ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

XAVIER FERNIQUE

Processus linéaires, processus généralisés

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 1-92
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 1-92.

PROCESSUS LINÉAIRES, PROCESSUS GÉNÉRALISÉS

par Xavier FERNIQUE

Introduction.

La notion classique de fonction aléatoire (processus) définie ([9]) par une famille de lois temporelles est quelquefois insuffisante. D'une part, elle ne permet pas l'étude de certains phénomènes, le bruit de fond par exemple ; d'autre part, elle nécessite pour les études de régularité, l'utilisation de certains concepts étrangers à la théorie de la mesure, la séparabilité ([9]) par exemple.

Ces difficultés tiennent à la nature des choses : la Physique et la Mathématique sont souvent incapables de déterminer un système par ses états instantanés. De la même manière que la détermination précise de tels systèmes « sûrs » a nécessité l'élaboration de la théorie des fonctions généralisées (distributions), de même la détermination précise de tels systèmes « aléatoires » a nécessité la construction des processus généralisés (distributions aléatoires). Et de la même manière que l'emploi des distributions simplifie certaines études de régularité des fonctions, de même l'emploi des distributions aléatoires simplifie l'étude de la régularité des fonctions aléatoires ([11]).

La notion de processus généralisé est née des idées de Gelfand ([13]) : les processus usuels sont définis par des familles de mesures de probabilité sur des espaces de dimensions finies, indexées par l'ensemble des parties finies de l'espace de la variable $t \in \mathbf{R}$, vérifiant certaines propriétés de compatibilité. Une distribution ([18]) étant définie non par un argument $t \in \mathbf{R}$, mais par un argument $\varphi \in \mathcal{D}$ (ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact), Gelfand définit un processus généralisé par une famille de mesures de probabilité sur des espaces de dimensions finies, indexée par l'ensemble des parties finies de $\mathcal{D}$ vérifiant certaines propriétés de compatibilité.

Les distributions aléatoires se sont définitivement imposées à partir des travaux de Minlos ([15]) : de la même manière qu'à toute fonction aléatoire usuelle est associée une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions réelles d'une variable réelle convenablement mesurabilisé ([9]), de même à toute distribution aléatoire est associée une mesure sur l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions convenablement mesurabilisé.

Les distributions aléatoires apparaissent alors comme de bonnes variables aléatoires : ayant défini sur l'espace topologique $\mathcal{D}'$ ([18]) une tribu $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ liée à sa topologie, on appelle distribution aléatoire toute application mesurable d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dans l'espace mesurable $(\mathcal{D}', \mathcal{B}(\mathcal{D}'))$.

Dans le premier chapitre de cet ouvrage, on présente (1.2) une étude systématique de certains espaces topologiques (espaces standards) généralisant les espaces polonais ; on construit (1.3) une théorie individuelle de la mesure sur ces espaces ; on étudie (1.4) les variables aléatoires à valeurs dans un espace standard. Après avoir montré (1.5) que la plupart des espaces fonctionnels usuels, en particulier $\mathcal{D}'$, sont des espaces standards, on étudie (1.6) les convergences des mesures et des variables aléatoires liées à de tels espaces.

Dans le deuxième chapitre, on étudie les processus linéaires : famille (X_φ) de variables aléatoires numériques indexée par les éléments φ d'un espace vectoriel E, vérifiant certaines conditions linéaires (2.1). Après une étude (2.2) de la régularité d'un processus linéaire indexé par un espace vectoriel topologique, on cherche (2.3) à quelles conditions on peut lui associer une variable aléatoire à valeurs dans le dual topologique E′ de son index, muni d'une tribu convenable. Ces conditions sont simples si E est limite inductive d'une suite de sous-espaces de Fréchet nucléaires (th. II.3.3., Minlos) ou un espace de Hilbert (th. II.3.4., Prohorov [17]). On les exprime (2.5) en termes de transformées de Fourier.

Le chapitre 3 applique les résultats des études précédentes à l'espace des distributions : on étudie successivement la tribu borélienne sur $\mathcal{D}'$ (3.2 et 3.3), les opérations sur les distributions aléatoires (3.5), leurs transformées de Fourier (3.6), leurs convergences et leurs moments (3.7). On montre en particulier que la fonctionnelle caractéristique est l'outil suffisant pour l'étude des distributions aléatoires et de leur convergence : le célèbre théorème de P. Lévy sur la convergence en loi des variables aléatoires usuelles s'énonce sans modification (th. III.6.5).

Le chapitre 4 est un chapitre d'exemples.

La lecture suppose des notions précises sur la théorie de la mesure et des variables aléatoires usuelles ([16], ch. I, II et III), des espaces polonais ([2]), des espaces vectoriels topologiques ([3], [8]) des distributions ([18]).

Références. — Les références entre parenthèses correspondent dans l'ordre aux chapitres, paragraphes, alinéas de la thèse. Les références entre crochets sont des références bibliographiques.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

MESURES DE PROBABILITÉ SUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE

1. Généralités.

Les progrès de la théorie des processus, à partir des travaux de Gelfand ([13]) amènent à définir des mesures de probabilité sur des espaces topologiques relativement complexes, espaces de distributions par exemple. Ces espaces ne sont ni localement compacts, ni métrisables. On présente dans ce chapitre une famille d'espaces topologiques sur lesquels on peut construire des mesures de probabilité suffisamment maniables.

On rappelle d'abord quelques notions :

I.1.1. *Tribus, générateurs, espaces et applications mesurables* [14].

Soient un ensemble A et une famille $\mathcal{B}$ de parties de A ; on dit que $\mathcal{B}$ est une *tribu* sur A si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Le complémentaire de tout ensemble de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}$.

b) Toute intersection dénombrable d'ensembles de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}$. L'ensemble $\mathbf{P}$ (A) de toutes les parties de A est évidemment une tribu. Toute intersection de tribus sur A est une tribu sur A. Pour toute partie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{P}$ (A), il existe donc une plus petite tribu contenant $\mathbf{F}$; on l'appelle la *tribu engendrée par* $\mathbf{F}$; on la note σ ($\mathbf{F}$). Soient deux ensembles A et B, une tribu $\mathcal{B}$ sur B et une application f de A dans B ; l'ensemble f^{-1} ($\mathcal{B}$) des parties de A qui sont images réciproques par f d'éléments de $\mathcal{B}$ est une tribu sur A ; pour toute partie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{P}$ (B) engendrant $\mathcal{B}$, f^{-1} ($\mathcal{B}$) est la tribu engendrée par f^{-1} ($\mathbf{F}$).

Soient donnés un ensemble A, un index I et pour tout $i \in$ I, un ensemble B_i, une application f_i de A dans B_i et une tribu $\mathcal{B}_i$ sur B_i ; la tribu sur A engendrée par $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ sera appelée, s'il n'y pas de confusion possible, *tribu engendrée par* $(f_i)_{i \in I}$ et notée $\sigma\,(f_i)_{i \in I}$.

En particulier, soient une famille d'ensembles $(B_i)_{i \in I}$ et pour tout $i \in I$, une tribu $\mathcal{B}_i$ sur B_i ; la tribu engendrée sur $\prod_{i \in I} B_i$ par la famille des projections $(pr_i)_{i \in I}$ sera appelée *tribu produit* de $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ et notée $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}_i$.

On appelle *espace mesurable* tout couple $(A, \mathcal{A})$ formé d'un ensemble A et d'une tribu $\mathcal{A}$ sur A.

Soient deux espaces mesurables $(A, \mathcal{A})$, $(B, \mathcal{B})$ et une application f de A dans B ; on dit que f est une *application mesurable* de $(A, \mathcal{A})$ dans $(B, \mathcal{B})$ si $\mathcal{A}$ contient $f^{-1}(\mathcal{B})$. L'application composée de deux applications mesurables est une application mesurable. Pour qu'une application f d'un espace mesurable $(A, \mathcal{A})$ dans un produit $(\prod_i B_i, \bigotimes_i \mathcal{B}_i)$ d'espaces mesurables soit mesurable, il faut et il suffit que pour tout indice i l'application composée $pr_i \circ f$ soit mesurable.

I.1.2. *Tribu borélienne, applications boréliennes* ([2], p. 126).

Dans un espace topologique T, on appelle *tribu borélienne* sur T et on note $\mathcal{B}(T)$ la tribu engendrée par les parties ouvertes de T ; ses éléments sont appelés *parties boréliennes* de T ; la tribu $\mathcal{B}(T)$ est aussi engendrée par les parties fermées de T.

PROPOSITION I.1.2. — *Soient une famille dénombrable* $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *d'espaces topologiques à base dénombrable* ([4], p. 20) *et l'espace produit* $T = \prod_{n \in \mathbf{N}} T_n$; *la tribu* $\mathcal{B}(T)$ *est identique à la tribu* $\bigotimes_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{B}(T_n)$.

En effet, soit pour tout entier n, une base dénombrable C_n de la topologie de T_n ; on appelle C la famille des parties de T qui sont de la forme $\prod_{j=1}^{k} U_j \times \prod_{j=k+1}^{\infty} T_j$ où les U_j sont des éléments de C_j ; la famille C est une base dénombrable de la topologie de T ; la tribu qu'elle engendre est donc identique à la tribu $\mathcal{B}(T)$; elle est identique par construction à $\bigotimes_n \mathcal{B}(T_n)$, d'où le résultat.

Soient deux espaces topologiques T et T′, on dit qu'une application f de T dans T′ est une *application borélienne* si c'est une application mesurable de $(T, \mathcal{B}(T))$ dans $(T', \mathcal{B}(T'))$. L'application composée de deux applications boréliennes est borélienne. Toute application continue f

de T dans T′ est borélienne. En effet, la tribu f^{-1} ($\mathcal{B}$ (T′)) est engendrée par les images réciproques par f des parties ouvertes de T′ ; ces images réciproques sont des parties ouvertes de T et engendrent donc une tribu contenue dans $\mathcal{B}$ (T), d'où le résultat.

I.1.3. *Tribus boréliennes sur des sous-espaces boréliens.*

Soient un espace topologique T et un sous-espace T′ de T ; la tribu borélienne $\mathcal{B}$ (T′) est engendrée par les parties ouvertes de T′, c'est-à-dire par les traces sur T′ des parties ouvertes de T ; ces dernières parties engendrant $\mathcal{B}$ (T), la tribu borélienne $\mathcal{B}$ (T′) se compose des traces sur T′ des parties boréliennes de T. Si le sous-espace T′ est une partie borélienne de T, ces traces, intersections de boréliens, sont boréliennes dans T ; la tribu $\mathcal{B}$ (T′) se compose alors des parties boréliennes de T contenues dans T′. Dans tous les cas, les applications mesurables d'un espace mesurable (E, $\mathcal{A}$) dans (T′, $\mathcal{B}$ (T′)) sont les applications mesurables de (E, $\mathcal{A}$) dans (T, $\mathcal{B}$ (T)) dont l'image est contenue dans T′.

I.1.4. *Mesures de probabilité sur un espace topologique.*

Dans toute la suite, lorsqu'on utilisera des mesures de probabilité sur un espace topologique T, il s'agira, sauf mention expresse, de mesures de probabilité sur (T, $\mathcal{B}$ (T)).

2. Espaces standards.

I.2.1. *Définition.*

Soient P *et* T *deux espaces topologiques et* f *une application de* P *dans* T. *On dit que le couple* (P, f) *standardise* T *si* T *est séparé, si* P *est polonais et si* f *est continue bijective. On dit qu'un espace topologique* T *est standard s'il existe un couple standardisant* T.

On trouvera une étude des espaces polonais dans ([2], pp. 121-149) et des mesures de probabilité sur les espaces polonais dans ([16], pp. 59-65 et 74-79). A la métrisabilité près, les espaces standards sont ceux qui sont appelés lusiniens dans [2]. On remarquera que dans [2], le corollaire du théorème 3 du paragraphe 6 est valable sous la seule condition que l'espace F soit séparé :

Proposition I.2.1. — *Si f est une application continue injective d'un espace polonais P dans un espace séparé* F, *l'image f (P) est un ensemble borélien de* F. *Autrement dit tout sous-espace standard d'un espace séparé* F *est un ensemble borélien de* F.

I.2.2. *Exemples d'espaces standards.*

Tout espace polonais est standard ; tout espace lusinien ([2], p. 128) est standard ; en particulier tout sous-espace borélien d'un espace polonais est lusinien ([2], p. 134) donc standard. Plus généralement :

Proposition I.2.2. — (a) *Soient* T *un espace standard et* T′ *un sous-espace de* T ; *pour que* T′ *soit standard, il faut et il suffit qu'il soit borélien dans* T. (b) *Soient* T *un espace standard et f une application continue injective de* T *dans un espace séparé* F, *l'image f* (T) *est un espace standard.*

Démonstration. — (a) La nécessité a été énoncée en (I.2.1) ; réciproquement, si T′ est un sous-espace borélien de l'espace T standardisé par le couple (P, f), l'image réciproque f^{-1} (T′) est un sous-espace borélien de P donc standard ; soit un couple (P′,f') standardisant f^{-1} (T′), le couple (P′, $f \circ f'$) standardise T′. (b) Soit un couple (P, g) standardisant T ; le couple (P, $f \circ g$) standardise f (T).

I.2.3. *Tribu borélienne sur un espace standard.*

Soit T un espace topologique standardisé par un couple (P, f) ; puisque f est bijective, l'image de toute tribu sur P est une tribu sur T. L'image de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ (P) est une tribu contenue dans $\mathcal{B}$ (T) (prop. I.2.2.) et contenant $\mathcal{B}$ (T) (I.1.2) ; on a donc : $f\,[\mathcal{B}\,(P)] = \mathcal{B}\,(T)$. L'application f définit donc une application bijective de $\mathcal{B}$ (P) sur $\mathcal{B}$ (T). Elle sera encore notée f.

I.2.4. *Théorème* I.2.4.

(a) *Le produit* T *d'une famille dénombrable* $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *d'espaces standards est un espace standard ; sa tribu borélienne est la tribu produit* $\bigotimes_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{B}(T_n)$.

(b) *Dans un espace topologique séparé* E, *la réunion* T *d'une famille dénombrable* $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de sous-espaces standards est un espace standard.*

(c) *L'intersection d'une famille dénombrable* $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de sous-espaces standards d'un espace séparé est un espace standard ; la différence de deux sous-espaces standards d'un espace séparé est un espace standard.*

Démonstration :

(a) Soit $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille dénombrable d'espaces standards ; pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit (P_n, f_n) un couple standardisant T_n ; le produit $P = \prod_{n \in \mathbf{N}} P_n$ est un espace polonais ([3], p. 121) et l'application $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une application continue bijective de P sur l'espace séparé $T = \prod_{n \in \mathbf{N}} T_n$ qui est donc standard. Par ailleurs, les propositions I.1.2 et I.2.3 permettent d'écrire :

$$\mathcal{B}(T) = f(\mathcal{B}(P)) = f\left[\bigotimes_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{B}(P_n)\right] =$$
$$= f\left[\bigotimes_{n \in \mathbf{N}} f^{-1}(\mathcal{B}(T_n))\right] = \bigotimes_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{B}(T_n).$$

(b) Soit T la réunion d'une famille dénombrable $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-espaces standards d'un espace topologique séparé E ; pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = T_n - \bigcup_{k \leqslant n-1} T_k$; les T_k étant boréliens dans E (I.2.1), S_n est borélien dans l'espace standard T_n : S_n est donc standard (I.2.2). La famille $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille d'espaces standards disjoints dont la réunion est T ; soit pour tout $n \in \mathbf{N}$, un couple (P_n, f_n) standardisant S_n ; l'espace P somme des P_n est un espace polonais ([2], p. 121) et la famille $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définit une application continue bijective de P sur T ; comme T est séparé, il est standard.

(c) Soit $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-espaces standards d'un espace séparé E ; leur intersection est homéomorphe ([2], p. 123) à un sous-espace fermé de leur produit qui est standard ((a) et prop. I.2.2 (a)).

I.2.5. *Théorème* I.2.5.

(a) *Soient deux espaces standards* S *et* T *et une application borélienne injective* f *de* S *dans* T ; *l'image* f (S) *est borélienne dans* T.

(b) *Sur tout espace standard* T, *il existe une suite de fonctions boréliennes réelles séparant les points.*

(c) *Sur tout espace standard* T, *la tribu borélienne est engendrée par toute suite de parties boréliennes séparant les points ou par toute suite de fonctions boréliennes numériques séparant les points.*

Démonstration. — D'après l'alinéa I.2.3, il suffit d'étudier le cas où les espaces considérés sont polonais.

(a) L'espace produit $P = S \times T$ est un espace polonais et l'application $g : (s, t) \to (f(s), t)$ est une application borélienne de P dans $T \times T$ puisque on a :

$$\mathcal{B}(P) = \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(T) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(T \times T) = \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{B}(T)\ ;$$

la diagonale est fermée dans $T \times T$ donc borélienne, son image réciproque U par g est une partie borélienne de P, donc standard. La restriction à U de la projection de $S \times T$ sur T est continue, et injective comme f ; la projection de U sur T est donc une partie borélienne de T (prop. I.2.1), or cette projection est f (S), d'où le résultat.

(b) Soient d une distance sur T compatible avec sa topologie et $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite partout dense dans T ; pour tout entier n, on définit la fonction numérique g_n sur T par :

$$g_n(t) = d(t_n, t)\ ;$$

la suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sépare les points de T.

(c) Soient $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions boréliennes numériques séparant les points de T, et g l'application $t \to (g_n(t))_{n \in \mathbf{N}}$ de T dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$; l'application g est borélienne d'après la proposition I.1.2 et injective. La tribu $\mathcal{B}$ engendrée par la suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur T est identique à la tribu engendrée par g puisque $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) = \bigotimes_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{B}(\mathbf{R})$; elle est contenue dans $\mathcal{B}$ (T) puisque g est borélienne ; le résultat (I.2.5 (a)) montre alors qu'elle est identique à $\mathcal{B}$ (T). Ceci prouve la deuxième affirmation de (c) ; la première s'ensuit en utilisant des fonctions indicatrices de parties.

I.2.6. *Espaces σ-compacts.*

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un espace topologique est σ-compact s'il est séparé et réunion d'une suite* $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de sous-espaces compacts métrisables.*

Un tel espace T est standard (I.2.4 (b)). Dans chacun des sous-espaces K_n, il existe une famille dénombrable de compacts séparant les points ; la réunion de ces familles est une famille dénombrable de parties boréliennes séparant les points de T ; elle engendre donc $\mathcal{B}$ (T) (I.2.5 (c)). Ainsi la tribu borélienne sur un espace σ-compact est engendrée par les parties compactes.

3. Mesures positives bornées sur un espace standard.

I.3.1.

Soit un espace topologique T standardisé par un couple (P, f) ; f établit une bijection de $\mathcal{B}$ (P) sur $\mathcal{B}$ (T) ; à toute mesure positive bornée m sur (P, $\mathcal{B}$ (P)), f associe donc une mesure positive bornée $f(m)$ sur (T, $\mathcal{B}$ (T)) définie par :

$$\forall\, b \in \mathcal{B}(\mathrm{T}), \qquad [f(m)](b) = m\,[f^{-1}(b)].$$

L'application f ainsi définie est une bijection de l'ensemble des mesures positives bornées sur (P, $\mathcal{B}$ (P)) sur l'ensemble des mesures positives bornées sur (T, $\mathcal{B}$ (T)). Cette bijection met en évidence les théorèmes suivants :

I.3.2. *Théorème* I.3.2.

Soit une mesure positive bornée m sur un espace standard T ; *pour toute partie borélienne* A *de* T, *on a :*

(1) $m(\mathrm{A}) = \sup \{m(\mathrm{K}) \mid \mathrm{K}$ *compact métrisable,* $\mathrm{K} \subset \mathrm{A}\}$,

(2) $m(\mathrm{A}) = \inf \{m(\mathrm{U}) \mid \mathrm{U}$ *ouvert,* $\mathrm{U} \supset \mathrm{A}\}$,

Démonstration. — Si l'espace T est polonais, le résultat est classique ([16], p. 61) ; si l'espace T est standard, on utilise la bijection I.3.1 et le fait que l'image par f d'une partie compacte de P contenue dans f^{-1} (A) est une partie compacte métrisable de T contenue dans A. On a donc (1) ; (2) s'ensuit.

On déduit de ce théorème par les calculs habituels ([5], p. 157) les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. — *Soit m une mesure positive bornée sur l'espace standard* T; *toute partie borélienne* A *de* T *est réunion d'une suite de compacts métrisables disjoints et d'une partie borélienne m-négligeable.*

COROLLAIRE 2. — *Toute mesure positive bornée sur un espace standard est portée par un sous-espace σ-compact.*

I.3.3. *Théorème* I.3.3. (cf. [16], p. 78).

Soient $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite d'espaces standards et* Π *leur produit; pour toute suite finie* J *d'entiers on suppose donnée une mesure de probabilité* m_J *sur* $\Pi_J = \prod_{n \in J} T_n$; *on suppose que* m_J *se projette sur* $m_{J'}$ *si* J *contient* J'; *alors il existe une mesure de probabilité unique sur* Π *se projetant sur chaque* m_J.

