de* X^* *dans* $\hat{Y}'$ *définie par :* $\forall f \in X^* : \varphi f = \tau'(\alpha(\tau f))$ *est appelé composition de* τ *par* τ'*, modulo* α*. Nous noterons* $\varphi = \tau' \alpha \tau$.

THEOREME 1. – *La composition de* τ *par* τ' *modulo* α *est une transduction univoque.*

Démonstration. – En effet : $\{(f, \tau' \alpha \tau f) \mid f \in X^*\}$ est égal au produit

$$\{(f, \tau f) \mid f \in X\} \circ \{(g, \alpha g) \mid g \in Y^*\} \circ \{(h, \tau' h) \mid h \in X'^*)\}$$

et l'univocité de chacun des facteurs entraîne l'univocité du produit.

Mais de fait il y a plus :

DEFINITION 2. – *Si* $\overline{\mu} : X^* \longrightarrow \hat{Y}^{N \times N}$ *et* $\overline{\mu}' : X'^* \longrightarrow \hat{Y}'^{M \times M}$ *sont deux transducteurs univoques et* $\alpha : Y^* \longrightarrow X'^*$ *un homomorphisme le transducteur* $\overline{\lambda} : X^* \longrightarrow \hat{Y}'^{(M \times N) \times (M \times N)}$ *défini par :*

$$\overline{\lambda} x_{(m,n),(m',n')} \begin{cases} = \overline{\mu}'_{m,m'}(\alpha \,.\, \overline{\mu} x_{n,n'}) \text{ si } \overline{\mu} x_{n,n'} \neq 0 \\ = 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

est dit composition de $\overline{\mu}$ *par* $\overline{\mu}'$ *modulo* α*, et noté* $\overline{\lambda} = \overline{\mu}' \times_a \overline{\mu}$.

Vérifions qu'il s'agit bien d'un transducteur univoque en calculant

$$\overline{\lambda} f_{(k,i),(l,j)} \quad \text{où} \quad f = x_1 x_2 \dots x_p$$

$$\overline{\lambda} x_1 x_2 \dots x_{p(k,i),(l,j)} = \sum_{(m_1, n_1) \dots (m_{p-1} n_{p-1})} \overline{\lambda} x_{1(k,i),(m_1,n_1)} \dots$$

$$\overline{\lambda} x_{p(m_{p-1}, n_{p-1}),(l,j)} = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{p-1}, n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$$

$$\overline{\mu}'_{(k,m_1)} (\alpha . \overline{\mu} x_{1(i,n_1)}) \dots \overline{\mu}'_{(m_{p-1},l)} (\alpha . \overline{\mu} x_{p(n_{p-1},j)})$$

Dans cette somme il y a au plus un terme non nul pour $n_1, n_2, \dots, n_{p-1}$ tels que : $\overline{\mu} x_{1(i,n_1)}, \dots, \overline{\mu} x_{p(n_{p-1},j)}$ sont tous non nuls

et $m_1, m_2, \dots, m_{p-1}$ tels que

$$\overline{\mu}'_{(k,m_1)} (\alpha . \overline{\mu} x_{1(i,n_1)}), \dots, \overline{\mu}'_{(m_{p-1},1)} (\alpha . \overline{\mu} x_{p(n_{p-1},j)})$$

sont aussi tous non nuls.

Ainsi

$$\overline{\lambda} x_1 x_2 \dots x_{p(k,i),(l,j)} \begin{cases} = \overline{\mu}'_{(k,l)} (\alpha . \overline{\mu} x_1 \dots x_{p(i,j)}) \\ \quad \text{si } \overline{\mu} x_1 \dots x_{p(i,j)} \neq 0 \\ = 0 \ \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Ce qui prouve que $\overline{\lambda}$ est bien un transducteur univoque ainsi que la

PROPOSITION 1. – *Si τ est une transduction élémentaire associée à $\overline{\mu} : X^* \longrightarrow \hat{Y}^{N \times N}$, $\tau f = \overline{\mu} f_{i,j}$ et τ' une transduction élémentaire associée à $\overline{\mu}' : X'^* \longrightarrow \hat{Y}'^{M \times M}$ $\tau' g = \overline{\mu}' g_{(k,l)}$ et si α est un homomorphisme de Y^* dans X'^*, $\tau' \alpha \tau$ est une transduction élémentaire associée à $\overline{\mu}' \times_\alpha \overline{\mu}$.*

THEOREME 2. – *Si τ (resp. τ') est une transduction univoque associée à $\overline{\mu} : X^* \longrightarrow \hat{Y}^{N \times N}$ (resp. $\overline{\mu}' : X'^* \longrightarrow \hat{Y}'^{M \times M}$) et α un homomorphisme de Y^* dans X'^*, la transduction $\tau' \alpha \tau$ est une transduction associée à $\overline{\mu}' \times_\alpha \overline{\mu}$.*

Soient $\qquad \tau f = \mathrm{Tr}(\overline{\nu} . \overline{\mu} f) \quad$ et $\quad \tau' g = \mathrm{Tr}(\overline{\nu}' . \overline{\mu}' g)$.

Une remarque : si il existe $g' \in X'^*$ tel que $\overline{\mu}'_{m',m} g'$ soit non nul, alors il existe au plus un $m_1 \in M$ tel que quelque soit $f' \in X'^*$, $\overline{\nu}'_{m,m_1}$ et

$\overline{\mu}' f'_{m_1, m}$, sont tous deux non nuls. En effet, nous aurions sans cela deux éléments non nuls dans $\sum_{m_1} \overline{\nu}'_{m, m_1} \; \overline{\mu}' f' g'_{m_1, m}$ et τ' ne serait pas une transduction univoque.

Nous posons alors $\delta(m, m') = m_1$ ou 0 selon qu'il existe ou non $g' \in X'^*$ tel que $\overline{\mu}'_{m', m} \; g' \neq 0$.

Définissons $\overline{\rho} \in \hat{Y}'^{(M \times N) \times (M \times N)}$ par

$$\overline{\rho}(m, n), (m', n') \begin{cases} = \overline{\nu}'_{(m, \delta(m, m'))} \; \overline{\mu}'_{(\delta(m, m')} (\alpha \overline{\nu}_{n, n'}) \\ \quad \text{si } \delta(m, m') \text{ et } \overline{\nu}_{n, n'} \text{ sont différents de } 0 \\ = 0 \quad \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Nous avons :

$$\mathrm{Tr}(\overline{\rho} \,.\, \overline{\lambda} f) = \sum_{(m, n), (m', n')} \overline{\rho}_{(m, n), (m', n')} \; \overline{\lambda} f_{(m', n'), (m, n)}$$

$$= \sum_{(m, n), (m', n')} \overline{\rho}_{(m, n), (m', n')} \; \overline{\mu}'_{m', m} \; (\alpha \,.\, \overline{\mu} f_{n', n})$$

si $\overline{\mu}'_{m', m} (\alpha \overline{\mu} f_{n', n})$ est différent de 0 on a $\delta(m, m') \neq 0$ sinon le terme correspondant est nul et n'intervient pas dans la somme. D'où

$$\mathrm{Tr}(\rho \,.\, \lambda f) = \sum_{(m, n), (m'n')} \overline{\nu}'_{(m, \delta(m, m'))} \; \overline{\mu}'_{(\delta(m, m'), m')} \; (\alpha \,.\, \overline{\nu}_{n, n'})$$

$$\overline{\mu}'_{m', m} \; (\alpha \,.\, \overline{\mu} f_{n', n})$$

$$= \sum_{(m, n), (m', n')} \overline{\nu}'_{(m, \delta(m, m'))} \; \overline{\mu}'_{(\delta(m, m'), m)} \; (\alpha \,.\, \overline{\nu}_{n, n'} \; \overline{\mu} f_{n', n})$$

$$= \sum_{m, m'} \overline{\nu}'_{(m, \delta(m, m'))} \; \overline{\mu}'_{(\delta(m, m'), m)} \; (\alpha \,.\, \tau f)$$

$$= \tau' \alpha \tau f \quad \text{d'après la remarque}$$

Q.E.D.

Remarquons que la même construction peut se faire dans le cas de K-transductions multivoques (associées à des transducteurs multivoques). On peut définir aussi bien $\tau' \alpha \tau$ que $\mu' \times_a \mu$ dans ce cas et le théorème 2 reste vrai.

2. Transductions inverses.

Au chapitre précédent nous avons établi que si R est une K-transduction de X* dans Y*, $R^{-1} = \{(g, f) \mid (f, g) \in R\}$ est aussi une K-transduction. Un des buts de ce paragraphe est de construire l'application $\overrightarrow{R}^{-1}$, connaissant $\overrightarrow{R} = \tau$ donné comme $\tau f = \bar{\mu} f_{i_0, j_0}$ pour tout f, dans le cas où $\overrightarrow{R}$ est d'image finie ($\bar{\mu}$ est alors supposé fini).

A – *CHAINES ET SUITES RESOLVANTES.*

Nous appellerons élément de $\bar{\mu}$ les quadruples (i, x, j, g) où $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, $x \in X$, $g \in Y^*$ sont tels que $g \in \bar{\mu} x_{i,j}$. L'élément (i, x, j, g) de $\bar{\mu}$, est dit accessible par τ si et seulement si il existe f et f' dans X* tels que $\bar{\mu} f_{i_0, i}$ et $\bar{\mu} f'_{j, j_0}$ sont tous deux non vides. Il est dit propre si et seulement si $g \neq e$, impropre dans le cas contraire.

Nous appellerons chaîne de $\bar{\mu}$ toute suite, éventuellement vide, d'éléments de $\bar{\mu}$: $(i_1, x_1, j_1, g_1), \ldots, (i_k, x_k, j_k, g_k)$ telle que pour tout $h = 1, \ldots, k-1$: $i_{h+1} = j_h$. La chaîne $(i_1, x_1, j_1, g_1), \ldots, (i_k, x_k, j_k, g_k)$ est dite d'origine i_1 d'extrémité j_h. Elle est dite propre (resp. impropre) si tous ses éléments sont propres (resp. impropres). Elle est dite produite par le mot $f = x_1 x_2 \ldots x_k$ et produire le mot $g = g_1 g_2 \ldots g_k$. Elle est dite résolvante de g par τ si et seulement si elle est d'origine i_0, d'extrémité j_0 et produit g. Si bien que :

LEMME 1. – *Pour tout $g \in Y^*$, τ^{-1} est l'ensemble des f de* X* *qui produisent une chaîne résolvante de g pour τ.*

Soit $c = (i_1, x_1, j_1, g_1), \ldots, (i_k, x_k, j_k, g_k)$ une chaîne résolvante de g pour τ. Extrayons de c la suite des éléments propres de c, soit $(i_{h_1}, x_{h_1}, j_{h_1}, g_{h_1}), \ldots, (i_{h_l}, x_{h_l}, j_{n_l}, g_{h_l})$. Cette suite, unique est la suite résolvante de g pour τ, extraite de c.

Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ nous définirons les ensembles $C_{i,j}$ égal à l'ensemble des chaînes impropres d'origine i et d'extrémité j, et $\sigma_{i,j}$ égal à l'ensemble des mots f qui produisent une chaîne impropre d'origine i et d'extrémité j.

LEMME 2. – *Soit $s = (i_1, x_1, j_1, g_1), \ldots, (i_k, x_k, j_k, g_k)$ une suite résolvante de g pour τ. L'ensemble des chaînes résolvantes de g pour τ, d'où l'on peut extraire s est donné par :*

$$C_{i_0,i_1}\,,(i_1\,,x_1\,,j_1\,,g_1)\,,C_{j_1,i_2}\,,(i_2\,,x_2\,,j_2\,,g_2)\,,\ldots$$

$$\ldots C_{j_{h-1},i_h}\,,(i_h\,,x_h\,,j_h\,,g_h)\,,C_{j_h,i_{h+1}}\,,\ldots,(i_k\,,x_k\,,j_k\,,g_k)\,,C_{j_k,j_0}$$

(les suites d'éléments sont assimilées à des mots sur l'ensemble des éléments).

La suite montrera l'intérêt des transductions telles que tout mot g de Y^* est image d'un nombre fini de mots de X^*. Comme il est clair que l'ensemble des suites résolvantes de g pour τ est fini, nous pouvons énoncer :

DEFINITION 1. – *Une transduction τ de X^* dans Y^* est dite fidèle si et seulement si pour tout g dans Y^* card $(\tau^{-1} g) < \infty$ c'est-à-dire si τ^{-1} est d'image finie.*

Disons que $C_{i,j}$ est accessible par τ si et seulement si il existe f, $f' \in X^*$ tels que $\bar{\mu} f_{i_0,i}$ et $\bar{\mu} f'_{j,j_0}$ sont tous deux non vides.

LEMME 3. – *Une condition nécessaire et suffisante pour τ soit fidèle est que chacun des $C_{i,j}$ accessible par τ soit fini.*

Nous venons ainsi de ramener le problème à la recherche des suites résolvantes de g pour τ. A cette fin nous allons définir une relation, notée $>$, sur l'ensemble des éléments propres accessibles par τ augmenté d'un élément ω : $L = E(\bar{\mu}) \cup \{\omega\}$.

– $(i', x', j', g') > (i, x, j, g)$ si et seulement si $C_{j',i} \neq \emptyset$

– $(i, x, j, g) > \omega$ si et seulement si $C_{i_0,i} \neq \emptyset$

– $\omega > (i, x, j, g)$ si et seulement si $C_{j,j_0} \neq \emptyset$

Clairement nous avons

LEMME 4. – *Une suite s d'éléments propres de $\bar{\mu}$, soit*

$$s = (i_1\,,x_1\,,j_1\,,g_1)\,,\ldots,(i_k\,,x_k\,,j_k\,,g_k)$$

est résolvante de g pour τ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.

1 – $(i_1\,,x_1\,,j_1\,,g_1) > \omega$

2 – $\omega > (i_k\,,x_k\,,j_k\,,g_k)$

3 – *pour tout* $h = 1, \ldots, k-1$:

$$(i_{h+1}, x_{h+1}, j_{h+1}, g_{h+1}) > (i_h, x_h, j_h, g_h)$$

4 – $g = g_1 g_2 \ldots g_k$

Introduisons pour tout l élément accessible de $\overline{\mu}$, la famille des $\overline{d} \times \overline{d}$ matrices 0,1 : $\{\lambda_l y \mid y \in Y\}$ où

$$\overline{d} = \max \{|g| \mid (i, x, j, g) \text{ élément propre accessible de } \overline{\mu}\}$$

$$\lambda_l y_{m,m'} \begin{cases} = 1 \text{ si et seulement si} \\ \quad - \text{ou bien } \; g = g_1 y g_2,\ g_1 \in Y^{m-1},\ g_2 \in YY^* \\ \qquad\qquad \text{et } m' = m + 1 \\ \quad - \text{ou bien } \; g = g_1 y,\ g_1 \in Y^{m-1},\ m' = 1 \\ = 0 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

Si l'on étend λ_l en une 0,1 représentation de Y^*, on a $(\lambda_l f')_{1,1} = 1$ si $g = f'$.

Et construisons maintenant les $(L \times \overline{d}) \times (L \times \overline{d})$ matrices λy

$$\lambda y_{(l,m),(l',m')} \begin{cases} = 1 \text{ si et seulement si} \\ \quad - \text{ou bien } \; m' \neq 1,\ \omega \neq l = l' \text{ et } \lambda_l y_{m,m'} = 1 \\ \quad - \text{ou bien } \; m' = 1,\ l' > l \neq \omega \text{ et } \lambda_l y_{m,1} = 1 \\ = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

LEMME 5. – *Si* ν *est la* $(L \times \overline{d}) \times (L \times \overline{d})$ *matrice :*

$$\overline{\nu}_{(l,m),(l',m')} = \begin{cases} 1 \textit{ si et seulement si } l = \omega,\ l' > l,\ m = m' = 1 \\ 0 \textit{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

pour tout g *dans* Y^*, $\mathrm{Tr}(\nu \,.\, \lambda g)$ *est égal au nombre de suites résolvantes de* g *pour* τ.

En effet $\qquad \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \lambda g) = \sum\limits_{l_1 > \omega} \lambda g_{(l_1,1),(\omega,1)}$

ou si $g = y_1 y_2 \dots y_M$:

$$\mathrm{Tr}(\nu.\lambda g) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_M, m_1, m_2, \dots, m_M} \lambda y_{1(l_1, 1), (l_2, m_2)} \dots \lambda y_{M(l_M, m_M), (\omega, 1)}$$

Dans cette somme un terme est non nul si et seulement si il correspond à une suite $(l_1, 1), (l_2, m_2), \dots, (l_M, m_M)$ d'indices satisfaisant à :

$$\begin{cases} \text{– Pour tout } k = 1, \dots, M-1 \\ \qquad \begin{cases} \text{– ou bien } l_h = l_{h+1},\ m_{h+1} \neq 1 \text{ et } (\lambda_{l_h} y_h)_{m_h, m_{h+1}} = 1 \\ \text{– ou bien } l_{h+1} > l_h,\ m_{h+1} = 1 \text{ et } (\lambda_{l_h} y_h)_{m_h, 1} = 1 \end{cases} \\ \text{– } \omega > l_M \text{ et } (\lambda_{l_M} y_M)_{(m_M, 1)} = 1. \end{cases}$$

ce qui entraîne que la suite d'éléments $(l_{h_1}, l_{h_2}, \dots, l_{h_k})$ formée de tous les l_{h_j} tel que $m_{h_j} = 1$ est une suite résolvante de g pour τ.

Q.E.D.

Dans le cas d'une transduction fidèle on remplacera λ et ν par λ' et ν' respectivement :

$$\lambda' y_{(l, m), (l', m')} \begin{cases} = 1 \text{ si et seulement si} \\ \qquad m' \neq 1,\ \omega \neq l = l' \text{ et } \lambda_l y_{m, m'} = 1 \\ = \operatorname{card}(C_{j, i'}) \text{ si et seulement si} \\ \qquad l' = (i', x', j', g') > l = (i, x, j, g),\ m' = 1 \\ \quad \text{et } (\lambda_l y)_{m, 1} = 1 \\ = \operatorname{card}(C_{j, j_0}) \text{ si et seulement si} \\ \qquad l' = \omega > l = (i, x, j, g),\ m' = 1 \text{ et } (\lambda_l y)_{m, 1} = 1 \\ = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

$$\nu'_{(l, m), (l', m')} \begin{cases} = \operatorname{card}(C_{i_0, i}) \text{ si et seulement si} \\ \qquad l = (i, x, j, g) > \omega,\ m = m' = 1 \\ = 0 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

pour finalement avoir :

LEMME 6. – *Pour tout g dans* Y*, *si* τ *est fidèle* : $\mathrm{Tr}(\nu'.\lambda' g)$ *est égal au nombre des chaînes résolvantes de g par* τ, *donc aussi au cardinal de l'image inverse* $\tau^{-1}g$.

B – *TRANSDUCTION INVERSE.*

Elle se construit maintenant facilement. Définissons les matrices $\{\bar{\pi} y \mid y \in \mathrm{Y}\}$ et $\bar{\rho}$

$$\bar{\pi} y_{(l,m),(l',m')} \begin{cases} = \{e\} \text{ si } m' \neq 1,\ \omega \neq l = l' \text{ et } (\lambda_l y)_{m,m'} = 1 \\ = x\,\sigma_{j,i'} \text{ si } l' = (i',x',j',g') > l = (i,x,j,g) \\ \qquad m' = 1 \text{ et } (\lambda_l y)_{m,1} = 1 \\ = x\,\sigma_{j,j_0} \text{ si } \omega > l = (i,x,j,g) \\ \qquad m' = 1 \text{ et } (\lambda_l y)_{m,1} = 1 \\ = \emptyset \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

$$\bar{\rho}_{(l,m),(l',m')} \begin{cases} = \sigma_{i_0,i} \text{ si } l = (i,x,j,g) > \omega,\ m = m' = 1 \\ = \emptyset \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

THEOREME 1. – *Pour tout g dans* Y* :

$$\tau^{-1}g = \mathrm{Tr}(\bar{\rho}\,.\,\bar{\pi} f)\,.$$

La démonstration est immédiate à partir des lemmes 2 et 5. Nous remarquons alors que dans le cas où τ^{-1} est univoque les ensembles $\sigma_{i,j}$ accessibles sont certainement réduits à au plus un élément. Il est alors facile de transformer $\bar{\pi}$ en une représentation de Y* par des matrices à éléments dans $\hat{\mathrm{X}}$, $\bar{\rho}$ en une matrice compatible avec cette représentation.

Ceci termine la construction de la transduction inverse.

C – *APPLICATION AU PROBLEME DU DECODAGE.*

Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{Y}^*$ un code fini et $\varphi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{A}$ une bijection de X sur A. L'isomorphisme, noté φ également, de X* dans Y* qui étend naturellement φ est un cas particulier de transduction injective. L'application φ^{-1} peut être réalisée comme une transduction univoque d'après le corollaire 3. La construction est canonique.

Si $\bar{d} = \max\limits_{a \in A} |a|$ nous construisons pour tout $x \in X$ tout $y \in Y$ la $\bar{d} \times \bar{d}$ matrice

$$\lambda_x y_{m,m'} \begin{cases} = e_x \text{ si et seulement si} \\ \qquad \varphi(x) = g_1 y g_2 \,,\ g_1 \in Y^{m-1}, g_2 \in YY^* \text{ et } m' = m+1 \\ = x \text{ si et seulement si} \\ \qquad \varphi(x) = g_1 y,\ g_1 \in Y^{m-1}\ ,\ m' = 1 \\ = 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

puis les matrices $\bar{\pi} y\,,\ \ y \in Y$:

$$\bar{\pi} y_{(x,m),(x',m')} \begin{cases} = \lambda_x y_{m,m'} \text{ si et seulement si } m' = 1 \\ \qquad\qquad\qquad \text{ou } x = x',\ m' \neq 1 \\ = 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Enfin notons $\bar{\rho}$ la matrice

$$\bar{\rho}_{(x,m),(x',m')} \begin{cases} = e \text{ si et seulement si } m = m' = 1 \\ \qquad \text{et } x = x' \\ = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

On a pour tout $g \in \varphi(X^*)$: $\varphi^{-1}(g) = \mathrm{Tr}(\bar{\rho}\,.\,\bar{\pi} g)$

Exemple. –

$$X = \{x\,,\,y\,,\,z\}\,,\ A = \{a\,,\,ab\,,\,bb\}$$

$$\varphi(x) = a,\quad \varphi(y) = ab,\quad \varphi(z) = bb$$

les matrices πa et πb sont respectivement :

$$\bar{\pi} a = \begin{pmatrix} x & 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\pi} b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ z & 0 & z & 0 & z & 0 \end{pmatrix}$$

3. Transduction de séries formelles.

Les résultats précédents sont de fait plus forts que ceux que nous avons énoncés, mais pour les exprimer dans toute leur généralité il convient de faire appel à la notion de série formelle (cf. chapitre 0).

A – *TRANSDUCTION GENERALISEE.*

DEFINITION 1. – *Nous appellerons* K-*transduction généralisée (resp.* K-*transduction généralisée d'image finie) toute application* τ *de* X* *dans l'anneau des séries formelles sur* Y *à coefficients dans* **Z**, *qui peut se mettre sous la forme :*

$$\tau f = \mathrm{Tr}(\nu \, . \, \mu f)$$

où μ *est une représentation de* X* *par des matrices carrées dont les éléments sont des séries rationnelles (resp. des polynômes) sur* Y *à coefficients dans* **Z**, *et* ν *une matrice carrée de même dimension dont les coefficients sont des séries rationnelles (resp. des polynômes) sur* Y *à coefficients dans* **Z**.

Soient car et supp les deux applications de $\mathfrak{P}(Y^*)$ dans $\mathbf{Z} \ll Y \gg$ et $\mathbf{Z} \ll Y \gg$ dans $\mathfrak{P}(Y^*)$ respectivement définies par :

$$\forall a \in \mathbf{Z} \ll Y \gg : \mathrm{supp}\, a = \{f \in Y^* \mid (a\,, f) \neq 0\}$$

$$\forall L \subset Y^* : \mathrm{car}\, L = \sum_{f \in X^*} (\mathrm{car}\, L\,, f) f \quad \text{où} \quad (\mathrm{car}\, L\,, f) = 1 \text{ si } f \in L$$

$$\text{et} \quad (\mathrm{car}\, L\,, f) = 0 \quad \text{si} \quad f \notin L\,.$$

Nous avons : supp (car L) = L pour tout L.

La série $a \in \mathbf{Z} \ll Y \gg$ est un polynôme si et seulement si supp (a) est fini. La série car L est une série rationnelle si et seulement si L est un K-langage sur Y*, et supp (a) est un K-langage pour toute série rationnelle positive $a \in \mathbf{Z} \ll Y \gg$.

Associons ainsi à toute transduction généralisée τ : $X^* \longrightarrow \mathbf{Z} \ll Y \gg$ une transduction supp $\tau : X^* \longrightarrow \mathfrak{P}(Y^*)$ définie par

$(\mathrm{supp}\, \tau) f = \mathrm{Tr}((\mathrm{supp}\, \nu)\, (\mathrm{supp}\, \mu) f)$ où

$(\mathrm{supp}\, \nu)_{i,j} = \mathrm{supp}\, (\nu_{ij})$

$((\text{supp}\ \mu)\, x)_{i,j} = \text{supp}\,(\mu x_{i,j})$ et supp μ est la représentation qui étend canoniquement l'application supp $\mu\ :\ X \longrightarrow \mathfrak{P}\,(Y^*)^{n \times n}$ La transduction supp τ est une K-transduction si τ est une transduction généralisée positive : $\tau f = \text{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ satisfaisant la condition :

$\forall\, i\,,j\ :\ \nu_{i,j}\,,\, \mu x_{i,j}$ sont des séries rationnelles positives. La transduction supp τ est une K-transduction d'image finie si τ est une transduction généralisée positive d'image finie : $\tau f = \text{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ telle que

$\forall\, i\,,j\ :\ \nu_{i,j},\, \mu x_{i,j}$ sont des polynômes à coefficients positifs. Réciproquement nous pouvons définir car τ pour toute K-transduction

$\tau : X^* \longrightarrow \mathfrak{P}\,(Y^*)$ en posant :

$(\text{car}\ \tau)\, f = \text{Tr}((\text{car}\ \nu)\ (\text{car}\ \mu)\, f)$ où

$(\text{car}\ \nu)_{i,j} = \text{car}\ (\nu_{i,j})$

$((\text{car}\ \mu)\, x)_{i,j} = \text{car}\ (\mu x_{i,j})$ et car μ est la représentation qui étend canoniquement l'application car $\mu : X \longrightarrow \mathbf{Z} \ll Y \gg^{n \times n}$ L'application car τ est une K-transduction généralisée positive, d'image finie si τ est d'image finie et

$$\text{supp}\ (\text{car}\ \tau) = \tau\,.$$

Ainsi les transductions généralisées positives généralisent de façon immédiate les K-transductions : les coefficients nous permettent seulement d'effectuer des comptages qui sont impossibles dans le semi-anneau des parties de Y^*.

DEFINITION 2. – *Une* K-*transduction généralisée* τ *est dite fidèle si et seulement si supp* τ *est fidèle.*

Soit $\tau f = \text{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ une K-transduction généralisée fidèle. Par linéarité nous pouvons définir une application, notée τ également, de $\mathbf{Z} \ll X \gg$ dans $\mathbf{Z} \ll Y \gg$ qui prolonge τ.

Si $a = \sum_{f \in X^*} (a\,,f)\, f$ nous posons

$$\tau a = \sum_{f \in X^*} (a\,,f)\, \tau f = \sum_{f \in X^*} (a\,,f)\ \text{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$$

τa est bien une série formelle puisque pour tout g le coefficient : $(\tau a\,, g) = \sum_{f \in X^*} (a\,,f)\ \text{Tr}(\nu \,.\, \mu f)\,, g)$ est certainement fini.

B – *TRANSDUCTION D'IMAGE FINIE D'UNE SERIE RATIONNELLE.*

LEMME 1. – *Si* $a \in \mathbf{Z} \ll \mathrm{X} \gg$ *est une série rationnelle et* τ *une transduction généralisée fidèle, il existe une transduction généralisée fidèle* $\sigma : \mathrm{X}^* \longrightarrow \mathbf{Z} \ll \mathrm{Y} \gg$ *telle que :*

$$\tau a = \sum_{f \in \mathrm{X}^*} \sigma f .$$

En effet, a étant rationnelle il existe une représentation π de X^* dans $\mathbf{Z}^{\mathrm{N} \times \mathrm{N}}$ et $\rho \in \mathbf{Z}^{\mathrm{N} \times \mathrm{N}}$ telle que $\forall f \in \mathrm{X}^* : (a , f) = \mathrm{Tr}(\rho . \pi f)$.

Soit $\tau f = \mathrm{Tr}(\nu . \mu f)$. Formons le produit de Kronecker :

$$(\pi \otimes \mu) x = \pi x \otimes \mu x \text{ pour tout } x \in \mathrm{X} .$$

Il est classique que $(\pi \otimes \mu) f = \pi f \otimes \mu f$ pour tout f.

$(\pi \otimes \mu)(x_1 \ldots x_n)$ étant défini comme $(\pi \otimes \mu) x_1 (\pi \otimes \mu) x_2 \ldots (\pi \otimes \mu) x_n$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}((\rho \otimes \nu)(\pi \otimes \mu) f) &= \mathrm{Tr}((\rho \otimes \nu)(\pi f \otimes \mu f)) = \mathrm{Tr}((\rho . \pi f) \otimes (\nu . \mu f)) \\ &= \mathrm{Tr}(\rho . \pi f) \, \mathrm{Tr}(\nu . \mu f) \end{aligned}$$

Si l'on pose $\sigma f = \mathrm{Tr}((\rho \otimes \nu)(\pi \otimes \mu) f)$ on obtient :

$$\tau a = \sum_{f \in \mathrm{X}^*} \mathrm{Tr}(\rho . \pi f) \, \mathrm{Tr}(\nu . \mu f) = \sum_{f \in \mathrm{X}^*} \sigma f .$$

Nous pouvons aussi bien énoncer :

Toute série rationnelle sur Y, *image dans une transduction généralisée fidèle d'une série rationnelle sur* X, *est image dans une transduction généralisée de la série caractéristique de* X^*.

Et comme toute série rationnelle est image d'elle même dans une transduction généralisée fidèle d'image finie :

LEMME 2. – (*Ce lemme généralise des résultats de* [19]).

Pour toute série rationnelle a sur Y, *il existe* X, *et* τ *transduction généralisée fidèle d'image finie telle que :* $a = \tau(\mathrm{car}\,(\mathrm{X}^*))$

τ *est positive si et seulement si a est rationnelle positive.*

Réciproquement nous avons :

THEOREME 1. – *L'image d'une série rationnelle dans une transduction généralisée fidèle d'image finie est une série rationnelle.*

Considérons tout d'abord $\sigma : X^* \longrightarrow Z \ll Y \gg$ définie par

$$\sigma f = \mu f_{i_0, j_0} \quad \text{et} \quad \sigma(\text{car}\, X^*) = \sum_{f \in X^*} \sigma f.$$

Nous reprenons alors les constructions des lemmes 2-2, 2-5, 2-6 en définissant éléments, chaînes et suites résolvantes comme pour la transduction support de σ. A tout élément (i, x, j, g) est associé le coefficient $\alpha(i, x, j, g) = (\mu x_{i,j}, g)$.

A toute chaîne $c = (i_1, x_1, j_1, g_1) \ldots (i_k, x_k, j_k, g_k)$ est associé $\alpha(c) = \prod_{h=1}^{h=k} \alpha(i_h, x_h, j_h, g_h)$ et à $C_{i,j}$ le coefficient

$$\alpha(C_{i,j}) = \Sigma\{\alpha(c) \mid c \in C_{i,j}\}.$$

Considérons alors les matrices : $\overline{\overline{\pi}} y$ et $\overline{\overline{\rho}}$:

$$\overline{\overline{\pi}} y_{(l,m),(l',m')} \begin{cases} = 1 \text{ si et seulement si} \\ \qquad m' \neq 1,\ \omega \neq l = l',\ (\lambda_l y)_{m,m'} = 1 \\ = \alpha(l)\,\alpha(C_{j,i'}) \text{ si et seulement si} \\ \qquad l' = (i', x', j', g') > l = (i, x, j, g) \\ \qquad m' = 1,\ (\lambda_l y)_{m,m'} = 1 \\ = \alpha(l)\,\alpha(C_{j,j_0}) \text{ si et seulement si} \\ \qquad \omega > l = (i, x, j, g),\ m' = 1,\ (\lambda_l y)_{m,m'} = 1 \\ = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

$$\overline{\overline{\rho}}_{(l,m),(l',m')} \begin{cases} = \alpha(C_{i_0,i}) \text{ si et seulement si} \\ \qquad l' = (i, x, j, g) > l = \omega,\ m = m' = 1 \\ = 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Calculons $\mathrm{Tr}(\overline{\overline{\rho}}.\overline{\overline{\pi}} f)$ pour $f = y_1 y_2 \ldots y_M$. C'est la somme des termes de la forme $\alpha(C_{i_0,i_1})\,\alpha(l_1)\,\alpha(C_{j_1,j_2})\,\alpha(l_2) \ldots \alpha(l_k)\,\alpha(C_{j_k,j_0})$ où la suite $s = l_1, l_2, \ldots, l_k$ est résolvante de f pour supp σ. Un tel terme est encore égal à $\Sigma\, \alpha(c)$ étendu à toutes les chaînes résolvantes de f pour supp σ d'où l'on peut extraire s.

Or si g produit une telle chaîne $c, \alpha(x) = (\mu g_{i_0,j_0}, f)$. D'où finalement $\mathrm{Tr}(\overline{\overline{\rho}}.\overline{\overline{\pi}} f) = \Sigma(\mu g_{i_0,j_0}, f)$ somme étendue aux g qui produisent une chaîne résolvante de f pour σ d'où

$$\mathrm{Tr}(\overline{\overline{\rho}}.\overline{\overline{\pi}} f) = \sum_{g \in X^*} (\sigma g , f) = \left(\sum_{g \in X^*} \sigma g , f \right)$$

égalité qui démontre le lemme.

Remarque 1. – Grâce à la même construction nous pouvons construire la transduction généralisée inverse σ^{-1} de la transduction généralisée fidèle d'image finie, $\sigma : X^* \longrightarrow Z < Y >$. La transduction σ^{-1} est alors $\forall f \in Y^* : \sigma^{-1}(f) = \sum_{g \in X^*} (\sigma^{-1}(f) , g)$ où

$$(\sigma^{-1}(f) , g) = (\sigma(g) , f) .$$

Remarque 2. – Il est impossible de construire de la même façon σ^{-1} si σ n'est pas d'image finie. On ne peut non plus établir de cette façon le théorème 1 dans le cas d'une transduction qui n'est pas d'image finie.

Remarque 3. – Les résultats du paragraphe 1 de ce chapitre se généralisent immédiatement aux transductions généralisées.

C – *TRANSDUCTION D'UNE SERIE RATIONNELLE.*

Nous allons montrer que l'image de car X^* dans une K-transduction généralisée fidèle, mais non d'image finie est égale à l'image de car Z^* pour quelque Z, dans une transduction d'image finie.

La preuve utilise une technique analogue à celle qui nous a permis d'établir le théorème I-6.3.

Considérons donc $\tau f = \mu f_{1,N}$ une telle K-transduction. Nous écrirons tous les éléments $\mu x_{i,j}$, qui sont des séries rationnelles, sous la forme : $\mu x_{i,j} = \sigma^x_{i,j}\, (\mathrm{car}\, (Z^x_{i,j})^*)_{1,N^x_{i,j}}$ en supposant les $Z^x_{i,j}$ distincts et les transductions $(\tau^x_{i,j})\, g = ((\sigma^x_{i,j})\, (g))_{1,N^x_{i,j}}$ d'image finie.

Soit Z l'alphabet $Z = (\cup\, Z^x_{i,j}) \cup \{\omega^x_{i,j}\}$, soit $N' = \max N^x_{i,j}$ (on suppose encore $N^x_{i,j} \neq 1$). Construisons les matrices πz, $z \in Z$ dont les éléments sont indicés par les paires $(x, i, j, k), (x', i', j', k')$ où : $x, x' \in X, i, i', j, j' \in \{1, \ldots, N\}, j, j' \in \{1, \ldots, N'\}$:

$$\pi z_{(x,i,j,k)(x',i',j',k')} \begin{cases} = ((\sigma^{\bar{x}}_{s,t})(z))_{k,k'} \text{ si et seulement si} \\ \quad x = x' = \bar{x} \\ \quad i = i' = s \\ \quad j = j' = t \\ \quad z \in Z^{\bar{x}}_{s,t} \\ = 0 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

$$(\pi\omega^{\bar{x}}_{s,t})_{(x,i,j,k)(x',i',j',k')} \begin{cases} = e \text{ si et seulement si} \\ \quad i' = j = t \\ \quad x = \bar{x},\ i = s \\ \quad k = N^{\bar{x}}_{s,t},\ k' = 1 \\ = 0 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

Enfin soit

$$\rho_{(x,i,j,k)(x',i',j',k')} \begin{cases} = e \text{ si et seulement si} \\ \quad i = 1, i' = N \\ \quad k = k' = 1 \\ = 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Nous avons $\tau(\text{car } X^*) = \tau'(\text{car } Z^*)$ si τ' est la transduction d'image finie : $\tau' g = \mathrm{Tr}(\pi g . \rho)$.

En effet $\mathrm{Tr}(\pi g.\rho)$ est nul sauf pour les mots g dans Z^* qui sont factorisables en $g = g_1 g_2 \ldots g_k$ avec $g_1 \in (Z^{x_1}_{1,i_1})^* \omega^{x_1}_{1,i_1}$,

$g_k \in (Z^{x_k}_{i_{k-1},N})^* \omega^{x_k}_{i_{k-1},N}$, et $\forall m = 2, \ldots, k-1 =$:

$g_m \in (Z^{x_m}_{i_{m-1},i_m})^* \omega^{x_m}_{i_{m-1},i_m}$

En ce cas $\mathrm{Tr}(\pi g.\rho)$ est égal à

$$((\sigma^{x_1}_{1 i_1})(g_1))_{1,N^{x_1}_{1,i_1}} ((\sigma^{x_2}_{i_1,i_2})(g_2))_{1,N^{x_2}_{i_1,i_2}} \ldots ((\sigma^{x_k}_{i_{k-1},N})(g_k))_{1,N^{x_k}_{i_{k-1}N}}$$

Ainsi $\Sigma\,\mathrm{Tr}(\pi g.\rho)$, somme étendue à tous les g admettant la factorisation décrite plus haut est égale à

$$(\mu x_1)_{1,i_1} (\mu x_2)_{i_1,i_2} \ldots (\mu x_k)_{i_{k-1},N} = \mu(x_1 \ldots x_k)_{1,N}$$

Si l'on étend cette somme à tous les g, en remarquant que tout g peut avoir une et une seule factorisation de la forme ci-dessus on obtient le résultat.

Ainsi le théorème 1 reste vrai si l'on enlève la restriction d'image finie soit :

THEOREME 2. – *L'image dans une* K-*transduction généralisée fidèle d'une série rationnelle est rationnelle.*

Remarque 1. – Supposons enfin $\tau f = \mu f_{1,N}$, K-transduction généralisée de X* dans $\mathbf{Z} \ll \mathrm{Y} \gg$. La méthode précédente permet de construire la transduction inverse puisqu'on peut considérer τ comme le produit d'une transduction τ_1 de X* dans $\mathbf{Z} \ll \mathrm{Z} \gg$ et d'une transduction τ_2 de Z* dans $\mathbf{Z} \ll \mathrm{Y} \gg$.

En effet, soient $\lambda x_{i,j} = \operatorname{car}((\mathrm{Z}^x_{i,j})^* \omega^x_{i,j})$, $\tau_1 f = \lambda f_{1,N}$ et $\tau_2 \tau'$ définie plus haut. Nous avons bien $\tau f = \tau_2 (\tau_1 f)$ pour tout f. Mais alors τ_2 est une transduction d'image finie dont nous savons construire l'inverse et l'inverse de τ_1 est simplement l'homomorphisme de Z* sur X* défini par

$$\varphi(\omega^x_{ij}) = x \quad \text{et} \quad \varphi(z) = e \quad \text{si} \quad z \neq \omega^x_{ij} .$$

Finalement $\tau^{-1} = \varphi(\tau_2^{-1}(f))$.

Remarque 2. – La partie du théorème de Jungen-Schützenberger concernant le produit de Hadamard de deux séries rationnelles découle immédiatement du théorème 2 [22].

CHAPITRE III

C-LANGAGES ET TRANSDUCTIONS

1. Systèmes d'équations.

Soient deux ensembles X et Ξ, disjoints, $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Nous noterons pour simplifier $H = X \cup \Xi$ et $\bar{H} : \mathbf{Z} \ll H \gg$. A tout n-uple q d'éléments de $\bar{H}$ soit $q = (q_1, \ldots, q_n)$ correspond un homomorphisme de H^* dans $\bar{H}$ soit λ_q : si $f \in H^*$, $\lambda_q f$ est la série obtenue en substituant dans f q_i à ξ_i pour tout i. Cet homomorphisme s'étend linéairement en un endomorphisme de $\bar{H}$ que nous noterons aussi λ_q.

DEFINITION 1. – *Un système d'équations en les variables non commutatives $\xi \in \Xi$, à coefficients entiers, sur* X, *est un système d'équations de la forme :*

$$\Sigma : \xi_i = p_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n .$$

où pour tout i : $p_i \in Z < H >$

Le système Σ est dit propre si et seulement si il satisfait :

$$\forall i : (p_i , e) = 0 \tag{1}$$

$$\forall i , j : (p_i , \xi_j) = 0 \tag{2}$$

THEOREME 1. – *Si Σ est un système propre d'équations, il existe un et un seul n-uple σ de séries formelles $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i \in \bar{H}$, tel que pour tout i : $(\sigma_i , e) = 0$ et $\sigma_i = \lambda_\sigma p_i$. Nous écrivons $\sigma = \lambda_\sigma p$ en posant $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et étendant la définition de λ_q de façon évidente. σ est dit solution du système Σ.*

Nous ne reproduirons pas la démonstration. Il nous suffit de savoir que σ est la limite quand $m \longrightarrow \infty$ de la suite de n-uples $p(m)$ (limite composante par composante au sens de la topologie naturelle de $\mathbf{Z} \ll X \gg$) définie par : $p(0) = (0 , 0 , \ldots , 0)$ et $p(m+1) = \lambda_{p(m)} p$.

C'est aussi la limite de la suite de n-uples $\sigma(m)$:

$$\begin{aligned}\sigma(m)_i &= \Sigma\{(p(m)_i, f) f \mid f \in X^*\backslash X^{m+1}\ X^*\}\\ &= \Sigma\{(\sigma_i, f) f \mid f \in X^*\backslash X^{m+1}\ X^*\}\end{aligned}$$

et l'on a

$$\sigma(m+1)_i = \Sigma\{(\lambda_{\sigma(m)}\, p_i, f) f \mid f \in X^*\backslash X^{m+2}\ X^*\}\,.$$

Ce théorème est dû à M. P. Schutzenberger et N. Chomsky.

2. C-grammaires.

Soient X, Ξ, H comme au paragraphe 1. Nous noterons $\underline{H} = \mathfrak{P}(H^*)$. A tout n-uples d'éléments de $\underline{H}$ soit $q = (q_1, \ldots, q_n)$ correspond un homomorphisme de H^* dans $\underline{H}$ soit λ_q : $\lambda_q f$ est obtenu en substituant dans f, q_i à ξ_i pour tout i. λ_q s'étend linéairement en un homomorphisme de semi-anneau de $\underline{H}$ dans lui-même.

DEFINITION 1. – *Une C-grammaire propre en les variables $\xi \in \Xi$, sur Ξ, est constituée par la donnée pour chaque i d'une partie finie p_i de* H^* *satisfaisant*

$$\forall\, i : e \notin p_i \qquad (1)'$$

$$\forall\, i, j : \xi_j \notin p_i \qquad (2)'$$

ce que nous noterons

$$G : \xi_i \longrightarrow p_i\,, \quad i = 1, \ldots, n$$

THEOREME 1. – *Si* G *est une C-grammaire propre en les variables $\xi \in \Xi$ sur χ, il existe un et un seul n-uple γ d'éléments de* $\underline{H}$,

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

tel que pour tout i : $e \notin \gamma_i$ et $\gamma_i = \lambda_\gamma p_i$ (noté aussi $\gamma = \lambda_\gamma p$). γ est dit solution de G.

Remarque. – En général on rajoute à G la donnée d'un axiome, c'est-à-dire que l'on distingue un ξ_{i_0} dans Ξ, appelé axiome et l'on parle alors du langage engendré par G qui est par définition γ_{i_0}.

La démonstration est en tout point semblable à la précédente. De la même façon γ est la limite quand $m \longrightarrow \infty$ de la suite $p(m)$

définie par : $p(0) = (\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset)$ et $p(m+1) = \lambda_{p(m)}\, p$. C'est aussi la limite de $\gamma(m)$:

$$\gamma(m)_i = p(m)_i \cap \mathfrak{P}(X^* \backslash X^{m+1} X^*) = \gamma_i \cap \mathfrak{P}(X^* \backslash X^{m+1} X^*)$$

et l'on a $$\gamma(m+1)_i = (\lambda_{\gamma(m)}\, p_i \cap \mathfrak{P}(X^* \backslash X^{m+2} X^*)) .$$

3. C-grammaire support d'un système d'équations.

Soient X, Ξ, $\overline{\mathrm{H}}$ et $\underline{\mathrm{H}}$ comme aux paragraphes 1 et 2 et q un n-uple d'éléments de $\overline{\mathrm{H}}^+$ où :

$$a \in \overline{\mathrm{H}}^+ \Longleftrightarrow a \in \overline{\mathrm{H}} \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathrm{H} : (a, f) \geqslant 0$$

Définissons supp q = (supp $q_1, \ldots,$ supp q_n) qui est un n-uple d'éléments de H. Il est clair que $\forall f \in \mathrm{H}$: $\operatorname{supp}(\lambda_q f) = \lambda_{\operatorname{supp} q} f$

et $$\forall a \in \overline{\mathrm{H}}^+ : \operatorname{supp}(\lambda_q a) = \lambda_{\operatorname{supp} q} (\operatorname{supp} a)$$

DEFINITION 1. – *Soit Σ le système propre d'équations Σ : $\xi_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Nous appellerons C-*grammaire support de Σ la* C-*grammaire* G = supp Σ *définie par* G : $\xi_i \longrightarrow \operatorname{supp} p_i \quad i = 1, \ldots, n$.

PROPOSITION 1. – *Si Σ est un système positif, c'est-à-dire tel que $\forall i = 1, \ldots, n$, $\forall f \in \mathrm{H}$: $(p_i, f) \geqslant 0$, et si σ est sa solution, la solution de la* C-*grammaire* G = *supp* Σ *n'est autre que le support de* σ.

En effet, posons p'_i = supp p_i. La C-grammaire G s'écrit : G : $\xi_i \longrightarrow p'_i$, $i = 1, \ldots, n$ et l'on a $p'(0) = \operatorname{supp} p(0)$. Supposons que $\forall m' \leqslant m : p'(m) = \operatorname{supp} p(m)$. Nous avons

$$p'(m+1) = \lambda_{p'(m)}\, p = \lambda_{\operatorname{supp} p(m)} (\operatorname{supp} p) = \operatorname{supp} (\lambda_{p(m)} p) .$$

D'où $p'(m+1) = \operatorname{supp} p(m+1)$. Une récurrence achève la démonstration. Q.E.D.

4. Système caractéristique d'une C-grammaire.

DEFINITION 1. – *Soit* G *la* C-*grammaire propre* : G : $\xi_i \longrightarrow p_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Nous appellerons système caractéristique de G *le système* Σ = car G *qui s'écrit* $\Sigma : \xi_i = \text{car}\, p_i \quad i = 1, \ldots, n$.

On remarque que Σ = car G est un système propre positif et puisque supp (car p) = p nous avons : $\gamma = \text{supp}\ \sigma$ si γ est la solution de G et σ la solution de Σ = car G.

Mais en général l'on n'a pas $\sigma = \text{car}\ \gamma$.

DEFINITION 2. – *Une* C-*grammaire* G *est dite non ambiguë si et seulement si la solution* σ *de son système caractéristique vérifie* : $\sigma = \text{car}\ \gamma$ *où* γ *est la solution de* G.

5. Forme normale d'un système d'équations.

Soient Ξ et Ξ' deux ensembles disjoints et les deux systèmes Σ et Σ' en les variables $\xi \in \Xi$ et $\xi' \in (\Xi \cup \Xi')$, respectivement, tous deux sur X :

$$\Sigma \ : \xi_i = p_i \qquad i = 1, \ldots, n$$
$$\Sigma' : \xi'_j = p'_j \qquad j = 1, \ldots, n + n'$$

DEFINITION 1. – Σ' *est dit extension de* Σ *si et seulement si les composantes de la solution de* Σ' *correspondant aux* $\xi \in \Xi$ *sont égales aux composantes de la solution de* Σ.

LEMME 1. – *A tout système* $\Sigma : \xi_i = p_i, i = 1, \ldots, n$ *on peut faire correspondre un système* $\Sigma' : \xi'_j \longrightarrow p'_j$, *extension de* Σ *et satisfaisant la condition* :

$$\forall_j : \text{supp}\, p'_j \subset (X \cup (\Xi \cup \Xi')^*$$

Démonstration.

Introduisons les variables :

$$\Xi' = \{\eta(i, f, k) \mid i = 1, \ldots, n\ ; f \in \text{supp}\, p_i \backslash X \cup \Xi\Xi^*\ ; 1 \leqslant k \leqslant |f|\}$$

et formons le système Σ' :

$$\Sigma' \begin{cases} \xi_i = \Sigma\{(p_i, f) f \mid f \in X \cup \Xi\Xi^*\} \\ \quad + \Sigma\{(p_i, f)\, \eta(i,f,1)\, \eta(i,f,2) \ldots \eta(i,f,|f|) \\ \qquad f \in \operatorname{supp} p_i \backslash X \cup \Xi\Xi^*\} \text{ (ce second membre est par définition } p_i') \\ \eta(i,f,k) = p_j' \text{ si la } k^{\text{ème}} \text{ lettre de } f \text{ est } \xi_j \\ \eta(i,f,k) = x \text{ si la } k^{\text{ème}} \text{ lettre de } f \text{ est } x \in X \end{cases}$$

$$i = 1, \ldots, n\,,\ \eta(i,f,k) \in \Xi'$$

Σ' est extension de Σ. Supposons en effet que

$\forall_i = 1, \ldots, m' \leqslant m$: $\sigma(m')_i = \sigma'(m')_i$ et pour tout $\eta \in \Xi'$, $m' \leqslant m$:

$$\sigma'(m')\, \eta(i,f,k) = \eta \text{ si } x \text{ est la } k^{\text{ème}} \text{ lettre de } f,$$

$$\sigma'(m')\, \eta(i,f,k) = \sigma'(m')_j \text{ si } \xi_j \text{ est la } k^{\text{ème}} \text{ lettre de } f.$$

Cette hypothèse entraîne que les mêmes égalités sont vérifiées pour $m + 1$.