COROLLAIRE. — *Soient* T *un espace topologique et* $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite d'espaces standards; pour tout entier $n > 0$, soient g_n une application continue de T_n dans T_{n-1}, f_n une application continue de* T *dans T_n et m_n une mesure de probabilité sur T_n ; on suppose que l'application $f : x \to (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est un homéomorphisme de* T *sur le sous-espace* U *de $\prod_{n \in \mathbf{N}} T_n$ formé des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que pour tout n $g_n(x_n) = x_{n-1}$; on suppose que l'image de m_n par g_n est m_{n-1}. L'espace* T *est alors standard et il existe une mesure de probabilité unique m sur* T *telle que pour tout n, on ait $f_n(m) = m_n$.*

Démonstration du corollaire. — Pour tout couple d'entiers (m, n) tel que $m > n$, on pose $g_n^m = g_{n+1} \circ g_{n+2} \circ \dots \circ g_m$; pour toute suite finie J d'entiers, on appelle U_J l'ensemble des éléments de Π_J tels que pour tout couple d'entiers (m, n) appartenant à J tels que $m > n$, $g_n^m(x_m) = x_n$, et on note j le plus grand élément de J. La continuité des g_n montre que U_J est fermé donc borélien dans Π_J : c'est un espace standard; la projection de U_J sur T_j est continue et bijective, il lui est donc associé une bijection liant les mesures de probabilité : il existe une mesure de probabilité unique μ_J sur U_J telle que :

$$\forall\, b \in \mathcal{B}(U_J), \quad \mu_J(b) = m_j(pr_j\, b) ;$$

cette mesure sur U_J induit une mesure sur Π_J portée par U_J. On vérifie facilement que si J contient J', μ_J se projette suivant $\mu_{J'}$; le théorème I.3.3 montre alors qu'il existe une unique mesure de probabilité μ sur le produit Π se projetant sur chaque μ_J. Cette mesure induit une mesure portée par le sous-espace standard U et c'est la seule mesure de probabilité sur U telle que, pour tout n, $(f_n \circ f^{-1})(\mu) = m_n$. En utilisant l'homéomorphisme f, on en déduit le résultat.

I.3.4. *La proposition suivante donne une généralisation du théorème* I.2.5. (a) :

PROPOSITION I.3.4. — *Soient deux espaces standards* S *et* T, *et une application borélienne f non nécessairement injective de* S *dans* T; *pour toute mesure positive bornée μ sur* T, *on note $\mathcal{B}_\mu$* (T) *la tribu μ-complétée de $\mathcal{B}$* (T). *Alors f* (S) *appartient à $\mathcal{B}_\mu$* (T).

Démonstration. — Du fait de la bijection I.3.1, on peut supposer que S et T sont polonais; soit g l'application de $S \times T$ dans $T \times T$ définie par $g(s, t) = (t, f(s))$, elle est borélienne puisque les tribus boréliennes sur $S \times T$ et $T \times T$ sont les tribus produits des tribus boréliennes sur les facteurs; l'image réciproque par g de la diagonale fermée est donc un borélien dans $S \times T$; c'est l'ensemble $\{ (s, t) \mid t = f(s) \}$; $f(S)$ qui est sa projection sur T est l'image d'une partie borélienne du polonais $S \times T$ dans le polonais T par une application continue et est donc souslinien ([2], p. 127). Soit un espace σ-compact $C = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n$ portant la mesure de probabilité μ; pour tout entier n, $f(S) \cap C_n$ est un sous-espace sous linien relativement compact de T, il appartient à $\mathcal{B}_\mu(T)$ ([2], p. 138, théorème 5); $f(S)$, réunion d'une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}_\mu(T)$ est un élément de $\mathcal{B}_\mu(T)$.

4. Variables aléatoires à valeurs dans un espace standard.

I.4.1. *Définition.*

Soient un espace topologique séparé T *et un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, $\mathcal{A}$ *étant* **P***-complète; on appelle variable aléatoire à valeurs dans* T *toute application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(T, \mathcal{B}(T))$; *l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *est appelé espace d'épreuves de la variable aléatoire.*

Soient deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans T ayant même espace d'épreuves; on dit qu'elles sont *indiscernables* si :

$$\text{(a)} \quad \{ \omega \mid X(\omega) = Y(\omega) \} \in \mathcal{A},$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{P} \{ \omega \mid X(\omega) = Y(\omega) \} = 1.$$

La condition (a) est d'ailleurs toujours vérifiée si T est séparé à base dénombrable (I.1.2) ou si T est standard (I.2.4 (a)), car dans chacun de ces cas, la diagonale de $T \times T$ est fermée et

$$\mathcal{B}(T \times T) = \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{B}(T).$$

Soit une variable aléatoire X à valeurs dans T; on dit qu'elle est une *variable aléatoire étagée* si l'image de Ω dans T par X n'a qu'un nombre fini d'éléments.

Soit une variable aléatoire X à valeurs dans T; l'application μ qui à toute partie borélienne b de T associe $\mathbf{P}(X^{-1}(b))$ est une mesure de probabilité sur $(T, \mathcal{B}(T))$; on l'appelle *loi de la variable aléatoire*. Si les deux variables aléatoires X et Y sont indiscernables, elles ont même loi. Toute mesure de probabilité μ sur $(T, \mathcal{B}(T))$ est loi d'au moins une variable aléatoire, à savoir l'application identique de $(T, \mathcal{B}_\mu(T), \mu)$ dans $(T, \mathcal{B}(T))$.

I.4.2. *Le théorème suivant donne une définition constructive des variables aléatoires à valeurs dans un espace standard.*

Théorème I.4.2 :

(a) *La limite* X *d'une suite* $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de variables aléatoires à* *valeurs dans un espace topologique, ayant même espace d'épreuves* (Ω, $\mathcal{A}$, $\mathbf{P}$) *convergeant simplement dans* T *est une variable aléatoire.*

(b) *Toute variable aléatoire* X *à valeurs dans un espace standard* T *est limite simple dans* T *d'une suite de variables aléatoires étagées.*

Démonstration de (a) :

Il s'agit de montrer que l'application X de Ω dans T est une application mesurable de (Ω, $\mathcal{A}$) dans (T, $\mathcal{B}$ (T)); or pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de T, on a :

$$X^{-1}(\mathcal{O}) = \{\, \omega \mid \exists\ p \in \mathbf{N} \mid \forall n \geqslant p, \quad X_n(\omega) \in \mathcal{O} \,\}$$

$$X^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} \ \bigcap_{n \geqslant p} X_n^{-1}(\mathcal{O}).$$

L'ensemble $X^{-1}(\mathcal{O})$ est donc une partie borélienne de Ω, d'où le résultat puisque $\mathcal{B}$ (T) est engendré par les parties ouvertes de T.

Démonstration du (b) :

Tout espace polonais étant homéomorphe ([2], p. 124) à une intersection dénombrable d'ensembles ouverts du cube $I^{\mathbf{N}}$, il existe un couple (P, f) standardisant T tel que P soit sous-ensemble d'un espace métrique compact K. Soit Y l'image réciproque de X par f; c'est une variable aléatoire à valeurs dans P. Pour tout entier positif p, on peut recouvrir P par une famille finie $(A_m^p)_{m \in M}$ de parties boréliennes disjointes de K-diamètre inférieur à $\dfrac{1}{p}$; soit $(B_m^p)_{m \in M}$ la famille des images inverses par Y des A_m^p, on choisit un élément ω_m^p dans chaque B_m^p. On définit la suite $(Y_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires étagées à valeurs dans P par :

$$\forall p \geqslant 1, \quad \forall m \in M, \quad \forall \omega \in B_m^p, \quad Y_p(\omega) = Y(\omega_m^p).$$

Pour tout élément ω de Ω, la suite $(Y_p(\omega))_{p \in \mathbf{N}}$ converge dans P vers Y; la suite des images par f converge alors vers X dans T, d'où le résultat.

I.4.3. *Le théorème suivant permettra d'opérer sur les variables aléatoires.*

THÉORÈME I.4.3.

Soit une famille finie $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *de variables aléatoires à valeurs respectives dans les espaces standards* T_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *ayant même espace* *d'épreuves* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. *Soient de plus* F *un espace topologique et u une application de* $\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} T_k$ *dans* F, *séparément continue par rapport aux suites convergentes; l'application* $u(X_1, \ldots, X_n)$ *est une variable aléatoire à valeurs dans* F.

Démonstration. — Pour tout entier k compris entre 1 et n, on choisit une suite $(X_k^m)_{m \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires étagées convergeant simplement dans T vers X_k ; pour toute famille $(m_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de n entiers positifs, on construit l'application $Y_{(m_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}} = u(X_1^{m_1}, \ldots, X_n^{m_n})$; c'est une application de Ω dans F qui est une variable aléatoire étagée à valeurs dans F; l'hypothèse sur u montre alors par passages à la limite successifs en $m_1, \ldots, m_n$ que $u(X_1, \ldots, X_n)$ est une variable aléatoire à valeurs dans F.

5. Exemples d'espaces standards.

I.5.1. *Rappels.*

On appelle ([3], p. 59) *espace de Fréchet* un espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable et complet. On appelle ([4], p. 89) *espace de Montel* un espace localement convexe tonnelé séparé, dans lequel tout ensemble borné est relativement compact.

On fera dans la suite usage du lemme suivant :

LEMME I.5.1. — *Dans tout espace de Fréchet-Montel* E, *il existe une suite partout dense.*

Démonstration.

Soit $\mathfrak{U}$ un système fondamental dénombrable décroissant de voisinages symétriques de l'origine dans E; il suffit de démontrer que pour tout élément U de $\mathfrak{U}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (x_n + U) = E.$$

Or le théorème de Zorn permet de définir un sous-ensemble D de E maximal pour la propriété :

$$x \in D, \quad y \in D, \quad x \neq y \Rightarrow x - y \notin U. \tag{1}$$

On a alors $E = D + U$, sinon D ne serait pas maximal. Supposons que D ne soit pas dénombrable et montrons qu'on arrive à contradiction : soit $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n \subset \dots$, la suite ordonnée des éléments de $\mathfrak{U}$. Comme tout voisinage de l'origine est absorbant, on peut définir par récurrence une suite $(m_n)_{n\in \mathbf{N}}$ de nombres entiers strictement positifs et une suite décroissante $(A_n)_{n\in \mathbf{N}}$ de parties non dénombrables de D telles que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $(m_{n+1} \cdot U_{n+1}) \cap A_n = A_{n+1}$. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on choisit par récurrence un élément x_n de A_n différent de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. La famille $(x_p)_{p\geqslant n}$ étant contenue dans A_n est absorbée par U_n ; il en résulte que $A = (x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est borné, donc relativement compact; pourtant, si V est un voisinage de l'origine tel que $V + V \subset U$, la relation (1) montre qu'on ne peut pas former de recouvrement fini de A par des ensembles d'ordre V; il y a donc contradiction.

On a alors :

THÉORÈME I.5.1 :

(a) *Tout espace de Fréchet de type dénombrable est standard; en particulier tout espace de Fréchet-Montel est standard.*

(b) *La limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable est standard.*

(c) *Le dual faible de tout espace de Fréchet de type dénombrable est standard.*

(d) *Le dual faible de la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable est standard.*

(e) *Le dual fort de tout espace de Fréchet-Montel est standard.*

(f) *Le dual fort de la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet-Montel est standard.*

Démonstration :

(a) : Les espaces considérés sont métrisables et complets de type dénombrable, donc polonais, donc standards (I.2.2).

(b): Les espaces considérés sont séparés et réunions de suites de sous-espaces standards (a); ils sont donc standards (théorème I.2.4 (b)).

(c) et (e) : Les espaces considérés sont séparés et réunions de familles dénombrables de compacts métrisables, à savoir les polaires de voisinages de zéros, ils sont donc standards (I.2.6).

(d) et (f) : Soient la limite inductive stricte F d'une suite $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-espaces de Fréchet de type dénombrable (resp. de Fréchet-Montel) et F′ son dual faible (resp. fort); pour tout entier n, soient F'_n le dual faible (resp. fort) de F_n, l'application canonique continue g_n de F'_n dans F'_{n-1} et l'application canonique continue f_n de F′ dans F'_n ; l'application $\{ f : x \to (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \}$ de F′ sur le sous-espace de $\prod_{n \in \mathbf{N}} F'_n$ formé des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que pour tout n, $g_n(x_n) = x_{n-1}$ est un homéomorphisme. Comme la famille $(F'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille d'espaces standards ((c) et (e)), l'espace F′ est standard (théorème I.3.3).

6. Convergences.

I.6.1. *Rappels topologiques. Espaces standards réguliers.*

Soit un espace topologique *séparé* X.

On dit qu'il est *régulier* si (O'_{III}, [1], p. 91) pour toute partie fermée F de X et tout point $x \notin F$, il existe un voisinage de x et un voisinage de F sans point commun; tout sous-espace est alors régulier.

On dit qu'il est *normal* si (O_V, [2], p. 81) pour tout couple (A, B) de parties fermées et disjointes de X, il existe une application continue de X dans [0,1] égale à zéro en tout point de A et à 1 en tout point de B; il est alors régulier.

On dit qu'il est *paracompact* si (P.C, [1], p. 109) pour tout recouvrement ouvert de X, il existe un recouvrement ouvert plus fin localement fini; il est alors normal.

On dit qu'il est *parfaitement normal,* s'il est normal et si toute partie fermée F de X est intersection dénombrable d'ensembles ouverts. Il existe alors une application continue de X dans [0, 1] telle que $f^{-1}(0) = F$.

La topologie d'un espace standard régulier est précisée par la proposition :

PROPOSITION I.6.1. — *Un espace standard régulier est parfaitement normal et paracompact.*

Démonstration. — Soient un espace standard T et un couple (P, f) le standardisant; pour tout recouvrement ouvert Ω de T, la famille $(f^{-1}(\omega))_{\omega \in \Omega}$ définit un recouvrement ouvert de P; puisque P est à base dénombrable, on peut extraire un recouvrement dénombrable

$$(f^{-1}(\omega_n)_{n \in \mathbf{N}}).$$

La famille $(\omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définit alors un recouvrement ouvert dénombrable de T extrait de Ω.

Supposons l'espace standard T régulier; soit Ω un recouvrement ouvert de T; à tout élément x de T, associons un élément ω_x de Ω contenant x et un voisinage ouvert V (x) dont l'adhérence soit contenue dans ω_x $(\mathrm{O}'_{\mathrm{III}})$. La famille $(\mathrm{V}(x))_{x \in \mathrm{T}}$ définit un recouvrement ouvert de T; on peut donc extraire un recouvrement dénombrable $(\mathrm{V}(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$. Pour tout entier n positif, on pose alors :

$$\mathrm{A}_n = \{ x \in \omega_{x_n} \mid x \notin \bigcup_{k < n} \overline{\mathrm{V}}(x_k) \} ;$$

la famille $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définit un recouvrement ouvert plus fin que Ω ; il est localement fini, car V (x_n) ne rencontre au plus que $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{n-1}$. T est donc paracompact.

Soit F une partie fermée de l'espace standard régulier T; on appelle $\mathfrak{F}$ la famille de ses voisinages; pour tout élément $x \notin \mathrm{F}$, il existe un voisinage fermé de F ne contenant pas x puisque T est régulier ; la famille $(\mathrm{T} - \overline{\mathrm{V}})$ où V parcourt $\mathfrak{F}$ définit donc un recouvrement ouvert de l'espace standard (I.2.2) T — F; on peut en extraire un recouvrement dénombrable $(\mathrm{T} - \overline{\mathrm{V}}_n)_{n \in \mathbf{N}}$; on a alors :

$$\mathrm{F} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\mathrm{V}}_n = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{V}_n.$$

L'espace T est donc parfaitement normal.

COROLLAIRE 1. — *Sur tout espace standard régulier, les fonctions continues $\geqslant 0$ bornées séparent les mesures $\geqslant 0$ bornées.*

Démonstration. — Soient T un espace standard régulier, μ une mesure positive bornée sur T, et F un sous-ensemble fermé de T ; pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe un ouvert Ω contenant F tel que $\mu(F)$ soit supérieur à $\mu(\Omega) - \varepsilon$; il existe une application continue f de T dans [0, 1] égale à 1 dans F nulle hors de Ω ; on a alors :

$$\mu(F) \leqslant \mu(f) \leqslant \mu(F) + \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\mu(F) = \inf \{\mu(f) \mid f \geqslant 0, f \mid F = 1\}.$$

Deux mesures positives bornées qui coïncident sur toute fonction continue bornée coïncideront donc aussi sur toute partie fermée, donc (th. I.3.2) sur toute partie borélienne ; elles seront donc égales.

COROLLAIRE 2. — *Tout espace compact standard est métrisable.*

Démonstration. — Soit K un espace compact standard ; alors $K \times K$ est un espace standard (th. I.2.4 a) compact, donc régulier. Il existe alors (prop. I.6.1) une application continue de $K \times K$ dans [0, 1] dont le noyau est la diagonale ; l'unique structure uniforme sur K est donc définie par un système fondamental dénombrable d'entourages ; K est bien métrisable.

COROLLAIRE 3. — *Pour qu'une partie* A *d'un espace standard régulier* T *soit relativement compacte, il faut et il suffit que de toute suite d'éléments de* A, *on puisse extraire une suite partielle convergente.*

Démonstration. — La nécessité est classique ([1 a], p. 91); démontrons la suffisance. Il suffit ([1a], p. 95) de montrer que toute base $\mathfrak{B}$ de filtre sur A possède un point adhérent dans T ; or dans le cas contraire, les adhérences des ensembles de $\mathfrak{B}$ formeraient une famille d'ensembles fermés dans T dont l'intersection serait vide ; on pourrait en extraire une famille dénombrable $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (prop. I.6.1) dont l'intersection serait vide ; pour tout entier n positif, on choisirait alors un élément x_n de $A \cap [\bigcap_{p \leqslant n} F_p]$; aucune suite extraite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne pourrait converger. D'où la contradiction et le résultat.

I.6.2. *Convergence étroite des mesures positives bornées sur un espace standard régulier.*

DÉFINITION. — *Soient un espace standard régulier* T *et l'ensemble* $\mathcal{M}$ (T) *des mesures positives bornées sur* T ; *à toute famille finie* $(f_1, \ldots, f_n)$ *de fonctions continues bornées sur* T *et à tout* $\varepsilon > 0$, *on associe :*

$$\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_n; \varepsilon) = \{(\mu, \nu) \in \mathcal{M}(\mathrm{T}) \times \mathcal{M}(\mathrm{T}) \mid \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |\mu(f_j) - \nu(f_j)| \leqslant \varepsilon\}. \tag{1}$$

Les $\mathcal{V}$ *définissent une structure uniforme sur* $\mathcal{M}$ (T). *On appelle topologie de la convergence étroite et on note* $\mathcal{E}$ (T) *la topologie définie par cette structure uniforme.* C'est la topologie induite sur $\mathcal{M}$ (T) par la topologie faible du dual de l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur T.

Cas particuliers :

(a) Si l'espace standard régulier T est compact métrisable, la topologie de la convergence étroite est identique à la topologie de la convergence vague ([5], p. 61) ; en particulier pour qu'un ensemble A soit relativement compact, il faut et il suffit que :

$$\exists\, m > 0 \mid \forall \mu \in \mathrm{A},\ \mu(\mathrm{T}) \leqslant m. \tag{2}$$

(b) Si l'espace standard régulier T est un espace polonais, la topologie de la convergence étroite est identique à la topologie de Prohorov ([17], p. 164). L'espace ($\mathcal{M}$ (T), $\mathcal{E}$ (T)) est alors un espace polonais ; pour qu'un ensemble A soit relativement compact, il faut et il suffit que :

$$\exists\, m > 0 \mid \forall \mu \in \mathrm{A},\ \mu(\mathrm{T}) \leqslant m, \tag{3a}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathrm{K}_\varepsilon \text{ compact} \mid \forall \mu \in \mathrm{A},\ \mu(\mathrm{T} - \mathrm{K}_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{3b}$$

(cf. lemme I.6.4 b).

I.6.3. *Théorème* I.6.3.

(a) *L'espace topologique* ($\mathcal{M}$ (T), $\mathcal{E}$ (T)) *est un espace standard régulier.*

(b) *Si une partie* A *de* ($\mathcal{M}$ (T), $\mathcal{E}$ (T)) *vérifie les conditions* I.6.2 (3*a* et 3*b*), *elle est relativement compacte.*

(c) *Pour toute fonction f semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) et bornée inférieurement (resp. supérieurement) sur* T, *la* *fonction* $\mu \to \mu(f)$ *est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur* $(\mathcal{M}(\mathrm{T}), \mathcal{E}(\mathrm{T}))$.

(d) *Pour tout* G *ouvert, tout* F *fermé dans* T *et tout* $a \geqslant 0$, *les ensembles*

$$\mathfrak{A}(\mathrm{G}) = \{m \mid m(\mathrm{G}) > a\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{B}(\mathrm{F}) = \{m \mid m(\mathrm{F}) < a\}$$

sont ouverts dans $(\mathcal{M}(\mathrm{T}), \mathcal{E}(\mathrm{T}))$; *les ouverts de la forme* $\mathfrak{A}(\mathrm{G})$ *et* $\mathfrak{B}(\mathrm{F})$ *engendrent la topologie* $\mathcal{E}(\mathrm{T})$.

Démonstration :

(a) Le premier corollaire I.6.1 montre que l'espace $(\mathcal{M}(\mathrm{T}), \mathcal{E}(\mathrm{T}))$ est séparé. Par ailleurs, soit un couple (P, f) standardisant T ; l'application bijective f de P sur T s'étend en une application bijective de $\mathcal{M}(\mathrm{P})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{T})$; c'est une bijection continue de l'espace $(\mathcal{M}(\mathrm{P}), \mathcal{E}(\mathrm{P}))$, qui est polonais d'après I.6.2 b, sur $(\mathcal{M}(\mathrm{T}), \mathcal{E}(\mathrm{T}))$ qui est donc standard. Il est de plus régulier comme sous-espace d'un espace régulier.

(b) Pour qu'une partie A de l'espace standard régulier $(\mathcal{M}(\mathrm{T}), \mathcal{E}(\mathrm{T}))$ soit relativement compacte, il suffit (prop. I.6.1, cor. 2) que de toute suite d'éléments de A, on puisse extraire une suite partielle convergente dans $\mathcal{M}(\mathrm{T})$; soient donc une partie A vérifiant les conditions I.6.2 (3a et 3b) et une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A ; la condition I.6.2 (3a) montre (I.6.2 a) que pour toute partie compacte K de T, on peut extraire de la suite $(\theta_{\mathrm{K}} \cdot \mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des restrictions à K, une suite partielle convergente dans $\mathcal{M}(\mathrm{K})$; la condition I.6.2 (3b) permet par ailleurs de construire une suite $(\mathrm{K}_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de parties compactes croissantes de T telles que pour tout couple (n, p) d'entiers positifs $\mu_n(\mathrm{T} - \mathrm{K}_p) \leqslant \dfrac{1}{p}$. Soient alors $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}_2 \ldots \subset \mathrm{J}_p \subset \ldots$, des suites d'entiers telles que pour tout entier p, $(\theta_{\mathrm{K}_p} \cdot \mu_n)_{n \in \mathrm{J}_p}$ converge dans $\mathcal{M}(\mathrm{K}_p)$ vers une mesure $\hat{m}_p$ restriction à K_p d'une mesure m_p sur T ; la suite $(m_p)_{p \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante dans $\mathcal{M}(\mathrm{T})$ majorée (I.6.2, 3a), on appelle m sa borne supérieure et J la suite diagonale formée à partir des J_p. On voit alors que la suite partielle $(\mu_n)_{n \in \mathrm{J}}$ converge vers m, d'où le résultat.

(c) Soit f une fonction semi-continue inférieurement et bornée inférieurement sur T ; puisque T est parfaitement normal, f est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions continues bornées ; pour toute mesure positive bornée μ, on a alors :

$$\mu(f) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \mu(f_n).$$

On en déduit que la fonction $\mu \to \mu(f)$ définie sur $\mathcal{M}(\mathrm{T})$ est l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions continues sur $(\mathcal{M}(\mathrm{T}), \mathcal{E}(\mathrm{T}))$ d'où le premier résultat. Le second s'ensuit par passage à l'opposé.

(d) La première assertion résulte immédiatement du résultat ci-dessus puisque la fonction caractéristique d'un ouvert (resp. d'un fermé) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement). On considère alors une mesure m positive bornée sur T et un filtre $\mathfrak{F}$ convergeant vers m pour la topologie engendrée par les ensembles de la forme $\mathfrak{A}(\mathrm{G})$ et $\mathfrak{B}(\mathrm{F})$; pour toute fonction f continue positive bornée sur T, le filtre $f(\mathfrak{F})$ image du filtre $\mathfrak{F}$ par f est un filtre de mesures positives bornées sur $\mathbf{R}$ convergeant étroitement vers l'image de m par f. Comme les supports de toutes ces mesures sont contenus dans le compact $f(\mathrm{T})$, il y a de plus convergence en moyenne, ce qui par définition des mesures images s'écrit :

$$\lim \mu(f) = m(f) \text{ suivant le filtre } \mathfrak{F} ;$$

le filtre converge donc vers m au sens de la topologie $\mathcal{E}(\mathrm{T})$, d'où le résultat.

I.6.4. *Ensembles relativement compacts pour la convergence étroite.*

Le théorème I.6.3 b montre que la condition suffisante de compacité relative pour la convergence étroite des mesures sur un espace polonais, énoncée par Prohorov, reste suffisante sur un espace standard régulier. On étudie maintenant son éventuelle nécessité : la condition I.6.1. (3a) étant trivialement nécessaire, on construit sur un certain espace standard régulier des suites de mesures convergeant étroitement, et ne vérifiant pas la condition I.6.1 (3b) : dans un tel espace ce n'est donc pas une condition nécessaire de compacité relative. La construction s'appuiera sur le lemme suivant :

LEMME I.6.4. — *Soit* E′ *le dual faible d'un espace de Fréchet de type dénombrable ; pour qu'une suite* $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de mesures de probabilité sur* E′

converge étroitement dans $\mathfrak{M}$ (E′) *vers la mesure ponctuelle* ε_0, *il faut et il suffit que pour tout élément* φ *de* E, *on ait :*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n \{x \in E' \mid |\langle x, \varphi\rangle| \leqslant 1\} = 1. \tag{1}$$

Démonstration. — Soit une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant étroitement vers la mesure ε_0 ; pour tout élément φ de E et tout nombre $m > 0$, la suite des intégrales $\int \exp m\,(-\langle x, \varphi\rangle^2)\, d\,\mu_n(x)$ converge vers 1. L'inégalité de Tchebitchev montre alors immédiatement la validité de (1). Réciproquement, soit $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de mesures vérifiant l'égalité (1) pour tout élément φ de E ; pour toute fonction f continue de E′ faible dans $[-m, +m]$, et pour tout $\varepsilon > 0$, soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ dans E tels que :

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant q} |\langle x, \varphi_j\rangle| \leqslant 1 \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,;$$

il existe un entier positif N tel que pour tout entier n supérieur et tout entier j compris entre 1 et q, on ait :

$$\mu_n \{x \in E' \mid |\langle x, \varphi_j\rangle| \leqslant 1\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4\,mq}.$$

Pour tout entier n supérieur à N, on aura alors :

$$\left|\int_{x\in E'} f(x)\, d\,\mu_n(x) - \int_{x\in E'} f(x)\, d\,\varepsilon_0(x)\right|$$

$$\leqslant \int_{\substack{\sup |\langle x, \varphi_j\rangle| \leqslant 1 \\ 1\leqslant j\leqslant q}} |f(x) - f(0)|\, d\,\mu_n(x)$$

$$+\, 2m\,\mu_n \{x \in E' \mid \sup_{1\leqslant j\leqslant q} |\langle x, \varphi_j\rangle| > 1\}.$$

Chacun des termes de droite est inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$, d'où le résultat.

Exemple I.6.4. — Soit H un espace de Hilbert ; on note T son dual faible, qui est un espace standard régulier (th. I.5.1 c) ; on choisit une base orthonormale $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels strictement compris entre 0 et 1 tels que $\lim_{n\to\infty} n^2 \log a_n = 0$. Pour tout entier $n > 0$, on définit une mesure de probabilité μ_n sur T par :

$$\mu_n = \sum_{0=d}^{\infty} (1 - a_n)\, a_n^p\, \varepsilon_{n\,x_p}\,;$$

On va montrer que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie la condition (1) du lemme précédent pour tout élément φ de H, et converge donc étroitement dans $\mathcal{M}$ (T) vers ε_0. Soit en effet un élément $\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p x_p$ de H ; on appelle L l'ensemble $\{x \in \mathrm{T} \mid |\langle x, \varphi \rangle| \leqslant 1\}$. On a :

$$1 - \mu_n (\mathrm{L}) = \sum_{p \in \mathrm{A}_n} (1 - a_n) a_n^p$$

où

$$\mathrm{A}_n = \left\{ p \,\Big|\, |\varphi_p| > \frac{1}{n} \right\}.$$

Si c est un entier supérieur ou égal à $\sum_{p=0}^{\infty} |\varphi_p|^2$, le nombre d'éléments de A_n est inférieur ou égal à $n^2 c$, et comme la suite des puissances des a_n est décroissante, on a :

$$1 - \mu_n (\mathrm{L}) \leqslant (1 - a_n) \sum_{p=0}^{n^2 c - 1} a_n^p = 1 - a_n^{n^2 c}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n (\mathrm{L}) \geqslant \lim_{n \to \infty} \exp (cn^2 \log a_n) = 1.$$

Pourtant, si B_m est la boule centrée à l'origine de rayon m, $\mu_n (\mathrm{B}_m)$ est nul pour tout n strictement supérieur à m, et comme toute partie compacte K de T est contenue dans l'une de ces boules, on a :

$$\forall \, \mathrm{K} \text{ compact} \subset \mathrm{T}, \lim_{n \to \infty} \mu_n (\mathrm{K}) = 0.$$

On a donc bien construit une suite de mesures convergeant étroitement ne vérifiant pas la condition I.6.1 (3b).

I.6.5.

Il existe pourtant des classes assez larges d'espaces standards réguliers où les conditions I.6.1 (3) sont des conditions nécessaires de compacité relative :

THÉORÈME I.6.5 :

Soit T *un espace standard; si* T *est* (*a*) *un espace de Fréchet de type dénombrable, ou* (*b*) *la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de*

Fréchet de type dénombrable, ou (*e*) *le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel ou* (*f*) *le dual fort de la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet-Montel, les conditions* I.6.1 (3) *sont des conditions nécessaires et suffisantes de compacité relative.*

Démonstration :

La démonstration du théorème utilisera deux lemmes valables pour tout espace standard régulier T :

Lemme I.6.5 *a*) — *Soit* A *un sous-ensemble relativement compact de* $\mathfrak{M}(T)$; *pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *et toute famille croissante* $(A_i)_{i \in I}$ *d'ouverts recouvrant* T, *la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists\ i_0 \in I \mid \forall \mu \in A, \quad \mu(T - A_{i_0}) \leqslant \varepsilon.$$

Lemme I.6.5 *b*) — *Soit* A *un sous-ensemble compact de* $(\mathfrak{M}(T))$; *pour tout nombre* $h > 0$ *et toute partie polonaise fermée* P *de* T *tels que :*

$$\sup_{\mu \in A} \mu(T - P) < h,$$

la condition suivante est satisfaite :

$$\exists\ K \text{ compact} \subset P \mid \sup_{\mu \in A} \mu(T - K) < h.$$

Démonstration du lemme I.6.5 *a*) :

A tout élément i de I, on associe l'ensemble B_i défini par :

$$B_i = \{ \mu \in \mathfrak{M}(T) \mid \mu(T - A_i) < \varepsilon \};$$

La famille $(B_i)_{i \in I}$ est une famille croissante d'ouverts (Th. I.6.3 *d*) recouvrant $\mathfrak{M}(T)$. On peut en extraire une famille finie recouvrant le compact $\bar{A}$, d'où le résultat.

Démonstration du lemme I.6.5 *b*) :

Soient d une distance définissant la topologie de P et $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite partout dense dans P; on pose $T - P = \Omega$, c'est une partie ouverte de T. Pour tout entier n, on note $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ la boule ouverte centrée en

x de d-rayon égal à $\frac{1}{n}$ et $\Omega\left(x, \frac{1}{n}\right)$ un ouvert dans T coupant P suivant $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et tout entier n, il existe (Lemme I.6.5 a) un entier i_n tel que :

$$\forall \mu \in A, \ \mu\left\{T - \left[\Omega \cup \left[\bigcup_{i \leqslant i_n} \Omega\left(x_i, \frac{1}{n}\right)\right]\right]\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

On aura alors en additionnant :

$$\forall \mu \in A, \ \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left\{T - \left[\Omega \cup \left[\bigcup_{i \leqslant i_n} \Omega\left(x_i, \frac{1}{n}\right)\right]\right]\right\}\right) \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\forall \mu \in A, \ \mu\left[T - \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{i \leqslant i_n} \bar{B}\left(x_i, \frac{1}{n}\right)\right] \leqslant \varepsilon + \sup_{\mu \in A} \mu(\Omega).$$

L'ensemble

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{i \leqslant i_n} \bar{B}\left(x_i, \frac{1}{n}\right)$$

est un ensemble fermé, précompact dans l'espace complet P; il est compact, d'où le résultat.

Démonstration du théorème I.6.5 :

(a) L'espace T est polonais, le résultat est classique (I.6.1 b); il se déduit d'ailleurs immédiatement du lemme I.6.5 b où l'on pose $P = T$.

(b) Soit T un espace vectoriel topologique limite inductive stricte d'une suite croissante $(E_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de sous-espaces de Fréchet de type dénombrable; puisque les E_p sont des sous-espaces polonais fermés de T, il suffit (lemme I.6.5 b) de montrer que pour tout $h > 0$, il existe un entier p tel que pour tout élément μ de A, $\mu(T - E_p) < h$. Or, dans le cas contraire, il existerait une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \mu_n(T - E_n) > h,$$

pour tout entier $n > 0$, il existerait alors une famille finie $(f_1^n, \ldots, f_{q(n)}^n)$

de formes linéaires continues sur T telles que pour tout entier $n > 0$, on ait simultanément :

$$\forall j \in [1, q(n)],\ f_j^n(E_n) = 0,\ \mu_n\{\sup_{1 \leqslant j \leqslant q(n)} |f_j^n| \geqslant 1\} > \frac{h}{2}. \quad (1)$$

On pose alors :

$$g_n = \sup_{1 \leqslant j \leqslant q(n)} |f_j^n|,$$

$$A_n = \{x \in T \mid \forall m \geqslant n,\quad g_m(x) < 1\};$$

La famille $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille croissante d'ensembles convexes coupant chaque E_p suivant un ouvert; c'est donc une famille croissante d'ouverts recouvrant T. Il existe alors (lemme I.6.5 *a*) un entier $n_0 > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad \mu_n(T - A_{n_0}) < \frac{h}{2}.$$

Ceci contredit la relation (1), d'où le résultat.

(c) Soient F un espace de Fréchet-Montel et T son dual; on note $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite fondamentale décroissante de voisinages de l'origine dans F et $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de leurs polaires ([9], p. 51); c'est une suite croissante de parties compactes de T telle que tout compact de T soit contenu dans l'un d'eux. Si le sous-ensemble A relativement compact de $(\mathcal{M}(T), \mathcal{E}(T))$ ne vérifie pas la condition I.6.1 (3 b), il existe un nombre $h > 0$ et une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad \mu_n(T - K_n) > h.$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe alors une famille finie $(f_1^n, \ldots, f_{q(n)}^n)$ d'éléments de V_n telle que :

$$\mu_n\{t \mid \sup_{1 \leqslant j \leqslant q(n)} |< f_j^n, t >| > 1\} > h. \quad (2)$$

Pourtant la suite formée par la juxtaposition dans l'ordre des $(f_1^n, \ldots f_{q(n)}^n)$ converge vers zéro dans F; son polaire est donc un voisinage de zéro dans T et la suite des intérieurs des polaires de ses sections commençantes forme une suite croissante d'ouverts recouvrant T : on pose

$$A_n = \{t \mid \forall m \geqslant n,\ \forall j \in [1, q(n)], |< f_j^m, t >| \leqslant 1\};$$

il existe un entier n_0 (lemme I.6.5 *a*) tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0\,,\ \mu_n\,(\mathrm{T} - \mathrm{A}_{n_0}) < \mu_n\,(\mathrm{T} - \mathring{\mathrm{A}}_{n_0}) < h\,;$$

la relation (2) entraîne par ailleurs :

$$\mu_{n_0}\,(\mathrm{T} - \mathrm{A}_{n_0}) > h\,;$$

d'où la contradiction et le résultat.

(f) Soit $(\mathrm{E}_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite d'espaces de Fréchet-Montel ayant une limite inductive stricte E; soit T le dual de E; pour tout entier $p \geqslant 0$, on appelle E_p' le dual fort de E_p. L'application canonique continue h_p de T dans E_p' se prolonge en une application encore notée h_p de $(\mathcal{M}(\mathrm{T}), \mathcal{E}(\mathrm{T}))$ dans $(\mathcal{M}(\mathrm{E}_p'), \mathcal{E}(\mathrm{E}_p'))$ qui est continue. Soit une partie A relativement compacte de $(\mathcal{M}(\mathrm{T}), \mathcal{E}(\mathrm{T}))$; pour tout entier p, $h_p(\mathrm{A})$ sera relativement compacte dans $(\mathcal{M}(\mathrm{E}_p'), \mathcal{E}(\mathrm{E}_p'))$: d'après (e), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K_p de E_p' telle que :

$$\forall\, \mu \in \mathrm{A},\quad h_p\,\mu\,(\mathrm{E}_p' - \mathrm{K}_p) < \frac{\varepsilon}{2^p}\,;$$

On en déduit :

$$\forall\, \mu \in \mathrm{A},\quad \mu\,[\mathrm{T} - \bigcap_{p\in\mathbf{N}} h_p^{-1}(\mathrm{K}_p)] < \varepsilon.$$

Or l'ensemble $\bigcap_{p\in\mathbf{N}} h_p^{-1}(\mathrm{K}_p)$ est une partie faiblement bornée fermée dans l'espace de Montel T et est donc compact, d'où le résultat.

I.6.6. *Convergence presque sûre des variables aléatoires à valeurs dans un espace standard.*

Définition. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé,* T *un espace standard et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de variables aléatoires d'espaces d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *à valeurs dans* T; *on dit que la suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge presque sûrement vers la variable aléatoire* X *si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

(a) $\{\,\omega \mid \mathrm{X}_n(\omega) \to \mathrm{X}(\omega)\,\} \in \mathcal{A}$

(b) $\mathbf{P}\,\{\,\omega \mid \mathrm{X}_n(\omega) \to \mathrm{X}(\omega)\,\} = 1.$

Cas particuliers. — Si l'espace T est un espace polonais et si d est une distance compatible avec sa topologie, l'application

$$\{\ \omega \to [X(\omega),\quad (X_n(\omega))_{n\in\mathbf{N}}\ ]\ \}$$

est une variable aléatoire Y à valeurs dans $T \times T^{\mathbf{N}}$ (th. I.2.4) et l'ensemble défini en (a) est identique à :

$$\left\{\omega \ \middle|\ \forall\, p \in \mathbf{N},\ \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \ \middle|\ \forall\, n \geqslant n_0\,,\ d\,(X_n, X_0) \leqslant \frac{1}{p}\right\}.$$

C'est donc l'image réciproque par Y de :

$$C = \bigcap_{p\in\mathbf{N}}\ \bigcup_{n_0\in\mathbf{N}}\ \bigcap_{n\geqslant n_0} \left\{y \ \middle|\ d\,(pr_n\, y, pr_o\, y) \leqslant \frac{1}{p}\right\}.$$

c'est donc un élément de $\mathcal{A}$; pour qu'il y ait convergence presque sûre, il faut et il suffit que la loi de Y soit portée par le borélien C.

Il n'est pas possible de généraliser ce raisonnement à un ensemble standard arbitraire, puisqu'on y utilise explicitement l'existence d'un système fondamental dénombrable de voisinages pour tout point de l'espace polonais T. Pourtant le théorème suivant montre qu'il existe des classes assez larges d'espaces standards où la situation est voisine :

THÉORÈME I.6.6. :

Soit T *un espace standard ; si* T *est* (a) *un espace de Fréchet de type dénombrable, ou* (b) *la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable, ou* (c) *le dual faible d'un espace de Fréchet de type dénombrable, ou* (d) *le dual faible de la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable, ou* (e) *le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel, ou* (f) *le dual fort de la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet-Montel, alors :*

1°) *dans* $T \times T^{\mathbf{N}}$, *l'ensemble* $\{s \mid pr_n(s) \to pr_o(s)\}$ *est borélien.*

2°) *pour toute suite* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de variables aléatoires à valeurs dans* T *convergeant presque sûrement et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie polonaise* P *de* T *telle que :*

$$\mathbf{P}\,\{\forall\, n \in \mathbf{N},\ X_n(\omega) \in P\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Démonstration :

(a) Le premier résultat est démontré plus haut et le second est évident puisque l'espace T est alors polonais ;

(b) Soit $(E_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable (polonais) définissant T ; alors l'ensemble $\{s \mid pr_n(s) \to pr_o(s) \text{ dans T}\}$ est égal à $\bigcup_{p \in \mathbf{N}} \{s \in E_p \times E_p^{\mathbf{N}} \mid pr_n(s) \to pr_o(s) \text{ dans } E_p\}$ puisque tout ensemble borné dans E est contenu dans l'un des E_p ([4], p. 8), d'où le résultat en appliquant (a).

(c) ou (e) : dans les deux cas, T est réunion dénombrable de compacts métrisables tels que tout ensemble compact (en particulier toute suite convergente) soit contenu dans l'un d'eux ; soit $(K_p)_{p \in \mathbf{N}}$ cette suite de parties compactes ; l'ensemble $\{s \mid pr_n(s) \to pr_o(s)\}$ est égal à

$$\bigcup_{p \in \mathbf{N}} \{s \in K_p \times K_p^{\mathbf{N}} \mid pr_n(s) \to pr_o(s) \text{ dans } K_p\}$$

d'où le résultat puisque tout K_p est polonais.

(d) ou (f) : dans les deux cas, soit $(E_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable (ou de Fréchet-Montel) définissant E ayant pour dual faible (ou fort) l'espace T ; pour tout entier $p \geqslant 0$, soit h_p l'application canonique de T dans le dual faible (ou fort) E_p' de E_p ; l'ensemble $\{s \mid pr_n(s) \to pr_o(s) \text{ dans T}\}$ est égal à

$$\bigcap_{p \in \mathbf{N}} \{s \mid h_p \circ pr_n(s) \to h_p \circ pr_o(s) \text{ dans } E_p'\}$$

d'où le premier résultat par (c) (ou (e)) ; par ailleurs pour tout $\varepsilon > 0$, tout entier $p \geqslant 0$ et toute suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant presque sûrement, il existe (c) (ou (e)) un compact métrisable K_p dans E_p' tel que :

$$\mathbf{P}\{\forall n \in \mathbf{N},\ h_p \circ X_n \in K_p\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} ;$$

on a alors

$$\mathbf{P}\{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall p \in \mathbf{N},\ X_n \in h_p^{-1}(K_p)\} \geqslant 1 - \varepsilon ;$$

d'où le résultat, puisque $\bigcap_{p \in \mathbf{N}} h_p^{-1}(K_p)$ est un compact métrisable (polonais) dans T.