Si $f \in \operatorname{supp} p_i \cap \Xi^2)$: $\lambda\, \sigma'(m) f = \lambda_{\sigma(m)} f$

Si $f \notin \operatorname{supp} p_i \cap (X \cup \Xi^2)$ il existe $\eta(i,f,1) \ldots \eta(i,f,|f|) = f' \in \operatorname{supp} p_i'$ et nous avons encore : $\lambda_{\sigma'(m)} f' = \lambda_{\sigma(m)} f$. Ce qui entraîne

$$\sigma(m+1)_i = \sigma'(m+1)_i \quad \text{si} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Une récurrence achève la démonstration

LEMME 2. – *Soit un système* Σ : $\xi_i = p_i$ $i = 1, \ldots, n$ *vérifiant* :

$$\forall_i : \operatorname{supp} p_i \subset X \cup \Xi\Xi^*$$

Il existe un système Σ', *extension de* Σ : Σ' : $\xi_j' = p_j'$, $\xi_j' \in \Xi \cup \Xi'$ *qui*

$$\forall_j : \operatorname{supp} p_j' \subset X \cup (\Xi \cup \Xi')^2 .$$

Introduisons les variables η_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ et formons le système Σ':

$$\Sigma' \left\{ \begin{array}{l} \xi_i = \Sigma\{(p_i\,, f)\, f \mid f \in \mathrm{X} \cup \Xi^2\} \\ \quad + \Sigma\{(p_i\,, f)\, \eta_{i,i_2}\,, \eta_{i_3 i_4} \ldots \eta_{i_{2l-1}\, i_{2l}} \mid \\ \qquad f = \xi_{i_1}\, \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_{2l}} \in \operatorname{supp} p_i \backslash \mathrm{X} \cup \Xi^2\} \\ \quad + \Sigma\{(p_i\,, f)\, \eta_{i_1 i_2}\, \eta_{i_3 i_4} \ldots \eta_{i_{2l-1}\, i_{2l}}\, \xi_{i_{2l+1}} \mid \\ \qquad f = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{2l}}\, \xi_{i_{2l+1}} \in \operatorname{supp} p_i \backslash \mathrm{X} \cup \Xi^2\} \\ \qquad \text{(ce second membre est par définition } p_i'\text{)} \\ \eta_{i,j} = \xi_i\, \xi_j \qquad i\,, j = 1, \ldots, n \end{array} \right.$$

Σ' est extension de Σ.

Supposons en effet :

$\forall i = 1, \ldots, n\ \forall m' \leqslant m : \sigma(m')_i = \sigma'(m')_i$ et pour tout $i\,, j = 1, \ldots, n$, $\forall m' \leqslant m : \sigma'(m')_{\eta_{i,j}} = \sigma(m')_i\, \sigma(m')_j$.

Les mêmes relations sont vraies pour $m + 1$ puisque si

$$f \in \operatorname{supp} p_i \cap (\mathrm{X} \cup \Xi^2)\,,$$

$\lambda_{\sigma'(m)}\, f = \lambda_{\sigma(m)}\, f$. Si $f \notin \operatorname{supp} p_i \cap (\mathrm{X} \cup \Xi^2)$ on a

– ou bien $f = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{2l}}$ et il existe

$$f' = x_{i_1 i_2} \ldots x_{i_{2l-1}\, i_{2l}} \in \operatorname{supp} p_i' \text{ tel que}$$

$$\lambda_{\sigma(m)}\, f = \sigma(m)_{i_1}\, \sigma(m)_{i_2} \ldots \sigma(m)_{i_{2l}} = \lambda_{\sigma'(m)}\, f'$$

– ou bien $f = \xi_i \ldots \xi_{i_{2l+1}}$ et de lá même façon il existe $f' \in \operatorname{supp} p_i'$ tel que $\lambda_{\sigma(m)}\, f = \lambda_{\sigma'(m)}\, f'$.

Ceci entraîne $\sigma(m + 1)_i = \sigma'(m + 1)_i$. Une récurrence achève de montrer que Σ' est bien extension de Σ. Or Σ' vérifie :

$$\forall_j : \operatorname{supp} p_j' \subset \mathrm{X} \cup (\Xi \cup \Xi')(\Xi \cup \Xi')^* \text{ et } \max_j d^\circ p_j' \leqslant \frac{1}{2}(\max_i d^\circ p_i) + 1.$$

On peut ainsi construire Σ_2' extension de Σ', Σ_3' extension de Σ_2' et ainsi de suite le degré décroissant il existera un h tel que Σ_h' extension de Σ vérifiera $\max_j d^\circ p_j^{(h)} \leqslant 2$.

Σ_h' vérifie les conditions du lemme Q.E.D.

Rapprochant les lemmes 1 et 2 nous avons le

THEOREME 1. – *A tout système propre* Σ, *l'on peut faire correspondre un système propre* Σ', *extension de* Σ *soit* $\Sigma' : \xi'_j = p'_j$, $\xi'_j \in \Xi'$ *satisfaisant à* $\forall j$: supp $p'_j \subset X \cup \Xi'^2$.

Σ' *est dit être sous forme normale quadratique ou simplement normale.*

6. Forme normale d'une C-grammaire.

DEFINITION 1. – *La* C-*grammaire* G$'$ *est extension de la* C-*grammaire* G *si et seulement si toutes les composantes de la solution* γ *de* G *sont égales à des composantes de la solution* γ' *de* G$'$.

Considérons la C-grammaire G et le système (car G). D'après le théorème du paragraphe précédent il existe un système normal extension de car G. Ainsi :

THEOREME 1. – *Pour toute* C-*grammaire* G, *il existe une* C-*grammaire* G$'$ *extension de* G, *non ambiguë si* G *est non ambiguë, de la forme :* $G' : \xi'_j \longrightarrow p'_j$, $j = 1, \ldots, n$ où $\forall j : p'_j \subset X \cup \Xi'^2$.

G$'$ *est dite sous forme normale quadratique ou simplement normale.*

DEFINITION 2. – *Une série formelle* $a \in Z \ll X \gg$ *est dite algébrique si et seulement si il existe un système* Σ *propre sur* X *tel que* a *soit une des composante de la solution* Σ *de* σ.

Une série formelle a, algébrique est dite positive si et seulement si elle est composante de la solution d'un système propre positif.

Un langage L *sur* X *est dit être* C-*langage si et seulement si il existe une* C-*grammaire* G *dont* L *soit une des composantes de la solution.*

Nous reformulons ci-dessous des résultats des paragraphes précédents.

THEOREME 2. – *Toute série algébrique* $a \in Z \ll X \gg$ *est composante de la solution d'un système normal.*

Tout C-*langage* L *de* X* *est composante de la solution d'une* C-*grammaire normale.*

Un langage L *sur* X* *est un* C-*langage si et seulement si il est le support d'une série algébrique positive.*

Un C-langage L *sur* X* *est composante de la solution d'une* C-*grammaire non ambiguë si et seulement si car* L *est une série algébrique positive.* L *est alors dit non ambigu.*

7. Forme de Chomsky d'un C-langage.

Dans ce paragraphe nous donnons une démonstration de l'énoncé bien connu. (cf. [23], [3], [6]).

THEOREME 1. – *Si* L *est un C-langage sur* X *il existe :*

– *un ensemble de Dyck* $D \subset Y^*$

– *un* K-*langage* K *de* Y*

– *un homomorphisme* φ *de* Y* *sur* X* *satisfaisant à* $L = \varphi(D^* \cap K)$.

La définition, standard, d'un ensemble de Dyck est rappelée au paragraphe IV.1.

Démonstration. – Nous pouvons prendre L composante de la solution d'une C-grammaire normale G. Ecrivons plutôt Σ = car G.

$$\Sigma \begin{cases} \xi_i = \sum\limits_{j,k} a_i^{jk} \xi_j \xi_k + \sum\limits_l b_i^l x_l \,, i = 1, \ldots, n \\ x_l \in X \,, a_i^{jk} \,, b_i^l \in \; 0 \,, 1 \end{cases}$$

dont la solution est σ. Nous prendrons $L_i = \operatorname{supp} \sigma_i$.

Introduisons le nouvel alphabet :

$$Y = \{ c_i^{jk}, \bar{c}_i^{jk}, d_i^{jk}, \bar{d}_i^{jk}, f_i^{jk}, \bar{f}_i^{jk}, x_i^l, \bar{x}_i^l \mid a_i^{jk} = 0 \,, b_i^l \neq 0 \}$$

dans lequel nous pouvons définir l'ensemble de Dyck D*.

Et, considérons le système Σ' :

$$\Sigma' \begin{cases} \xi_i = \Sigma\, a_i^{jk} c_i^{jk} d_i^{jk} \xi_j \bar{d}_i^{jk} f_i^{jk} \xi_k \bar{f}_i^{jk} \bar{c}_i^{jk} + \Sigma\, b_i^l x_i^l \bar{x}_i^l \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

et soient $L_i' = \operatorname{supp} \sigma_i'$ $i = 1, \ldots, n$. Il est clair que pour tout i : $L_i = \varphi(L_i')$ où φ est l'homomorphisme de Y* sur X* défini par

$$\varphi(y) = e \quad \text{sauf pour} \quad y = x_j^i \quad \text{ou} \quad \varphi(x_j^i) = x_j$$

Ce résultat, presque évident, est aussi un cas particulier du théorème III.10.1.

Soient alors les ensembles A_i , $B_i \subset Y$ définis par

$$A_i = \{x_i^l \mid b_i^l \neq 0\} \cup \{c_i^{jk} \mid a_i^{jk} \neq 0\} \quad \text{et}$$

$$B_i = \{\overline{x}_i^l \mid b_i^l \neq 0\} \cup \{\overline{c}_i^{jk} \mid a_i^{jk} \neq 0\} = \overline{A}_i$$

et $V \subset Y^2$ défini par

$$Y^2 \backslash V = \{x_i^l \overline{x}_i^l \mid b_i^l \neq 0\} \cup \{c_i^{jk} d_i^{jk}, \overline{d}_i^{jk} f_i^{jk}, \overline{f}_i^{jk} \overline{c}_i^{jk} \mid a_i^{jk} \neq 0\}$$

$$\cup \{d_i^{jk} A_j , B_j d_i^{jk}, f_i^{jk} A_k , B_k \overline{f}_i^{jk} \mid a_i^{jk} \neq 0\}.$$

Soit $R = Y^* \backslash Y^* \, V \, Y^*$: Nous avons, pour tout i :

$$L_i' \subset D^* \cap R \cap A_i Y^* \cap Y^* B_i .$$

En effet :

– les seuls mots de longueur 2 de L_i' sont les mots $x_i^l \overline{x}_i^l$ où $b_i^l \neq 0$ et ils appartiennent à $D^* \cap R \cap A_i Y^* \cap Y^* B_i$.

– supposons ainsi que tous les mots de longueur inférieur à $|g|$ de L_i' sont dans $D^* \cap R \cap A_i Y^* B_i$.

Nous avons si $|g| > 2, g \in L_i'$ (et ce de par la forme même de Σ')

$$g = c_i^{jk} d_i^{jk} g' \overline{d}_i^{jk} f_i^{jk} g'' \overline{f}_i^{jk} \overline{c}_i^{jk}, a^{jk} \neq 0$$

où $g' \in L_j'$ et $g'' \in L_k'$ sont tous deux de longueur inférieure à $|g|$. D'où $g' \in D^* \cap R \cap A_j Y^* \cap Y^* B_j$, $g'' \in D^* \cap R \cap A_k Y^* \cap Y^* B_k$ et finalement $g \in D^* \cap R \cap A_i Y^* \cap Y^* B_i$.

Montrons que réciproquement pour tout i : $D^* \cap R \cap A_i Y^* \subset L_i'$. Notons

$$Y' = \{\overline{c}_i^{jk}, \overline{d}_i^{jk}, \overline{f}_i^{jk}, \overline{x}_i^l \mid a_i^{jk} \neq 0 \; b_i^l \neq 0\}.$$

Nous avons $D^* \cap R \cap Y' Y^* = \emptyset$.

Si cet ensemble n'était pas vide il aurait un élément de longueur minimale soit g. Nous aurions alors : $g = y'g'$, $y' \in Y'$ et comme $g \in D^*$: $g' = g'' \overline{y}' g'''$ avec $g'', g''' \in D^*$.

Considérons les quatre cas :

1 – $y' = \bar{x}_l^i$ d'où $\bar{y}' = x_l^i$, $g = \bar{x}_l^i g'' x_l^i g'''$, $g \in R$ entraîne $g'' \neq e$ donc $g'' \in D^* \cap R \cap Y' Y^*$ contredisant l'hypothèse, puisque $|g''| < |g|$.

2 – $y' = \bar{c}_i^{jk}$ entraîne de la même façon $g'' \in D^* \cap R \cap Y'Y^*$, $|g''| < |g|$.

3 – $y' = \bar{d}_i^{jk}$ entraîne $g'' = f_i^{jk} g'''$ et comme $g'' \in D^*$:

$$g'' = f_i^{jk} g^{IV} \bar{f}_i^{jk} g^{V}.$$

Or g^V ne peut être vide d'où $g^V \in D^* \cap R \cap Y'Y^*$ contredisant l'hypothèse.

4 – $y' = \bar{f}_i^{jk}$ entraîne $g'' \in D^* \cap R \cap Y'Y^*$.

Dans tous les cas on arrive à une contradiction.

Soit alors $g \in D^* \cap R \cap A_i Y^*$. Deux cas se présentent.

1 – $g = x_l^i g' \bar{x}_l^i g''$ qui entraîne $g'' = e$ sans quoi nous aurions $g'' \in D^* \cap R \cap Y'Y^*$ et pour la même raison $g' = e$. D'où $g = x_l^i \bar{x}_l^i \subset L_i'$.

2 – $g = c_i^{jk} g' \bar{c}_i^{jk} g'' \Longrightarrow g'' = e, g' = d_i^{jk} g''' \bar{f}_i^{jk}, g''' \in D^*$ d'où $g_i''' = d_i^{jk} g^{IV} \bar{d}_i^{jk} f_i^{jk} g^V \bar{f}_i^{jk}$ *avec*

$$g^{IV} \in D^* \cap R \cap A_j Y^* \quad \text{et} \quad g^V \in D^* \cap R \cap A_k Y^*.$$

Une récurrence sur la longueur des mots permettant de conclure $g^{IV} \in L_j'$ et $g^V \in L_k'$ nous avons $g \in L_i'$.

Finalement $\quad D^* \cap R \cap A_i Y^* \supset L_i' \supset D^* \cap R \cap A_i Y^*$

soit $\quad L_i' = D^* \cap R \cap A_i Y^* \quad$ et $\quad L_i = \varphi(D^* \cap R \cap A_i Y^*)$.

Q.E.D.

8. Forme de Chomsky d'un langage non ambigu.

De la preuve précédente nous pouvons en fait tirer un résultat supplémentaire important. Considérons σ_i composante de la solution du système caractéristique Σ. Nous avons établi que :

$$g \in \operatorname{supp} \sigma_i \iff \exists h \in D^* \cap R \cap A_i Y^* : g = \varphi(h).$$

De fait nous avons l'égalité :

$$\forall g \in X^* \, (\sigma_i, g) = \operatorname{card}\{h \in D^* \cap R \cap A_i Y^* \mid g = \varphi(h)\} \qquad (1)$$

Tout repose sur la relation :

$$(\sigma_i, g) = \Sigma \{(\sigma_j, g')(\sigma_k, g'') \mid a_i^{jk} \neq 0, g'g'' = g\}$$

qui découle immédiatement des relations que nous avons données au paragraphe 1 de ce chapitre dans le cas simple d'un système normal.

L'égalité (1) est alors évidente pour $|g| = 1$.

Supposons la donc vraie pour tous les g' de longueur inférieure à $|g|$ et considérons une factorisation $g = g' g''$ avec $(\sigma_j, g') \neq 0$, $(\sigma_k, g'') \neq 0$ et $a_i^{jk} \neq 0$.

Soient :

$$\theta_j(g') = \{h' \in \mathrm{D}^* \cap \mathrm{R} \cap \mathrm{A}_j \mathrm{Y}^* \mid \varphi(h') = g'\} \quad \text{et}$$

$$\theta_k(g'') = \{h'' \in \mathrm{D}^* \cap \mathrm{R} \cap \mathrm{A}_k \mathrm{Y}^* \mid \varphi(h'') = g''\}.$$

qui vérifient d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{card}\, \theta_j(g') = (\sigma_j, g') \quad \text{et} \quad \mathrm{card}\, \theta_k(g'') = (\sigma_k, g'')$$

et soit $\alpha(j, k, g', g'')$ l'ensemble : $c_i^{jk} d_i^{jk}\, \theta_j(g')\, \overline{d}_i^{jk} f_i^{jk} \theta_k(g'')\, \overline{f}_i^{jk} \overline{c}_i^{jk}$ de cardinalité $(\sigma_j, g')(\sigma_k, g'')$. Clairement :

$\alpha(j, k, g', g'') \subset \theta_i(g) = \{h \in \mathrm{D}^* \cap \mathrm{R} \cap \mathrm{A}_i \mathrm{Y}^* \backslash \varphi(h) = g\}$,

$\alpha(j_1, k_1, g_1', g_1'') \cap \alpha(j, k, g', g'') \neq 0$ si $(j_1, k_1, g_1', g_1'') \neq (j, k, g', g'')$

$\theta_i(g) \subset \cup \{\alpha(j, k, g', g'') \mid g = g'g'', (\sigma_j, g') \neq 0, (\sigma_k, g) \neq 0, a_i^{jk} \neq 0\}$

Les $\alpha(j, k, g', g'')$ forment donc une partition de $\theta_i(g)$, d'où l'égalité (1).

DEFINITION 1. – *Soit* L *un* C-*langage composante de la solution d'une grammaire* G : $\mathrm{L} = \gamma_i$. *Nous appellerons ambiguité d'un mot* $f \subset \mathrm{L}$ *par rapport à* G *le coefficient* (σ_i, f) *de* f *dans la série* σ_i *composante de la solution de* $\Sigma = \mathrm{car}\, \mathrm{G}$ *nous le notons* $\alpha_{\mathrm{G}}^{\mathrm{L}}(f)$.

Nous pouvons alors énoncer :

THEOREME 1. – *Soit* L *un* C-*langage de* X* *composante de la solution d'une* C-*grammaire* G. *Il existe :*

– *un ensemble de Dyck* $\mathrm{D}^* \subset \mathrm{Y}^*$

– *un* K-*langage* K *de* Y*

– *un homomorphisme* φ *de* Y* *sur* X* *satisfaisant à* $\mathrm{L} = \varphi(\mathrm{K} \cap \mathrm{D}^*)$ *et*

$$\forall f \in L \quad \alpha_G^L(f) = \text{card}\{g \in K \cap D^* \mid \varphi g = f\}$$

Remarque. – En particulier si G est non ambigu, il existe D^*, K, φ tels que $L = \varphi(K \cap D^*)$ et

$$\forall f \in L : \text{card}\,(\varphi^{-1}(f) \cap K \cap D^*) = 1$$

Un C-langage est dit non ambigu si et seulement si il est composant de la solution d'une C-grammaire non ambiguë.

Ainsi tout C-langage non ambigu L est de la forme :

$$L = \varphi(K \cap D^*) \qquad \text{où} \qquad \forall f \in L : \text{card}\,(\varphi^{-1}(f) \cap K \cap D^*) = 1$$

9. Représentation d'une série algébrique, déduite de la forme de Chomsky.

Des résultats des paragraphes 7 et 8 nous pouvons donner une autre forme utilisant la notion de transduction, forme qui a le mérite de se généraliser. En effet, nous savons que :

$\varphi(D^* \cap K) = \tau(D^*)$ où τ est une K-transduction univoque puisque

$$R = \{(f, f) \mid f \in K\} \circ \{(f, \varphi f) \mid f \in Y^*\}$$

est une K-transduction, qui vérifie :

$$\vec{R}(f) = \varphi(f) \text{ si } f \in K, \vec{R}(f) = 0 \text{ si } f \notin K.$$

$\tau = \vec{R}$ est univoque.

Construisons effectivement cette transduction dans le cas des paragraphes 7 et 8.

Nous nous donnons les $Y \times Y$ matrices μy, $y \in Y$:

$$\mu y_{(y_1, y_2)} \begin{cases} = x_l & \text{si } y = y_2 = x_l^l, y_1\, y_2 \notin V \\ = e & \text{si } y = y_2 \neq x_l^l, y_1\, y_2 \notin V \\ = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Choisissons $y_0 \in Y$ tel que $y_0\, A_i \notin V$, par exemple $y_0 = d_i^{jk}$ tel que $a_i^{jk} \neq 0$ et soit ν la $Y \times Y$ matrice

$$\nu_{y_1, y_2} \begin{cases} = e \text{ si } y_2 = y_o \\ = 0 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{Tr}(\mu f. \nu) \begin{cases} = \varphi(f) & \text{si } f \in \mathrm{R} \cap \mathrm{A}_i \mathrm{Y}^* \\ = 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$

D'où $$\mathrm{L}_i = \{\mathrm{Tr}(\mu f. \nu) \mid f \in \mathrm{D}^*\} \backslash \{0\}$$

Si nous considérons la transduction $\tau : f \longrightarrow \mathrm{Tr}(\mu f. \nu)$ comme une transduction généralisée $\mathrm{Y}^* \longrightarrow \mathbf{Z} \ll \mathrm{X} \gg$ nous pouvons écrire, ce qui est une autre forme donnée aux résultats du paragraphe 8.

$$\sigma_i = \Sigma \{\mathrm{Tr}(\mu f. \nu) \mid f \in \mathrm{D}^*\}$$

ou encore

$$\sigma_i = \tau(\mathrm{car}\ \mathrm{D}^*)$$

C'est ce résultat qui se généralise en le théorème :

THEOREME 1. – *Pour toute série algébrique,* $a \in \mathbf{Z} \ll \mathrm{X} \gg$, *composante de la solution d'un système propre sur* X *il existe un ensemble de Dyck* $\mathrm{D}^* \subset \mathrm{Y}^*$ *et une transduction généralisée, d'image finie :* $\tau : \mathrm{Y}^* \longrightarrow \mathbf{Z} \ll \mathrm{X} \gg$ *tels que* $a = \tau(\mathrm{car}\ \mathrm{D}^*)$.

Ce qu'on peut aussi exprimer en disant que toute série algébrique est image dans une transduction généralisée de la série caractéristique d'un ensemble de Dyck, ce qui fait ressortir l'analogie avec le résultat du chapitre II selon lequel toute série rationnelle est image dans une transduction généralisée de la série caractéristique d'un monoïde libre (tout entier).

Démonstration.

Nous pouvons prendre $a = \sigma'_i$ où σ' est la solution de

$$\Sigma' \begin{cases} \xi_i = \Sigma\, \alpha_i^{jk}\, \xi_j\, \xi_k + \Sigma\, \beta_i^l x_l \\ x_j \in \mathrm{X}, \alpha_i^{jk}, \beta_i^l \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Nous définissons Y comme au paragraphe 7 et la transduction τ' comme $\tau'(f) = \mathrm{Tr}(\mu' f. \nu')$ avec

$$\mu' y_{y_1, y_2} \begin{cases} = \beta_i^l x_l^i q_i & \text{si } y = y_2 = x_l^i,\ y_1 y_2 \notin \mathrm{V} \\ = \alpha_i^{jk} e & \text{si } y = y_2 = c_i^{jk},\ y_1 y_2 \notin \mathrm{V} \\ = e & \text{si } y = y_2 \neq x_l^i \text{ et } c_i^{jk},\ y_1 y_2 \notin \mathrm{V} \\ = 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$\nu' = \nu$ (comme plus haut)

Nous avons $a = \sigma_i' \, \Sigma \{ \mathrm{Tr}(\mu' f.\ \nu') \mid f \in \mathrm{D}^* \}$.

Soit en effet un mot de $\mathrm{D}^* \cap \mathrm{R} \cap \mathrm{A}_i \mathrm{Y}^*$ (les notations sont celles du paragraphe 7).

$$\mathrm{Tr}(\mu' f.\ \nu') \begin{cases} = \alpha(f)\, \varphi(f) & \text{si } f \in \mathrm{R} \cap \mathrm{A}_i \mathrm{Y}^* \\ = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

où $\alpha(f)$ est le produit de tous les coefficients α_i^{jk} et β_i^l correspondant aux c_i^{jk} et x_l^i ayant une occurence dans f. D'où finalement le coefficient d'un mot g dans $\Sigma \{ \mathrm{Tr}(\mu' f.\ \nu' \mid f \in \mathrm{D}^* \}$ est égal à

$$\Sigma \{ \alpha(f) \mid f \in \mathrm{D}^* \cap \mathrm{R} \cap \mathrm{A}_i \mathrm{Y}^*,\ \varphi(f) = g \}.$$

Il n'est pas difficile alors de montrer, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 8 que ce coefficient est égal à

$$(\sigma_i', g) = \Sigma \{ (\sigma_j', g')\, (\sigma_k', g'') \mid g' g'' = g,\ j, k = 1, \ldots, n \}$$

ce qui établit le théorème, dont la réciproque fait l'objet du prochain paragraphe.

10. Transduction généralisée d'une série algébrique.

Considérons la transduction généralisée d'image finie

$$\tau : \mathrm{X}^* \longrightarrow \mathrm{Z} \ll \mathrm{Y} \gg, \quad \tau f = \mu f_{1,\mathrm{N}}$$

où μ est une représentation de X^* par des matrices à éléments dans $\mathrm{Z} < \mathrm{Y} >$. Nous dirons que la transduction τ est quasi-inversible si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $i, j = 1, \ldots, \mathrm{N}$: $(\mu x_{i,j}, e) = 0$, Ceci entraîne en particulier que τ soit fidèle.

Soit alors $a \in \mathbf{Z} \ll \mathrm{X} \gg$ une série algébrique $a = \sigma_i$ où σ est la solution du système Σ.

$$\Sigma \begin{cases} \xi_i = \Sigma\, a_i^{jk}\, \xi_j\, \xi_k + \Sigma\, b_i^s x_s \\ a_i^{jk}\,,\ b_i^s \in \mathbf{Z}\,,\ i = 1, \ldots, n\,, \quad x_s \in \mathrm{X} \end{cases}$$

Si τ est quasi inversible et d'image finie, alors :

$$\tau(\Sigma) \begin{cases} \xi_i^{l,m} = \displaystyle\sum_{\substack{j,k,t \\ i=1,\ldots,n}} a_i^{jk}\, \xi_j^{l,t}\, \xi_k^{t,m} + \sum_s b_i^s (\mu x_s)_{l,m} \\ l\,,\, m = 1, \ldots, \mathrm{N} \end{cases}$$

est un système propre.

Soit σ' sa solution dont nous désignerons les composantes par $\sigma_i'^{l,m}$. Nous avons :

$$\forall_i = 1, \ldots, n \ : \ \sigma_i'^{1,\mathrm{N}} = \tau(\sigma_i)\,.$$

Posons

$$p_i = \Sigma\, a_i^{jk}\, \xi_j\, \xi_k \ , \ q_i = \Sigma\, b_i^s x_s$$

$$p_i'^{l,m} = \sum_{j,k,t} a_i^{jk}\, \xi_j^{l,t}\, \xi_k^{t,m} \ , \ q_i'^{l,m} = \sum_s b_i^s (\mu x_s)_{l,m}$$

Plus généralement nous allons montrer :

$$\forall h \geqslant 0,\ \forall i = 1, \ldots, n \ \ \forall l, m = 1, \ldots, \mathrm{N} : \sigma'(h)_i^{l,m} = \mu_{l,m} \sigma(h)_i$$

Cela est vrai pour $h = 0$. Supposons le vrai pour tout $h' \leqslant h$ et montrons le pour $h + 1$. En reprenant des notations antérieures :

$$\begin{aligned} \sigma'(h+1)_i^{l,m} &= \lambda_{\sigma'(h)} (p_i'^{l,m} + q_i'^{l,m}) \\ &= q_i'^{l,m} + \sum_{j,k,t} a_i^{j,k}\, \sigma'(h)_j^{l,t} \sigma'(h)_k^{t,m} \\ &= q_i'^{l,m} + \sum_{j,k,t} a_i^{j,k} \mu_{l,t}\, (\sigma(h)_j)\, \mu_{t,m} (\sigma(h)_k) \\ &= q_i'^{l,m} + \sum_{j,k} a_i^{j,k}\, \mu_{l,m} (\sigma(h)_j\, \sigma(h)_k) \\ &= \mu_{l,m} \Big(\sum_s b_i^s x_s + \sum_{j,k} a_i^{j,k}\, \sigma(h)_j\, \sigma(h)_k \Big) \\ &= \mu_{l,m} (\lambda_{\sigma(h)} (p_i + q_i)) = \mu_{l,m}\, \sigma(h+1)_i \end{aligned}$$

Cette suite d'égalités utilise en particulier la linéarité d'une transduction (comme fonctionnelle sur un ensemble de séries formelles) et la propriété évidente valable quelques soient les séries a, a' et le transducteur μ :

$$\sum_t (\mu a)_{l,t} (\mu a')_{t,m} = (\mu(aa'))_{l,m}$$

D'où le résultat et en passant à la limite

$$\sigma_i'^{1,N} = \lim_{h \to \infty} \sigma'(h)_i^{1,N} = \lim_{h \to \infty} \mu_{1,N}\, \sigma(h)_i$$

$$= \mu_{1,N} \lim_{h \to \infty} \sigma(h)_i = \mu_{1,N}\, \sigma_i$$

Nous avons démontré le :

THEOREME 1. – *L'image dans une transduction généralisée d'image finie quasi inversible d'une série algébrique est une série algébrique.*

Il est assez désagréable de devoir imposer à τ la restriction d'être quasi-inversible dans l'énoncé du théorème précédent. Mais pour pouvoir lever cette restriction il est nécessaire de sortir du cadre tracé au paragraphe 1 de ce chapitre, puisque naturellement une transduction non quasi-inversible transforme un système propre d'équations en un système impropre. Nous définirons assez naturellement :

DEFINITION 1. – *La série $a \in Z \ll X \gg$ est semi-algébrique si et seulement si $\hat{a} = a - (a\,, e)e$ est algébrique.*

Et nous établissons le théorème suivant :

THEOREME 2. – *Les composantes de la solution d'un système d'équations Σ, impropre, quand cette solution existe, sont des séries semi-algébriques.*

Si $\Sigma : \xi_i = p_i$ est un système impropre, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux deux conditions :

$$\forall i : (p_i\,, e) = 0$$

$$\forall i, j : (p_i\,, \xi_j) = 0$$

la suite de n-uples de séries formelles $\sigma(m)_i$, construite au paragraphe 1 ne converge pas toujours (en particulier il peut apparaître des coefficients infinis). Si elle converge sa limite σ satisfait $\forall i : \sigma_i = \lambda_\sigma p_i$, et nous lui conserverons le nom de solution de Σ. Si elle ne converge pas nous dirons que Σ n'a pas de solution.

D'autre part, si σ est la solution de Σ et si σ' est un n-uple de séries formelles satisfaisant :

$$\forall i : \lambda_\sigma \ p_i = \sigma'_i$$

$$\forall i : (\sigma'_i, e) = (\sigma_i, e)$$

alors $\sigma = \sigma'$. Autrement dit il y a unicité de la solution quand sont donnés les coefficients de e.

La démonstration est rigoureusement analogue à celle de l'unicité de la solution d'un système propre.

La démonstration du théorème 2 consiste alors en 3 lemmes.

LEMME 1. — *A tout système d'équations Σ : $\xi_i = p_i$ on peut faire correspondre un système*

$$\Sigma' : \xi'_i = \Sigma\, a_i^{jk}\, \xi'_j\, \xi'_k + \Sigma\, b_i^j\, \xi'_j + \Sigma\, c_i^s x_s + d_i\, e$$

tel que Σ' a une solution si et seulement si Σ en a une et dans ce cas les composantes de la solution de Σ sont composantes de la solution de Σ' (Σ' extension de Σ).

Le système Σ' est dit sous forme normale quadratique.

La démonstration reproduit presque textuellement celle du lemme 5.1 et nous l'omettons.

LEMME 2. — *Au système Σ, sous forme normale quadratique,*

$$\Sigma : \xi_i = \Sigma\, a_i^{jk}\, \xi_j\, \xi_k + \Sigma\, b_i^j\, \xi_j + \Sigma\, c_i^s x_s + d_i\, e$$

on peut faire correspondre un système Σ'

$$\Sigma' : \xi_i = \Sigma\, a_i'^{jk}\, \xi_j\, \xi_k + \Sigma\, c_i'^s x_s + d_i\, e$$

dont la solution est identique à celle de Σ si celle-ci existe. Σ' est dit sous forme strictement normale (quadratique).

Nous avons en effet la propriété

$\sigma(m)$ converge si et seulement si la matrice I–B, où $B = (b_i^j)$ est non singulière.

Si ε est le vecteur $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ avec

$\varepsilon_i = \Sigma c_i^s x_s + d_i e$, la convergence de $\sigma(m)$ implique celle de

$$(\mathrm{I} + \mathrm{B} + \cdots + \mathrm{B}^k)\varepsilon ,$$

qui à son tour implique que B soit nilpotente donc (I–B) non singulière.

Soient alors $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

$$\mathrm{V} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \text{ avec } \nu_i = \Sigma a_i^{jk} \xi_j \xi_k + \varepsilon_i$$

nous pouvons réécrire Σ sous la forme

$$\xi = \mathrm{B}\xi + \mathrm{V} \text{ d'où}$$

$$\sigma = \mathrm{B}\sigma + \lambda_\sigma \mathrm{V} \text{ qui entraîne}$$

$$\sigma = (\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1} \lambda_\sigma \mathrm{V} = \lambda_\sigma((\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1}\mathrm{V})$$

Cette dernière relation exprimant que σ est solution du système $\xi = (\mathrm{I} - \mathrm{B})^{-1}\mathrm{V}$ qui est sous forme strictement normale.

LEMME 3. – *Au système Σ sous forme strictement normale*

$$\Sigma : \xi_i = \Sigma a_i^{jk} \xi_j \xi_k + \Sigma c_i^s x_s + d_i e .$$

on peut faire correspondre un système propre normal Σ' dont la solution σ' est donnée par $\sigma_i' = \hat{\sigma}_i = \sigma_i - (\sigma_{i,e})e$ si la solution σ de Σ existe.

Définissons pour tout i la suite des coefficients $\alpha(m)_i$

$$\alpha(0)_i = d_i$$

$$\alpha(m+1)_i = \Sigma\{\alpha(m)_j\, \alpha(m)_k \mid a_i^{jk} \neq 0\} + \alpha(m)_i$$

Si Σ a une solution cette suite converge vers une limite $\alpha_i = \lim\limits_{m \to \infty} \alpha(m)_i$, puisque $\alpha(m)_i$ n'est autre que le coefficient de e dans $\sigma(m)_i$. La limite α_i est ainsi le coefficient de e dans σ_i : $\alpha_i = (\sigma_i, e)$. Posons $p_i = \Sigma a_i^{jk} \xi_j \xi_k + \Sigma c_i^s x_s$ et $p_i' = p_i + \Sigma\{\alpha_j p_k + \alpha_k p_j \mid a_i^{jk} \neq 0\}$. Le système Σ' : $\xi_i = p_i'$ est un système propre, sous forme normale : c'est le système cherché.

Désignons par σ' sa solution $\sigma' = (\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n)$ et par $\overline{\sigma}'$ le n-uple $(\sigma'_1 + \alpha_1 e, \ldots, \sigma'_n + \alpha_n e)$. Nous avons :

$$\lambda_{\overline{\sigma}'} p_i = \lambda_{\sigma'} p_i + \Sigma (\alpha_j \lambda_{\sigma'} p_k + \alpha_k \lambda_{\sigma'} p_j) + \Sigma \alpha_j \alpha_k e \quad \text{et}$$

$$\lambda_{\overline{\sigma}'} p_i = \lambda_{\sigma'} p'_i + \Sigma \alpha_j \alpha_k e .$$

Finalement $\lambda_{\sigma'} (p_i + d_i e) = \lambda_{\sigma'} p'_i + \alpha_i e = \sigma'_i + \alpha_i e = \overline{\sigma}'_i$ ce qui prouve que $\overline{\sigma}'$ est identique à la solution de σ.

Le théorème 2 découle immédiatement des lemmes 1, 2, 3. Rapprochant le théorème 2 de la démonstration du théorème 1, nous avons le théorème 3, généralisant un résultat de E. Shamir et donnant comme corollaire le théorème de Jungen-Schützenberger.

THEOREME 3. – *L'image dans une* K*-transduction généralisée fidèle d'image finie d'une série algébrique ou semi-algébrique est une série semi-algébrique.*

En effet $\tau(\Sigma)$ est un système peut être impropre mais qui a sûrement une solution, du fait que τ est fidèle. On vérifie en effet que dans ce cas la suite des α_i converge, ce qui est une condition suffisante, puisque $\tau(\Sigma)$ est sous forme strictement normale.

11. C-transduction généralisée.

DEFINITION 1. – *L'application* τ *de* X* *dans* $\mathbf{Z} \ll Y \gg$ *définie par* $\tau f = \mathrm{Tr}(\nu . \mu f)$ *où* μ *est une représentation de* X* *par des* N x N *matrices dont les éléments sont des séries semi-algébriques de* $\mathbf{Z} \ll Y \gg$, *et* ν *est une* N x N *matrice dont les éléments sont aussi des séries semi-algébriques de* $\mathbf{Z} \ll Y \gg$, *est une* C*-transduction généralisée.*

Remarquons que toute K-transduction généralisée est une C-transduction puisque toute série rationnelle est une série semi-algébrique puisque c'est l'image dans une K-transduction généralisée fidèle d'image finie de la série car (X*) qui est manifestement une série semi-algébrique.

Nous avons le théorème, en définissant une C-transduction fidèle comme au paragraphe II.3.

THEOREME 1. – *L'image d'une série semi-algébrique dans une* C*-transduction généralisée fidèle est une série semi-algébrique.*

Nous prendrons la série semi-algébrique a composante de la solution de $\Sigma : \xi_i = \Sigma a_i^{jk} \xi_j \xi_k + \Sigma b_i^s x_s + c_i e$ soit $a = \sigma_i$ et τ sous la forme

$$\tau f = \mu f_{1,\mathrm{N}}$$

Nous supposerons que pour tout x_s, i, j la série semi-algébrique $(\mu x_s)_{i,j}$ est la première composante d'un système sous forme strictement normal.

$$\Sigma_{(s,i,j)} : \xi_{(s,i,j)l} = \Sigma a^{p,q}_{(s,i,j)l} \xi_{(s,i,j)p} \xi_{(s,i,j)q}$$
$$+ \Sigma b^p_{(s,i,j)l} \xi_{(s,i,j)p} + c_{(s,i,j)l} e .$$

Formons le système Σ' réunion des systèmes $\Sigma_{(s,i,j)}$ et de $\tau(\Sigma) : \xi_i^{l,m} = \Sigma a_i^{jk} \xi_j^{l,t} \xi_k^{t,m} + \Sigma b_i^s \xi_{(s,l,m)1} + c_i e .$

Σ' est un système impropre sous forme normale.

On démontre comme précédemment que τ étant fidèle et chacun des systèmes $\Sigma_{(s,i,j)}$ ayant une solution, $\tau(\Sigma)$ a une solution σ', telle que $\tau(a) = \sigma_i'^{1,\mathrm{N}}$. En effet si

$\bar{\sigma}$ est le vecteur $((\mu\sigma_i)_{l,m} , \sigma_{(s,i,j)l})$ avec $\sigma_{(s,i,j)1} = (\mu x_s)_{i,j}$ et $p_i^{l,m}$ le second membre de l'équation en $\xi_i^{l,m}$ dans $\tau(\Sigma)$ nous avons :

$$\lambda_{\bar{\sigma}} p_i^{l,m} = \Sigma a_i^{jk} (\mu\sigma_j)_{l,t} (\mu\sigma_k)_{t,m} + \Sigma b_i^s (\mu x_s)_{l,m} + d_i e .$$

et ceci n'est autre que $(\mu\sigma_i)_{l,m}$.

L'unicité de la solution entraîne le résultat.

12. Transduction des C-langages.

C'est un résultat classique que : (cf. [6] p. 37-44).

PROPRIETE 1. – *Si* G *est une* C-*grammaire impropre soit* : G : $\xi_i \longrightarrow p_i$ *ne satisfaisant pas les deux conditions* $\forall_i : e \notin p_i$ *et* $\forall_{i,j} : \xi_j \notin p_i$,
la suite $\gamma(m)$ *(définie au paragraphe 2) converge vers* γ, *que nous dirons encore solution de* G, *dont les composantes sont soit un* C-*langage soit l'union d'un* C-*langage et de* $\{e\}$.

Nous énoncerons trois lemmes fort analogues aux lemmes 1-2-3 du paragraphe précédent.

LEMME 1. – *A toute* C-*grammaire* G *on peut faire correspondre une grammaire* G$'$: $\xi_j' \longrightarrow p_j'$ *telle que :*

1 – $p_j' \subset \Xi'^2 \cup \Xi' \cup X \cup \{e\}$ *pour tout* j

2 – G$'$ *a une solution si et seulement si* G *en a une et en ce cas les composantes de la solution de* G *sont composantes de la solution de* G$'$.

LEMME 2. – *A toute* C-*grammaire* G : $\xi_i \longrightarrow p_i$ *satisfaisant la condition* $\forall_i : p_i \subset \Xi^2 \cup \Xi \cup X \cup \{e\}$ *on peut faire correspondre une* C-*grammaire* G$'$: $\xi_j' \longrightarrow p_j'$ *satisfaisant la condition*

$$\forall_j : p_j' \subset \Xi^2 \cup X \cup \{e\}$$

et telle que l'ensemble des composantes de sa solution γ' *soit identique à l'ensemble des composantes de la solution* γ *de* G, *si celle-ci existe.*

Nous considérons le préordre sur Ξ :

$$\xi_i < \xi_k \Longleftrightarrow \xi_k \in p_i$$

et les classes de l'équivalence associées à ce préordre, classes que nous désignerons par $\xi_1', \ldots, \xi_s'$.

Substituons dans G, ξ_j' à tous les ξ_i appartenant à la classe désignée par ξ_j'. Nous obtenons G$'$ dont le système caractéristique associé satisfait la condition : (I – B) non singulière. Une transformation analogue à celle effectuée pour un système satisfaisant cette dernière condition achève la démonstration.

LEMME 3. – *A toute* C-*grammaire* G : $\xi_i \longrightarrow p_i$ *satisfaisant la condition* $\forall_i : p_i \subset \Xi^2 \cup X \cup \{e\}$, *on peut faire correspondre une* C-*grammaire* G$'$: $\xi_i \longrightarrow p_i'$, *propre, telle que les solutions* γ *et* γ' *de* G *et* G$'$ *soient liées par :*

$$\forall_i : \gamma_i' = \gamma_i \backslash \{e\}$$

Définissons la suite des sous-ensembles de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ des indices

$$I_o = \{i \mid e \in p_i\}$$

$$I_{m+1} = \{i \mid \exists\, j, k \in I_n : \xi_j\, \xi_k \in p_i\} \cup I_m$$

Cette suite est stationnaire de limite I. Nous poserons $\mathrm{I}' = \{1, \ldots, n\}\backslash \mathrm{I}$.

Posons encore $q_i = p_i \backslash \{e\}$ et définissons

$$p_i' = q_i \cup (\cup\{q_j \mid \exists k \in \mathrm{I} : \xi_j \xi_k \in p_i\}) \\ \cup (\cup\{q_k \mid \exists j \in \mathrm{I} : \xi_j \xi_k \in p_i\})$$

La C-grammaire propre $\xi_i \longrightarrow p_i'$ est la grammaire cherchée. La démonstration est analogue à celle du lemme 3 du paragraphe précédent.

DEFINITION 1. – *Nous conserverons l'appellation de C-langage à l'union d'un C-langage et de* $\{e\}$.

Mais la différence de comportement entre système d'équations impropres et C-grammaires impropres doit rendre très prudent en particulier dès qu'il s'agit de l'ambiguité d'un C-langage contenant e. En effet, le système caractéristique d'une C-grammaire impropre, lui-même impropre, n'a généralement pas de solution. Il convient donc de considérer un C-langage contenant e, comme la réunion d'un C-langage solution d'une C-grammaire propre et de $\{e\}$. C'est ce que nous ferons, parfois implicitement, dans la suite.

Il nous reste à énoncer dans le cas des C-langages les résultats analogues à ceux du paragraphe précédent pour les séries algébriques.

DEFINITION 2. – *Nous appellerons* C-*transduction toute application* τ *de* X^* *dans* $\mathfrak{P}(\mathrm{Y}^*)$ *qui peut se mettre sous la forme* $\tau f = \mathrm{Tr}(\nu . \mu f)$ *où* μ *est une représentation de* X^* *par des* $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ *matrices, et* ν *est une* $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ *matrice, dont les éléments sont des* C-*langages sur* Y^*.

Nous avons simplement l'énoncé qui généralise les énoncés 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, et 3.3.3. de [6].

THEOREME 1. – *L'image d'un* C-*langage dans toute* K-*transduction ou* C-*transduction est un* C-*langage.*

CHAPITRE IV

T-LANGAGES, T'-LANGAGES ET LANGAGES COMPILABLES

1. L'ensemble de Dyck et de semi-Dyck.

Soit $Z = X \cup \overline{X}$ où X et $\overline{X}$ sont deux ensembles disjoints se correspondant biunivoquement dans l'application de $x \in X$ sur $\overline{x}$ dans $\overline{X}$. Nous empruntons les notations de [12].

Définissons deux applications ρ et ρ' de Z^* dans Z^*.

1 – $\rho(e) = e$, et pour tout $f \in Z^*$, $x \in X$, $x \in \overline{X}$.

$$\rho(fx)\begin{cases} = \rho(f)x \text{ si } \rho(f) \notin Z^*\,\overline{x} \\ = f_1 \text{ si } \rho(f) = f_1\,\overline{x} \end{cases}$$

$$\rho(f\overline{x})\begin{cases} = \rho(f)\overline{x} \text{ si } \rho(f) \notin Z^*x \\ = f_1 \text{ si } \rho(f) = f_1 x \end{cases}$$

2 – $\rho'(e) = e$ et pour tout $f \in Z^*$, $x \in X$, $\overline{x} \in \overline{X}$:

$$\rho'(fx) = \rho'(f)x$$

$$\begin{aligned} \rho'(f\overline{x}) &= \rho'(f)\,\overline{x} \text{ si } \rho'(f) \notin Z^*\,x \\ &= f_1 \text{ si } \rho'(f) = f_1 x. \end{aligned}$$

On démontre facilement que les identités suivantes sont vérifiées [12]

$$\begin{aligned} \forall f, g \in Z^* \qquad & \rho(fg) = \rho(\rho(f)\,.\,g) = \rho(\rho(f)\,\rho(g)) \\ & \rho'(fg) = \rho'(\rho'(f)g) = \rho'(\rho'(f)\,\rho'(g)) \\ \forall f_1, f_2 \in Z^* \qquad & \rho(f) = \rho(g) \Longleftrightarrow \rho(f_1 f f_2) = \rho(f_1 g f_2) \\ & \rho'(f) = \rho'(g) \Longrightarrow \rho'(f_1 f f_2) = \rho'(f_1 g f_2) \end{aligned}$$

ces deux dernières relations signifiant en particulier que les deux relations d'équivalence sur Z^* définies respectivement par

$$f \rho g \Longleftrightarrow \rho(f) = \rho(g)$$
$$f \rho' g \Longleftrightarrow \rho'(f) = \rho'(g)$$

sont deux congruences.

Le quotient Z^*/ρ est le groupe libre à n générateurs si n = card X, que l'on peut identifier à l'ensemble des mots réduits,

$$Z_r = \{f \in Z^* \mid \rho(f) = f\}$$

muni de la loi $f \,.\, g = \rho(fg)$.

Le quotient Z^*/ρ' n'est pas un groupe : c'est seulement un monoïde qui s'identifie à l'ensemble des mots semi-réduits.

$$Z_s = \{f \in Z^* \mid \rho'(f) = f\}$$

muni de la loi $f \circ g = \rho'(fg)$.

Certaines propriétés sont bien connues concernant l'ensemble de Dyck,

$$D^* = \{f \in Z^* \mid \rho(f) = e\}$$

et sont aussi vraies pour l'ensemble de semi-Dyck

$$D'^* = \{f \in Z^* \mid \rho'(f) = e\}$$

L'ensemble des mots de Dyck (resp. semi-Dyck) premiers c'est-à-dire l'ensemble des mots de D^* (resp D'^*) dont aucun facteur gauche n'est dans D^*(resp D'^*), soit D(resp D'), est un code bipréfixe et D^*(resp D'^*) est un sous monoïde librement engendré par D(resp D'). Nous avons même une propriété de factorisation unique pour les mots de D(resp D') (cf : [3])

Soient

$$D_x = \{f \in D \mid f = x f'\} = D \cap x Z^*$$
$$D_{\bar{x}} = D \cap \bar{x} Z^*$$

Tout mot f dans D_x se factorise d'une façon unique en

$$f = x f_1 f_2 \ldots f_k \bar{x}$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_k \in D \backslash D_{\bar{x}}$ et f dans $D_{\bar{x}}$ se factorise en

$$f = \bar{x} f_1 f_2 \ldots f_k x$$

où $f_1, \ldots, f_k \in D \backslash D_x$.

La situation est plus simple pour D$'$, dont tout mot $f \in D'$ se factorise en $f = x f_1 f_2 \dots f_k \overline{x}, f_1, \dots, f_k \cdot D'$ pour quelque x dans X.

Ces propriétés nous permettent d'affirmer que D* et D$'$* sont des C-langages non ambigus, car (D*) et car (D$'$*) étant respectivement composantes de la solution des systèmes :

$$\Sigma \begin{cases} \xi_x = x\,\xi'_x\,\overline{x} + x\overline{x} \\ \xi_{\overline{x}} = \overline{x}\,\xi'_x\,x + \overline{x}x \\ \xi'_x = \sum\limits_{y \in X} \xi_y + \sum\limits_{\overline{y} \neq \overline{x}} \xi_{\overline{y}} + \Big(\sum\limits_{y \in X} \xi_y + \sum\limits_{\overline{y} \neq \overline{x}} \xi_{\overline{y}}\Big)\,\xi'_x \\ \xi'_{\overline{x}} = \sum\limits_{y \neq x} \xi_y + \sum\limits_{y \in \overline{X}} \xi_y + \sum\limits_{y \in x} \xi_{\overline{y}} + \sum\limits_{\overline{y} \in \overline{X}} \xi_{\overline{y}}\ \ \xi'_{\overline{x}} \\ \xi = \Sigma\xi_x + \Sigma\xi_{\overline{x}} + (\Sigma\xi_x + \Sigma\xi_{\overline{x}})\,\xi \end{cases}$$

$$\Sigma' \begin{cases} \zeta_x = x\zeta\overline{x} + x\overline{x} \\ \zeta = \Sigma\zeta_x + (\Sigma\zeta_x)\,\zeta \end{cases}$$

2. T-langages.

THEOREME 1. – *L'image dans une transduction injective d'un C-langage non ambigu est non ambigu.*

En effet considérons L tel que car(L) $= \sigma_1$, où σ_1 est la première composante de la solution du système caractéristique normal Σ : $\Sigma\ :\ \xi_i = \Sigma a_i^{jk}\ \xi_j\ \xi_k + \Sigma\ b_i^j\, x_j$. Soit τ la traduction injective de X* dans Y* : $\tau(f) = \mu f_{1,N}$, le langage τ(L) est le support de la composante $\sigma_1^{1,N}$ de la solution de

$$\tau(\Sigma)\ \xi_i^{l,m} = \Sigma\ a_i^{jk}\ \xi_j^{l,s}\ \xi_k^{s,m} + \Sigma\ b_i^j\ (\mu x_j)_{l,m}$$

Supposons qu'il existe en g tel que $(\sigma_1^{1,N}, g) > 1$.