I.6.7. *Convergence en loi et convergence presque sûre.*

DÉFINITION. — *Soit* T *un espace standard régulier ; on dit que des variables aléatoires* $(X_i)_{i \in I}$ *à valeurs dans* T *convergent en loi si leurs lois* $(\mu_i)_{i \in I}$ *convergent étroitement.*

Il est évident que toute suite convergeant presque sûrement converge aussi en loi. Un théorème classique ([16], p. 46) affirme d'ailleurs que de toute suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace polonais convergeant en loi vers une constante, on peut extraire une suite partielle convergeant presque sûrement. L'exemple suivant montre que cette propriété ne se généralise pas à tous les espaces standards réguliers.

Exemple I.6.7. — Soit T un espace standard régulier possédant la propriété suivante :

Il existe une suite croissante $(K_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de T telle que tout compact contenu dans leur réunion soit contenue dans l'une d'entre elles. De plus il existe un élément a de T adhérent à tout $K_{p+1} - K_p$.

On va construire une suite de variables aléatoires à valeurs dans T convergeant en loi vers a, aucune suite extraite ne convergeant presque sûrement : pour tout entier $p > 0$, soit une suite $(x_n^p)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers a dans $K_p - K_{p-1}$; on pose :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \mu_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \varepsilon_{x_n^p} ;$$

La suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite des lois de la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ p \in \mathbf{N},\ X_n(\omega) = x_n^p \quad \text{dans} \quad \left[1 - \frac{1}{2^{p-1}},\ 1 - \frac{1}{2^p}\right].$$

Cette suite convergeant presque sûrement, la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en loi. On appelle $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois respectives μ_n, elle converge encore en loi. Par ailleurs, pour tout couple (n, p) d'entiers > 0, on a :

$$\mathbf{P}\,\{Y_n \in K_p\} = \mu_n(K_p) = 1 - \frac{1}{2^p} ;$$

Le lemme de Borel-Cantelli montre alors que pour toute partie infinie J de $\mathbf{N}$, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \ \mathbf{P}\{\forall n \in \mathrm{J}, \ \mathrm{Y}_n \in \mathrm{K}_p\} = 0.$$

Toute suite convergente dans $\bigcup_{p \in \mathbf{N}} \mathrm{K}_p$ étant incluse dans l'un des K_p par l'hypothèse sur T, on en déduit :

$$\mathbf{P}\{(\mathrm{Y}_n)_{n \in \mathrm{J}} \text{ converge}\} = 0.$$

D'où le résultat.

Remarque. — L'hypothèse faite sur l'espace T est vérifiée dans les cas (b), (c), (d), (e) du théorème I.6.6. Dans ces différents cas, on pourra pourtant utiliser :

THÉORÈME I.6.7. — *Soient* T *un espace standard et* $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans* T *ayant même espace d'épreuves ; on suppose qu'il existe un couple* (P, f) *standardisant* T *et une distance* d *définissant la topologie de* P *tels que* $d(f^{-1}(\mathrm{X}_n), f^{-1}(\mathrm{X}_m))$ *tende en loi vers* O *dans* $\mathbf{R}$ *quand* n *et* m *tendent vers l'infini. Alors il existe une suite extraite* $(\mathrm{X}_{n_j})_{j \in \mathbf{N}}$ *convergeant presque sûrement dans T. De plus deux limites associées à des suites extraites différentes sont indiscernables.*

Démonstration. — On forme la suite extraite de la façon classique : n_1 est égal à 1, n_j est le plus petit entier $\mathrm{N} > n_{j-1}$ tel que :

$$\forall n, m \geqslant \mathrm{N}, \quad \mathbf{P}\left\{ d(f^{-1}(\mathrm{X}_n), f^{-1}(\mathrm{X}_m)) \geqslant \frac{1}{2^j} \right\} < \frac{1}{2^j}.$$

Le lemme de Borel-Cantelli montre alors que la suite $(f^{-1}(\mathrm{X}_{n_j}))_{j \in \mathbf{N}}$ est presque sûrement une suite de Cauchy dans l'espace complet P ; elle converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire X. Puisque f est continue, la suite $(\mathrm{X}_{n_j})_{j \in \mathbf{N}}$ converge alors presque sûrement vers $f(\mathrm{X})$, d'où le premier résultat. Le second est évident.

CHAPITRE II

PROCESSUS LINÉAIRES

Dans les trois premiers paragraphes de ce chapitre, on suppose donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ la tribu $\mathcal{A}$ étant $\mathbf{P}$-complète ; toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace d'épreuves.

1. Définitions générales.

II.1.1. *Processus linéaires, modifications.*

Soit E un espace vectoriel ; on dit qu'une famille $X = (X_\varphi)_{\varphi \in E}$ de variables aléatoires réelles indexée par E est un *processus linéaire basé sur* E si pour tout élément ω de Ω, l'application de E dans $\mathbf{R}$ définie par : $\varphi \to X_\varphi(\omega)$ est une application linéaire.

Soient deux processus linéaires X et Y basés sur E, on dit qu'ils sont *modifications* l'un de l'autre si :

$$\forall \varphi \in E, \quad \mathbf{P}\{\omega \mid X_\varphi(\omega) = Y_\varphi(\omega)\} = 1.$$

II.1.2. *Marges d'un processus linéaire.*

Soit E^* le dual algébrique de E ; on dit qu'une partie A de E^* est un *cylindre* s'il existe une famille $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$ de p éléments de E et une partie borélienne A' de $\mathbf{R}^p$ tels que :

$$A = \{t \in E^* \mid (\langle t, \varphi_1\rangle, ..., \langle t, \varphi_p\rangle) \in A'\} ; \tag{1}$$

Soit $\mathcal{B}$ la tribu sur E engendrée par les cylindres et soit X un processus linéaire basé sur E ; pour tout élément ω de Ω, on appelle $X(\omega)$ la forme linéaire sur E définie par $X(\omega)\cdot\varphi = X_\varphi(\omega)$. L'application : $\omega \to X(\omega)$ est une application X de Ω dans E, et l'image réciproque par X de tout cylindre est un élément de $\mathcal{A}$. On peut donc associer à tout processus linéaire basé sur E une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E^*, \mathcal{B})$ et réciproquement.

A toute famille finie $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$ d'éléments de E, on associe alors la mesure de probabilité m_Φ sur $\mathbf{R}^p$ appelée *Φ-marge du processus linéaire* définie par :

$$\forall\, A' \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^p), \quad m_\Phi(A') = \mathbf{P}\{X^{-1}(A)\}, \tag{2}$$

où A est défini à partir de A′ par (1).

Pour toute application h de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ mesurable et bornée, on a alors la formule :

$$\mathbf{E}\,[h\,(X_{\varphi_1}, ..., X_{\varphi_p}) = \int_{\mathbf{R}^p} h\, dm_\Phi. \tag{3}$$

On dit que deux processus sont *équivalents* s'ils ont les mêmes marges ; en particulier, toute modification d'un processus lui est équivalente.

II.1.3. *Moments d'un processus linéaire.*

Soit un entier $r > 0$ tel que pour tout élément φ de E, $\mathbf{E}\,\{|X_\varphi|^r\}$ soit fini ; on appelle *moment d'ordre r du processus linéaire* la forme multilinéaire H_r sur E^r définie par :

$$H_r(\varphi_1, ..., \varphi_r) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{r} X_{\varphi_i}\right) = \int_{\mathbf{R}^r}\left(\prod_{i=1}^{r} t_i\right) dm_{(\varphi_1, ..., \varphi_r)}(t_1, ..., t_r).$$

La forme linéaire H_1 sur E est appelée si elle existe *espérance mathématique du processus linéaire* et notée $\mathbf{E}(X)$; c'est un élément de E^* et on a :

$$\langle \mathbf{E}(X), \varphi \rangle = \mathbf{E}(X_\varphi).$$

Si $\mathbf{E}(X)$ est nul, le processus est dit centré. La forme bilinéaire Γ sur $E \times E$ si elle existe définie par :

$$\Gamma(\varphi, \psi) = \mathbf{E}(X_\varphi X_\psi) - \mathbf{E}(X_\varphi)\,\mathbf{E}(X_\psi),$$

est appelée *covariance du processus.*

II.1.4. *Fonctionnelle caractéristique d'un processus linéaire.*

Soit X un processus linéaire basé sur E ; on appelle *fonctionnelle caractéristique* du processus l'application $\mathcal{L}_X$ de E dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall\, \varphi \in E, \quad \mathcal{L}_X(\varphi) = \mathbf{E}\,[e^{iX_\varphi}] = \int_{\mathbf{R}} e^{it}\, dm_\varphi(t).$$

La formule II.1.2 (3) donne alors immédiatement :

$$\mathcal{L}_X (a_1 \varphi_1 + \dots + a_p \varphi_p) = \int_{\mathbf{R}^p} e^{i(a_1 t_1 + \dots + a_p t_p)} \, dm_\Phi(t_1, \dots, t_p).$$

2. Continuité en loi des processus linéaires

II.2.1. *Topologies.*

On suppose désormais E muni d'une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel. Sur l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbf{R}^p$, on utilise la topologie de la convergence étroite : soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$; à tout nombre $\varepsilon > 0$ et à toute application f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{C}$ continue et bornée, on associe

$$\mathcal{V}(\varepsilon, f)(\mu) = \{\nu \mid |(\mu - \nu)(f)| \leqslant \varepsilon\} ;$$

les $\mathcal{V}(\varepsilon, f)(\mu)$ forment un système de générateurs des voisinages de μ. Sur l'ensemble des variables aléatoires numériques, on utilise la topologie de la convergence en probabilité : soit T une variable aléatoire; à tout nombre $\varepsilon > 0$, on associe $\mathcal{U}(\varepsilon)(T) = \{ T' \mid \mathbf{P}\{ |T - T'| \geqslant \varepsilon \} \leqslant \varepsilon \}$; les $\mathcal{U}(\varepsilon)(T)$ forment une base des voisinages de T.

II.2.2. *Définitions.*

Soit E un espace vectoriel topologique; on dit qu'un processus linéaire X basé sur E est *continu en loi* si l'application $\{ \varphi \to m_\varphi \}$, de E dans l'espace des mesures de probabilité sur $\mathbf{R}$ muni de la topologie de la convergence étroite, qui à tout élément φ de E associe la φ-marge de X, est continue. Ceci signifie que pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbf{R}$, l'application $\{ \varphi \to \mathbf{E}[f(X_\varphi)]\}$ est continue.

On dit qu'un processus linéaire X basé sur E est *continu en probabilité* si l'application linéaire $\{ \varphi \to X_\varphi \}$ de l'espace vectoriel topologique E dans l'espace vectoriel topologique des variables aléatoires numériques est continue. Il suffit pour cela qu'elle soit continue à l'origine.

II.2.3. On utilise dans cet alinéa la notation suivante : pour tout entier strictement positif p, on pose :

$$J^p = \{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{R}^p \mid \forall j \in [1, p], \ |x_j| \leqslant 1 \}.$$

C'est le cube unité de $\mathbf{R}^p$.

THÉORÈME II.2.3. — *Soit* X *un processus linéaire basé sur un espace vectoriel topologique* E; *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) X *est continu en loi;*

(b) X *est continu en probabilité;*

(c) *La fonctionnelle caractéristique* $\mathcal{L}_X$ *est continue;*

(d) *Pour tout entier* $p \geqslant 1$, *l'application* $\{ \Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_p) \to m_\Phi \}$ *est continue;*

(e) *Pour tout entier* $p \geqslant 1$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* U *de zéro dans* E *tel que pour toute famille* Φ *de p éléments de* U, *on ait :*

$$m_\Phi (J^p) \geqslant 1 - \varepsilon, \text{ ou encore } \mathbf{P} \{ \forall \varphi \in \Phi, |X_\varphi| \leqslant 1 \} \geqslant 1 - \varepsilon;$$

(f) *Pour tout* ε *positif, il existe un voisinage* U *de zéro dans* E *tel que pour tout élément* φ *de* U, *on ait:*

$$m_\varphi (J^1) \geqslant 1 - \varepsilon, \text{ ou encore } \mathbf{P} \{ |X_\varphi| \leqslant 1 \} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Démonstration. — On démontre le théorème suivant le schéma :

(a) ⇒ (c) ⇒ (b) ⇒ (f) ⇒ (e) ⇒ (d) ⇒ (a).

Les démonstrations sont d'ailleurs toutes classiques. Les implications (a) ⇒ (c), (b) ⇒ (f), (d) ⇒ (a) sont des trivialités.

(c) ⇒ *(b)* : On suppose que la fonctionnelle caractéristique $\mathcal{L}_X$ est continue à l'origine de E; pour tout nombre $\varepsilon > 0$, et tout élément φ de E, on peut écrire l'inégalité :

$$\mathbf{P} \{ |X_\varphi| \geqslant \varepsilon \} \leqslant 7 \sup_{|t| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}} |1 - \mathcal{L}_X (t \varphi)|. \quad ([14], \text{ p. } 196) \qquad (1)$$

Par hypothèse, il existe un voisinage équilibré V de l'origine dans E tel que :

$$\forall \varphi \in V, \ |1 - \mathcal{L}_X (\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{7}, \qquad (2)$$

L'ensemble ε V est un voisinage de 0 dans E et pour tout élément φ de ε V, le second membre de (1) est majoré par ε d'après (2), d'où le résultat.

$(f) \Rightarrow (e)$: on suppose la propriété (f) satisfaite : pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et tout entier $p > 0$, il existe donc un voisinage U de 0 dans E tel que pour tout élément φ de U, on ait :

$$\mathbf{P}\{\, |X_\varphi| \leqslant 1 \,\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{p} ;$$

le lemme de Borel-Cantelli donne alors immédiatement le résultat.

$(e) \Rightarrow (d)$: on suppose la propriété (e) satisfaite; soient un élément Φ de E^p une fonction f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ continue bornée par M et un nombre $\varepsilon > 0$; pour tout $h > 0$, on pose :

$$A(h) = \left\{ x \in \mathbf{R}^p \;\Big|\; \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i - y_i| \leqslant h \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

Puisque f est continue, la famille $(A(h))_{h>0}$ est une famille croissante de parties fermées recouvrant $\mathbf{R}^p$; il existe donc un nombre $h > 0$ tel que :

$$\mathbf{P}\{\, (X_\varphi)_{\varphi \in \Phi} \in A(h) \,\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{6\,M} ; \qquad (3)$$

Par ailleurs, puisque la propriété (e) est satisfaite, il existe un voisinage V de l'origine dans E tel que :

$$\forall Z \in V^p,\ \mathbf{P}\{\, \forall \varphi \in Z, |X_\varphi| \leqslant 1 \,\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{6\,M} ; \qquad (4)$$

L'ensemble $\Phi + \eta\, V^p$ est un voisinage de Φ dans E^p; pour tout élément Ψ de ce voisinage, on a :

$$|m_\Phi(f) - m_\Psi(f)| \leqslant \int |f((X_\varphi)_{\varphi \in \Phi}) - f((X_\psi)_{\psi \subset \Psi})|\, d\mathbf{P}. \qquad (5)$$

On intègre alors successivement sur $\{ (X_\varphi)_{\varphi \in \Phi} \notin A(h) \}$, sur

$$\{ \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} |X_{\varphi_i} - X_{\psi_i}| > h \}$$

et sur le complémentaire de leur réunion. Les deux premières intégrales sont calculées sur des ensembles de mesures $\leqslant \frac{\varepsilon}{6\,M}$ d'après (3) et (4); comme la fonction à intégrer est inférieure à 2 M, leur somme est inférieure à $\frac{2\,\varepsilon}{3}$; d'après (3) et (4), la troisième intégrale est inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$; l'inégalité (5) donne donc le résultat.

Ceci termine la démonstration du théorème.

II.2.4. Le théorème suivant permet de simplifier l'étude de la continuité en loi dans certains cas :

THÉORÈME II.2.4. — *Soit* E *un espace localement convexe, limite inductive d'une suite de sous-espaces* $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$; *pour qu'un processus linéaire* X *basé sur* E *soit continu en probabilité* (*donc en loi, etc.*, cf. th. II.2.3), *il faut et il suffit que sa restriction à chacun des sous-espaces* E_n *soit continue en probabilité.*

Démonstration. — La nécessité étant évidente, on démontre la suffisance. Supposons que la restriction de X à chacun des E_n soit continue en probabilité; soit ε un nombre > 0 et pour tout entier n, soit U_n un voisinage convexe de 0 dans E_n tel que pour tout élément φ de U_n, on ait

$$\mathbf{P}\left\{ |X_\varphi| \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n} \right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n} ;$$

l'ensemble convexe U formé des éléments φ qui sont de la forme :

$$\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_k , \quad k \geqslant 1, \quad \varphi_n \in U_n , \tag{1}$$

contient chacun des U_n ; U est donc un voisinage de zéro dans E. Pour tout élément φ de U, on a, d'après (1) :

$$\{ |X_\varphi| \geqslant \varepsilon \} \subset \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant k} \left\{ |X_{\varphi_n}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n} \right\} ;$$

on en déduit :

$$\mathbf{P}\{ |X_\varphi| \geqslant \varepsilon \} \leqslant \sum_{n=1}^{k} \mathbf{P}\left\{ |X_{\varphi_n}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n} \right\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon ;$$

Le processus est continu en probabilité à l'origine, donc partout (II.2.2).

II.2.5. *Moments d'un processus continu en loi.*

THÉORÈME II.2.5. — *Soient* E *un espace limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet et* X *un processus linéaire continu en loi basé sur* E; *si pour tout élément* φ *de* E, *le nombre* $\mathbf{E}\{ |X_\varphi|^p \}$ *est fini, alors l'application* $\varphi \to X_\varphi$ *de* E *dans* $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ *est continue.*

Démonstration. — On peut supposer ([8], p. 71) que E est un espace de Fréchet et utiliser le théorème du graphe fermé ([3], p. 37). Dans ces conditions, soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers 0 dans E alors que $(X_{\varphi_n})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers T dans L_p; pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel $[\| X_{\varphi_n} - T \|_{L^p}]^p$ est inférieur ou égal à $\varepsilon^{(p+1)}$. On a alors :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathbf{P}\,\{\, | X_{\varphi_n} - T | \geqslant \varepsilon \,\} \geqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \| X_{\varphi_n} - T \|^p_{L^p} \leqslant \varepsilon\,;$$

la suite $(X_{\varphi_n})_{n \in \mathbf{N}}$ converge donc en probabilité vers T; elle converge aussi en probabilité vers 0 (th. II.2.3), on a donc $T = 0$, d'où le résultat.

De l'inégalité de Hölder :

$$\left| \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{r} T_i \right) \right| \leqslant \prod_{i=1}^{r} \{ \mathbf{E}(| T_i |^r) \}^{1/r},$$

où les T_i sont des variables aléatoires numériques, on déduit alors le corollaire :

Corollaire II.2.5. — *Soient* E *un espace limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet et* X *un processus linéaire continu en loi basé sur* E *admettant un moment d'ordre entier* $r \geqslant 1$; *celui-ci est une forme multilinéaire continue sur* E^r.

3. Continuité presque sûre des processus linéaires.

II.3.1. *Définition.*

Soit E *un espace vectoriel topologique; on dit qu'un processus linéaire* X *basé sur* E *est presque sûrement continu si l'ensemble* Ω' *des* ω *tels que* X (ω) *soit une forme linéaire continue sur* E *appartient à* $\mathcal{A}$ *et si* $\mathbf{P}(\Omega') = 1$. *L'ensemble* Ω' *sera appelé ensemble de continuité du processus.*

Soient X un processus linéaire presque sûrement continu et Ω' son ensemble de continuité; alors le processus linéaire $\widehat{X}$, **P**-indiscernable de X qui coïncide avec X dans Ω' et est nul hors de Ω', a pour ensemble de continuité l'espace Ω tout entier.

Soit E' le dual topologique de E; c'est un sous-ensemble du dual algébrique E' de E. La tribu $\mathcal{B}$ engendrée sur E par les cylindres (II.1.2) définit sur E' une tribu induite $\mathcal{B}'$; l'application $\omega \to \hat{X}(\omega)$ est alors une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E', \mathcal{B}')$. Réciproquement toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E', \mathcal{B}')$ définit un processus linéaire basé sur E et presque sûrement continu.

Si l'espace E' est muni de la topologie faible ou forte, la tribu $\mathcal{B}'$ est contenue dans la tribu borélienne puisqu'elle peut être engendrée par des demi-espaces ouverts. Si dans l'espace E, il existe une suite dénombrable partout dense et si l'espace E' est standard pour l'une de ces topologies, la tribu $\mathcal{B}'$ est identique à la tribu borélienne correspondante puisqu'elle peut être engendrée par une suite de demi-espaces ouverts séparant les points (th. I.2.5 (c)). C'est le cas en particulier si E est limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable et si E' est muni de la topologie faible (th. I.5.1 (d)) ou si E est limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet-Montel et si E' est muni de la topologie faible ou forte. Pour tout processus linéaire X basé sur E et presque sûrement continu, il existe une application mesurable X de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E', \mathcal{B}')$ indiscernable de X.

II.3.2. THÉORÈME II.3.2. — *Soient* E *un espace dans lequel il existe une suite partout dense et* X *un processus linéaire basé sur* E. *On note* C (E) *la condition suivante :*

Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* U *de* 0 *dans* E *tel que, pour tout entier positif p et tout élément* Φ *de* U^p, *on ait :*

$$m_\Phi (J^p) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Dans ces conditions :

(a) *Si la condition* C (E) *est satisfaite, il existe une modification de* X *presque sûrement continue.*

(b) *Si* E *est tonnelé et* E' *standard pour la topologie faible et s'il existe un processus équivalent à* X *presque sûrement continu, la condition* C (E) *est satisfaite.*

Démonstration. — (*a*) Puisque dans E il existe une suite partout dense, on peut construire un espace vectoriel Δ sur **Q** de dimension dénombrable et dense dans E; l'ensemble des éléments de Δ est alors dénombrable. On peut alors construire à partir de la condition C (E) une suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ décroissante de voisinages convexes équilibrés de 0 dans E telle que en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A_n = \{ \sup_{\varphi \in U_n \cap \Delta} | X_\varphi | \leqslant 2^{-n} \},$$

on ait :

$$\mathbf{P}(A_n) \geqslant 1 - 2^{-n}.$$

On pose alors $\Omega_0 = \lim \sup A_n$ et $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0$; Ω_1 est un ensemble de mesure nulle.