Il existe alors $s_1, s_2, j_1, j_2, k_1, k_2$ tels que $g = g'_1$, $g''_1 = g'_2\ g''_2$ et les coefficients $(\sigma_{j_1}^{1,s_1}, g'_1)$, $(\sigma_{j_2}^{1,s_2}, g'_2)$, $(\sigma_{k_1}^{s_1,N}, g''_1)$, $(\sigma_{k_2}^{s_2,N}, g''_2)$ sont tous non nuls, ainsi que $a_1^{j_1,k_1}$, $a_1^{j_2,k_2}$.

Mais alors, τ étant injective il existe f_1' , f_1'' , f_2' , f_2'' dans Y* tels (σ_{j_1}, f_1') , (σ_{j_2}, f_2') , (σ_{k_1}, f_1''), (σ_{k_1}, f_2'') sont tous nuls,

$$\mu(f) = g = (\mu f_1')_{1\,,s_1} (\mu f_1'')_{s_1\,,\mathrm{N}} = (\mu f_2')_{1\,,s_2} (\mu f_2'')_{s_2\,,\mathrm{N}}$$

et $f_1' f_1'' = f_2' f_2'' = f$. La non ambiguité de L entraîne $j_1 = k_1$, $j_2 = k_2$, $f_1' = f_1''$, $f_2' = f_2''$ et l'univocité de τ entraîne alors $s_1 = s_2$ donc $g_1' = g_2'$, $g_1'' = g_2''$. En particulier, l'image dans une transduction injective d'un ensemble de Dyck est un langage non ambigu. Nous montrerons plus loin que ce n'est pas le cas de tous les langages non ambigus et nous définissons :

DEFINITION 1. – *Le C-Langage* L *sur* X* *est dit fortement non ambigu, ou encore* T-*langage si et seulement si il existe un ensemble de Dyck* D* *sur* Z* *et une transduction injective* τ *de* Z* *dans* X* *tels que* L = τ(D*).

Le fait qu'une transduction injective a pour inverse une transduction injective permet de donner la définition équivalente souvent plus commode.

DEFINITION 2. – *Le C-langage* L *sur* X* *est un* T-*langage si et seulement si il existe un ensemble de Dyck* D* *sur* Z* *et une transduction injective,* τ *de* X* *dans* Z* *tels que*

$$\forall f \in X^* \; f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in D^* .$$

Un certain nombre de corollaires découlent du fait que le produit de deux transductions injectives est une transduction injective.

PROPRIETE 1. – *L'image d'un* T-*langage dans une transduction injective est un* T-*langage. En particulier, l'intersection d'un* T-*langage et d'un* K-*langage est un* T-*langage, l'image d'un* T-*langage dans un monomorphisme est un* T-*langage.*

PROPRIETE 2. – *Soit* L *dans* X*, *s'il existe une transduction injective* τ *de* X* *dans* Y*, *et un* T-*langage* L' *sur* Y* *tels que :*

$$\forall f \in X^* \quad f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in L'$$

alors L *est un* T-*langage.*

De la même façon nous donnons les deux définitions équivalentes suivantes, laissant au lecteur le soin d'énoncer les deux propriétés analogues aux propriétés 1 et 2 ci-dessus.

DEFINITION 3. – *Le langage* L *de* X* *est un* T'*-langage si et seulement si il existe un ensemble de semi-Dick* D'* *sur* Z* *et une transduction* τ, *injective de* Z* *dans* X* *telle que* $L = \tau(D'^*)$.

DEFINITION 4. – *Le langage* L *de* X* *est un* T'*-langage si et seulement si il existe un ensemble de semi-Dyck* D'* *sur* Z* *et une transduction* τ, *injective de* X* *dans* Z* *telle que* $\forall f \in X^*$:

$$f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in D'^* .$$

3. Systèmes standards et T'-langages.

Dans ce paragraphe nous allons mettre en évidence une famille de T -langages et montrer que tout C-langage est image homomorphe dans un homomorphisme strictement alphabétique d'un T-langage. Le théorème 1 dû à S. Greibach [9] est démontré par une méthode que nous a indiquée MP Schützenberger.

THEOREME 1. – *Pour tout système d'équation* Σ, *on peut construire une extension* Σ' de Σ *de la forme :*

$$\Sigma' : \xi'_j = p'_j \text{ où pour tout } j \text{ supp } p'_j \in X\,\Xi'^2 \cup X\,\Xi' \cup X .$$

Σ' *est dit sous forme standard gauche.*

Soit $\Sigma\ \xi_i = \Sigma\, a_i^{jk}\, \xi_j\, \xi_k + \Sigma\, b_i^j x_j$

$$i = 1\,, \dots , n$$

désignons par σ sa solution $\sigma = (\sigma_1\,, \dots , \sigma_n)$

Σ peut encore s'écrire

$\xi = \xi m + \chi$ où ξ est le vecteur $(\xi_1\,, \dots , \xi_n)$, χ est le vecteur $(\chi_1\,, \dots , \chi_n)$ avec $\chi_i = \Sigma\, b_i^j x_j$, m est $n \times n$ matrice à coefficients dans $Z < \Xi >$: $m_i^j = \sum_k a_i^{jk}\ \xi_k$.

Or m admet un quasi inverse, $p = \lim_{k \to \infty} \sum_{h=1}^{h=k} m^h$ qui est une $n \times n$ matrice à coefficients dans $Z \ll \Xi \gg$ vérifiant la relation $p = m + mp$.

Définissons $\lambda_\sigma m$ comme la matrice $(\lambda_\sigma m)_i^j = \lambda_\sigma(m_i^j)$ et $q = \lambda_\sigma p$ comme la matrice $q_i^j = \lambda_\sigma(p_i^j)$ ce qui nous permet d'écrire

$$q = \lambda_\sigma m + \lambda_\sigma m\, q$$

car λ_σ est un homomorphisme et $\sigma = \chi + \chi\, q$ (qui se vérifie immédiatement en revenant à la définition de σ).

Explicitons ces relations, nous obtenons :

$$-\ \sigma_i = \sum_k \chi_k\, q_i^k + \chi_i$$

$$-\ q_i^j = \sum_k a_i^{jk}\Big(\sum_l \chi_l\, q_k^l + \chi_k\Big) + \sum_h \sum_k a_i^{hk}\Big(\sum_l \chi_l\, q_k^l + \chi_k\Big) q_h^j$$

Prenons alors un ensemble de n^2 variables ζ_i^j et formons le système

$$\Sigma' \left\{ \begin{aligned} \xi_i &= \sum_k \chi_k\, \zeta_i^k + \chi_i \\ \xi_i^j &= \sum_{h,k,l} a_i^{jk}\, \chi_l\, \zeta_k^l\, \zeta_h^j + \sum_{k,l} a_i^{jk}\, \chi_l\, \zeta_k^l + \sum_{h,k} a_i^{hk}\, \chi_k\, \zeta_k^j + \Sigma\, a_i^{jk}\, \chi_k \end{aligned} \right.$$

Les relations précédentes n'expriment rien d'autre que le fait que la solution de Σ' est le vecteur

$$(\sigma_1\,, \ldots, \sigma_n\,, q_1^1\,, \ldots, q_1^n\,, \ldots, q_n^1\,, \ldots, q_n^n)$$

d'où le théorème du à S. Greibach.

DEFINITION 1. – *Le système sous forme standard gauche* Σ :

$$\Sigma \left\{ \begin{aligned} &\xi_i = \Sigma\, a_i^{j,k,l}\, x_j\, \xi_k\, \xi_l + \Sigma\, b_i^{j,k}\, x_j\, \xi_k + \Sigma\, c_i^j\, x_j \\ &i = 1\,, \ldots, n\,. \end{aligned} \right.$$

est dit séparé si pour tout j l'un au plus des coefficients $a_i^{j,k,l}$, $b_i^{j,k}$, c_i^j *est non nul.*

Il est clair qu'à tout système sous forme standard gauche Σ on peut associer un système Σ', sous forme standard gauche et séparé, tel que si Σ est un système en les variables $\xi \in \Xi$ sur X, Σ' soit un système en les mêmes variables sur Y et il existe une surjection de Y sur X qui applique Σ' sur Σ. Ce qui s'énonce encore

PROPRIETE 1. – *Tout C-langage (resp toute série algébrique) est image dans un homomorphisme strictement alphabétique du support d'une composante de la solution d'un système (resp d'une grammaire) sous forme standard gauche séparé.*

Nous n'utiliserons plus dans ce paragraphe que les supports des composantes de tels systèmes, supposés de plus caractéristiques. Ce sont des T-langages, comme nous le démontrons maintenant.

Considérons un tel système Σ que nous écrirons :

$$\xi_i = \Sigma \{x_i^{jk} \ \xi_j \ \xi_k \mid (j, k) \in A_i\} + \Sigma \{b_i^j \ \xi_j \mid j \in B_i\} + \Sigma \{x_l \mid l \in C_i\}$$

pour distinguer les lettres figurant dans les équations, lettres de l'alphabet X. Prenons $Z = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n\}$. Posons

$$L_i = \text{supp } \sigma_i$$

et définissons le monomorphisme $\varphi : X^* \longrightarrow Z^*$ par

$$\varphi(x_i^{jk}) = \overline{\alpha}_i \, \alpha_k \, a_j \, , \varphi(x_i^j) = \overline{\alpha}_i \, \alpha_j \quad \text{et} \quad \varphi(x_l) = \overline{\alpha}_i \ \text{ pour tout } \ l \in C_i \, .$$

Nous avons :

$$\forall f \in X^* \quad f \in L_i \Longleftrightarrow \rho'(\varphi(f)) = \overline{\alpha}_i$$

Montrons $L_i \subset \{f \in X^* \mid \rho'(\varphi(f)) = \overline{\alpha}_i\} = \varphi^{-1}(\rho'^{-1}(\overline{\alpha}_i))$.

L'inclusion $L_i \cap X \subset \varphi^{-1} \ (\rho'^{-1}(\overline{\alpha}_i))$ est évidente. Faisons une récurrence sur la longueur des mots.

Tout mot $f \in L_i$ peut se factoriser soit en $f = x_i^{jk} \, f' \, f''$, $f' \in L_j$, $f'' \in L_k$, soit en $f = x_i^j f'$, $f' \in L_j$.

Si l'on suppose $\rho' \varphi(f') = \overline{\alpha}_j$ et $\rho' \varphi(f'') = \overline{\alpha}_k$ il en découle dans les deux cas $\rho' \varphi(f) = \overline{\alpha}_i$.

Réciproquement remarquons que d'après la définition de ρ'

$$\forall g \in Z^* \ : \ \rho'(\overline{\alpha}_i \, g) \neq e$$

et raisonnons par récurrence sur la longueur du mot $g \in Z^*$ tel que $\rho'(g) = \overline{\alpha}_i$, $g = \varphi(f)$. Il est clair que

$$\rho'(g) = \overline{\alpha}_i \,, |g| = 1 \,, g = \varphi(f) \Longrightarrow f \in L_i \,.$$

Considérons donc g, $|g| > 1$. Les trois cas suivants se présentent

1 – $g = \overline{\alpha}_i\, g'$, $g' \in \varphi(X^*)$

2 – $g = \overline{\alpha}_i\, \alpha_j\, g'$, $g' \in \varphi(X^*)$

3 – $g = \overline{\alpha}_i\, \alpha_k\, \alpha_j\, g'$, $g' \in \varphi(X^*)$.

Examinons les :

1 – $g = \overline{\alpha}_i\, g'$, $g' \in \varphi(X^*)$ entraîne $g' = \overline{\alpha}_k\, g''$, $\rho'(g') = e$ ce qui n'est pas

2 – $g = \overline{\alpha}_i\, \alpha_j\, g'$, $g' \in \varphi(X^*)$ entraîne $\rho'(g') = \overline{\alpha}_j$ donc

$$g' = \varphi(f') \,, f' \in L_j \quad \text{d'où} \quad g = \varphi(x_i^j\, f') = \varphi(f) \,, f \in L_i$$

3 – $g = \overline{\alpha}_i\, \alpha_k\, \alpha_j\, g'$, $g' \in \varphi(X^*)$ entraîne qu'il existe

$$g'' \in \varphi(X^*) \,, g' = g''\, g''' \quad \text{tel que} \quad \rho'(g'') = \overline{\alpha}_j \,.$$

En effet $\rho'(g') = \overline{\alpha}_j\, \overline{\alpha}_k$. Supposons qu'il existe g'' tel que $g' = g''\, g'''$ et $\rho'(g'') \notin \overline{\alpha}_j \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}^* \cup \overline{\alpha}_j \alpha_k \{\overline{\alpha}_1, \ldots, \alpha_n\}^*$ cela entraîne $\rho'(g') \neq \overline{\alpha}_j\, \overline{\alpha}_k$.

Considérons alors le facteur gauche g'' le plus long de g' tel que $\rho\,(g'') \in \overline{\alpha}_j \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}^*$. Certainement alors $\rho'(g'') = \overline{\alpha}_j$ mais aussi $g'' \in \varphi(X^*)$. D'où finalement $g' = g''\, g'''$, $\rho'(g'') = \overline{\alpha}_j$, $\rho'(g''') = \overline{\alpha}_k$ $g'' = \varphi(f'')$, $f'' \in L_i$, $g''' \in \varphi(f''')$, $f''' \in L_k$ et

$$g = \varphi(x_i^{jk}\, f''\, f''') = \varphi(f) \,, f \in L_i$$

Nous avons bien établi (1).

Mais l'application τ de X^* dans Z^* définie par $\tau(f) = \alpha_i\, \varphi(f)$ est une transduction injective puisque

$$\tau(f) = \tau(f') \Longleftrightarrow \alpha_i\, \varphi(f) = \alpha_i\, \varphi(f') \Longleftrightarrow f = f'$$

puisque φ est un monomorphisme.

L_i est un T'-langage et nous avons montré le théorème qui améliore le théorème 3.1. de Schützenberger [19].

THEOREME 2. – *Tout C-langage est image d'un T'-langage dans un homomorphisme strictement alphabétique.*

La méthode employée pour la démonstration du théorème 2, va nous permettre maintenant de démontrer le théorème 4.3 de Shamir [27]. Considérons en effet le système sous forme standard gauche :

$$\Sigma : \xi_i = p_i \quad \text{avec} \quad p_i \subset X\,\Xi^2 \cup X\,\Xi \cup X$$

sur l'alphabet X. Σ est image dans un homomorphisme strictement alphabétique de Σ', sous forme standard gauche caractéristique et séparé. Supposons Σ'sur X' et $\Psi : X'^* \longrightarrow X^*$ l'homomorphisme en question.

Définissons $\varphi : X^* \longrightarrow \beta(Z^*)$ où

$$Z = \{\alpha_1\,, \ldots, \alpha_n\,, \bar{\alpha}_1\,, \ldots, \bar{\alpha}_n\}$$

par

$$\varphi(x) = \{\bar{\alpha}_i\ \alpha_k\ \alpha_j \mid x\xi_j\ \xi_k \in \operatorname{supp} p_i\} \cup \{\bar{\alpha}_i\ \alpha_j \mid x\xi_j \in \operatorname{supp} p_i\}$$
$$\cup\ \{\bar{\alpha}_i \mid x \in \operatorname{supp} p_i\}.$$

Soit $\varphi(x) = \{\varphi'(x') \mid x' \in \Psi^{-1}(x)\}$, φ' étant l'homomorphisme considéré plus haut.

Nous avons si σ est la solution de Σ :

$$\operatorname{supp} \sigma_i = \{f \mid \varphi(f) \cap \rho'^{-1}(\bar{\alpha}_i) \neq 0\}.$$

En effet $\varphi(f) \cap \rho'^{-1}(\bar{\alpha}_i) \neq 0$ implique qu'il existe

$$g \in \Psi^{-1}(f)\,,\ \varphi'(g) \in \rho^{-1}(\bar{\alpha}_i)$$

c'est-à-dire qu'il existe $g \in \operatorname{supp} \sigma_i'$ où σ' est la solution de Σ' tel que $\Psi(g) = f$.

Nous avons même

$$(\sigma_i\,, f) = \operatorname{card}\,(\varphi(f) \cap \rho'^{-1}(\bar{\alpha}_i))$$

puisque

$$(\sigma_i\,, f) = \Sigma\{(\sigma_j\,, f)\ (\sigma_k\,, f'') \mid f = xf'\,f''\,, x\ \xi_j\ \xi_k \in \operatorname{supp} p_i\}$$
$$+\ \Sigma\{(\sigma_j\,, f') \mid f = xf'\,, x\ \xi_j \in \operatorname{supp} p_i\} +\ \Sigma\{1 \mid f{=}x\,, x \in \operatorname{supp} p_i\}$$

(d'après des remarques faites au chapitre III).

Or tout mot de $\varphi(f) \cap \rho'^{-1}(\alpha_i)$ est de l'une des formes

$-\ \overline{\alpha}_i\, \alpha_k\, \alpha_j\, g'\, g''$ où $\rho'(g') = \overline{\alpha}_j$, $\rho'(g'') = \overline{\alpha}_k$, $g' \in \varphi(f')$, $g'' \in \varphi(f'')$, $f = xf'f''$, $x\, \xi_j\, \xi_k \in \operatorname{supp} p_i$

$-\ \overline{\alpha}_i\, \alpha_j\, g'$ où $\rho'(g') = \overline{\alpha}_j$, $g' \in \varphi(f')$, $f = xf'$, $x\, \xi_j \in \operatorname{supp} p_i$

$-\ \overline{\alpha}_i$

D'où la relation, par récurrence sur $|f|$.

Mais en fait nous pouvons aussi bien faire le même calcul si Σ n'est pas caractéristique. Nous définirons

$$\varphi : X^* \longrightarrow Z < Z > \text{ par}$$

$$\varphi(x) = \Sigma\{d_i^{jk}\ \overline{\alpha}_i\, \alpha_k\, \alpha_j \mid (p_i\, , x\, \xi_j\, \xi_k) = d_i^{jk}\} + \Sigma\{b_i^j\, \overline{\alpha}_i\, \alpha_j \mid (p_i\, , x\, \xi_i) = b_i^j\} + \Sigma\ \{c_i\ \overline{\alpha}_i \mid (p_i\, , x) = c_i\},$$

et nous avons pour tout f dans X^* :

$$(\sigma_i\, , f) = \Sigma\ \{(\varphi(f)\ , g) \mid \rho'(g) = \overline{\alpha}_i\}$$

La relation qui définit les coefficients $(\sigma_i\, , f)$ est en effet la même que plus haut.

Nous énoncerons le théorème

THEOREME 3. – *Pour toute série algébrique* $a \in Z \ll X \gg$ *il existe un homomorphisme* φ *de* X^* *dans* $Z < Z >$, *où* Z^* *est un monoïde libre sur lequel est défini l'application* ρ' *et l'ensemble de semi-Dyck* $D'^* = \rho'^{-1}(e)$, *telle que*

$$\exists\, \gamma \in Z^* : (a\, , f) = \Sigma\{(\varphi(f)\, , g) \mid \rho'(g) = \gamma\}$$

pour tout f *dans* X^*.

4. Le complémentaire d'un langage de Dyck.

Reprenons le langage de Dyck D^* sur Z^* où

$$Z = \{x_1\, , \dots , x_n\, , x_{n+1}\, , \dots , x_{2n}\} \quad \text{et}$$

$$\overline{x}_i = x_{i+n} \quad \text{si} \quad i \leqslant n\, ,\ \overline{x}_i = x_{i-n} \quad \text{si} \quad i > n$$

Désignons par D l'ensemble des mots premiers et

$$D_i = D \cap x_i\, Z^*$$

$$\hat{D}_i = x_i\ (\cup\ D_j \mid x_j \neq x_i\ )^*$$

Nous avons le théorème

THEOREME 1. – *Soit* $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ *un mot réduit de* Z^*. *Tout mot* g *de* Z^* *tel que* $\rho(g) = f$ *se factorise de manière unique en* $g = g_o\, g_{i_1} \ldots g_{i_k}$ *où* $g_o \in D^*$ *et pour tout* $l = 1, \ldots, k$: $g_{i_l} \in \hat{D}_{i_l}$.

Prenons tout d'abord $k = 1$. Il est clair que $g \in \hat{D}_i$, $g' \in Z\, Z^*$ $g = g' g'' \Longrightarrow \rho(g') \in x_i X^*$. Si donc le mot f tel que $\rho(f) = x_i$ se factorise en $f = f' f''$, $f' \in D^*$, $f'' \in \hat{D}_i$, f' est le facteur gauche le plus long de f' tel que $f' \in D^*$ d'où l'unicité. Si au contraire $\rho(f) = x_i$ et $f = f' f''$ où f' est le facteur gauche le plus long de f qui soit dans D^*, alors $f'' = x_i f'''$, $f''' \in (\cup \{D_j \mid x_j \neq \overline{x}_i\})^*$. Si ce n'était pas le cas on aurait

– soit $f'' = x_k f'''$, $x_k \neq x_i$ et la condition $\rho(f'') = x_i$ entraîne qu'il existe f^{IV} dans D^*, f^{V} dans X^* tels que

$$f'' = x_k f^{\mathrm{IV}}\, \overline{x}_k f^{\mathrm{V}} \qquad \text{d'où} \qquad \rho(f'' x_k f^{\mathrm{IV}}\, \overline{x}_k) = e$$

contredisant la maximalité de f'.

– soit $f'' = x_i f'''$, $f''' \in D^*$. S'il existait $f^{\mathrm{IV}}, f^{\mathrm{V}}, f^{\mathrm{VI}}$ dans D^* tels que $f''' = f^{\mathrm{IV}}\, \overline{x}_i f^{\mathrm{V}} x_i f^{\mathrm{VI}}$ on aurait $\rho(f' x_i f^{\mathrm{IV}}\, \overline{x}_i) = e$ contredisant la maximalité de f'.

Le théorème est établi pour $k = 1$, supposons le donc vrai pour $l < k$ et considérons f tel que $\rho(f) = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.

Comme précédemment on remarque que si f se factorise en $f = f_0\, f_{i_1} \ldots f_{i_k}$, $f' = f_0\, f_{i_1} \ldots f_{i_{k-1}}$ est le facteur gauche le plus long de f tel que $\rho(f') = x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$ d'où l'unicité.

Réciproquement supposons que $f = f' f''$ ou f' est le facteur gauche le plus long de f tel que $\rho(f') = x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$. Le même raisonnement que précédemment démontre que $f'' \in \hat{D}_{i_k}$ et l'hypothèse de récurrence entraîne que f' se factorise de façon unique en

$$f' = f_0\, f_{i_1} \ldots f_{i_{k-1}},$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. – *L'ensemble des mots* g *tels que*

$$\rho(g) = f$$

où f est un mot réduit, soit $\rho^{-1}(f)$ est un C-langage non ambigu.

Reprenons en effet le système d'équations décrivant D*

$$\Sigma \begin{cases} \xi_i = x_i\, \xi_i'\, \overline{x}_i + x_i\, \overline{x}_i \\ \xi_i' = \sum\limits_{x_j \neq \overline{x}_i} \xi_j + \sum\limits_{x_j \neq \overline{x}_i} \xi_j\, \xi_i' \\ \xi_0 = \Sigma \xi_i + (\Sigma \xi_i)\, \xi_o \end{cases}$$

Les supports des composantes σ_i' de la solution ne sont autres que les ensembles

$$\Big(\bigcup_{x_j \neq \overline{x}_i}\Big) D_i{}^*$$

D'où le système

$$\Sigma' \begin{cases} \Sigma \quad ; \xi_i'' = x_i\, \xi_i' \\ \xi_{i_1, \ldots, i_k} = \xi_o\, \xi_{i_1}'' \ldots \xi_{i_k}'' \end{cases}$$

tel que $\rho^{-1}(x_{i_1} \ldots x_{i_k})$ est le support de la composante $\sigma_{i_1, \ldots, i_k}$ de la solution. La non ambiguité vient de l'unicité de la factorisation précédente.

COROLLAIRE 2. – *Le complémentaire de* D*, Z*\D* *est un* C-*langage non ambigu sur* Z*. Ce résultat découle du théorème 2 : 3 de Ginsburg et Greibach [8]. En effet considérons l'ensemble R des mots réduits sur Z*. R est un K-langage local, donc aussi un C-langage. Nous pouvons écrire le système suivant :

$$\text{(H)} \begin{cases} \zeta_i = \sum\limits_{x_j \neq \overline{x}_i} x_i\, \zeta_j + x_i \\ \zeta_0 = \Sigma \zeta_i \end{cases}$$

tel que car(R\{e}) soit précisément égal à la composante θ_0 de la solution. Or

$$Z^*\backslash D^* = \{f \in Z^* \mid \rho(f) \in R\backslash\{e\}\} = \rho^{-1}(R\backslash\{e\}).$$

D'où le système (H)' dont car(Z*\D*) est une composante de la solution.

$$
\text{(H)}' \begin{cases}
\xi_i = x_i \, \xi'_i \, \overline{x}_i + x_i \, \overline{x}_i \\
\xi'_i = \sum\limits_{x_j \neq \overline{x}_i} \xi_j + \Big(\sum\limits_{x_j \neq \overline{x}_i} \xi_j \Big) \xi'_i \\
\xi''_i = x_i \, \xi'_i \,, \xi_o = \Sigma \xi_i + (\Sigma \xi_i) \, \xi_o \\
\zeta_i = \sum\limits_{x_j \neq \overline{x}_i} \xi''_i \, \zeta_j + \xi''_i \\
\zeta_0 = \Sigma \xi_0 \, \zeta_i
\end{cases}
$$

Cela résulte directement du corollaire 1 précédent.

Nous noterons maintenant que si R' est une partie de R, qui peut être :

– finie

– cofinie ie card $(R \backslash R') < \infty$

– un K-langage quelconque

– un C-langage non ambigu

$\rho^{-1}(R')$ est encore un C-langage non ambigu sur Z^*. Aussi peut-on énoncer par exemple.

COROLLAIRE 3. – *Si* φ *est un homomorphisme de* X^* *dans le groupe libre à n générateurs et* Γ' *est une partie finie de* Γ , $\varphi^{-1}(\Gamma')$ *et* $\varphi^{-1}(\Gamma \backslash \Gamma')$ *sont des* C-*langages sur* X^*.

Car si nous identifions Γ à l'ensemble des mots réduits sur Z^* muni de la loi $f \,.\, g = \rho(fg)$, il existe un homomorphisme Ψ de X^* dans Z^* tel que

$$
f \in Y^* \quad \varphi(f) = \rho(\Psi(f)) \quad \text{d'où} \quad \varphi^{-1}(\Gamma') = \rho^{-1}(\Gamma')
$$

Si Γ' est finie ou cofinie, $\rho^{-1}(\Gamma')$ est un C-langage sur Z^*, dont l'image homomorphe inverse est un C-langage.

Dans l'énoncé du corollaire 3 on peut remplacer l'homomorphisme φ par une transduction.

Enfin nous avons le théorème.

THEOREME 1. – *Le complémentaire d'un* T-*langage est un* C-*langage.*

En effet, supposons que $L \subset X^*$ soit tel qu'il existe un ensemble de Dyck $D^* \subset Z^*$ et une transduction injective τ de Z^* dans X^* telle que $L = \tau(D^*)$.

Soit $K = \tau(X^*)$ qui est un K-langage sur X^*. L'injectivité de τ entraîne que $\tau(D^*)$ et $\tau(Z^*\backslash D^*)$ sont disjoints d'où

$$X^*\backslash L = (X^*\backslash K) \cup \tau(Z^*\backslash D^*)$$

est une union de C-langages donc un C-langage.

Remarque. – Le complémentaire d'un T-langage n'est pas un T-langage comme il résulte du paragraphe suivant.

5. Langages compilables.

DEFINITION 1. – *Le langage* $L \subset X^*$ *est dit compilable si et seulement si il existe un ensemble de Dyck* D^* *sur* Z^* *et une transduction* τ *univoque de* X^* *dans* Z^* *telle que :*

$$\forall f \in X^* : f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in D^*$$

Remarquons tout de suite (cf § 2 de ce chapitre) que :

PROPRIETE 1. – *Soit* $L \subset X^*$. *S'il existe une transduction univoque* τ *de* X^* *dans* Y^* *et un* T-*langage (resp : un langage compilable)* $L' \subset Y^*$ *telle que* $\forall f \in X^*$: $f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in L'$ *alors* L *est compilable.*

Un résultat important les concernant est le :

THEOREME 1. – *Tout langage compilable est non ambigu.*

Commençons par une remarque :

Soit $\tau : X^* \longrightarrow Y^*$ une transduction univoque. Nous avons construit au chapitre II la transduction inverse $\tau^{-1} : Y^* \longrightarrow \beta(X^*)$ sous la forme $\tau^{-1}(g) = \mathrm{Tr}(\nu . \mu g)$ où μ est une représentation de Y^* par des matrices à éléments de $\mathfrak{p}(X^*)$. Si $\bar{\mu}$ est la représentation de Y^* par les matrices à éléments dans $Z \ll X \gg$ définie par :

$$\forall f \in Y^* : (\overline{\mu} f)_{i,j} = \text{car}\,(\mu f_{i,j})$$

et si $\overline{\nu}_{i,j} = \text{car}(\nu_{i,j})$,
Nous avons car $\tau^{-1}(g) = \text{Tr}(\overline{\nu}\,.\,\overline{\mu} g)$.
puisque tout mot f correspond à une et une seule suite résolvante (cf chapitre II).

Grâce au lemme 1.8.1 nous pouvons encore écrire :

$$\text{car}\,\tau^{-1}(g) = \overline{\lambda}\, g_{1,N}$$

où $\overline{\lambda}$ est encore une représentation de X* par des matrices à éléments dans $\mathbf{Z} \ll X \gg$.

Ce qui implique la condition fondamentale.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall f \in Y^*,\ \forall l_1, l_2 \quad 1 \leqslant l_1, l_2 \leqslant N \\ \quad f = f_1' f_1'' = f_2' f_2'' \quad \text{et} \quad \exists g_1, g_2 \in Y^* : \\ ((\overline{\lambda} g_1)_{1,l_1}, f_1'),\ ((\overline{\lambda} g_1)_{1,l_2}, f_2'),\ ((\overline{\lambda} g_2)_{l_1,N}, f_1''), \\ ((\overline{\lambda} g_2)_{l_2,N}, f_2'') \ \text{sont tous non nuls} \\ \Longrightarrow l_1 = l_2 \quad \text{et} \quad f_1' = f_2',\ f_1'' = f_2'' \end{array}\right. \qquad (1)$$

C'est cette condition qui va nous servir.

Démonstration du théorème 1.

Soit L compilable $L \subset X^*$ et $\tau : X^* \longrightarrow Z^*$ telle que

$$\forall f \in X^* \quad f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in D^*$$

Nous avons $L = \tau^{-1}(D^*)$ et si nous prenons car $\tau^{-1}(g) = \overline{\lambda} g_{1,N}$ conformément à la remarque ci-dessus, nous pouvons construire le système $\tau(\Sigma)$ où $\Sigma : \xi_i = \Sigma\, a_i^{jk}\, \xi_j\, \xi_k + \Sigma\, b_i^j\, z_j$ est tel que

$$\text{car}\,(D^*) = \sigma_1\,,$$

première composante de la solution σ de Σ.

Ainsi $\tau(\Sigma)$:

$$\xi_i^{l,m} = \Sigma\, a_i^{jk}\, \xi_j^{l,s}\, \xi_k^{s,m} + \Sigma\, b_i^j\, (\overline{\lambda} z)_{l,m}$$

D'après le théorème 3.10.1, L = supp $(\sigma_1^{1,N})$ composante correspondant à $\xi_1^{1,N}$ de la solution de $\tau(\Sigma)$. Montrons qu'en fait

$$\text{car } L = \sigma_1^{1,N} .$$

Pour cela supposons qu'il existe $f \in X^*$ tel que

$$f = f_1' \, f_1'' = f_2' f_2''$$

et il existe $s_1, s_2, j_1, j_2, k_1, k_2$ satisfaisant :

$$a_1^{j_1,k_1}, a_1^{j_2,k_2}, (\sigma_{j_1}^{1,s_1}, f_1'), (\sigma_{j_2}^{1,s_2}, f_2'), (\sigma_{k_1}^{s_1,N}, f_1''), (\sigma_{k_2}^{s_2,N}, f_2'')$$

tous non nuls.

Alors il existe $g_1', g_1'', g_2', g_2'' \in Z^*$ tels que

$$((\bar{\lambda} g_1')_{1,s_1}, f_1'), ((\bar{\lambda} g_2')_{1,s_2}, f_2'),$$

$((\bar{\lambda} g_1'')_{s_1,N}, f_1''), ((\bar{\lambda} g_2'')_{s_2,N}, f_2'')$ sont tous nuls et

$$(\sigma_{j_1}, g_1'), (\sigma_{j_2}, g_2'), (\sigma_{k_1}, g_1''), (\sigma_{k_2}, g_2'')$$

sont tous non nuls.

Mais cette dernière condition implique puisque D* est non ambigu $j_1 = j_2$, $k_1 = k_2$, $g_1' = g_2'$, $g_1'' = g_2''$.

Mais alors d'après (1) $s_1 = s_2$, $f_1' = f_2'$, $f_1'' = f_2''$.

Le théorème 1 est établi.

Remarque. – Nous ne nous sommes servis que de la non ambiguité de D* si bien que nous pouvons tout aussi bien énoncer :

COROLLAIRE 1. – *Soient* $L \subset X^*$, L' *dans* Y^* *sont tels qu'il existe une transduction univoque* τ *de* X^* *dans* Y^* *avec*

$$\forall f \in X^* \quad f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in L'$$

Si L' *est non ambigu,* L *aussi.*

Les langages compilables ont les principales propriétés suivantes :

PROPRIETE 1. – *L'image d'un langage compilable dans une transduction injective est un langage compilable.*

En particulier :

– l'image dans un monomorphisme d'un langage compilable est un langage compilable (et ceci est pratiquement important car on peut coder tout langage compilable sur un alphabet réduit sans se soucier de la structure du code).

– l'intersection d'un K-langage et d'un langage compilable est compilable.

DEFINITION 2. – *Deux langages* L_1 *et* L_2 *sur* X^* *sont dits* K-*disjoints si et seulement si il existe un* K-*langage* K *tel que* $L_1 \subset K$ *et* $L_2 \cap K = \emptyset$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 1. – *Si* $L \subset X^*$ *est compilable et si* $K \subset X^*$ *est un* K-*langage contenant* L, *il existe une transduction univoque* τ *de* X^* *dans* Z^* *telle que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

– $\forall f \in X^* \quad f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in D^*$

– $\forall f \in K \quad \tau(f) = 0.$

En effet, il existe L étant compilable une représentation μ de X^* par des matrices à éléments dans $Z^* \cup \{0\}$ telle que

$$\forall f \in X^* \quad f \in L \Longleftrightarrow \mu f_{1,N} \in D^* .$$

K étant un K-langage il existe une 0, 1 représentation λ de X^* telle que

$$\forall f \in X^* \ : f \in K \Longleftrightarrow \lambda f_{1,M} = 1$$

Nous pouvons substituer aux éléments égaux à 1 des matrices λx, l'élément neutre e de Z^* et obtenir ainsi une représentation, notée encore λ, de X^* par des matrices à éléments dans $Z^* \cup 0$ telle que

$$\forall f \in X^* \quad f \in K \Longleftrightarrow \lambda f_{1,M} = e$$

Faisons alors le produit de Kronecker des représentations λ et μ, en posant pour tout $x \in X$

$$\nu x_{(i,j),(i',j')} = \lambda x_{(i,i')} \, \mu x_{(j,j')}$$

Comme $\lambda x_{(i,i')}$ ne peut être que 0, ou e qui commute avec tout mot de Z^*, c'est un simple calcul de vérifier

$$\nu f_{(i,j),(i',j')} = \lambda f_{(i,i')} \, \mu f_{(j,j')}$$

d'où $\nu f_{(1,1),(M,N)} \in D^*$ si et seulement si $\lambda f_{(1,M)} = e$ et $\mu f_{(1,N)} \in D^*$. La transduction $\tau(f) = \nu f_{(1,1),(M,N)}$ répond aux conditions du lemme.

PROPRIETE 2. – *L'union de deux langages compilables et* K-*disjoints est un langage compilable.*

En effet, soient L_1 tel que

$$\forall f \in X^* \quad f \in L_1 \iff \mu_1 f_{(1,N_1)} \in D_1^*$$

et L_2 tel que $\forall f \in X^* \quad f \in L_2 \iff \mu_2 f_{(1,N_2)} \in D_2^*$ où D_1^*, D_2^* sont les ensembles de Dyck sur Z_1^* et Z_2^* supposés disjoints.

Formons la somme directe des deux représentations μ_1 *et* μ_2 soit $\mu = \mu_1 \oplus \mu_2$

$$\mu x_{(i,j)} \begin{cases} = \mu_1 x_{(i,j)} & \text{si} \quad i\,,j \leqslant N_1 \\ = \mu_2 \, x_{(i-N_1),(j-N_1)} & \text{si} \quad i\,,j > N_1 \\ = 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ainsi $\mu f_{1\,,N_1} = \mu_1 \; f_1 \; f_{1,N_1}$

$$\mu f_{N_1+1\,,\,N_1+N_2} = \mu_2 \;\, f_{1\,,\,N_2}$$

L_1 et L_2 étant K-disjoints, nous pouvons faire en sorte que $\mu_1 \;\, f_{1\,,N_1}$ et $\mu_2 \, f_{1,N_2}$ ne sont simultanément non nuls pour aucun f dans X^* ce qui nous permet de prendre la trace $\mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ où ν est la matrice $\nu_{i,j} = e$ si et seulement si $i = N_1 \;, j = 1$ ou $i = N_1 + N_2 \,, j = N_1 + 1$ et de définir la transduction univoque $\tau(f) = \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ de X^* dans $(Z_1 \cup Z_2)^*$.

Si D^* est l'ensemble de Dyck sur $(Z_1 \cup Z_2)^*$ nous avons $\tau(f) \in D_2^*$ si et seulement si $\mu_1 \; f_{1,N_1} \in D_1^*$ ou $\mu_2 \; f_{1,N_2} \in D_2^*$.

D'où la propriété.

COROLLAIRE. – *L'union d'un* K-*langage et d'un langage compilable est compilable.*

En effet, soient K et L sur X^* :

$K \cup L = K \cup ((X^* \backslash K) \cap L))$ et $L' = (X^* \backslash K) \cap L$ est un langage compilable si en L en est un, K est un K-langage donc un langage compilable, K et L′ sont K-disjoints par construction.

A défaut de pouvoir démontrer que la condition d'être K-disjoints est nécessaire pour que l'union de 2 langages compilables soit compilable remarquons que la condition d'être K-disjoints n'est pas inutile comme le prouve l'exemple du langage

$$L = \{a^n\, b^n \mid n \geqslant 1\} \cup \{a^n\, b^{2n} \mid n \geqslant 1\}\ ,$$

union de deux langages évidemment compilables, mais non K-disjoints. L n'est pas compilable, comme nous le démontrons maintenant. Appelons $\mu_{1,N}$ une transduction de {a , b}* dans Z* qui est telle que $\forall f \in \{a\,,\,b\}^* : f \in L \Longleftrightarrow \mu f_{1,N} \in D^*$.

Un cycle de μb est un entier k tel qu'il existe une suite d'indices $i\,,\,i_1\,,\,\ldots\,,\,i_{k-1}$ tous distincts et

$$\mu b^k_{i,i} = \mu\, b_{i,i_1}\ \ \mu\, b_{i_1,i_2} \ldots \mu\, b_{i_{k-1},i} \neq 0$$

L'ensemble des cycles de $\mu\, b$ est un ensemble fini d'entiers $k_1\,,\,\ldots\,,\,k_n$ dont le plus petit commun multiple sera désigné par m.

Soit alors n assez grand, n multiple de m, il existe un indice j tel que : $\mu\, a^n\, b^n_{1,N} = \mu\, a^n_{1,j}\ \ \mu\, b^n_{j,N} \in D^*$, et n étant assez grand :

$$\mu\, b^n_{j,N} = \mu\, b^h_{j,i}\ \mu\, b^k_{i,i}\ \mu\, b^l_{i,N}$$

où k est un cycle.

Considérons p tel que $h + pk + l = 2\,(h + k + l)$, soit

$$p = \frac{h+l}{k} + 2$$

(qui est un entier)

et $$\mu b^n_{j,i}\ (\mu\, b^k_{i,i})^p\ \ \mu\, b^l_{i,N} = \mu\, b^{2n}_{j,N}$$

Nous savons qu'il existe au plus un indice j' tel que

$$\mu\, a^n\ b^{2n}_{1,N} = \mu\, a^n_{1,j'}\ \mu\, b^n_{j',N}$$

soit non nul donc $\mu a^n_{1,j}\ \mu b^{2n}_{j,N} \in D^*$ ce qui entraîne $\mu\, b^n_{j,N} = \mu\, b^{2n}_{j,N}$. Posant $f_1 = \mu\, b^h_{j,i}$, $f_2 = \mu\, b^k_{i,i}$, $f_3 = \mu\, b^l_{i,N}$. Nous avons ainsi

$$f_1 f_2\, f_3 = f_1\, (f_2)^p\, f_3 \quad \text{d'où} \quad f_2 = e\,.$$

Mais alors $f_1\ f_3 = f_1\ f_2\ f_3$ et $\mu a^n b^{n-k}_{1,N} = \mu a^n_{1,j}\ \mu b^h_{j,i}\ \mu b^l_{i,N} \in D^*$ ce qui n'est pas.

Q.E.D.

Nous avons ainsi démontré la :

PROPRIETE 3. – *Il existe des langages non ambigus qui ne sont pas compilables.*

Remarque. – Le langage L en question a été démontré par S. Ginsburg n'être pas déterministe. La définition des langages déterministes se trouve dans [8] et également au chapitre V de ce travail.

PROPRIETE 4. – *Le complémentaire d'un langage compilable* L *sur* X*, *soit* $L' = X^* \backslash L$ *est un* C-*langage non ambigu.*

En effet, soit $\tau : X^* \longrightarrow D^*$ une transduction telle que

$$\forall f \in X^* \quad f \in L \Longleftrightarrow \tau(f) \in D^* .$$

Nous avons $L' = K \cup L''$ où $K = \tau^{-1}(0)$ est un K-langage et

$$L'' = \{ f \in X^* \mid \tau(f) \in Z^* \backslash D^* \}$$

est un C-langage non ambigu puisque $Z^* \backslash D^*$ en est un (corollaire du théorème 1).

De fait le complémentaire d'un ensemble de Dyck n'étant pas compilable, nous ne saurions en dire plus sur L'.

Montrons que $X^* \backslash D^*$ n'est pas compilable. S'il l'était nous saurions (propriété 1) que

$$X^* \backslash D^* \cap xx^* \bar{x}\ \bar{x}^* = \{ x^n\ \bar{x}^{-n'} \mid n, n' \geqslant 1, n' \neq n \}$$

est aussi compilable. Or nous pouvons reprendre l'argument du théorème 2 pour prouver qu'il n'en est rien.

Considérons $L = a^n\ b^{n'} \mid n, n' \geqslant 1,\ n' \neq n$ et supposons qu'il existe $\mu_{1,N}$ tel que $\forall f \in \{a, b\}^*\ \ f \in L \Longleftrightarrow \mu f_{1,N} \in \Delta^*$

Reprenons un n assez grand, n multiple de m tel que

$$\mu a^{2n}\ b^n_{1,N} = \mu\ a^{2n}_{1,j}\ \mu\ b^n_{j,N} \in \Delta^*$$

Nous pouvons écrire : $\mu b^n_{j,N} = \mu b^h_{j,i}\ \mu b^k_{i,i}\ \mu b^l_{i,N}$ où k est un cycle.

Il existe de la même façon un p tel que : $\mu b^{2n}_{j,\mathrm{N}} = \mu b^{h}_{j,i} (\mu b^{k}_{i,i})^{p} \mu b^{l}_{i,\mathrm{N}}$ d'où si $f_1 = \mu b^{h}_{j,i}$, $f_2 = \mu b^{k}_{i,i}$, $f_3 = \mu b^{l}_{i,\mathrm{N}}$: $f_1 (f_2)^q f_3 \in \Delta^*$ pour tout $q \neq p$, ce qui est impossible.

Ainsi le complémentaire d'un langage compilable n'est en général pas compilable et ceci prouve que les langages déterministes ne sont pas compilables puisque leur complémentaire est déterministe.

Au contraire le langage

$$\mathrm{L} = \{c^n\, a\, b^{2n} \mid n > 1\} \cup \{c^n\, a\, b^{4n+1} \mid n \geqslant 1\}$$

est compilable puisqu'il est union de 2 langages compilables K-disjoints

$$\mathrm{L}_1 \subset \mathrm{C}^*\, a\, (bb)^*$$

$$\mathrm{L}_2 \subset \mathrm{C}^*\, ab\, (bb)^*$$

Or L n'est pas déterministe puisque le langage

$$\mathrm{L}' = \{a^n\, b^n \mid n \geqslant 1\} \cup \{a^n\, b^{2n} \mid n \geqslant 1\}$$

est image de L dans l'application inverse d'une application séquentielle cf. [8]

Remarque. – On peut démontrer de façon tout à fait analogue que le langage de semi-Dyck n'est pas compilable et ceci justifie la considération de langages semi-compilables définis comme les langages compilables en utilisant seulement le langage de semi-Dyck à la place du langage de Dyck. Il n'en sera pas parlé ici : de toute façon nombre de questions restent à élucider sur le rôle des langages de Dyck et semi-Dyck. Peut-on par exemple énoncer le théorème 2 en remplaçant T'-langage par T-langage et substituer le langage de Dyck au langage de semi-Dyck dans l'énoncé du Théorème 3 ? Ces questions jointes à diverses conjectures concernant les langages compilables continuent à faire l'objet de travaux de l'auteur.

CHAPITRE V

COMPILATEURS ET AUTOMATES A PILES

1. Produit sélectif sur $X^* \times X^*$.

Nous allons munir le produit $X^* \times X^*$ d'un produit particulier, dit produit sélectif, qui en fait un monoïde.

Nous définissons :

$$(f, g) \cdot (f', g') \begin{cases} = (f, g_1 g') & \text{si } g = g_1 f' \\ = (f_1 f, g') & \text{si } f' = f_1 g \\ = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

où $0 \cdot (f, g) = (f, g) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$

L'associativité se vérifie sans peine.

Trois cas sont à considérer pour le produit $(f, g)\,(f', g')\,(f'', g'')$

$1 - g = g_1 f', g_1 g' = g_2 f'' \Longrightarrow (f, g)(f', g')(f'', g'') = (f, g_2 g'')$

$2 - f'' = f_1 g', f_1 f' = f_2 g \Longrightarrow (f, g)(f', g')(f'', g'') = (f_2 f, g'')$

$3 - f' = f_1 g, g' = g_2 f'' \Longrightarrow (f, g)(f', g')(f'', g'') = (f_1 f, g_2 g'')$.

Dans tous les autres cas le produit est nul.

Par ailleurs (e, e) est élément neutre pour cette loi. Ce produit permet de construire l'ensemble de semi-Dyck sur $Z = X \cup \overline{X}$. Considérons en effet, l'homomorphisme de Z^* dans $X^* \times X^*$ muni de son produit sélectif, donné par : $\varphi(x) = (e, x)$, $\varphi(e) = (e, e)$ et $\varphi(\overline{x}) = (x, e)$. Nous avons la

PROPRIETE 1. – *Le mot $f \in Z^*$ appartient à l'ensemble de semi-Dyck $D'^* \subset Z^*$ si et seulement si $\varphi(f) = (e, e)$.*

L'inclusion $D'^* \subset \varphi^{-1}(e, e)$ est immédiate.

Réciproquement considérons f tel que $\varphi(f) = (e, e)$.

Si $|f| = 2, \varphi(f) = (a\,,b)\,(a'\,,b') = (e\,,e) \Longrightarrow a = b' = e$ et $b = a'$

$$\text{d'où} \quad f = x\,\overline{x} \quad \text{pour} \quad x \in \mathrm{X}\,.$$

Ainsi nous pouvons faire une récurrence sur $|f|$ et considérer le produit

$$(a_1\,,b_1)\,(a_2\,,b_2)\ldots(a_n\,,b_n) = (e\,,e)$$

Ou bien il existe un entier $k < n$ tel que $(a_1\,,b_1)\ldots(a_k\,,b_k) = (e\,,e)$ ce qui entraîne $(a_{k+1}\,,b_{k+1})\ldots(a_n\,,b_n) = (e\,,e)$

et par récurrence $f = f_1\,f_2\,, f_1\,, f_2 \in \mathrm{D}'^*$ d'où $f \in \mathrm{D}'^*$, ou bien il n'existe pas de tel k.

Posons

$(a_2\,,b_2)\ldots(a_{n-1}\,,b_{n-1}) = (f, g)$:

$$(a_1\,,b_1)\,(f, g)\,(a_n\,,b_n) = (e\,,e) \Longrightarrow a_1 = e\,,\, b_n = e$$

et $\quad f = b_1\,,\, g = a_n \quad$ ou $\quad f = g = e\,,\, b_1 = a_n$.

Dans le dernier cas on peut conclure $f = x\,f'\,\overline{x}\,, f' \in \mathrm{D}'^*$ donc $f \in \mathrm{D}'^*$.

Il reste à éliminer le cas intermédiaire.

$(a_1\,,b_1)\ldots(a_n\,,b_n) = (e\,,a)\,(a\,,a')\,(a'\,,e)$. Or $(a_2\,,b_2) = (a\,,e)$ est exclu car nous aurions $(a_1\,,b_1)\,(a_2\,,b_2) = (e\,,e)$. Donc $(a_2\,,b_2) = (a''\,,e)$ ou $(e\,,a'')$, mais

$$(a_2\,,b_2) = (a''\,,e) \Longrightarrow (a_2\,,b_2)\ldots(a_{n-1}\,,b_{n-1}) = (ha''\,,h')$$

ce qui n'est pas d'où $(a_2\,,b_2) = (e\,,a'')$.

Plus généralement pour tout

$$h = 2,\ldots,n-1\,,(a_2\,,b_2)\ldots(a_h\,,b_h) = (e\,,f)$$

sinon il existerait un plus petit h tel que $(a_2\,,b_2)\ldots(a_n\,,b_n) = (a''\,,g)$. Ce qui implique $(a''\,,g) = (e\,,g')\,(a''\,,e)$ donc $g' = e$. Ainsi nous avons $a'' \neq a$ sans quoi nous aurions : $(a_1\,,b_1)\ldots(a_n\,,b_n) = (e\,,e)$ ce qui n'est pas et $a'' \neq a$ est impossible car alors $(a_2\,,b_2)\ldots(a_{n-1}\,,b_{n-1})$ serait de la forme $(ua''\,,u')$ ce qui est impossible. D'où finalement $(a_2\,,b_2)\ldots(a_{n-1}\,,b_{n-1}) = (e\,,u)$ qui entraîne $u = e$. La propriété est établie.