L'application $\omega \rightarrow X(\omega)$ est une application de Ω dans E*; on définit un processus linéaire X_0 par :

$$X_0(\omega) = X(\omega) \text{ si } \omega \text{ est dans } \Omega_0,$$

$$X_0(\omega) = 0 \text{ si } \omega \text{ est dans } \Omega_1.$$

On note X_1 le processus linéaire basé sur Δ induit par X_0 ; par construction, pour tout élément ω de Ω, $X_1(\omega)$ est une application linéaire de Δ dans $\mathbf{R}$, uniformément continue pour la structure uniforme induite par celle de E. Elle se prolonge donc d'une manière unique puisque Δ est dense, en une application linéaire continue de E dans $\mathbf{R}$; on note $\widehat{X}(\omega)$ ce prolongement; l'application $\omega \rightarrow \widehat{X}(\omega)$ est une application de Ω dans E', et pour tout élément φ de E, l'application $\omega \rightarrow \widehat{X}_\varphi(\omega)$ est une variable aléatoire puisqu'on peut extraire de Δ une suite convergeant vers φ. $\widehat{X}$ est donc un processus linéaire basé sur E et presque sûrement continu. Il reste à montrer que c'est une modification de X.

Pour tout élément φ de Δ, on a :

$$\mathbf{P}(X_\varphi = \widehat{X}_\varphi) \geqslant \mathbf{P}(\Omega_0) = 1 ;$$

pour tout élément φ de E, soit $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de Δ convergeant vers φ; alors $(X_{\varphi_k})_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers X_φ en probabilité puisque C (E) est vérifiée (th. II.2.3), on peut en extraire une suite partielle convergeant presque sûrement; comme la même suite s'écrit aussi $(\widehat{X}_{\varphi_k})_{k \in \mathbf{N}}$, elle converge aussi partout vers $\widehat{X}_\varphi$, d'où le résultat.

(b) Soient E un espace tonnelé dont le dual E' soit standard pour la topologie faible et un processus linéaire X basé sur E et presque sûrement continu; on peut associer à X une mesure de probabilité μ sur $(E', \mathcal{B}(E'))$ (II.3.1); il existe (I.3.2) une partie faiblement compacte K de

E′ telle que $\mu(K) \geqslant 1 - \varepsilon$. L'hypothèse sur E montre ([4], p. 27) que l'ensemble $U = \{ \varphi \in E \mid \forall x \in K, | < x, \varphi > | \leqslant 1 \}$ est un voisinage de 0 dans E; soient p un entier positif et Φ un élément de U^p, on a :

$$m_\Phi(J^p) \geqslant \mu \{ \forall \varphi \in U, | < x, \varphi > | \leqslant 1 \} \geqslant \mu(K) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

La condition C (E) est donc satisfaite, d'où le résultat puisque c'est une condition sur les marges.

Remarque. — Si l'espace E est limite inductive d'une suite $(E_n)_{n \in N}$ de sous-espaces, on montre comme dans la démonstration du théorème II.2.4 que la condition C (E) est équivalente à la condition C (E_n) pour tout $n \in \mathbf{N}$; on en déduit :

COROLLAIRE II.3.2. — *Soient* E *un espace limite inductive d'une suite* $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de sous-espaces de Fréchet de type dénombrable et* X *un processus linéaire basé sur* E; *pour qu'il existe une modification de* X *presque sûrement continue, il faut et il suffit que pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *on ait* C (E_n).

La démonstration résulte immédiatement de la remarque ci-dessus et du théorème I.5.1.

II.3.3. *Théorème* II.3.3. (*Minlos* [15]). — *Soit un espace* E *limite inductive d'une suite* $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de sous-espaces de Fréchet nucléaires. Pour qu'un processus linéaire* X *basé sur* E *ait une modification presque sûrement continue, il faut et il suffit qu'il soit continu en loi.*

On utilise dans la démonstration le lemme suivant :

LEMME II.3.3. — *Soient donnés* G *un espace vectoriel,* Y *un processus linéaire basé sur* G, Q *et* Q′ *des formes bilinéaires sur* G *et* a *une constante* > 0; *on suppose que :*

(a) *pour tout* x *non nul dans* G, *on a :*

$$Q(x, x) \geqslant 0, \qquad Q'(x, x) > 0 ;$$

(b) *pour toute famille* $(x_1, \ldots, x_m)$ *d'éléments de* G *orthonormale pour* Q′, *on a :*

$$\sum_{j=1}^{m} Q(x_j, x_j) \leqslant a ;$$

(c) *il existe un nombre* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout élément* x *de* G, *on ait :*

$$|1 - \mathcal{L}_Y(x)| \leqslant \varepsilon\,[1 + Q(x, x)].$$

Alors pour toute famille $x = (x_1, ..., x_p)$ *d'éléments de* G, *tels que*

$$Q'(x_1, x_1) \leqslant 1, ..., Q'(x_p, x_p) \leqslant 1,$$

on a :

$$m_x(J^p) \geqslant 1 - 3(a + 1)\,\varepsilon.$$

Démonstration du lemme. — Soient $x = (x_1, ..., x_p)$ une suite finie d'éléments de G tels que $Q'(x_1, x_1) \leqslant 1, ..., Q'(x_p, x_p) \leqslant 1$ et $u = (u_1, ..., u_q)$ une base de l'espace vectoriel engendré par x qui soit orthonormée pour Q' et orthogonale pour Q ; pour tout élément t de G et tout $j \in [1, p]$, l'égalité $\langle t, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{q} \langle t, u_i \rangle\, Q'(x_j, u_i)$ et l'inégalité de Cauchy permettent d'écrire :

$$\langle t, x_j \rangle^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{q} \langle t, u_i \rangle^2\right)\left(\sum_{i=1}^{q} Q'(x_j, u_i)^2\right);$$

Le second facteur du second membre est égal à $Q'(x_j, x_j)$ donc inférieur ou égal à 1 ; on en déduit :

$$\left\{\omega \mid \sum_{i=1}^{q} |Y_{u_i}(\omega)|^2 \leqslant 1\right\} \subset \{\omega \mid \forall j \in [1, p],\ |Y_{x_j}(\omega)|^2 \leqslant 1\};$$

et par suite :

$$m_x(J^p) \geqslant m_u\left\{y \in \mathbf{R}^q \mid \sum_{j=1}^{q} |y_j^2| \leqslant 1\right\}. \tag{1}$$

Par ailleurs la monotonie de la fonction d'une variable

$$x \rightarrow 1 - e^{-1/2\,x^2}$$

permet d'écrire :

$$\frac{1}{3}\, m_u\left(\sum_{j=1}^{q} |y_j|^2 > 1\right) < \frac{1}{3(1 - e^{-1/2})} \int_{\mathbf{R}^q} (1 - e^{-1/2\langle y, y\rangle})\, dm_u(y)\,; \tag{2}$$

le facteur numérique du second membre étant inférieur à 1, et $e^{-1/2\langle y, y\rangle}$ étant sa propre transformée de Fourier, le second membre est majoré par :

$$I = (2\pi)^{-q/2} \int_{\mathbf{R}^q} e^{-1/2\langle y, y\rangle} \left[1 - \mathcal{L}_Y\left(\sum_{j=1}^{q} y_j u_j\right)\right] dy.$$

L'hypothèse (c) permet d'écrire :

$$\left| 1 - \mathcal{L}_Y \left(\sum_{j=1}^{q} y_j u_j \right) \right| \leqslant \varepsilon \left[1 + \sum_{j=1}^{q} Q(u_j, u_j) y_j^2 \right];$$

on en déduit par intégration :

$$I \leqslant \varepsilon \left[1 + \sum_{j=1}^{q} Q(u_j, u_j) \right] \leqslant (a + 1)\, \varepsilon \text{ d'après (b).}$$

Les formules (1) et (2) donnent alors :

$$m_x(J^p) \geqslant 1 - 3(a + 1)\, \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Démonstration du théorème II.3.3. :

L'hypothèse que tout E_n est nucléaire équivaut à supposer que pour tout entier n, l'espace E_n possède la propriété suivante :

(D_n) Pour tout voisinage V de zéro dans E_n, il existe sur E_n des formes bilinéaires continues Q et Q′ telles que V contienne l'ensemble $\{Q(x, x) \leqslant 1\}$, Q et Q′ étant de plus liées par les conditions (a) et (b) du lemme II.3.3 avec $a = 1$.

On applique cette propriété, pour tout $\varepsilon > 0$, au voisinage

$$V_\varepsilon = \left\{ x \in E_n \;\middle|\; \left| \mathcal{L}_X \left(x \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right) - 1 \right| \leqslant \varepsilon \right\}$$

pour la forme bilinéaire Q ainsi choisie, on a pour tout $x \in E_n$:

$$| 1 - \mathcal{L}_X(x) | \leqslant \varepsilon [1 + Q(x, x)].$$

C'est en effet évident si $\varepsilon\, Q(x, x)$ est supérieur à 2 ; et dans le cas contraire, $Q\left(x\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, x\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)$ est inférieur ou égal à 1, par définition de Q, $| 1 - \mathcal{L}_X(x) |$ est inférieur à ε, donc à $\varepsilon [1 + Q(x, x)]$. On peut alors appliquer le lemme II.3.3 : en appelant U le voisinage de 0 dans E_n dans lequel $Q'(x, x)$ est inférieur ou égal à 1, on constate que le processus linéaire X vérifie la condition C (E_n) pour tout $n \in \mathbf{N}$; il existe alors (Cor. II.3.2) une modification de X presque sûrement continue ; d'où le théorème.

II.3.4. Le lemme II.3.3 permet aussi de démontrer :

THÉORÈME II.3.4 (Prohorov) ([17], p. 174). — *Soient donnés* E *un espace de Hilbert et* X *un processus linéaire basé sur* E *de fonctionnelle caractéristique* $\mathcal{L}_X$. *Pour que* X *ait une modification presque sûrement continue, il faut et il suffit que pour tout nombre* $\varepsilon > 0$, *il existe une forme bilinéaire* Q_ϵ *sur* E *et un nombre* M *tels que :*

(a) *pour tout* x *non nul dans* E, $Q_\epsilon(x, x) \geqslant 0$,

(b) *pour toute famille orthonormale* $(x_1, ..., x_m)$ *d'éléments de* E, *on ait :* $\sum_{j=1}^{m} Q_\epsilon(x_j, x_j) \leqslant M$; *autrement dit* Q_ϵ *définit un opérateur hermitien complètement continu sur* E *et la somme de ses valeurs propres est inférieure ou égale à* M.

(c) $|1 - \mathcal{L}_X(x)| \leqslant \varepsilon\,[1 + Q_\epsilon(x, x)]$.

Démonstration. — Pour la suffisance, on copie la démonstration du théorème II.3.3 ; on démontre la nécessité. Supposons que X ait une modification Y presque sûrement continue ; comme le sous-ensemble de E défini par $\{x \mid \|x\|_E \leqslant M\}$ est borélien, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre M′ tel que :

$$\mathbf{P}\,\{\omega \mid \|Y(\omega)\|_E \leqslant M'\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

Pour tout élément x de E, on a alors :

$$|1 - \mathcal{L}_X(x)| = |1 - \mathcal{L}_Y(x)| \leqslant \int_{\|Y(\omega)\|_E \leqslant M'} |1 - \exp[i\langle Y(\omega), x\rangle]|\, d\mathbf{P}(\omega)$$
$$+ \int_{\|Y(\omega)\|_E > M'} |1 - \exp[i\langle Y(\omega), x\rangle]|\, d\mathbf{P}(\omega).$$

L'inégalité (1) montre que la seconde intégrale est majorée par $\frac{\varepsilon}{2}$; la première intégrale est majorée par :

$$\sqrt{P_\epsilon(x, x)} = \sqrt{\int_{\|Y(\omega)\|_E \leqslant M'} \langle Y(\omega), x\rangle^2\, d\mathbf{P}(\omega)}\ ;$$

on en déduit :

$$|1 - \mathcal{L}_X(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{P_\epsilon(x, x)} \leqslant \varepsilon\,(1 + P_\epsilon(x, x)\frac{1}{2\varepsilon^2});$$

Il suffit alors de poser :

$$Q(x, x) = \frac{1}{2\varepsilon^2} P(x, x)$$

$$M = \frac{1}{2\varepsilon^2} (M')^2.$$

4. Systèmes de marges.

II.4.1. On peut remarquer que si les résultats précédents sont basés sur la donnée d'un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, les critères (a), (c), (d), (e), (f) du théorème II.2.3 et le critère (C_n) du théorème II.3.2 ne font pourtant intervenir que les systèmes de marges. On en déduit maintenant des propriétés permettant de caractériser, parmi les familles de mesures de probabilité indexées par les parties finies d'un espace vectoriel E, celles qui sont systèmes de marges de processus linéaires basés sur E, pour certains espaces d'épreuves.

THÉORÈME II.4.1. — *Pour qu'un système (m_Φ) indexé par l'ensemble des familles finies $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$ d'éléments d'un espace vectoriel soit le système des marges d'un processus linéaire basé sur* E *pour au moins un espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :*

(a) *pour tout $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$, m_Φ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^p$,*

(b) *pour tout $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$, toute application linéaire u de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ et toute partie borélienne* A *de $\mathbf{R}^q$, on a :*

$$m_{u\Phi}(A) = m_\Phi(u^{-1}(A)).$$

Démonstration. — La nécessité est évidente. Pour la réciproque, on suppose que le système (m_Φ) vérifie (a) et (b). Soit B une base algébrique de E ; d'après le théorème de Kolmogoroff ([16], p. 77) il existe sur $\Omega = \mathbf{R}^B$ muni de la tribu produit $\mathcal{A}$ une mesure m ayant les marges m_Φ pour Φ contenu dans B. Soit X l'application canonique de Ω sur E* ; c'est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E^*, \mathcal{B})$ et si on choisit comme espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, m)$, elle a les bonnes marges pour Φ contenu dans B, pour Φ quelconque aussi à partir de l'hypothèse (b), car toute famille finie d'éléments de E peut s'écrire sous la forme $u\Phi$ où Φ est une famille finie d'éléments de B.

II.4.2. Les conditions (a) et (b) expriment que le système (m_Φ) définit une fonction sur la classe des ensembles cylindriques (II.1.2) dénombrablement additive sur la classe des cylindres basés sur une famille finie donnée de E. Le théorème II.4.1 indique alors qu'une telle fonction se prolonge en une mesure de probabilité sur $(E^*, \mathcal{B})$. Le dual topologique E′ de E est un sous-ensemble de E* : le problème se pose de savoir à quelles conditions cette mesure est portée par E′. La question sera intéressante dans les cas où la tribu induite par $\mathcal{B}$ sur E′ est l'une des tribus boréliennes (faible ou forte) de E′ (cf. I.1.2 et II.3.1).

THÉORÈME II.4.2. — *Soit* E *un espace limite inductive d'une suite* $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de sous-espaces de Fréchet de type dénombrable ; pour qu'un système* (m_Φ) *indexé par l'ensemble des familles finies* Φ *d'éléments de* E *soit le système de marges d'une mesure de probabilité sur* E′ *muni de sa tribu borélienne faible, il faut et il suffit que les conditions* (a) (II.4.1), (b) (II.4.1) *et* C (E_n) (II.3.2) *pour tout* n *soient vérifiées. Si de plus les espaces* E_n *sont tous nucléaires, il suffit que les conditions* II.4.1 (a) *et* (b) *soient vérifiées et que l'application* $\varphi \to \int_{\mathbf{R}} e^{ix}\, dm_\varphi(x)$ *soit continue dans* E *ou dans tout* E_n.

5. Fonctions de type positif.

II.5.1. *Rappels; définition, inégalités.*

Soit E un espace vectoriel ; on dit qu'une fonction Φ sur E est de type positif si pour toute famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de nombres complexes et toute famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ d'éléments de E, on a :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j \Phi(\varphi_i - \varphi_j) \geqslant 0. \tag{1}$$

En appliquant l'inégalité (1) aux familles $(u, v) \in \mathbf{C}^2$, $(0, \varphi) \in E^2$, on obtient l'inégalité :

$$|\Phi(\varphi)| \leqslant \Phi(0). \tag{2}$$

En appliquant l'inégalité (1) aux familles $(u, v, w) \in \mathbf{C}^3$, $(0, \varphi, \psi) \in E^3$, on obtient l'inégalité :

$$|\Phi(\varphi + \psi) - \Phi(\varphi)|^2 \leqslant 2\,\Phi(0)\,[\Phi(0) - Re\,\Phi(\psi)] \tag{3}$$

L'inégalité (3) montre que si Φ est continue à l'origine, elle est uniformément continue.

Les fonctions de type positif continues sur $\mathbf{R}^n$ sont caractérisées par le théorème bien connu de Bochner :

THÉORÈME II.5.1 (Bochner). — *Pour qu'une fonction Φ sur $\mathbf{R}^n$ soit la fonctionnelle caractéristique d'un processus linéaire basé sur $\mathbf{R}^n$ pour un espace d'épreuves convenable, il faut et il suffit qu'elle soit de type positif, continue, égale à 1 à l'origine.*

II.5.2. *Fonctionnelles caractéristiques de processus linéaires.*

THÉORÈME II.5.2. — *Pour qu'une fonction Φ sur un espace vectoriel* E *soit la fonctionnelle caractéristique d'un processus linéaire basé sur* E *pour un espace d'épreuves convenable, il faut et il suffit qu'elle soit de type positif, continue sur chaque sous-espace de dimension finie, égale à 1 à l'origine.*

Démonstration. — Soient X un processus linéaire basé sur E et Φ sa fonctionnelle caractéristique ; pour toute famille $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)$ d'éléments de E, la marge m_Ψ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^p$; la fonction f sur $\mathbf{R}^p$ définie par :

$$f(t) = f(t_1, \ldots, t_p) = \int e^{i\langle t, x\rangle}\, dm_\Psi(x),$$

est de type positif continue égale à 1 à l'origine (th. II.5.1). Le résultat s'ensuit puisque (II.1.2(3)) :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{p} t_i\,\psi_i\right) = f(t_1, \ldots, t_p).$$

Réciproquement, soit une fonction Φ sur E de type positif continue sur chaque sous-espace de dimension finie, égale à 1 à l'origine ; pour toute famille finie $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)$ d'éléments de E, il existe (th. II.5.1) une mesure de probabilité m_Ψ sur $\mathbf{R}^p$ telle que pour tout $t = (t_1, ..., t_p)$, on ait :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{p} t_i \psi_i\right) = \int_{\mathbf{R}^p} e^{i\langle t, x\rangle} dm_\Psi(x).$$

Si $\Psi' = (\psi'_1, ..., \psi'_q)$ est telle que :

$$\forall i \in [1, q], \ \psi'_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \psi_j ,$$

notons m' l'image de la mesure m_Ψ par l'application u de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ de matrice $(a_{i,j})$; pour tout élément $t' = (t'_1, ..., t'_q)$ de $\mathbf{R}^q$, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^q} e^{i<t', x'>} dm'(x') = \int_{\mathbf{R}^p} e^{i<t', u(x)>} dm_\Psi(x) ;$$

le second membre est égal à $\Phi(\langle t', u(\Psi)\rangle)$, c'est-à-dire à $\Phi(\langle t', \Psi'\rangle)$; on a donc :

$$\int_{\mathbf{R}^q} e^{i<t', x'>} dm'(x') = \int_{\mathbf{R}^q} e^{i<t', x'>} dm_{\Psi'}(x') ;$$

On en déduit que la mesure m' et la mesure $m_{\Psi'}$ sont identiques. La famille (m_Ψ) vérifie les conditions II.4.1 (a) et (b); d'où le résultat.

COROLLAIRE II.5.2. — *Pour qu'une fonction* Φ *sur un espace vectoriel* E *soit la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur le dual algébrique* E* *de* E *muni de la tribu engendrée par les cylindres, il faut et il suffit qu'elle soit de type positif, continue sur chaque sous-espace de dimension finie, égale à 1 à l'origine.*

II.5.3. *Transformées de Fourier de mesures sur un dual topologique.*

Les théorèmes II.3.3 et II.3.4 peuvent se traduire en termes de transformées de Fourier de mesures :

THÉORÈME II.5.3 (a). — *Soit* E *un espace limite inductive d'une suite* $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de sous-espaces de Fréchet nucléaires; pour qu'une fonction* Φ *sur* E *soit la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur le dual topologique* E′ *de* E *muni de sa tribu borélienne, il faut et il suffit qu'elle soit de type positif, continue, égale à* 1 *à l'origine. Pour qu'un ensemble* A *de mesures de probabilité sur* E′ *soit relativement compact* *dans* ($\mathcal{M}$ (E′), $\mathcal{E}$ (E′)), *il faut et il suffit que l'ensemble* $(\Phi_\mu)_{\mu \in A}$ *des transformées de Fourier soit équicontinue à l'origine.*

Démonstration de la deuxième partie :

Soit une partie A de $\mathcal{M}$ (E′) relativement compacte pour la topologie étroite; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe (Th. I.6.5) une partie compacte métrisable K de E′ telle que :

$$\forall \mu \in A, \quad \mu(K) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout élément φ de E, on aura alors :

$$| 1 - \Phi_\mu(\varphi) | \leqslant \int_K | 1 - e^{i\langle\varphi, t\rangle} | \, d\mu(t) + \int_{E-K} | 1 - e^{i\langle\varphi, t\rangle} | \, d\mu(t).$$

La seconde intégrale est majorée par $\dfrac{2\varepsilon}{3}$; soit V la partie de E définie par :

$$V = \left\{ \varphi \mid \forall t \in K, \ | \langle \varphi, t \rangle | \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \right\} ;$$

c'est un voisinage de 0 dans E, car E est tonnelé; pour tout élément φ de V, la première intégrale est majorée par $\dfrac{\varepsilon}{3}$. La famille $(\Phi_\mu)_{\mu \in A}$ est donc équicontinue à l'origine.

Réciproquement, soit A un ensemble de mesures dont la famille $(\Phi_\mu)_{\mu \in A}$ des transformées de Fourier soit équicontinue à l'origine; pour tout entier p et tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$V = \left\{ \varphi \in E_p \mid \forall \mu \in A, \ \left| \Phi_\mu\left(\varphi \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right) - 1 \right| \leqslant \varepsilon \right\},$$

c'est un voisinage de 0 dans E_p ; on en déduit (II.3.3 D_p) l'existence d'une semi-norme continue $N_p = \sqrt{Q'_p}$ sur E_p telle que :

$$\forall \mu \in A, \quad \mu\{ x \in E' \mid \forall \varphi \in E_p, \ | \langle x, \varphi \rangle | \leqslant N_p(\varphi) \} \geqslant 1 - 6\,\varepsilon.$$

En utilisant une suite

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon}{6.2^p}$$

on en déduit que l'ensemble A est relativement compact.

THÉORÈME II.5.3 (b). — *Soit* E *un espace de Hilbert; pour qu'une fonction* Φ *sur* E *soit la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur* E *muni de sa tribu borélienne, il faut et il suffit qu'elle soit de type positif, continue, égale à* 1 *à l'origine et que, pour tout* ε *positif, il existe une forme quadratique* Q_ϵ *sur* E *et un nombre* M_ϵ *tels que :*

(a) *si* $(x_1, \ldots, x_m)$ *est orthonormée, on ait :*

$$\sum_{j=1}^{m} Q_\epsilon(x_j, x_j) \leqslant M_\epsilon ,$$

(b) $|1 - \Phi| \leqslant \varepsilon(1 + Q_\epsilon)$.

Pour qu'un ensemble A *de mesures de probabilité sur* E *soit relativement compact dans* $(\mathcal{M}(E), \mathcal{E}(E))$, *il faut et il suffit que l'on puisse choisir* Q_ϵ *et* M_ϵ *indépendamment de* μ.

II.5.4. *Exemples de fonctions de type positif.*

Soit un espace vectoriel E; pour tout élément x de E*, $\varphi \to e^{i\langle x, \varphi\rangle}$ est une fonction de type positif; pour toute forme quadratique positive Q sur E, les fonctions

$$\varphi \to \exp\left(-\frac{1}{2} Q(\varphi, \varphi)\right),$$

$$\varphi \to \exp(-\sqrt{Q(\varphi, \varphi)}), \quad \varphi \to [1 + Q(\varphi, \varphi)]^{-a}, \quad (a > 0)$$

sont des fonctions de type positif. Elles vérifient les conditions du théorème II.5.2; ce sont des transformées de Fourier de mesures sur E*. Si E est limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet nucléaires, pour que l'une quelconque de ces mesures soit portée par E′, il faut et il suffit (th. II.5.3 (a)) que h et Q soit continues. Si E est un espace de Hilbert, pour que l'une quelconque de ces mesures soit portée par E′, il faut et il suffit (th. II.5.3 (b)) que h soit continu et que Q soit associé à un opérateur complètement continu dont la somme des valeurs propres soit finie.

II.5.5. *Fonctions de type positif continues sur une limite inductive.*

Soit E un espace topologique localement convexe limite inductive d'une suite $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-espaces vectoriels topologiques; toute fonction Φ de type positif continue sur tout E_n est à un facteur près (th.

II.5.2) la fonctionnelle caractéristique d'un processus linéaire X basé sur E; ce processus est continu en probabilité sur tout E_n (th. II.2.3) donc sur E (th. II.2.4). Il en résulte que Φ est continue sur E (th. II.2.3). On peut d'ailleurs démontrer directement le théorème :

THÉORÈME II.5.5. — *Soit* E *un espace localement convexe, limite inductive d'une suite* $(E_n)_{n \in N}$ *de sous-espaces; pour qu'une fonction* Φ *de type positif sur* E *soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit continue sur tout* E_n*; pour qu'un ensemble* $\mathcal{F}$ *de fonctions de type positif sur* E *soit équicontinu à l'origine de* E, *il faut et il suffit qu'il soit équicontinu à l'origine de tout* E_n.

Démonstration. — Les nécessités sont évidentes; la première suffisance résulte de la seconde; on peut se limiter au cas où $\Phi(0) = 1$, pour tout $\Phi \in \mathcal{F}$. On suppose que la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue à l'origine de tout E_n.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n, soit U_n un voisinage convexe de zéro dans E_n tel que :

$$\forall \Phi \in \mathcal{F}, \quad \forall \varphi \in U_n, \quad |1 - \Phi(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2^{2n+1}}; \tag{1}$$

l'ensemble convexe U formé des éléments φ qui sont de la forme :

$$\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_k, \quad k \geqslant 1, \quad \varphi_n \in U_n, \tag{2}$$

contient chacun des U_n, U est donc un voisinage de zéro dans E. Pour tout élément φ de U, on a :

$$\forall \Phi \in \mathcal{F}, \quad |1 - \Phi(\varphi)| \leqslant \sum_{l=1}^{k} \left| \Phi\left(\sum_{i=1}^{l-1} \varphi_i\right) - \Phi\left(\sum_{i=1}^{l} \varphi_i\right) \right|;$$

l'inégalité (II.5.1 (3)) permet de majorer chaque terme de droite; on obtient :

$$\forall \Phi \in \mathcal{F}, \quad |1 - \Phi(\varphi)| \leqslant \sum_{l=1}^{k} \sqrt{2(1 - \mathrm{Re}\,\Phi(\varphi_l))};$$

les relations (1) et (2) montrent que le second membre est inférieur ou égal à ε d'où le résultat.

CHAPITRE III

DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES

1. Préliminaires sur $\mathcal{D}$ [18].

III.1.1. *Notations.* — Dans ce chapitre, on note $\mathbf{R}^d$ l'espace numérique réel de dimension d et $x = (x_1, ..., x_d)$ l'un de ses points ; la lettre M désignera un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^d$; pour toute partie compacte K de $\mathbf{R}^d$ (par exemple contenue dans M), on note $\mathcal{D}_K$ l'espace vectoriel des fonctions de d variables réelles indéfiniment dérivables et à support dans K.

Pour tout entier $i \in [1, d]$, la lettre D_i note le symbole de dérivation partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$; pour tout système $p = (p_1, ..., p_d)$ de d entiers $\geqslant 0$, D_p note le symbole de dérivation $\prod_{i=1}^{d} (D_i)^{p_i}$; on note plus particulièrement Λ le symbole $\prod_{i=1}^{d} D_i$.

Pour toute fonction φ indéfiniment dérivable de d variables réelles, on pose :

$$|| \varphi ||_\infty = \sup | \varphi (x) |$$

$$|| \varphi ||_2 = [\int | \varphi (x) |^2 dx]^{1/2} ;$$

$$\forall\, m \in \mathbf{N},\ Q_m (\varphi) = [|| \overset{m}{\Lambda} \varphi ||_2]^2 ;$$

ces différentes fonctions de φ sont reliées par les formules suivantes :

III.1.2. *Lemme fondamental. — Soient dans* $\mathbf{R}^d$ *un cube de côté r et une partie compacte* K *contenue dans le cube; toute fonction* φ *appartenant à* $\mathcal{D}_K$ *vérifie les inégalités :*

$$|| \varphi ||_2 \leqslant r^{d/2} || \varphi ||_\infty ; \tag{1}$$

$$|| \varphi ||_\infty \leqslant r \, || D_i \varphi ||_\infty ; \tag{2}$$

$$|| \varphi ||_\infty \leqslant r^{d/2} || \Lambda \varphi ||_2 ; \tag{3}$$

de plus pour tout entier $m \geqslant 0$ et toute famille Φ d'éléments de $\mathcal{D}_K$ orthonormale pour Q_{m+1}, on a :

$$\sum_{\varphi \in \Phi} Q_m(\varphi) \leqslant r^{2d}. \tag{4}$$

Démonstration. — Les inégalités (1) et (2) résultent de la formule de la moyenne; soient donnés un entier $m \geqslant 0$, une famille Φ orthonormale pour Q_{m+1} et un élément t de $\mathbf{R}^d$; on définit la fonction h_t sur $\mathbf{R}^d$ par :

$$\begin{aligned} h_t(x) &= 1 \quad \text{si } x_1 \geqslant t_1, \; \ldots, \; x_d \geqslant t_d, \\ h_t(x) &= 0 \quad \text{ailleurs} ; \end{aligned}$$

pour tout élément φ de $\mathcal{D}_K$, on a :

$$\varphi(t) = \int \Lambda \varphi(x) \overline{h_t(x)} \, dx,$$

l'inégalité (3) en résulte par application de l'inégalité de Schwarz. Comme la famille $\Lambda^{m+1} \Phi$ est orthonormale dans $L^2(K)$, on en déduit aussi en appliquant l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \Lambda^m \varphi(t)^2 \leqslant \int_K | h_t(x) |^2 \, dx \leqslant r^d ;$$

en intégrant cette dernière inégalité dans le cube hors duquel les éléments de Φ sont nuls, on obtient :

$$\sum_{\varphi \in \Phi} Q_m(\varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \int | \Lambda^m \varphi |^2 \, dt \leqslant r^{2d} ;$$

d'où l'inégalité (4).

III.1.3. La topologie sur $\mathcal{D}_K$ est définie ([18], p. 64) par la famille des semi-normes $(\| D^p \varphi \|_\infty)_{p \in \mathbf{N}^d}$;le lemme III.1.2 montre alors qu'elle peut être définie par la famille des semi-normes $(Q_m(\varphi)^{1/2})_{m \in \mathbf{N}}$. Pour tout sous-ensemble ouvert M de $\mathbf{R}^d$, on désigne par $\mathcal{D}_M$, ou $\mathcal{D}$ s'il n'y a pas de confusion possible, la réunion des $\mathcal{D}_K$ où K parcourt la famille des sous-ensembles compacts de M; $\mathcal{D}$ est muni de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{D}_K$. On note $\mathcal{D}'_K$ le dual de $\mathcal{D}_K$ et $\mathcal{D}'_M = \mathcal{D}'$ le dual de $\mathcal{D}_M$ munis de leur topologie forte ([18], p. 71); on note π_K l'application de réduction canonique de $\mathcal{D}'_M$ dans $\mathcal{D}'_K$.

2. Tribus sur $\mathcal{D}'$.

III.2.1. Soient K une partie compacte de $\mathbf{R}^d$ et $\mathcal{D}'_K$ le dual fort de $\mathcal{D}_K$; l'application à $\mathcal{D}'_K$ des résultats du chapitre 1 permet d'écrire :

Proposition III.2.1 :

(1) *L'espace $\mathcal{D}'_K$ est standard;*

(2) *La tribu borélienne sur $\mathcal{D}'_K$ est engendrée par chacune des classes de parties qui suivent :*

(a) *la classe des parties compactes;*

(b) *la classe des parties convexes compactes;*

(c) *la classe des demi-espaces de la forme $\{ T \mid \langle T, \varphi \rangle < a \}$ où φ parcourt $\mathcal{D}_K$ et a parcourt l'ensemble des nombres réels.*

Démonstration. — L'assertion (1) résulte du théorème I.5.1 (e) puisque $\mathcal{D}_K$ est un espace de Fréchet-Montel ([8], p. 79); pour démontrer l'assertion (2), il suffit d'extraire des tribus définies en (b) et (c) des familles dénombrables séparant les points (th. I.2.5 (c))

Il existe dans $\mathcal{D}_K$ une famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dénombrable et dense, la classe des $\{T \mid \langle T, \varphi_n \rangle < 1\}_{n \in \mathbf{N}}$ est contenue dans la classe (c) et sépare les points ; d'où l'assertion (2) (c).

L'espace $\mathcal{D}'_K$ est réunion dénombrable de parties convexes compactes métrisables. Dans chacune de ces parties, tout point a une base dénombrable de voisinages formée d'ensembles convexes compacts, il existe donc une suite de parties convexes compactes séparant les points. La réunion dénombrable de ces suites sépare les points de $\mathcal{D}'_K$; d'où les assertions (2) (a) et (2) (b).

Corollaire. — *L'espace $\mathcal{D}'_K$ est standard pour toute topologie intermédiaire entre la topologie faible et la topologie forte ; toutes ces topologies définissent la même tribu borélienne.*

Démonstration. — Cela résulte de l'assertion (2) (c).

III.2.2. Soit un recouvrement de l'ouvert M de $\mathbf{R}^d$ par une suite croissante $(\mathring{K}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de parties ouvertes relativement compactes ; l'espace $\mathcal{D}_M$ est limite inductive de la suite $(\mathcal{D}_{K_n})_{n \in \mathbf{N}}$. On en déduit :

PROPOSITION III.2.2 :

(1) *L'espace* $\mathcal{D}'_M$ *est standard ;*

(2) *La tribu borélienne sur* $\mathcal{D}'_M$ *est engendrée par la famille d'application* $(\pi_{K_n})_{n \in \mathbf{N}}$ *à valeurs respectives dans* $(\mathcal{D}'_{K_n}, \mathcal{B}(\mathcal{D}'_{K_n}))$;

(3) *La tribu borélienne sur* $\mathcal{D}'_M$ *est engendrée par les demi-espaces de la forme :* $\{T \mid \langle T, \varphi \rangle < a\}$ *où* φ *parcourt* $\mathcal{D}_M$ *et* a *parcourt l'ensemble des nombres réels.*

(4) *Soit la tribu* $\mathcal{B}_1$ *engendrée sur* $\mathcal{D}'_M$ *par les parties convexes compactes ; sur toute partie de* $\mathcal{D}'_M$ *qui est* σ*-compacte, les tribus* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}(\mathcal{D}'_M)$ *induisent la même tribu.*

Démonstration. — L'assertion (1) résulte du théorème I.5.1 (f). Les assertions (3) et (4) se démontrent comme (III.2.1 (2) (c)) et (III.2.1 (2) (b)). Par ailleurs, à tout compact K_n, on peut (théorème I.2.5 (b)) associer une suite $(f_{n,m})_{m \in \mathbf{N}}$ de fonctions boréliennes sur $\mathcal{D}'_{K_n}$ séparant les points de $\mathcal{D}'_{K_n}$; la suite double $(f_{n,m} \circ \pi_{K_n})_{n,m \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions boréliennes numériques sur $\mathcal{D}'$ séparant les points de $\mathcal{D}_M$, elle engendre $\mathcal{B}(\mathcal{D}'_M)$ (théorème I.2.5 (c)), d'où l'assertion (2).

COROLLAIRE. — *L'espace* $\mathcal{D}'$ *est standard pour toute topologie intermédiaire entre la topologie forte et la topologie faible ; toutes ces topologies définissent la même tribu borélienne.*

Remarque. — Comme $\mathcal{D}'$ n'est pas σ-compact, l'assertion III.2.2 (4) ne prouve pas que les tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ soient identiques. Au contraire, cette identité semble douteuse. Pourtant, toute mesure de probabilité μ sur $(\mathcal{D}', \mathcal{B}(\mathcal{D}'))$ sera portée par un sous-espace σ-compact (théorème I.3.2 corollaire 2) et les tribus μ-complétées de $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ ou de $\mathcal{B}_1$ seront identiques (assertion (4)).

3. Espaces fonctionnels usuels.

Dans ce paragraphe, on étudie les espaces fonctionnels usuels contenus dans $\mathcal{D}'$; on montre que la plupart sont des parties boréliennes de $\mathcal{D}'$ et que la tribu $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ induit sur eux leur propre tribu borélienne. On utilisera pour cela deux principes.

III.3.1. *Premier principe.* — Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$ muni d'une topologie plus fine que la topologie induite par $\mathcal{D}'$; on suppose que E pour sa topologie est un espace de Fréchet de type dénombrable ou la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable ; alors E est une partie borélienne de $\mathcal{D}'$; la tribu $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ induit sur E sa propre tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ et cette dernière est engendrée par les demi-espaces $\{T \in E \mid \langle T, \varphi\rangle < a\}$ où φ parcourt $\mathcal{D}$ et a parcourt l'ensemble des nombres réels.

Deuxième principe. — Soit F un espace de Fréchet de type dénombrable ou la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet de type dénombrable ; on suppose qu'il existe une application linéaire continue f de $\mathcal{D}$ sur une partie dense de F ; soit E la partie de $\mathcal{D}'$ image du dual topologique de F par l'application transposée de f, c'est une partie borélienne de $\mathcal{D}'$. Soit $\mathfrak{T}$ une topologie localement convexe sur E qui soit intermédiaire entre les images par ${}^t f$ de la topologie faible et de la topologie de la convergence compacte (identique à la topologie forte si F est un espace de Montel), alors la tribu borélienne sur $(E, \mathfrak{T})$ est identique à la tribu induite par $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ sur E.

Démonstration des deux principes. — Dans l'un ou l'autre cas, soit $\mathfrak{T}$ la topologie considérée ; pour cette topologie, E est standard (th. I.5.1). L'injection canonique de $(E, \mathfrak{T})$ dans $\mathcal{D}'$ faible étant continue, le sous-ensemble E est borélien dans $\mathcal{D}'$ (prop. I.2.2) ; il est donc standard pour la topologie séparée $\mathfrak{T}$ et pour la topologie induite par la topologie faible de $\mathcal{D}'$ qui est moins fine ; les tribus boréliennes associées sont alors identiques (th. I.2.5 (a)).

III.3.2. *Exemples d'applications du premier principe :*

Ce principe s'applique par exemple quand E est l'un des espaces suivants :

L'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans M ; l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment dérivables dans M ; l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide (lorsque $M = \mathbf{R}^d$) ; pour tout nombre réel fini $p \geqslant 1$, les espaces L^p, L^p_{loc}, des fonctions de puissance pième sommable ou localement sommable dans M ; pour tout nombre réel fini $p \geqslant 1$ et tout entier $m \geqslant 1$, les espaces $\mathcal{D}^m_{L^p}$ et $\mathcal{E}^m_{L^p}$ des fonctions dont les dérivées d'ordre $\leqslant m$ (au sens des distributions) sont dans K^p ou dans L^p, les espaces $\mathcal{D}^m$ et $\mathcal{E}^m$ des fonctions m fois continument dérivables à support compact dans M ou m fois continument dérivables dans M.

III.3.3. *Le cas des fonctions continues mérite une mention spéciale :*

PROPOSITION III.3.3. — *L'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues est une partie borélienne de $\mathcal{D}'$. Sur toute partie borélienne* E *de $\mathcal{D}'$ contenue dans $\mathcal{C}$, les tribus suivantes coïncident :*

(a) *la tribu borélienne $\mathcal{B}$* (E) *associée à la topologie de la convergence compacte,*

(b) *la tribu induite par $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$,*

(c) *la tribu engendrée par les applications $f \to f(x)$ où x parcourt* M,

(d) *la tribu engendrée par les applications $f \to \int f d\mu$ où μ parcourt l'ensemble des mesures à support compact dans* M,

(e) *la tribu engendrée par les applications $f \to \int f\varphi\, dx$ où φ parcourt $\mathcal{D}$.*

Démonstration. — Le premier principe III.3.1 montre que l'espace $\mathcal{C}$ muni de la topologie de la convergence compacte est standard et que les tribus (a), (b), (e) coïncident. Les tribus (c) et (d) sont contenues dans $\mathcal{B}$ (E), car les applications en question sont continues ; elles contiennent toutes la tribu engendrée par la suite d'applications $(f \to f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ où $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite partout dense dans M qui sépare les points de E et engendre donc aussi la tribu (a) (th. I.2.5 (c)) ; d'où le résultat.

COROLLAIRE III.3.3 :

(a) *Pour tout nombre positif* A *et toute partie fermée* F *de* M, *l'ensemble des fonctions continues dans* M *majorées par* A *dans* F *est une partie borélienne de $\mathcal{D}'$.*

(b) *Pour toute fonction* δ *d'une variable réelle positive, continue, croissante, à valeurs strictement positives, et toute partie fermée* F *de* M, *l'ensemble*

$$\left\{ f \in \mathcal{C} \;\Big|\; \sup_{(x,y)\in F^2} \frac{|f(x)-f(y)|}{\delta(|x-y|)} \leqslant 1 \right\}$$

est une partie borélienne de $\mathcal{D}'$.

Démonstration. — Les deux ensembles indiqués sont fermés dans $\mathcal{C}$ pour la topologie de la convergence compacte ; la proposition III.3.2 montre que ce sont les traces sur la partie borélienne $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}'$ de certains sous-ensembles boréliens de $\mathcal{D}'$; d'où le résultat.

III.3.4. *Exemples d'application du second principe :*

Ce principe s'applique par exemple quand E est l'un des espaces suivants :

L'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact dans M, l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées (lorsque $M = \mathbf{R}^d$), les espaces $\mathcal{E}'^m$ et $\mathcal{D}'^m$ duals respectifs de $\mathcal{E}^m$ et $\mathcal{D}^m$ (III.3.2), l'espace L^∞ des fonctions bornées dans M muni de la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Remarque 1. — Sur L^∞, on peut définir la tribu borélienne associée à la topologie forte ; on ignore si elle est ou non identique à la tribu induite par $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$.