2. Compilateurs.

Le produit sélectif sur X* x X* induit un produit sur l'ensemble des parties de X* x X* et nous pouvons définir :

DEFINITION 1. – *Un compilateur sur* Y* *est une application de* Y* *dans l'ensemble des parties de* X* x X*, *muni du produit sélectif, de la forme*

$$\tau(f) = \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f), \quad \textit{où}$$

μ est une représentation de Y* *par des $n \times n$ matrices à éléments dans* $\mathfrak{p}$(X* x X*) *et ν une $n \times n$ matrice à éléments dans* $\mathfrak{p}$(X* x X*).

De plus on exigera la condition

$\forall y \in \mathrm{Y}\ \forall i, j = \varepsilon\ \{1, \dots, n\}\ \mu y_{i,j}$ *et* $\nu_{i,j}$ *sont soit* $\{0\}$ *soit de la forme* : $\bigcup_h \mathrm{K}_h \times \mathrm{K}'_h$ *où* K_h *et* K'_h *sont des* K-*langages sur* X* *et l'union en h est une union finie.*

Le langage $\mathrm{L} \subset \mathrm{Y}^*$ *est dit reconnu par le compilateur* τ *si et seulement si* $\mathrm{L} = \{f \in \mathrm{Y}^* \mid (e\,,\, e) \in \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f)\}$

Nous avons immédiatement le résultat

THEOREME 1. – *Tout* C-*langage* L *sur* Y* *est reconnu par un compilateur. En effet, il existe un homomorphisme θ de* Y* *dans l'ensemble des parties de* Z* (Z = X ∪ $\overline{\mathrm{X}}$) *tel que*

$$\mathrm{L} = \{f \in \mathrm{Y}^* \mid \rho'^{-1}(\gamma) \cap \theta(f) \neq \emptyset\}$$

Considérons l'homomorphisme $\overline{\theta}$ de Y* dans $\mathfrak{p}$(X* x X*) :

$$\overline{\theta}(y) = \{\varphi(h) \mid h \in \theta(y)\}$$

où φ est l'homomorphisme considéré précédemment (proposition 1). Il est clair que si $\rho'^{-1}(\gamma) \cap \theta(f) \neq \emptyset$ il existe $g \in \theta(f)$ tel que $\rho'(\gamma g) = e$, ou encore en vertu de la propriété 1 : $\varphi(\gamma)\ \varphi(g) = (e\,,\, e)$, avec $\varphi(g) \in \overline{\theta}(f)$. Réciproquement s'il existe $\overline{g}$ dans $\overline{\theta}(f)$ tel que $\overline{\gamma}\,\overline{g} = (e\,,\, e)$ (où $\overline{\gamma} = \varphi(\gamma)$) c'est qu'il existe $g \in \theta(f)$ tel que $\rho'(\gamma g) = e$.

Q.E.D.

Montrons la réciproque :

THEOREME 2. – *Tout langage reconnu par un compilateur est un C-langage.* Nous noterons, si

$$f = x_{i_1} \dots x_{i_k} \in X^* : \hat{f} = \bar{x}_{i_k} \dots \bar{x}_{i_2} \bar{x}_{i_1} \in \bar{X}^* .$$

Si $(f, g) \in X^* \times X^*$, $\alpha(f, g) = \hat{f}g$ est un élément de Z^* $(Z = X \cup \bar{X})$ tel que $\varphi(\alpha(f, g)) = (f, g)$.

Associons alors au compilateur $\tau(f) = \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$, sur Y^*, la transduction $\bar{\mu}$ et la matrice $\bar{\nu}$ définies par $\forall y \in Y$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\bar{\mu} y_{i,j} = \{\alpha(f, g) \mid (f, g) \mid (f, g) \in \mu y_{i,j}\} ,$$

$$\bar{\nu}_{i,j} = \{\alpha(f, g) \mid (f, g) \in \nu_{i,j}\}$$

La définition d'un compilateur implique que $\bar{\mu} y_{i,j}$ et $\bar{\nu}_{i,j}$ sont des K-langages sur Z^* puisque si K est un K-langage sur X^* : $\hat{K} = \{\hat{f} \mid f \in K\}$ est un K-langage sur $\bar{X}^*$.

Or nous avons $(e, e) \in \mathrm{Tr}(\nu \,.\, \mu f)$ si et seulement si

$$\rho'^{-1}(e) \cap \mathrm{Tr}(\bar{\nu} \,.\, \bar{\mu} f) \neq \emptyset .$$

En effet, soit $g \in \mathrm{Tr}(\bar{\nu} \,.\, \bar{\mu} f)$ tel que $\rho'(g) = e$. Par construction, il existe $(f_1, g_1), \dots, (f_k, g_k)$ tels que $g = \alpha(f_1, g_1)\, \alpha(f_2, g_2) \dots \alpha(f_k, g_k)$ et notre assertion découle de la propriété 1 et du lemme :

LEMME 1. – *Pour tout*

$$f, g \in X^* , (f_1, g_1), \dots, (f_k, g_k) \in X^* \times X^*$$

les deux conditions :

$$\rho'(\alpha(f_1, g_1) \dots \alpha(f_k, g_k)) = \hat{f}g \ \textit{et} \ (f_1, g_1) \dots (f_k, g_k) = (f, g)$$

sont équivalentes.

En effet $\rho'(\alpha(f_1, g_1)) = \rho'(\hat{f}_1 g_1) = \hat{f}_1 g_1 = \hat{f}g$ implique $f_1 = f$, $g_1 = g$ donc $(f_1, g_1) = (f_1, g)$.

Nous pouvons faire une récurrence sur le nombre k de facteurs :

$$\rho'(\alpha(f_1, g_1) \dots \alpha(f_k, g_k)) = \hat{f}g \quad \text{implique}$$

$$\rho'(\alpha(f_1, g_1) \dots \alpha(f_{k-1}, g_{k-1})) = \hat{f}' g'$$

et $$\rho'(\hat{f}' g' \hat{f}_k g_k) = \hat{f}g .$$

Cette dernière condition implique que l'on soit dans l'un des deux cas :

$$1 - g' = g'_1\, g'_2 \ , \ \rho'(g'_2 \hat{f}_k) = e \ \text{ et } \ \rho'(\hat{f}'\, g'\, \hat{f}_k\, g_k) = \hat{f}'\, g'_1\, g_k\,.$$

$$2 - \hat{f}_k = \hat{f}'_1\, \hat{f}'_2 \ , \ \rho'(g' f'_1) = e \ \text{ et } \ \rho'(\hat{f}'\, g'\, \hat{f}_k\, g_k) = \hat{f}'\, \hat{f}'_2\, g_k\,.$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence

$$(f_1\,, g_1) \ldots (f_{k-1}\,, g_{k-1}) = (f'\,, g')\,.$$

Calculons $(f', g')\,(f_k\,, g_k)$ dans les deux cas précédents.

1 – Nous avons $g' = g'_1 f_k$ donc

$$(f'\,, g')\,(f_k\,, g_k) = (f'\,, g'_1\, g_k) = (f\,, g)$$

2 – Nous avons $f_k = f'_2\, g'$ donc

$$(f'\,, g')\,(f_k\,, g_k) = (f'_2 f'\,, g_k) = (f\,, g)\,.$$

D'où le lemme puisque l'implication inverse est évidente.

Ainsi nous avons

$$\mathrm{Tr}(\bar{\nu}\,.\,\bar{\mu}f) \cap \rho'^{-1}(e) \neq \emptyset \longrightarrow (e\,, e) \in \mathrm{Tr}(\nu\,.\,\mu f)\,.$$

La réciproque est immédiate. Ainsi

$$\mathrm{L} = \{f \in \mathrm{Y}^* \mid \mathrm{Tr}(\overline{\nu}\,\overline{\mu}f) \cap \rho'^{-1}(e) \neq \emptyset\} = \overline{\tau}^{-1}(\rho'^{-1}(e))\,.$$

et $\overline{\tau}$ défini par $\overline{\tau}(f) = \mathrm{Tr}(\overline{\nu}\,\overline{\mu}f)$ étant une K-transduction, L est un C-langage.

Q.E.D.

3. Langage analysé par un compilateur.

DEFINITION 1. – *Soit τ un compilateur, $\tau(f) = \mathrm{Tr}(\nu\,.\,\mu f)$. Le langage* L *est dit analysé par τ si et seulement si*

$$\mathrm{L} = \{f \in \mathrm{Y}^* \mid \tau(f) \neq \{0\}\}$$

L'introduction de cette notion est une simple commodité, utile pour la suite, mais n'ajoute rien puisque :

THEOREME 1. – $L \subset Y^*$ *est un* C-*langage si et seulement si* L *est analysé par un compilateur.*

Supposons L analysé par τ et construisons $\overline{\tau}$ comme précédemment (théorème 2.2.). Nous avons $\tau(f) \neq \{0\}$ si et seulement si

$$\overline{\tau}(f) \cap \rho'^{-1}(\overline{X}^* \times \overline{X}^*) \neq \emptyset$$

d'après le lemme 2.1. d'où $L = \overline{\tau}^{-1}(\rho'^{-1}(\overline{X}^* \times X^*))$, or $\rho'^{-1}(\overline{X}^* X^*)$ est un C-langage (chapitre V) donc L aussi. Réciproquement soit L reconnu par τ. Considérons les symboles ω et ω', $\omega \neq \omega'$, $\omega, \omega' \notin X$ et construisons μ' et ν' déduites de μ et ν, définies par :

$$\nu'_{i,j} = \{(f, \omega g) \mid (f, g) \in \nu_{i,j}\}$$

$$\mu' y_{i,j} = \{(f, g\omega') \mid (f, g) \in \mu y_{i,j}\} \cup \mu y_{i,j}$$

Nous avons $(e, \omega\omega') \in \mathrm{Tr}(\nu' \mu' f) =$ si et seulement si : $(e, e) \in \mathrm{Tr}(\nu . \mu f)$ de façon claire.

Si $\overline{\mu}$ est telle que $\forall f \in Y^* : \mathrm{Tr}(\nu' \mu' f) = \overline{\mu} f_{1,N}$, $\overline{\mu}$ existe en vertu du lemme de Schützenberger (I.8.1), soit $\overline{\nu}$ définie par $\overline{\nu}_{N,1} = (\omega\omega', e)$, $\overline{\nu}_{i,j} = 0$ si $(i, j) \neq (N, 1)$.

Nous avons $\mathrm{Tr}(\mu f \overline{\nu}) \neq \{0\}$ si et seulement si $(e, \omega\omega') \in \mathrm{Tr}(\nu' \mu' f)$ et ainsi L est analysé par le compilateur $\overline{\tau}$ défini par $\overline{\tau}(f) = \mathrm{Tr}(\overline{\mu} f \overline{\nu})$ (et qui est bien un compilateur en vertu du lemme I.8.1).

4. Automates à mémoire pile.

Nous empruntons ci-dessous à S. Ginsburg la définition d'un automate à mémoire pile et montrons qu'il y a équivalence entre cette classe de machines et les compilateurs qui viennent d'être définis [8].

DEFINITION 1. – *Un automate à mémoire pile, en abrégé amp, sur* Y^*, *est constitué par la donnée*

– *d'un ensemble* Q *d'états, où l'on a distingué l'état initial* q_0 *et un ensemble d'états finaux* Q'.

– *d'un alphabet de pile* X, *où l'on a distingué un symbole initial* x_0.

– *d'une application* δ *qui associe un sous-ensemble fini de* $Q \times X^*$ *à chaque triple* $(q\,,y\,,x)\,, q \in Q\,, y \in Y\,, x \in X$ *ou* $(q\,,\varepsilon\,,x)\,,$ $q \in Q\,, x \in X$, ε *est un symbole* $\notin X$.

DEFINITION 2. – *Nous appellerons configuration de l'amp ainsi défini tout triple* $(q\,,f\,,g)\,, q \in Q\,, f \in Y^*\,, g \in X^*$.

Nous noterons $\vdash\!\!\!-$ la relation suivante :

$$(q_1\,,f_1\,,g_1) \vdash (q_2\,,f_2\,,g_2) \Longleftrightarrow f_1 = yf_1'\,, f_2 = f_1'\,, g_1 = g_1' x,$$

$$g_2 = g_1' g_2' \quad \text{et} \quad (q_2\,,g_2') \in \delta(q\,,y\,,x)$$

Nous noterons $\Vdash$ la relation :

$$(q_1\,,f_1\,,g_1) \Vdash (q_2\,,f_2\,,g_2) \Longleftrightarrow f_1 = f_2\,, g_1 = g_1' x\,,$$

$$g_2 = g_1' g_2' \quad \text{et} \quad (q_2\,,g_2') \in \delta(q\,,\varepsilon\,,x)\,.$$

Enfin $\overset{*}{\Vdash}$ et $\overset{*}{\vdash}$ sont les fermetures transitives des ensembles de relation $\{\Vdash\}$ et $\{\Vdash\,,\vdash\}$ respectivement. Ce qui permet de définir : L *est analysé par l'amp si et seulement si*

$$L = \{f \in Y^* \mid (q_0\,,f\,,x_0) \overset{*}{\vdash} (q'\,,e\,,g)\,, q' \in Q'\,, g \in X^*\}$$

Avant de démontrer l'équivalence avec un compilateur, établissons les lemmes :

LEMME 1. – *Soit* $F \subset X^* \times X^*$ *un sous ensemble fini et pour tout* $g \in X^*$ *l'ensemble*

$$s(g) = \{h \in X^* \mid (e\,,g)\,(f_1\,,g_1) \ldots (f_n\,,g_n) = (e\,,h)\,,$$

$$(f_1\,,g_1)\,, \ldots, (f_n\,,g_n) \in F\}$$

est un K-*langage sur* X^*.

Fixons g et définissons pour tout $v \in X^*$:

$$\sigma(v) = \{w \mid vw \in s(g)\}$$

Il suffit de montrer que l'ensemble des $\sigma(v)$, v parcourant X^* est fini. Si $(e\,,g)\,(f_1\,,g_1) \ldots (f_n\,,g_n) = (e\,,vw)$ il existe certainement un h, $1 \leqslant h \leqslant n$ tel que

$$(e\,,g)\,(f_1\,,g_1) \ldots (f_{h-1}\,,g_{h-1}) = (e\,,v_1 f_h) \qquad (1)$$

$$g_h = \nu_2\, g' \qquad (2)$$

$$\nu_1\, \nu_2 = \nu \qquad (3)$$

$$(e\,,g')\,(f_{h+1}\,,g_{h+1})\ldots(f_n\,,g_n) = (e\,,w) \qquad (4)$$

D'où l'on déduit que $\sigma(\nu) = \cup\{s(g') \mid g' \text{ satisfait } (1)\ (2)\ (3)\}$. Or il ne peut y avoir qu'un nombre fini de tels g', puisque g' est facteur droit de g. D'où le résultat.

LEMME 2. – *Soit* $\mathrm{F} \subset \mathrm{X}^* \times \mathrm{X}^*$ *un sous ensemble fini. Notons* $\mathrm{F}^{\perp}$ *le sous monoïde de* $\mathrm{X}^* \times \mathrm{X}^*$*, muni de son produit sélectif engendré par* F. *Il existe un nombre fini de paires de* K-*langages sur* X^*, K_i, K'_i *telles que*

$$\mathrm{F}^{\perp}\backslash\{0\} = \cup\, \mathrm{K}_i \times \mathrm{K}'_i$$

Désignons par F_1 et F_2 respectivement les ensembles finis

$$\mathrm{F}_1 = \{f \in \mathrm{X}^* \mid \exists\, g \in \mathrm{X}^*\ (f\,,g) \in \mathrm{F}\} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{F}_2 = \{g \in \mathrm{X}^* \mid \exists\, f \in \mathrm{X}^*\ (f\,,g) \in \mathrm{F}\}\,.$$

Définissons une $\mathrm{F}_2 \times \mathrm{F}_2$ matrice μ par

$$\forall\, g_1\,,g_2 \in \mathrm{F}_2 : \mu_{g_1 g_2} = \{\hat{f} \in \mathrm{X}^* \mid \exists\, g \in s(g_1) : (fg\,,g_2) \in \mathrm{F}\}$$

Il est clair que μ_{g_1,g_2} est un K-langage donc aussi

$$\mu'_{g_1,g_2} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mu^k_{g_1,g_2} \qquad \text{(cf. [20]).}$$

Pour tou. $(f\,,g) \in \mathrm{F}$, notons $s'(f\,,g) = \bigcup\limits_{g' \in \mathrm{F}_2} (\widehat{(\mu' f)}_{g,g'} \times s(g'))$

Nous avons $\mathrm{F}^{\perp}\backslash\{0\} = \cup\{s'(f\,,g) \mid (f\,,g) \in \mathrm{F}\}$

ce qui implique bien que $\mathrm{F}^{\perp}$ a la forme voulue.

Montrons que $s'(f\,,g) = \{(f'\,,g') \mid \exists\,(f_1\,,g_1)\,,\ldots,(f_n\,,g_n) \in \mathrm{F} : (f\,,g)\,(f_1\,,g_1)\ldots(f_n\,,g_n) = (f'\,,g')\}$.

Pour le démontrer il convient d'analyser comment peut se faire un produit sélectif de plusieurs facteurs $(f_1\,,g_1)\ldots(f_n\,,g_n)$. Un tel produit peut toujours être factorisé de la façon suivante :

$$(f_1\,,g_1)\ldots(f_n\,,g_n) = (f_1\,,g_1)\ldots(f_{i_1}\,,g_{i_1})\ldots(f_{i_2}\,,g_{i_2})\ldots (f_{i_k}\,,g_{i_k})\ldots(f_n\,,g_n)$$

en sorte que

$$- (f_1, g_1) \ldots (f_{i_1 -1}, g_{i_1 -1}) = (f_1, g_1') \text{ et}$$
$$g_1' \in s(g_1), (f_1, g_1')(f_{i_1}, g_{i_1}) = (f_1' f_1, g_1'')$$
$$- (f_1, g_1) \ldots (f_{i_2 -1}, g_{i_2 -1}) = (f_1' f_1, g_2') \text{ et}$$
$$g_2' \in s(g_1'')(f_1' f_1, g_2')(f_{i_2}, g_{i_2}) = (f_2' f_1' f_1, g_2'')$$

. . . .

$$- (f_1, g_1) \ldots (f_{i_k -1}, g_{i_k -1}) = (f_{k-1}' \ldots f_1' f_1, g_k'),$$
$$(f_{k-1}' \ldots f_1' f_1, g_k')(f_{i_k}, g_{i_k}) = (f_k' f_{k-1}' \ldots f_1' f_1, g_k'')$$
$$- (f_1, g_1) \ldots (f_n, g_n) = (f_k' f_{k-1}' \ldots f_1' f_1, g) g \in s(g_k'')$$

Cette factorisation est unique. Elle exprime que le produit $(f, g) = (f_1, g_1) \ldots (f_n, g_n)$ appartient à $\widehat{(\mu^k f_1)}_{g_1, g_k''} \times s(g_k'')$ et que réciproquement toute paire (f, g) de ce dernier ensemble peut être réalisé comme produit sélectif d'un certain nombre d'éléments de F, le premier facteur étant (f_1, g_1).

Le reste de la démonstration est immédiat.

Remarque. – C'est là en fait le résultat fondamental de la théorie des automates à mémoire piles. En effet, l'application de X* dans X* définie par

$$f(g, h) \begin{cases} = f_1 h & \text{si} \quad f = f_1 g \\ = 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases} \tag{1}$$

est une K-transduction particulière que l'on peut voir comme une opération élémentaire de pile. D'une façon générale étant donné un ensemble fini de transductions $\tau_i : X^* \longrightarrow X^*$ $i = 1, \ldots, n$, on ne sait rien dire sur l'ensemble des itérées, c'est-à-dire l'ensemble des transductions produit (de composition) d'un nombre fini de τ_i. Le lemme 3 au contraire décrit cet ensemble quand les τ_i sont de la forme particulière (1). De façon tout à fait analogue on démontre le lemme 3 :

LEMME 3. – *Soit* $F \subset X^* \times X^*$ *un sous-ensemble de la forme* $F = \cup K_i \times \{f_i\}$ *où* $K_i \subset X^*$ *est un* K-*langage,* $f_i \in X^*$ *et l'union est finie. Le sous-monoïde* $F^\perp$ *est encore de la forme* $F^\perp = \cup K_i' \times K_i''$. En effet, la démonstration du lemme 2 repose sur les trois propriétés qui sont encore vérifiées sous les hypothèses du lemme 3 :

– $F_2 = \{g \in X^* \mid \exists f \in X^* : (f, g) \in F\}$ est fini

– $s(g) = \{h \in X^* \mid (e, g)(f_1, g_1) \dots (f_n, g_n)$
$= (e, h), (f_i, g_i) \in F\}$ est un K-langage.

– $\{\hat{f} \in \bar{X}^* \mid \exists\, g \in s(g_1)\, (fg, g_2) \in F\}$ est un K-langage.

LEMME 4. – *Soit μ une matrice carrée dont les éléments sont soit $\{0\}$ soit des parties de $X^* \times X^*$ de la forme $\mu_{ij} = \cup K_l \times \{g_l\}$. Les éléments de $\mu^{\perp} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mu^k$ où μ^k est la $k^{\text{ème}}$ puissance de μ relativement aux opérations d'union et produit sélectif, sont de la forme*

$$\mu_{ij}^{\perp} = \cup K'_m \times K''_m ,$$

union finie.

Associons à μ l'ensemble $\bar{\mu}$ défini de la façon suivante : soit Q l'ensemble d'indice de μ

$$\bar{\mu} = \{(fq, gq') \mid q, q' \in Q, (f, g) \in \mu_{q,q'}\}$$

Les éléments de $\bar{\mu}^{\perp}$ sont de la forme voulue, union finie de produit de K-langages et l'on a : $\bar{\mu}^{\perp} = \{(fq, gg') \mid q, q' \in Q, (f, g) \in \mu_{q,q'}^{\perp}\}$ ou encore $\bar{\mu}_{q,q'}^{\perp} = \{(f, g) \mid (fq, gq') \in \bar{\mu}^{\perp}\}$ d'où le lemme.

La construction du lemme 4 peut servir à établir :

LEMME 5. – *A tout compilateur correspond un compilateur équivalent d'ordre 1.*

Le compilateur τ est dit d'ordre 1 s'il est de la forme $\tau f = u \,.\, \varphi f \,.\, v$ où φ est un homomorphisme de Y^* dans l'ensemble des parties du produit sélectif $X^* \times X^* \cup \{0\}$ et $u \in \{e\} \times X^*$, $v \subset X^* \times \{e\}$ sont respectivement un élément et une partie finie du même produit.

Considérons en effet $\tau f = \mu f_{1,N}$ auquel nous associons l'homomorphisme $\varphi : \varphi y = \{(fq, gq') \mid (f, g) \in \mu y_{q,q'}\}$.

Soient $u = (e, 1)$, $v = \{(N, e)\}$. Nous avons $\tau' f = u \varphi f v \neq \{0\}$ si et seulement si $\tau f = \mu f_{1,N} \neq \{0\}$.

Nous pouvons alors construire un compilateur équivalent à un amp donné. Considérons les matrices carrées :

$$\mu y_{q,q'} = \{(x, g) \mid (q', g) \in \delta(q, y, x)\},$$

$$\pi_{q,q'} = \{(x\,,g) \mid (q'\,,g) \in \delta(q\,,\varepsilon\,,x)\} \quad \text{et} \quad \bar{\mu}y = \mu y \pi^{\perp}.$$

On vérifie immédiatement que $(q_0\,,f\,,x_0) \overset{*}{\vdash} (q'\,,e\,,g)$ si et seulement si $(e\,,x_0)\,\bar{\mu}f_{q_0,q'} \cap (\{e\} \times X^*) \neq \emptyset$.

Soit ω un symbole, $\omega \notin X$, et $\bar{\nu}$ la matrice

$$\bar{\nu}_{q',q_0} \begin{cases} = \{(e\,,\omega x_0)\} & \text{pour} \quad q' \in Q' \\ = \{0\} & \text{pour} \quad q' \in Q \backslash Q' \end{cases}$$

Alors : $\mathrm{Tr}(\bar{\nu}\,\bar{\mu}f) \neq \{0\}$ si et seulement si

$$\mathrm{Tr}(\bar{\nu}\,\bar{\mu}f) \cap (\{e\} \times X^*) \neq \{0\}$$

et ceci est équivalent à

$$\exists\, q' \in Q'\,,\, g \in X^* : (q_0\,,f\,,x_0) \overset{*}{\vdash} (q'\,,e\,,g)\,.$$

D'où la propriété puisque $\bar{\tau}$ donné par $\tau f = \mathrm{Tr}(\bar{\nu}\,\bar{\mu}f)$ est un compilateur en vertu du lemme 4.

Nous en déduisons immédiatement en vertu du lemme 5 un amp d'ordre 1 équivalent en prenant :

$$\varphi y = \{(xq\,,gq') \mid (q'\,,g) \in \delta(q\,,y\,,x)\}\,,$$

$$\zeta = \{(xq\,,gq') \mid (q'\,,g) \in \delta(q\,,\varepsilon\,,x)\}\,,$$

$$\bar{\varphi}y = \varphi y \zeta^{\perp}\,,\, u = (e\,,\omega x_0\,q_0)\,,\, v = \{(q'\,,e) \mid q' \in Q'\}\,.$$

Nous avons $\bar{\tau}(f) \neq \{0\}$ si et seulement si $u\bar{\varphi}fv \neq \{0\}$.

En fait, il est naturel d'associer à un amp un compilateur tel que le langage reconnu par l'amp soit le langage analysé à droite par le compilateur c'est-à-dire soit le langage $\{f \mid \mathrm{Tr}(\nu\,.\,\mu f) \cap (\{e\} \times X^*) \neq \emptyset\}$.