Remarque 2. — L'ensemble des distributions ayant leur support dans une partie fermée donnée de M est une partie fermée de $\mathcal{D}'$ et coupe chaque espace fonctionnel des types précédents suivant une partie borélienne de $\mathcal{D}'$.

4. Distributions aléatoires.

III.4.1. *Définition.* — *Soit un espace probabilisé* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$; *on appelle distribution aléatoire sur* M, *toute application mesurable de* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *dans* $(\mathcal{D}', \mathcal{B}(\mathcal{D}'))$; *l'espace* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ *est appelé espace d'épreuves de la distribution aléatoire.*

Une distribution aléatoire est donc (I.4.1) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{D}'$. La dualité entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ et la proposition III.2.2 (3) montrent plus explicitement que c'est une fonction numérique $X(\omega, \varphi)$ de $\Omega \times \mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) pour $\varphi \in \mathcal{D}$, l'application $\omega \to X(\omega, \varphi)$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$; on la note $\langle X, \varphi \rangle$ ou $\int_M X(x)\, \varphi(x)\, dx$.

(b) pour $\omega \in \Omega$, l'application $\varphi \to X(\omega, \varphi)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$; on la note $X(\omega)$, c'est un élément de $\mathcal{D}'$.

La définition II.3.1 montre d'ailleurs que toute distribution aléatoire est un processus linéaire presque sûrement continu basé sur $\mathcal{D}$ et que réciproquement, pour tout processus linéaire presque sûrement continu basé sur $\mathcal{D}$, il existe une variable aléatoire indiscernable (I.4.1) qui est une distribution aléatoire.

III.4.2. *Lois de distributions aléatoires.*

A toute distribution aléatoire X sur M, on associe (I.4.1) une mesure m_X sur $\mathcal{D}'$ définie par :

$$\forall\, b \in \mathcal{B}(\mathcal{D}'), \qquad m_X(b) = \mathbf{P}\{X^{-1}(b)\} ;$$

c'est la loi de la distribution aléatoire X ; à toute famille finie $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ d'éléments de $\mathcal{D}$, on associe (II.1.2) une mesure m_Φ sur $\mathbf{R}^p$ définie par :

$$\forall\, b \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^p), \qquad m_\Phi(b) = \mathbf{P}(B)$$

où B est l'ensemble des éléments ω de Ω tels que :

$$(X_{\varphi_1}(\omega), \ldots, X_{\varphi_p}(\omega)) \in b ;$$

c'est la Φ-marge de la distribution aléatoire X.

Le lemme fondamental (III.1.2) permet d'appliquer le théorème de Minlos (II.3.3) aux processus linéaires basés sur $\mathcal{D}$. On en déduit :

Proposition III.4.2 (a). — *Tout processus continu en loi ou en probabilité* (th. II.2.3) *basé sur $\mathcal{D}$ admet une modification qui est une distribution aléatoire.*

PROPOSITION III.4.2 (b). — *La loi d'une distribution aléatoire est déterminée par le système de ses marges ; pour qu'un système de mesures* (m_Φ) *soit le système des marges d'une distribution aléatoire pour au moins un espace d'épreuves, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :*

(a) (cf. II.4.1) *pour tout* $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$, *toute application linéaire* u *de* $\mathbf{R}^p$ *dans* $\mathbf{R}^q$ *et toute partie borélienne* A *de* $\mathbf{R}^q$, *on a :*

$$m_{u\Phi}(\mathrm{A}) = m_\Phi(u^{-1}(\mathrm{A})).$$

(b) (cf. II.2.3 (f)) *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout compact* K *contenu dans* M, *il existe un voisinage* U *de* O *dans* $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ *tel que pour tout élément* φ *de* U, *on ait :*

$$m_\varphi([-1, +1]) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Démonstration. — Soit un système (m_Φ) ; pour qu'il soit le système des marges d'un processus basé sur $\mathcal{D}$, il faut et il suffit (th. II.4.1) que la condition (a) soit satisfaite ; pour que ce processus soit continu en loi il faut et il suffit que la condition (b) soit satisfaite ; pour qu'un processus basé sur $\mathcal{D}$ soit une distribution aléatoire, il faut et il suffit (prop. III.4.2. (a), th. II.3.2) qu'il ait une modification qui soit continue en loi ; d'où le résultat, puisque deux modifications ont mêmes marges.

III.4.3. *Systèmes de K-marges.* — Dans (III.1.3), on a associé à toute partie compacte K de M, l'espace $\mathcal{D}_\mathrm{K}$, son dual fort $\mathcal{D}'_\mathrm{K}$ et une application canonique π_K de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'_\mathrm{K}$; cette application est une application mesurable de $(\mathcal{D}', \mathcal{B}(\mathcal{D}'))$ dans $(\mathcal{D}'_\mathrm{K}, \mathcal{B}(\mathcal{D}'_\mathrm{K}))$ et associe donc à toute distribution aléatoire X de loi m_X une mesure de probabilité $\pi_\mathrm{K}(m_\mathrm{K})$ sur $(\mathcal{D}'_\mathrm{K}, \mathcal{B}(\mathcal{D}'_\mathrm{K}))$; cette mesure est appelée la K-*marge de la distribution aléatoire* X. Alors que les Φ-marges des distributions aléatoires sont caractérisées par des conditions algébriques (a) et topologiques (b) simultanées, les K-marges des distributions aléatoires sont caractérisées par des conditions uniquement algébriques :

PROPOSITION III.4.3. — *Pour qu'un système* (m_K) *de mesures de probabilité sur* $(\mathcal{D}'_\mathrm{K}, \mathcal{B}(\mathcal{D}'_\mathrm{K}))$ *respectivement, indexé par l'ensemble des parties compactes* K *de* M, *soit le système des* K-*marges d'une distribution aléatoire, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée :*

Pour tout couple (K_1, K_2) *de parties compactes de* M *et tout* $\varphi \in \mathcal{D}_{K_1} \cap \mathcal{D}_{K_2}$*, on a :*

$$m_{K_1}\{T \in \mathcal{D}'_{K_1} \mid |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant 1\} = m_{K_2}\{T \in \mathcal{D}'_{K_2} \mid |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant 1\} \quad (1)$$

Démonstration. — Soient T une distribution aléatoire de loi m et deux parties compactes K_1 et K_2 de M ; les deux membres de (1) sont égaux à

$$m\{T \in \mathcal{D}' \mid |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant 1\},$$

donc égaux entre eux.

Réciproquement soit un système (m_K) de mesures de probabilité vérifiant les hypothèses de la proposition ; toute famille finie d'éléments de $\mathcal{D}$ ayant un support compact commun, la condition (1) montre que le système (m_K) définit un système de marges bien déterminé. C'est le système des Φ-marges d'un processus linéaire basé sur $\mathcal{D}$ continu en loi sur tout $\mathcal{D}_K$ donc sur $\mathcal{D}$ (théorème II.2.4) ; soit une modification X qui soit une distribution aléatoire ; elle a les mêmes Φ-marges, donc les mêmes K-marges ; d'où le résultat.

Remarque. — La proposition III.2.4 (b) exprime le critère de ([11]) « pour qu'un processus faible soit fort », et la proposition III.4.3 s'y exprimait sous la forme « tout processus fort sur tout $\mathcal{D}_K$ est un processus fort. »

III.4.4. *Distribution aléatoire portée par un espace fonctionnel :*

Soit E un espace fonctionnel borélien dans $\mathcal{D}'$, par exemple l'un des espaces identifiés dans le paragraphe 3 ; on dit qu'une distribution aléatoire X est portée par E si $\mathbf{P}\{X^{-1}(E)\} = 1$; l'application $\omega \to X(\omega)$ est alors une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{B}(E))$. Réciproquement, à toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{B}(E))$ est associée une distribution aléatoire portée par E.

En particulier, la proposition III.3.3 montre qu'il y a équivalence entre la notion de distribution aléatoire portée par l'espace des fonctions continues et celle de fonction aléatoire presque sûrement continue au sens usuel : à toute fonction aléatoire presque sûrement continue définie par ses lois temporelles, on peut associer « par passage à la limite » sur les lois une distribution aléatoire ayant même espace d'épreuves qui sera portée par l'espace des fonctions continues, et réciproquement (prop. III.3.3 (e) et (d)).

5. Opérations sur les distributions aléatoires.

Le théorème I.4.3 sur les variables aléatoires composées permet de définir avec précision des opérations sur les distributions aléatoires :

III.5.1 *Produit d'une variable et d'une distribution, somme de distributions aléatoires :*

Soient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une variable aléatoire réelle λ, des distributions aléatoires X et Y ayant $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ pour espace d'épreuves; les espaces $\mathbf{R}$ et $\mathcal{D}'$ sont standards et les applications $\{(x, \mathrm{T}) \to x \cdot \mathrm{T}\}$ et $\{(\mathrm{S}, \mathrm{T}) \to \mathrm{S} + \mathrm{T}\}$ de $\mathbf{R} \times \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$ sont continues; on peut donc appliquer le théorème I.4.3 : le produit λ X et la somme X + Y sont des distributions aléatoires.

III.5.2. *Produit tensoriel de distributions aléatoires :*

Soient une famille finie $(d_1, \ldots, d_n)$ de nombres entiers positifs, une famille $(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n)$ de parties ouvertes de $\mathbf{R}^{d_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ respectivement et des distributions aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sur $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ respectivement ayant un espace d'épreuves commun $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; les espaces $\mathcal{D}'(\mathrm{M}_1), \ldots, \mathcal{D}'(\mathrm{M}_n)$ sont standards et l'application

$$\{ (\mathrm{T}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \to \bigotimes_1^n \mathrm{T}_k \}$$

est une application continue ([18], p. 110) de

$$\prod_1^n \mathcal{D}'(\mathrm{M}_k) \text{ dans } \mathcal{D}'(\prod_1^n \mathrm{M}_k);$$

on peut donc appliquer le théorème I.4.3 :

THÉORÈME III.5.2. — *Le produit tensoriel de plusieurs distributions aléatoires ayant même espace d'épreuves est une distribution aléatoire.*

III.5.3. *Produit de convolution de distributions aléatoires :*

Le produit de convolution de deux distributions n'est défini que sous certaines conditions, assez mouvantes d'ailleurs ([19], pp. 6-12, pp. 26-32, p. 59, etc.). Dans tous les cas, les facteurs S et T appartiennent à des sous-espaces fonctionnels E et F tels que :

(1) pour tout élément (φ, S, T) de $\mathcal{D} \times E \times F$, la limite $l(S, T, \varphi)$ de $\langle S_x T_y \alpha(x) \alpha(y), \varphi(x+y) \rangle$, quand l'élément α de $\mathcal{D}$ converge vers 1 dans $\mathcal{E}$, existe;

(2) la limite $l(S, T, \varphi)$ est une fonction séparément continue de $S \in E, T \in F, \varphi \in \mathcal{D}$.

L'application $\{ \varphi \to l(S, T, \varphi) \}$ est alors une distribution (2); on la note $S * T$, c'est le produit de convolution de S et T.

Si les sous-espaces E et F sont boréliens dans $\mathcal{D}'$ et si la tribu $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ induit sur eux leur propre tribu borélienne, la propriété (2) montre qu'on peut appliquer le théorème I.4.3 :

THÉORÈME III.5.3. — *Soient* E *et* F *deux sous-espaces de* $\mathcal{D}'$ *standards pour des topologies plus fines que les topologies induites telles que l'application* $\{(X, Y) \to X * Y\}$ *soit définie* (au sens précédent); *le produit de convolution de deux distributions aléatoires portées respectivement par* E *et* F, *ayant même espace d'épreuves, est une distribution aléatoire. C'est le cas si* $E = \mathcal{D}'$ *et* $F = \mathcal{E}'$.

Première application : dérivation. Le théorème s'applique en particulier quand le premier facteur est un polynôme de dérivation; on en déduit :

COROLLAIRE 1. — *Les dérivées des distributions aléatoires sont des distributions aléatoires.*

Deuxième application : régularisation. Le théorème s'applique aussi quand le premier facteur est une fonction indéfiniment dérivable à support compact. Le produit de convolution est alors une fonction aléatoire indéfiniment dérivable au sens usuel; utilisant des α_j convergeant vers δ dans $\mathcal{E}'$, on en déduit :

COROLLAIRE 2. — *Les régularisées des distributions aléatoires sont des fonctions aléatoires indéfiniment dérivables. Toute distribution aléatoire est limite presque sûre d'une suite de fonctions aléatoires indéfiniment dérivables.*

III.5.4. *Produit multiplicatif de distributions aléatoires :*

Le produit multiplicatif de deux distributions est bien défini sur $\mathcal{E} \times \mathcal{D}'$; c'est une application hypocontinue de $\mathcal{E} \times \mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$; on peut donc appliquer le théorème I.4.3 :

Soient deux distributions aléatoires X et Y ayant même espace d'épreuves, l'une d'elles étant portée par $\mathcal{E}$; leur produit multiplicatif est une distribution aléatoire.

6. Distributions aléatoires et fonctions caractéristiques.

III.6.1. La proposition III.4.2 (a) permet d'affirmer que toute fonction $\mathcal{L}$ de type positif continue sur $\mathcal{D}$, égale à 1 à l'origine, est la fonctionnelle caractéristique d'au moins une distribution aléatoire associée à un espace d'épreuves convenable; c'est en particulier la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité m sur $\mathcal{D}'$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \mathcal{L}(\varphi) = \int e^{i<\mathrm{T}, \varphi>} \, dm(\mathrm{T}).$$

Dans certains cas, la forme de $\mathcal{L}$ permet de caractériser simplement certains espaces fonctionnels portant la distribution aléatoire, portant la mesure m :

PROPOSITION III.6.1. — *Soit* E *un espace vectoriel localement convexe contenant* $\mathcal{D}$ *tel que l'inclusion de* $\mathcal{D}$ *dans* E *soit continue et que* $\mathcal{D}$ *soit dense dans* E; *on identifie* E′ *à son image canonique dans* $\mathcal{D}'$. *Soient* X *une distribution aléatoire et* $\mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ *sa fonctionnelle caractéristique ;*

(a) *si* E *est tonnelé et* E′ *standard pour la topologie faible, si de plus* X *est porté par* E′, *la fonctionnelle* $\mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ *est continue sur* $\mathcal{D}$ *pour la topologie induite par celle de* E.

(b) *si* E *est limite inductive d'une suite de sous-espaces de Fréchet* *nucléaires, si de plus* $\mathcal{L}_X$ *est continue sur* $\mathcal{D}$ *pour la topologie induite par celle de* E, *alors* X *est porté par* E′.

Démonstration. — (a) Sous les hypothèses indiquées, il existe un processus linéaire Y presque sûrement continu basé sur E, tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on ait $Y_\varphi = \langle X, \varphi \rangle$; ce processus est continu en loi (th. II.3.2) et sa fonctionnelle caractéristique $\mathcal{L}_Y$ est continue sur E (th. II.2.3); elle coïncide avec $\mathcal{L}_X$ sur $\mathcal{D}$ d'où le premier résultat.

(b) Sous les hypothèses du (b), l'uniforme continuité de $\mathcal{L}_X$ (II.5.1, formule (3)) permet de la prolonger par continuité en une fonction Φ de type positif continue sur E égale à 1 à l'origine; il existe (th. II.5.3 (a)) une mesure de probabilité m sur E′ telle que pour tout $\varphi \in E$, on ait :

$$\Phi(\varphi) = \int_{E'} e^{i<T,\varphi>} \, dm(T).$$

En particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on aura :

$$\int_{E'} e^{i<T,\varphi>} \, dm(T) = \int_{\mathcal{D}'} e^{i<T,\varphi>} \, dm_X(T)$$

Comme E′ est borélien dans $\mathcal{D}'$, on peut prolonger m mesure de probabilité sur $(E', \mathcal{B}(E'))$ en une mesure de probabilité $\tilde{m}$ sur $(\mathcal{D}', \mathcal{B}(\mathcal{D}'))$ portée par E′; les deux mesures $\tilde{m}$ et m ayant même transformée de Fourier coïncident et l'on a :

$$\mathbf{P}\{X^{-1}(E')\} = m_X(E') = \tilde{m}(E') = 1 ;$$

d'où le second résultat.

COROLLAIRE 1. — *Pour qu'une distribution aléatoire soit à support compact, il faut et il suffit que sa fonctionnelle caractéristique soit continue sur* $\mathcal{D}$ *pour la topologie induite par celle de* $\mathcal{E}$.

COROLLAIRE 2. — *Pour qu'une distribution aléatoire soit tempérée, il faut et il suffit que sa fonctionnelle caractéristique soit continue sur* $\mathcal{D}$ *pour la topologie induite par celle de* $\mathcal{S}$.

Remarque. — L'espace des distributions et celui des distributions à support compact ne vérifient pas les hypothèses (b). Le théorème ci-dessus ne permet donc pas de caractériser les distributions aléatoires portées par $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{E}$. En fait, on peut pourtant démontrer :

III.6.2. Théorème III.6.2. — *Pour qu'une distribution aléatoire soit une fonction aléatoire indéfiniment dérivable (resp. indéfiniment dérivable à support compact), il faut et il suffit que sa fonctionnelle caractéristique soit continue sur $\mathcal{D}$ pour la topologie induite par celle de $\mathcal{E}'$ (resp. celle de $\mathcal{D}'$).*

Démonstration. — La nécessité a été prouvée en III.6.1 (a); il reste à prouver la suffisance. Supposons que $\mathcal{L}_X$ soit continue pour la topologie induite par $\mathcal{E}'$; alors pour tout entier $m \geqslant 0$, la fonctionnelle caractéristique de $\Lambda^{m+1} X$ est continue pour la topologie induite par celle de L^2_{loc}, et par suite (Th. II.5.3 (b)), $\Lambda^m X$ est porté par L^2_{loc} ; comme

$$\mathcal{E} = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} (\Lambda^m)^{-1} \; L^2_{loc} ,$$

il en résulte que X est porté par $\mathcal{E}$, c'est le premier résultat. Si maintenant, $\mathcal{L}_X$ est continue pour la topologie induite par celle de $\mathcal{D}'$, elle est continue pour les topologies induites par celles de $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$; la distribution aléatoire X est alors portée par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, donc par leur intersection qui est $\mathcal{D}$; d'où le résultat.

III.6.3. Certaines des topologies utilisées en III.6.1 et III.6.2 sont assez peu maniables et il n'est pas toujours facile de vérifier si des fonctionnelles caractéristiques sont continues pour ces topologies; il pourra être commode d'utiliser l'inégalité.

$$| 1 - \mathcal{L}_X (\varphi) | \leqslant \mathbf{E} [| \langle X, \varphi \rangle |] ;$$

elle montre que si la semi-norme du second membre est continue pour une topologie, il en est de même de $\mathcal{L}_X$.

III.6.4. *Convergence en loi de suites de distributions aléatoires.*

L'étude de la convergence étroite des mesures de probabilité sur un espace standard régulier faite en (I.6) et les précisions démontrées en (II.5.3 (a)) sur les ensembles de mesures relativement compacts pour la topologie étroite s'appliquent en particulier à l'espace $\mathcal{D}'$. L'application de ces résultats à des suites de distributions aléatoires permet d'énoncer :

Théorème III.6.4. — *Soit* $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite de distributions aléa-*

toires ayant même espace d'épreuves, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *de toute suite partielle, on peut extraire une suite partielle convergeant en loi dans $\mathcal{D}'$ fort.*

(b) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie compacte* K *de* $\mathcal{D}'$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}\{X_n \in K\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

(c) *la suite* $(\mathcal{L}_{X_n})_{n \in \mathbf{N}}$ *des fonctionnelles caractéristiques est équicontinue à l'origine de* $\mathcal{D}$.

III.6.5. *Critère de convergence en loi.*

La convergence en loi des suites de distributions aléatoires dans $\mathcal{D}'$ fort ou faible se caractérise comme celle des variables aléatoires numériques à partir des fonctionnelles caractéristiques (Théorème de P. Lévy) :

THÉORÈME III.6.5. — *Pour qu'une suite* $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de distributions aléatoires converge en loi dans* $\mathcal{D}'$ *fort ou faible, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

(1) *Pour tout élément* φ *de* $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}_{X_n}(\varphi)$ *tend vers une limite* $\mathcal{L}(\varphi)$.

(2) *La limite* $\mathcal{L}$ *est une fonction continue dans* $\mathcal{D}$.

Démonstration. — La nécessité est évidente puisque pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, l'application $X \to \langle X, \varphi \rangle$ est continue pour la topologie faible de $\mathcal{D}'$.

Démontrons la suffisance : (a) Supposons les deux conditions (1) et (2) vérifiées; la première montre par passage à la limite que $\mathcal{L}$ est une fonction de type positif sur $\mathcal{D}$, égale à 1 à l'origine; la seconde montre alors (Th. II.5.3 a) que c'est la fonctionnelle caractéristique d'une distribution aléatoire X. On veut montrer que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en loi vers X dans $\mathcal{D}'$ fort et pour commencer que la suite $(\mathcal{L}_{X_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est équicontinue à l'origine.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on appelle m_n la loi de X_n et m la loi de X; si μ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{D}$, l'hypothèse (1) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue montrent que la suite

$$\left(\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}_{X_n}(\varphi)\, d\mu(\varphi)\right) \text{ converge vers } \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}_X(\varphi)\, d\,\mu(\varphi).$$

Soit une fonction f continue de type positif sur $\mathcal{D}'$, égale à 1 à l'origine; c'est la transformée de Fourier (Th. III.6.2) d'une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{D}$; on en déduit donc que la suite $\left(\int_{\mathcal{D}'} f(T)\, dm_n(T)\right)$ converge vers $\int_{\mathcal{D}'} f(T)\, dm(T)$.