Ceci vient de la contrainte supplémentaire, imposée à un amp, qui est de s'arrêter dès que la "pile" est vide, c'est-à-dire dès que l'on rencontre une configuration $(q\,,f\,,e)$. L'équivalent de cette contrainte pour un compilateur est de ne considérer dans $\mathrm{Tr}(\nu\,.\,\mu f)$ que les éléments $(e\,,g)\,,\, g \in X^*$.

Aussi démontrerons-nous que réciproquement à tout compilateur il est possible d'associer un amp tel que le langage analysé à droite par le compilateur soit égal au langage analysé par l'amp.

Soit τ donné par $\tau(f) = \mu f_{1,N}$ et

$$\mu y_{i,j} = \cup\{K(y\,,i\,,j\,,l) \times K'(y\,,i\,,j\,,l) \mid l \in L(y\,,i\,,j)\}\,.$$

Nous allons nous donner une famille d'automates finis reconnaissant les $K(y\,,i\,,j\,,l)$ dont $Q(y\,,i\,,j\,,l)$, $q_0(y\,,i\,,j\,,l)$, $Q'(y\,,i\,,j\,,l)$ désigneront l'ensemble des états, l'état initial, l'ensemble des états finaux respectivement et λ la fonction de transition.

Nous représenterons d'autre part les $K'(y\,,i\,,j\,,l)$ comme des images homomorphes de K-langages locaux : nous aurons ainsi $P(y\,,i,j\,,l)$ un alphabet, $A(y\,,i\,,j\,,l) \subset P(y\,,i\,,j\,,l)$, $B(y\,,i\,,j\,,l) \subset P(y\,,i\,,j\,,l)$, $V(y\,,i\,,j\,,l) \subset P(y\,,i\,,j\,,l)^2$ et

$$K'(y\,,i\,,j\,,l) = \varphi(A(y\,,i\,,j\,,l)\,P(y\,,i\,,j\,,l)^* \cap P(y\,,i\,,j\,,l)^*$$
$$B(y\,,i\,,j\,,l) \backslash P(y\,,i\,,j\,,l)^*\,V(y\,,i\,,j\,,l)\,P(y\,,i\,,j\,,l)^*$$

Nous construisons un automate dont l'ensemble des états est

$$\{q_1\,,\ldots\,,q_N\} \cup (\cup\, Q(y\,,i\,,j\,,l)) \cup (\cup\, P(y\,,i\,,j\,,l))$$

l'alphabet de pile est $X \cup \{\omega\}$ et les règles de fonctionnement (application δ) sont les suivantes :

– $\delta(q_i\,,y\,,x) = \{(p(y\,,i\,,j\,,l)\,,x\varphi(p\,,i\,,j\,,l))) \mid e \in K(y,i,j,l)\,,p(y,i,j,l) \in A(y,i,j,l)\}$
$\cup \{(\lambda(q_0(y,i,j,l),x),e)\}$

– $\delta(q_i,y,\omega) = \{(p(y,i,j,l)\,,\omega\,\varphi(p(y,i,j,l)) \mid e \in K(y,i,j,l)\,,p(y,i,j,l) \in A(y,i,j,l)\}$

– $\delta(q(y,i,j,l)\,,\varepsilon\,,x) = \{(p(y,i,j,l)\,,x\varphi(p(y,i,j,l)))\}$
$\cup \{(\lambda(q(y,i,j,l)\,,x)\,,e)\}$ si $q(y,i,j,l) \in Q'(y,i,j,l)$

– $\delta(q(y,i,j,l)\,,\varepsilon\,,x) = \{(\lambda(q(y,i,j,l)\,,x)\,,e)\}$ si $q(y,i,j,l) \notin Q'(y,i,j,l)$

– $\delta(q\,,(y,i,j,l)\,,\varepsilon\,,x) = \{(p(y,i,j,l)\,,x\varphi(p(y,i,j,l))\}$ si $q(y,i,j,l) \in Q'(y,i,j,l) = \emptyset$ sinon.

– $\delta(p(y,i,j,l)\,,\varepsilon\,,x') = \{(p'(y,i,j,l)\,,x\,\varphi(p'(y,i,j,l))) \mid p(y,i,j,l)\,p'(y,i,j,l) \notin V(y,i,j,l)\} \cup \{(q_j\,,x)\}$ si $p(y,i,j,l) \in B(y,i,j,l)$

$- \delta(p(y,i,j,l),\varepsilon,x') = \{(p'(y,i,j,l),x'\varphi(p'(y,i,j,l))) \mid$
$p(y,i,j,l)p'(y,i,j,l) \notin V(y,i,j,l)\}$ si
$p(y,i,j,l) \notin B(y,i,j,l)$

x' désigne un élément de x ou ω.

Toutes ces relations traduisant de la façon la plus simple ce qui se passe dans le compilateur, il n'est pas difficile de voir que

$(q_1, f, \omega) \overset{*}{\longmapsto} (q_N, e, g)$ si et seulement si $\mu f_{1,N} \cap (\{e\} \times X^*) \neq \emptyset$.

Ainsi est établie l'équivalence entre amp et compilateur puisque si τ est un compilateur, L le langage qu'il analyse, il existe τ' tel que le langage analysé à droite par τ' soit précisément L, à savoir

$$\tau'(f) = (e, \omega)\,\tau(f) = \omega \notin X .$$

5. Compilateur déterministe.

DEFINITION 1. – *L'amp défini au début du paragraphe 4 est dit déterministe si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall q \in Q, y \in Y, x \in X : \operatorname{card} \delta(q, y, x) + \operatorname{card} \delta(q, \varepsilon, x) \leqslant 1 .$$

Ceci signifie que pour toute configuration (q_1, f_1, g_1) il existe au plus une configuration (q_2, f_2, g_2) telle que $(q_1, f_1, g_1) \longmapsto (q_2, f_2, g_2)$ ou $(q_1, f_1, g_1) \Vdash\!\!\longrightarrow (q_2, f_2, g_2)$.

Le mouvement de l'amp est ainsi à tout moment complètement déterminé. S. Ginsburg et S. Greibach ont établi de nombreuses propriétés des C-langages déterministes, c'est-à-dire des C-langages qui peuvent être analysés par un amp déterministe. Notre but dans ce paragraphe est de définir une notion analogue pour un compilateur.

DEFINITION 2. – *Le compilateur τ, $\tau(f) = \mu f_{1,N}$ est dit déterministe si et seulement si*

$$\mu y_{i,j} = \cup\, K(y, i, j, l) \times \{g(y, i, j, l)\} \quad \textit{où} \quad g(y, i, j, l) \in X^*$$

et les K-langages $K(y, i, j, l)$ satisfont aux conditions :

$$- (j, l) \neq (j'', l') \Longrightarrow K(y,i,j,l) \cap K(y,i,j,l') = \emptyset$$

– $K(y, i) = \bigcup_{j,l} K(y, i, j, l)$ *possède la propriété du préfixe à droite, c'est-à-dire*

$$\forall g, g' \in K(y, i), g'' \in X^* ; g = g'' g' \Longleftrightarrow g = g'$$

THEOREME 1. – *Un C-langage est déterministe si et seulement si il est analysé par un compilateur déterministe.*

Nous avons construit au paragraphe précédent un compilateur équivalent à tout amp et réciproquement. Nous allons montrer que la déterminicité est dans les deux cas conservée.

Reprenons les constructions du paragraphe 4.

Soit $\tau(f) = \mu f_{1,N}$ et nous considérons le langage analysé à droite par τ. Nous allons nous donner un automate fini dont l'ensemble des états est $Q(y, i)$, l'état initial $q_0(y, i)$, l'ensemble des états finaux $Q'(y, i)$ pour reconnaître $k(y, i)$; $Q'(y, i)$ est partitionné en

$$Q'(y, i) = \cup Q'(y, i, j, l) \quad \text{tels que}$$

$$g \in k(y, i, j, l) \Longleftrightarrow \lambda(q_0(y, i), g) \in Q'(y, i, j, l) .$$

Construisons alors l'automate à mémoire pile dont l'ensemble des états est $\{q_1, \dots, q_N\} \cup (\cup Q(y, i))$ et les règles de fonctionnement

$$\delta(q_i, y, x') \begin{cases} = \{(q_j, x'g(y, i, j, l))\} & \text{si } e \in k(y, i, j, l) \\ = \{(\lambda(q_0(y, i), x), e)\} & \text{si } e \notin k(y, i) \end{cases}$$

$$\delta(q(y, i), \varepsilon, x') = \{(q_j, x'g(y, i, j, l))\} \text{ si } q(y, i) \in Q'(y, i, j, l)$$

$$\delta(q(y, i), \varepsilon, x) = \{(\lambda(q(y, i), x), e)\} \text{ si } q(y, i) \notin Q'(y, i)$$

$$\delta(q(y, i), \varepsilon, \omega) = \emptyset \text{ si } (y, i) \notin Q'(y, i)$$

Il est immédiat de vérifier que cet amp est déterministe. Réciproquement considérons un amp déterministe et le compilateur d'ordre 1 équivalent construit au paragraphe précédent. Soient :

$$\varphi y = \{(xq, gq') \mid (q', g) \in \delta(q, y, x)\} ,$$

$$\zeta = \{(xq, gq') \mid (q', g) \in \delta(q, \varepsilon, x)\}$$

$$\text{et} \quad \overline{\varphi} y = \varphi y \zeta^{\perp} .$$

L'expression de $\zeta^{\perp}$ est donné par la démonstration du lemme 2 :

$$\zeta^{\perp}\backslash\{0\} = \cup\{s'(f, g) \mid (f, g) \in \zeta\} \text{ où } s'(f, g) = \bigcup_{g' \in \zeta_2} (\widehat{(\mu' f)}_{g,g'} \times s(g'))$$

Or $s(g')$ se réduit de façon évidente à un seul mot du fait de la déterminicité de l'automate. Ainsi

$$\varphi y \, \zeta^{\perp}\backslash\{0\} = \cup \, K_i \times \{f_i\}$$

Si les K_i ne sont pas distincts on peut les rendre tels en remplaçant chacun d'eux par $K'_i = K_i \backslash \bigcup_{j \neq i} K_j$. En effet, l'amp étant déterministe, on ne saurait avoir dans $\overline{\varphi} f$ un élément (e, hh'), $h' \in K_i \cap K_j$.

De la même façon si $K' = \cup K'_i$ ne possède pas la propriété du préfixe à droite, on peut substituer à chaque K'_i le langage K''_i : $K''_i = K'' \cap K'_i$ où $K'' = \{g \in K' \mid g = g_1 g_2, g_1 \neq e \Longrightarrow g_2 \notin K'\}$ puisqu'on ne saurait avoir dans $\overline{\varphi} f$ un élément $(e, hh_1 h_2)$ $h_2 \in K'_i$, $h_1 h_2 \in K'_j$.

Le compilateur ainsi construit est bien déterministe. Nous pouvons en effet, énoncer les conditions auxquelles un compilateur est déterministe dans le cas d'un compilateur d'ordre 1 :

Le compilateur $\tau f = u \varphi f v$ est déterministe si et seulement si

1 – $\forall y \in Y \; \varphi(y) = \cup \, K(y, i) \times \{f_{y,i}\}$, union finie, où les $K(y, i)$ K-langages sur X^* vérifient

2 – $i \neq j \Longrightarrow K(y, i) \cap K(y, j) = \emptyset$

$k(y) = \cup \, k(y, i)$ possède la propriété du préfixe à droite.

Nous avons le corollaire suivant :

COROLLAIRE. – *Un C-langage est déterministe si et seulement si il est analysé par un compilateur déterministe d'ordre 1.*

6. S-automates.

Une autre famille d'automates destinés à analyser les C-langages a été définie par M.P. Schützenberger [23]. Notre but dans ce paragraphe est de montrer que bien qu'en apparence très différents ces automates sont encore équivalents à ceux que nous avons considérés jusqu'ici, amp et compilateurs.

DEFINITION 1. – *Une S-opération élémentaire* ζ *associée à* μ, *homomorphisme de* X* *sur un monoïde fini* M *est constitué par la donnée des deux applications :*

α *de* M *dans* X*

β *de* M *dans l'ensemble des parties de* M.

L'opération ζ applique alors le mot $f \in X^*$ sur $\zeta(f) = f_1$ où $f\alpha(\mu f) = f_1 f_2$ et f_2 est le facteur droit le plus court de $f\alpha(\mu f)$ tel que $\mu f_2 \in \beta(\mu f)$, ou bien $f\alpha(\mu f)$ si $f\alpha(\mu f)$ n'a aucun facteur droit f_2 tel que $\mu f_2 \in \beta(\mu f)$.

DEFINITION 2. – *Etant donné pour tout* $s \in S$, S *ensemble fini, la S-opération élémentaire* ζ_s *associée à un même homomorphisme* μ, *nous définissons une S-opération de la façon suivante :*

σ *est une application de* S x M *dans* S.

$S' \subset S$ *est un sous-ensemble distingué, ainsi que l'élément* $s_\infty \in S \backslash S'$ *tel que* $\forall m \in M : \sigma(s_\infty, m) = s_\infty$.

Posons $\zeta(s, g) = (\sigma(s, \mu g), \zeta_s g)$ et $\zeta^k(s, g) = \zeta(\zeta^{k-1}(s, g))$.

$\zeta^*(s, g) = \zeta^k(s, g)$ *si* k *est le plus petit exposant tel que* $\zeta^k(s, g) \in S' \times X^*$

$\zeta^*(s, g) = (s_\infty, e)$ *s'il n'existe pas de tels* k.

Par définition l'application

$$\zeta^* : S \times X^* \longrightarrow \overline{S} \times X^* \ (\overline{S} = S' \cup \{s_\infty\})$$

est une S-opération.

DEFINITION 3. – *Un S-automate sur* Y* *est alors constitué par*

– *une application* $\gamma : S' \times Y \longrightarrow S$

qui nous permet de définir $\gamma : (S' \times X^*) \times Y \longrightarrow (\overline{S} \times X^*)$ *par* $\gamma(s', g, y) = \zeta^*(\gamma(s', y), g)$

et d'étendre γ *en une application de* $(S' \times X^*) \times Y^* \longrightarrow (\overline{S} \times X^*)$ *par* $\gamma(s', g, e) = (s', g)$

$$\gamma(s', g, fx) = \gamma(\gamma(s', g, f), x)$$

– *un couple* (s_0, g_0) *initial et un ensemble final,* $U \subset S' \times X^*$ *tel que* $\{f \mid (s', \hat{f}) \in U\}$ *soit un K-langage sur* X*.

Le langage L *est alors dit analysé par le S-automate si et seulement si*

$$L = \{f \in Y^* \mid \gamma(s_0, g_0, f) \in U\}.$$

PROPRIETE 1. – *A tout* S*-automate il est possible de faire correspondre un compilateur équivalent (c'est-à-dire analysant le même langage).*

L'essentiel de la construction consiste à changer l'alphabet X intermédiaire. Nous prendrons $Z = (M \times X) \cup \{\omega\}$. Considérons l'application $\lambda : M \times X^* \longrightarrow M$ définie par $\lambda(m, f) = m \,.\, \mu f$ et l'application $\overline{\lambda} : M \times X^* \longrightarrow Z^*$ définie par

$$\overline{\lambda}(m, e) = e \,,\, \overline{\lambda}(m, x) = (m\,\mu x, x) \,,\, \overline{\lambda}(m, fx) = \overline{\lambda}(m, f)\,\overline{\lambda}(\lambda(m, f), x) \,.$$

L'application $\tau : X^* \longrightarrow Z^*$ définie par $\tau f = \omega\,\overline{\lambda}(e, f)$ est évidemment une transduction injective.

A une S-opération élémentaire ζ_s nous associons alors une application ζ'_s de Z^* dans Z^* telle que $\tau(\zeta_s(f)) = \zeta'_s(\tau(f))$.

Nous avons $\tau(f\alpha_s(\mu f)) \begin{cases} = \tau f\,\overline{\lambda}(m, \alpha_s(m)) \text{ si } \tau f = g(m, x) \\ = \tau(\alpha_s(e)) \text{ si } \tau f = \omega \,. \end{cases}$

Pour tout $f \in X^*$ soit $d_{s,m} f$ le facteur droit le plus court f_1 de f tel que $\mu f_1 \in \beta_s(m)$. C'est ainsi le seul facteur droit de f qui appartienne au K-langage

$$K_{s,m} = \{f_1 \in X^* \mid \mu f_1 \in \beta_s(m) \,, f_1 = f_2 f_3 \,, f_2 \neq e \Longrightarrow \mu f_3 \notin \beta_s(m)\}$$

Définissons $K'_{s,m} = \bigcup_{m' \in M} \{\overline{\lambda}(m', f_1) \mid f_1 \in k_{s,m}\}$. Nous avons la propriété : Si $f = f_2\, d_{s,m} f$ et $\tau f = g$: $\tau f_2 = g_2$ avec $g = g_2\, g_1$ et g_1 est le seul facteur droit de g qui soit dans $k'_{s,m}$.

Définissons encore

$$\overline{K}_{s,m} = \{f \in X^* \mid \mu f \notin \beta_s(m) \,, f = f_1 f_2 \Longrightarrow \mu f_2 \notin \beta_s\}$$

$$\text{et } \overline{K}'_{s,m} = \{\overline{\lambda}(e, f) \mid f \in \overline{K}_{s,m}\} \,.$$

Nous pouvons écrire en utilisant des éléments du produit sélectif $Z^* \times Z^*$

$$H_{s,m,m'} = \bigcup_{x,x'} ((m, x), (m, x)\,\overline{\lambda}(m, \alpha_s(m))) \,.$$

$$[(m', x')\, k'_{s,m'}(m', x') \cup (\omega\, \overline{k}'_{s,m}, \omega)]$$

et pour tout $g = \tau f$: il existe au plus un couple m, m' tel que $g\,H_{s,m,m'} \neq \{0\}$. On a alors : $g\,H_{s,m,m'} = \{\tau(\zeta_s(f))\} = \{\zeta'_s(g)\}$.

Construisons alors la (S x M) x (S x M) matrice :

$$\pi_{(s,m),(s',m')} \begin{cases} = \mathrm{H}_{s,m,m'} & \text{si } s' = \sigma(s,m), s \notin \mathrm{S}' \\ = \{0\} & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

et les matrices θy : $\theta y_{(s,m),(s',m')} = \{(e, e)\}$ si $m = m'$, $s \in \mathrm{S}'$, $s' = \gamma(s, y)$, enfin $\overline{\theta} y = \theta y \pi^{\perp}$.

Il est clair que $\gamma(s_0, g_0, f) \in \mathrm{U}$ si et seulement si

$$(e, \tau f_0) \operatorname{Tr}(\overline{\theta} f . \overline{\nu}) = \{(e, e)\} \quad \text{où} \quad \mathrm{U}_s = \{g \mid (s, g) \in \mathrm{U}\}$$

et
$$\overline{\nu}_{(s,m),(s_0,e)} = \{(\tau f, e) \mid f \in \mathrm{U}_s\}.$$

Nous avons bien construit un compilateur équivalent au S-automate donné. En effet, les éléments $\mathrm{H}_{s,m,m'}$ de π sont de la forme $\cup\, k_i \times \{f_i\}$ et le lemme 4.4 entraîne que les éléments de $\overline{\theta} y$, pour tout y, sont bien de la forme $\cup\, k_l' \times k_l''$. De la même façon que pour le compilateur équivalent à un amp déterministe on montre que celui-ci est déterministe.

THEOREME 1. – *Les C-langages analysés par un* S*-automate sont des C-langages déterministes.*

En effet la réciproque de la propriété 1 est aussi vraie. Considérons un compilateur déterministe d'ordre 1, $\tau f = u \varphi f v$.

Posons $\varphi y = \cup\, k(y, i) \times \{f_{y,i}\}$ et prenons un monoïde fini M, un homomorphisme μ de X* sur M tel que $\mu^{-1} \mu(\mathrm{K}(y, i)) = \mathrm{K}(y, i)$ pour tout y, i.

Nous avons les propriétés suivantes, traduisant le fait que le compilateur est déterministe.

– $\forall y \in \mathrm{Y}, \forall i, j : i \neq j \Longrightarrow \mu(\mathrm{K}(y, i)) \cap \mu(\mathrm{K}(y, j)) = \emptyset$

– $\forall g \in \mathrm{X}^*, \forall y \in \mathrm{Y}$ il existe au plus un i tel que

$$\mu g \in \mathrm{M}\, \mu(\mathrm{K}(y, i)).$$

Nous noterons $\delta y(\mu g)$ cet indice s'il existe. Autrement $\delta y(\mu g) = \infty$. Construisons alors un S-automate ayant comme ensemble d'états $\{s_0\} \cup \{s_\infty\} \cup \{s(y)\} \cup \{s(y, i)\}$. Les S-opérations élémentaires, associées à μ, sont définies par

$$\alpha_{s(m)}(m) = e, \ \beta_{s(y)}(m) = \bigcup_i \mu(k(y, i)),$$

$$\alpha_{s(y,i)}(m) = f_{y,i}, \ \beta_{s(y,i)}(m) = \{e\}.$$

Les S-opérations sont définies par

$$\sigma(s(y), m) \begin{cases} = s(y, \delta_y(m)) & \text{si} \quad \delta_y(m) \neq \infty \\ = s_\infty & \text{si} \quad \delta_y(m) = \infty \end{cases}$$

et $$\sigma(s(y, i), m) = s_0 .$$

Enfin, nous prendrons $\gamma(s_0, y) = s(y)$, $S' = \{s_0\}$.

La vérification est immédiate de la propriété suivante :

$$\gamma(s_0, g_0, f) \in V$$

si et seulement si $u \varphi f v \neq \{0\}$ en définissant

$$u = (e, g_0) \qquad V = \{(s_0, X^* g) \mid (g, e) \in v\}.$$

D'où le théorème :

THEOREME 2. – *Un C-langage est déterministe si et seulement si il est analysé par un S-automate.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. BAR HILLEL, M. PERLES, E. SHAMIR, On formal properties of simple phrase structure grammars in Y. Bar Hillel : Language and information, *Addison Wesley Publishing Company* (1964).

[2] N. CHOMSKY, Formal properties of grammars in Handbook of Mathematical Psychology, *Wiley Publishing Company,* New York 1963.

[3] N. CHOMSKY, MP. SCHUTZENBERGER, The algebraic theory of context-free languages in Computer Programming and Formal systems, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963.

[4] CC. ELGOLT, Review of "A remark on finite transducers", *I.R.E. Trans Electronic Computers* vol. EC II (1962) p. 802.

[5] CC. ELGOT et JE. MEZEI, On relations defined by generalized finite automata, *I.B.M. Journal of Research and development,* vol. 9 (1965) p. 47-68.

[6] S. GINSBURG, Mathematical theory of context-free languages *Mac Graw Hill Publishing Company,* New York 1966.

[7] S. GINSBURG et E.H. SPANIER, Bounded Algol like languages, *Trans American Math. Society,* vol. 113 (1964) p. 333-368.

[8] S. GINSBURG et Sheila A. GREIBACH, Deterministic Context-free languages, *Information and Control,* vol. (1966) p. 620-648.

[9] Sheila A. GREIBACH, A new normal form theorem for Context-free phrase structure grammars. *Journal of the Association for computing machinery,* vol. 12 (1965) p. 42-52.

[10] N. JACOBSON, Structure of rings, *American Mathematical Society,* Providence 1956.

[11] D.E. KNUTH, On the translation of languages from left to right, *Information and Control,* vol. 8 (1965) p. 607-639.

[12] W. MAGNUS, A. KARRASS, D. SOLITAR, Combinatorial Group Theory, *Interscience Publishing Company,* New York 1966.

[13] J. MYHILL, Finite automata and the representation of events, Wright Air Development Command Technical Report n° 57-624 (1957) p. 112-137.

[14] P. NAUR (edit), Report on the Algorithmic language Algol 60, *Communications Assoc. Computing Machinery,* vol. 3 (1960) p. 299-314.

[15] M. NIVAT, Sur une classe de transducteurs, *Séminaire Dubreil Pisot,* 18ème 1964-1965.

[16] M. NIVAT, Eléments de la théorie générale des codes, In Automata Theory (cours de l'école d'été de Ravello 1964), *Academic Press New York* 1966.

[17] M. NIVAT, Sur l'irréductibilité de certaines représentations de monoïdes, *C.R. Acad Sci. Paris,* vol. 261 (1965) p. 2421-2422.

[18] P. SAMUEL, Progrès récents d'algèbre locale, *Notas de matematica* n° 19, Rio de Janeiro, (1959).

[19] MP. SCHUTZENBERGER, A remark on finite transducers, *Information and Control,* vol. 4 (1961) p. 185-196.

[20] MP. SCHUTZENBERGER, On the definition of a family of automata, *Information and Control,* vol. 4 (1961) p. 245-270.

[21] MP. SCHUTZENBERGER, On a theorem of R. Jungen, *Proc. American Math. Society* (1962) p. 189-197.

[22] MP. SCHUTZENBERGER, Certain Elementary families of automata, in Proceedings of the symposium on mathematical theory of Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn 1962.

[23] MP. SCHUTZENBERGER, Context-free languages and pushdown automata, *Information and Control,* vol. 6 (1963) p. 246-264.

[24] MP. SCHUTZENBERGER, Sur certains sous-monoïdes libres, *Bull. Société Math. France,* vol. 93 (1965) p. 209-223.

[25] MP. SCHUTZENBERGER, Un problème de la théorie des automates, *Séminaire Dubreil-Pisot,* 13ème année (1959-1960).

[26] E. SHAMIR, Mathematical models of languages, in Proceedings of the third IFIP Congress, New-York, (1965).

[27] E. SHAMIR, A representation theorem for algebraic and context-free power series in non commuting variates dans Arhib (ed.). Algebraic theory of machines, languages and semi-groups - Academic Press.

[28] D.H. YOUNGER, Recognition and parsing of Context-free languages in time n° 3 rapport n° 66-C-008, G, General Electric research and Development center, Schenectady (New-York).

(Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1967)

Maurice NIVAT
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Avenue du Général Leclerc
35 - Rennes