(c) Soit alors une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant vers 0 dans $\mathcal{D}$; ses éléments sont contenus dans un même $\mathcal{D}_K$ et on peut en extraire une suite partielle $(\varphi_k)_{k \in J}$ telle que $\sum_{k \in J} \varphi_k \otimes \varphi_k$ soit un élément de $\mathcal{D}(M \times M)$; pour tout $\varepsilon > 0$, le théorème de convergence dominée montre qu'il existe un entier k_0 tel que :

$$\int \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{\substack{k \geqslant k_0 \\ k \in J}} \langle \varphi_k, t \rangle^2 \right] \right\} dm(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe alors (b) un entier n_0 tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \int \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{\substack{k \geqslant k_0 \\ k \in J}} \langle \varphi_k, t \rangle^2 \right] \right\} dm_n(t) \leqslant \varepsilon;$$

on en déduit pour tout entier n supérieur à n_0 et pour tout entier k appartenant à J et supérieur à k_0 :

$$\int \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{1}{2} \langle \varphi_k, t \rangle^2 \right] \right\} dm_n(t) \leqslant \varepsilon,$$

soit alors M le maximum pour tout u réel de

$$\frac{1 - \cos u}{1 - \exp\left(-\dfrac{u^2}{2} \right)},$$

pour les mêmes valeurs de n et de k, on a :

$$1 - Re\, \mathcal{L}_{X_n}(\varphi_k) \leqslant M\, \varepsilon.$$

(d) Si la suite $(\mathcal{L}_{X_n})$ n'est pas équicontinue à l'origine de $\mathcal{D}$, il existe (Th. II.5.5) une partie compacte K de M telle que la suite ne soit pas équicontinue à l'origine de $\mathcal{D}_K$. Ce dernier espace étant métrisable, il existe alors un nombre $\eta > 0$, une suite (φ_k) d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant vers 0, une suite partielle (X_{n_k}) tels que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad 1 - Re\, \mathcal{L}_{X_{n_k}}(\varphi_k) \geqslant \eta.$$

Cette conclusion contredit celle de (c) : la suite $(\mathcal{L}_{X_n})$ est donc équicontinue à l'origine de $\mathcal{D}$.

(e) De toute suite partielle, on peut alors (Th. III.6.4) extraire une sous-suite convergeant en loi, la limite étant nécessairement X (condition 1). La suite (X_n) converge alors en loi vers X (Th. I.6.1, Cor. 2), d'où le résultat.

On en déduit immédiatement le corollaire :

COROLLAIRE 1. — *Toute suite de distributions aléatoires convergeant en loi sur $\mathcal{D}'$ faible converge aussi sur $\mathcal{D}'$ fort.*

Le théorème peut d'ailleurs s'énoncer en termes de mesures :

COROLLAIRE 2. — *Pour qu'une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de mesures positives bornées sur $(\mathcal{D}', \mathcal{B})$ converge pour la topologie étroite associée à la topologie faible ou forte sur $\mathcal{D}'$, il faut et il suffit que pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, la suite $(\int \exp(i\langle \varphi, t\rangle)\, d\mu_n(t))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers la limite $\mathcal{L}(\varphi)$, la fonction $\mathcal{L}$ étant de plus continue sur $\mathcal{D}$.*

III.6.6. *Convergence en loi et convergence presque sûre.*

Les hypothèses de l'exemple I.6.7. sont vérifiées par $\mathcal{D}'$: il existe donc des suites de distributions aléatoires convergeant en loi vers 0, aucune suite partielle ne convergeant presque sûrement ; il n'existe pas alors de couples (P, f) standardisant $\mathcal{D}'$ tels que la suite converge en loi dans P. Ces exemples infirment donc un résultat annoncé par l'auteur dans [12] ; on peut au contraire affirmer : il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de distributions aléatoires convergeant presque sûrement telle que pour tout couple (P, f) standardisant $\mathcal{D}'$, la suite $(f^{-1}(X_n))_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas étroitement. Dans le même ordre d'idées, l'auteur ignore si, oui ou non, pour toute suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant en loi dans $\mathcal{D}'$, on peut construire une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de distributions aléatoires de mêmes lois convergeant presque sûrement.

Le théorème I.6.7 permet pourtant d'affirmer :

THÉORÈME III.6.6. — *Soit une suite* $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de distributions aléatoires vérifiant les deux conditions suivantes :*

(1) $\mathcal{L}_{X_n - X_m}$ *tend vers* 1 *quand m et n tendent vers l'infini,*

(2) *Pour tout compact* K *contenu dans* M, *il existe un entier positif p tel que :*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ A \in \mathbf{R} \mid \forall\, n, m \in \mathbf{N},\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K,$$

$$1 - Re\, \mathcal{L}_{X_n - X_m}(\varphi) \leqslant \varepsilon + A \int_K |\Lambda^p \varphi|^2.$$

Alors, on peut extraire une suite partielle presque sûrement convergente ; les différentes limites sont indiscernables.

Démonstration. — Pour tout compact K de M, on note π_K l'application canonique de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'_K$, et $\mathcal{H}_K$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{D}_K$ par rapport à la forme quadratique $\int_K |\Lambda^{p+1} \varphi|^2$. Pour tout couple d'entiers $(n, m) \geqslant 0$, soit $\mu_{n,m}$ la loi de $X_n - X_m$; la condition 2 montre (th. II.5.3 a) que pour tout compact K contenu dans M la famille $(\pi_K\, \mu_{n,m})$ est relativement compacte dans $(\mathfrak{M}(\mathcal{H}_K), \mathcal{E}(\mathcal{H}_K))$; la condition 1 montre alors que $(\pi_K\, \mu_{n,m})$ tend étroitement vers ε_0 dans $\mathfrak{M}(\mathcal{H}_K)$. Il existe alors (th. I.6.7) une suite partielle $(X_n)_{n \in J_K}$ convergeant presque sûrement dans $\mathcal{D}'_K$. En utilisant une suite croissante (K_p) de compacts dont les intérieurs recouvrent M et le procédé diagonal, on en déduit le résultat.

7. Moments de distributions aléatoires.

III.7.1. Conformément à la définition II.1.3, on dira qu'une distribution aléatoire X a un moment d'ordre $p > 0$ si pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, $\mathbf{E}\{|\langle X, \varphi\rangle|^p\}$ est fini ; si p est entier, le moment d'ordre p de X est alors la forme multilinéaire H_p sur $(\mathcal{D})^p$ définie par :

$$H_p(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = \int_{\mathcal{D}'} \prod_{j=1}^{p} \langle T, \varphi_j\rangle\, dm_X(T) = \mathbf{E}\left\{\prod_{j=1}^{p} [\langle X, \varphi_j\rangle]\right\}$$

Pour $p = 1$, la forme linéaire H_1 ou $\mathbf{E}(X)$ sur $\mathcal{D}$ est continue (th. II.2.5), c'est un élément de $\mathcal{D}'$: *l'espérance mathématique d'une distribution aléatoire est une distribution.*

Pour étudier la nature des moments d'ordre supérieur, on utilise le théorème :

THÉORÈME III.7.1. — *Soient un ouvert* M (resp. M′) de $\mathbf{R}^d$ (resp. $\mathbf{R}^{d'}$) *et une distribution aléatoire* X (resp. X′) *sur* M (resp. M′) *possédant un moment d'ordre* p (resp. p') $\geqslant 1$; *on pose* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'}$; *la distribution aléatoire* $X \otimes X'$ *sur* $M \times M'$ *a un moment d'ordre* q.

Démonstration. — Les semi-normes $N(\varphi) = [\mathbf{E}\{|\langle X, \varphi\rangle|^p\}^{1/p}$ et $N'(\varphi') = [\mathbf{E}\{|\langle X', \varphi'\rangle|^{p'}\}]^{1/p'}$ sont continues (th. II.2.5) sur $\mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{D}(M')$ respectivement. Pour toute partie compacte L de $M \times M'$, on note K et K′ ses projections compactes sur M et M′. Les semi-normes $\sqrt{Q_m}$ (III.1.1) définissent les topologies de $\mathcal{D}_K$ et $\mathcal{D}_{K'}$; il existe un entier $m \geqslant 0$ et une constante $A > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in \mathcal{D}_K, \ N(\varphi) \leqslant A\sqrt{Q_m(\varphi)}, \\ &\forall \varphi' \in \mathcal{D}_{K'}, \ N'(\varphi') \leqslant A\sqrt{Q_m(\varphi')}. \end{aligned} \tag{1}$$

On dira qu'une fonction ψ sur $M \times M'$ est décomposable si elle est de la forme :

$$\psi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n,n'} a_{ij}\,\varphi_i(x)\,\varphi_j'(y) \tag{2}$$

où les (φ_i) et les (φ_j') sont respectivement orthonormaux pour Q_{m+1}.

On pose alors $Y = X \otimes X'$; pour toute fonction ψ décomposable sous la forme (2), on a :

$$\langle Y, \psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n,n'} a_{ij}\,\langle X, \varphi_i\rangle\,\langle X', \varphi_j'\rangle\ ;$$

l'inégalité de Hölder montre alors que :

$$[\mathbf{E}\{|\langle Y, \psi\rangle|^q\}]^{1/q} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n,n'} |a_{ij}|\,N(\varphi_i)\,N'(\varphi_j')\ ;$$

les formules (1) permettent d'écrire :

$$[\mathbf{E}\{|\langle Y, \psi\rangle|^q\}]^{1/q} \leqslant A^2 \sum_{i,j=1}^{n,n'} |a_{ij}|\,\sqrt{Q_m(\varphi_i)}\,\sqrt{Q_m(\varphi_i')}\ ;$$

l'inégalité de Cauchy majore le second membre par :

$$A^2\left[\left(\sum_{i,j=1}^{n,n'} |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Q_m(\varphi_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n'} Q_m(\varphi_j')\right)\right]^{1/2};$$

la relation (2) montre que le premier facteur du crochet est égal à $Q_{m+1}(\psi)$ et le lemme fondamental III.1.1 montre qu'il existe des nombres r et r' tels que les facteurs suivants soient majorés par r^{2d} et $r'^{2d'}$. On obtient finalement :

$$[\mathbf{E}\{|\langle Y, \psi\rangle|^q\}]^{1/q} \leqslant A^2 r^d r'^{d'} \sqrt{Q_{m+1}(\psi)}. \qquad (3)$$

Toute fonction χ appartenant à $\mathcal{D}(M \times M')$ à support dans L est limite d'une suite (ψ_n) de fonctions décomposables ; d'après (3), la suite $(\langle Y, \psi_n\rangle)$ est une suite de Cauchy dans $L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; elle converge presque sûrement vers $\langle Y, \chi\rangle$ donc cette limite appartient à $L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ par les critères classiques ; d'où le résultat.

COROLLAIRE. — *Soit p un entier $\geqslant 1$; pour que la distribution aléatoire X sur M ait un moment d'ordre p, il faut et il suffit que la distribution aléatoire $\overset{p}{\underset{1}{\otimes}} X = X \otimes \ldots \otimes X$ (p facteurs) sur M^p ait un moment d'ordre 1 ; la distribution à d.p variables qui définit l'espérance mathématique de $\overset{p}{\underset{1}{\otimes}} X$ définit aussi le moment d'ordre p de X.*

Démonstration. — La nécessité résulte du théorème généralisé par récurrence au cas de p distributions aléatoires ; la suffisance résulte de l'égalité :

$$\langle X, \varphi\rangle^p = \langle \overset{p}{\underset{1}{\otimes}} X, \overset{p}{\underset{1}{\otimes}} \varphi\rangle.$$

III.7.2. *Moments, convergence en loi et convergence presque sûre.*

THÉORÈME III.7.2. — *Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de distributions aléatoires possédant des moments du second ordre. On suppose que pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, l'espérance mathématique de $\langle X_n - X_m, \varphi\rangle^2$ tend vers zéro quand n et m tendent vers l'infini. On peut alors extraire une suite partielle (X_{n_k}) convergeant presque sûrement. Les différentes limites sont indiscernables.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les hypothèses (1) et (2) du théorème III.6.6 sont réalisées. La vérification de l'hypothèse (1) résulte immédiatement de l'inégalité :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \; |1 - \mathcal{L}_{X_n - X_m}(\varphi)| \leqslant \mathbf{E}\,[\langle X_n - X_m, \varphi\rangle^2]^{1/2}.$$

Il reste à vérifier l'hypothèse (2) : on pose :

$$V = \{ \varphi \in \mathcal{D} \mid \forall n, m \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{E}[\langle X_n - X_m, \varphi\rangle^2] \leqslant 1\}$$

V est fermé, convexe, équilibré ; il est aussi absorbant du fait de l'hypothèse sur $X_n - X_m$; c'est un tonneau dans l'espace tonnelé $\mathcal{D}$ ([4], p. 1), c'est donc un voisinage de zéro. Pour toute partie compacte K de M, par définition de la topologie de $\mathcal{D}_K$, il existe alors un entier $p \geqslant 0$ et un nombre réel A tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K, \ \forall n, m \in \mathbf{N} \int_K |\Lambda^p \varphi|^2 \leqslant \frac{1}{A} \Rightarrow \varphi \in V \Rightarrow \mathbf{E}[\langle X_n - X_m, \varphi\rangle^2] \leqslant 1 ;$$

on en déduit :

$$|1 - \mathcal{L}_{X_n - X_m}(\varphi)| \leqslant \left[A \int_K |\Lambda^p \varphi|^2 \right]^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{2\varepsilon} \int_K |\Lambda^p \varphi|^2 ;$$

d'où le résultat.

III.7.3. *Distributions aléatoires indépendantes et moments.*

DÉFINITION. — *Soient* M *un ouvert de* $\mathbf{R}^d$ *et* M′ *un ouvert de* $\mathbf{R}^{d'}$ *; on dit que deux distributions aléatoires* X *et* X′ *sur* M *et* M′ *respectivement sont indépendantes si pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}_M$ *et tout* $\varphi' \in \mathcal{D}_{M'}$*, les variables aléatoires* $\langle X, \varphi\rangle$ *et* $\langle X', \varphi'\rangle$ *sont indépendantes.*

Soient X et X′ deux distributions aléatoires indépendantes ; si leur produit tensoriel possède une espérance mathématique, elle s'exprime immédiatement à partir de leurs propres espérances ; réciproquement :

THÉORÈME III.7.3. — *Si deux distributions aléatoires ont une espérance mathématique et sont indépendantes, leur produit tensoriel a une espérance mathématique qui est le produit tensoriel des espérances mathématiques des facteurs.*

Démonstration. — Elle utilise les mêmes principes que celle du théorème III.7.1 : pour toute fonction ψ décomposable, on obtient :

$$\mathbf{E}\{|\langle Y, \psi\rangle|\} \leqslant A^2 r^d r^{d'} \sqrt{Q_{m+1}(\psi)} ;$$

le résultat d'existence s'ensuit.

Comme par ailleurs $\langle \mathbf{E}(Y), \psi\rangle$ et $\langle \mathbf{E}(X) \otimes \mathbf{E}(X'), \psi\rangle$ coïncident pour tout ψ décomposable, elles coïncident partout, d'où l'expression de $\mathbf{E}(Y)$.

On utilisera surtout le corollaire suivant :

COROLLAIRE III.7.3. — *Si deux distributions aléatoires* X *et* X′ *ont un moment d'ordre* 2 *et sont indépendantes, leur produit tensoriel a un moment d'ordre* 2.

Démonstration. — Les produits tensoriels $X \otimes X$ et $X' \otimes X'$ ont un moment d'ordre 1 (th. III.7.1) et sont indépendants ; leur produit tensoriel $(X \otimes X') \otimes (X \otimes X')$ a un moment d'ordre 1 (th. III.7.3); donc $X \otimes X'$ a un moment d'ordre 2 (cor. III.7.1).

III.7.4. *Moment du second ordre, extensions, transformations du second ordre.*

Soit X une distribution aléatoire sur un ouvert M de $\mathbf{R}^d$ possédant un moment du second ordre défini par la distribution $p(x, y)$; ce moment définit sur $\mathcal{D}(M)$ une forme quadratique positive p; soit $\mathcal{H}_p$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{D}(M)$ par rapport à p; l'application $\varphi \to \langle X, \varphi \rangle$ de $\mathcal{D}(M)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ s'étend en une isométrie de $\mathcal{H}_p$ sur un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Cette extension sera encore notée X; c'est *l'extension du second ordre de* X.

Soit de plus une application linéaire continue θ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}_p$; on peut former l'application $X\theta$ composée de l'extension du second ordre de X et de l'application θ; c'est une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; le théorème de Minlos et l'inégalité classique :

$$|1 - \mathcal{L}_Y(\varphi)|^2 \leqslant \mathbf{E}(\langle Y, \varphi \rangle^2),$$

montrent qu'il en existe une modification qui est une distribution aléatoire. Plus précisément, il existe, puisque $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}_p$, des suites $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'applications linéaires continues de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ telles que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, la suite $((\theta - t_n)(\varphi))_{n \in \mathbf{N}}$ converge fortement vers 0 dans $\mathcal{H}_p$; alors $(Xt_n - Xt_m)$ est une suite de distributions aléatoires qui vérifie les hypothèses III.7.2 comme on le voit à partir de la suite de ses moments. Il existe donc une suite partielle $(Xt_n)_{n \in J}$ presque sûrement convergente; les différentes limites indiscernables seront appelées *transformée du second ordre de* X *par* θ et notées $X\theta$; c'est une distribution aléatoire dont le moment du second ordre est $p(x, y)\, \theta_x\, \theta_y$.

III.7.5. *Application : produit de convolution du second ordre.*

Soient X et Y deux distributions aléatoires indépendantes sur $\mathbf{R}^d$ possédant des moments du second ordre définis respectivement par les distributions $p(x, y)$ et $q(x, y)$; leur produit tensoriel possède donc un moment du second ordre défini par la distribution $p \otimes q$. Si le produit de convolution $p * q$ est défini (au sens III.5.3), l'application $\varphi \to \theta \varphi$ définie par :

$$\theta \varphi(x, y) = \varphi(x + y) = \lim \alpha(x) \alpha(y) \varphi(x + y)$$

(la limite étant prise quand l'élément α de $\mathcal{D}$ tend vers 1 dans $\mathcal{E}$) est une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}_{p \otimes q}$ (III.5.3(2)). L'application transformée du second ordre de $X \otimes Y$ par θ est appelée *produit de convolution du second ordre* de X et de Y; c'est une distribution aléatoire notée $X * Y$ ayant $p * q$ pour moment du second ordre.

CHAPITRE IV

EXEMPLES DE DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES

1. Processus à accroissements orthogonaux.

IV.1.1. DÉFINITION. — *Soit un ouvert* M *de* $\mathbf{R}^d$; *on dit qu'une distribution aléatoire* X *sur* M *est un processus à accroissements orthogonaux si les conditions suivantes sont réalisées :*

(a) X *possède un moment du second ordre,*

(b) *Pour tout couple* (φ, ψ) *d'éléments de* $\mathcal{D}(\mathrm{M})$ *à supports disjoints, on a :*

$$\mathbf{E}\{\langle \mathrm{X}, \varphi \rangle \langle \mathrm{X}, \psi \rangle\} = 0.$$

On dit que la distribution aléatoire X *est à accroissements non correlés si* $\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X})$ *est un processus à accroissements orthogonaux.*

Exemple. — La fonction $\mathcal{L}_1$ définie sur $\mathcal{D}(\mathrm{M})$ par :

$$\mathcal{L}_1(\varphi) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\mathrm{M}} \varphi^2 \, dx},$$

est une fonction de type positif continue égale à 1 à l'origine (II.5.4). C'est la fonctionnelle caractéristique d'une distribution aléatoire X dont le moment d'ordre 2 existe et est défini par :

$$\mathbf{E}[\langle \mathrm{X}, \varphi \rangle \langle \mathrm{X}, \psi \rangle] = \int_{\mathrm{M}} \varphi \, \psi \, dx,$$

à cause du développement en série entière de $\dfrac{1}{1 + t^2}$.

C'est un processus à accroissements orthogonaux.

IV.1.2. *Caractérisation des moments du second ordre.*

Le moment du second ordre d'un processus à accroissements orthogonaux est une distribution à 2 d variables $p(x, y)$ possédant les propriétés suivantes :

(a) Pour tout élément φ de $\mathcal{D}$, $\langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle$ est positif ou nul.

(b) Pour tout couple (φ, ψ) d'éléments de $\mathcal{D}$ à supports disjoints, $\langle p, \varphi \otimes \psi \rangle$ est nul.

Réciproquement pour toute distribution p à $2d$ variables vérifiant (a) et (b), la fonction $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{D}$ par :

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle},$$

est la fonctionnelle caractéristique d'un processus à accroissements orthogonaux ayant p pour second moment.

PROPOSITION IV.1.2. — *Pour qu'une distribution à* 2*d variables soit le moment du second ordre d'un processus à accroissements orthogonaux, il faut et il suffit qu'elle vérifie les propriétés* IV.1.2 (a) *et* (b).

La propriété (b) montre que $\langle p, \chi \rangle$ est nul pour tout élément χ de $\mathcal{D}(M \times M)$ qui est limite dans $\mathcal{D}(M \times M)$ de fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) \psi_i(y)$ où pour tout i, les supports de φ_i et de ψ_i sont disjoints; p est donc nulle dans tout ouvert de la forme $U \times V$ où U et V sont disjoints; le support de p est alors contenu dans la diagonale de $M \times M$, si bien qu'on peut ([18], p. 101) écrire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle = \int_M \left(\sum_{k,l} D^k \varphi \, D^l \varphi \, dm_{k,l}\right), \tag{1}$$

où les $m_{k,l}$ sont des mesures dont les supports s'éloignent indéfiniment.

Exemple 1. — On pose :

$$\langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} (\varphi + \varphi'')^2 \, dx \,; \tag{2}$$

p vérifie les conditions (a) et (b); p peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} (\varphi^2 + \varphi''^2 - 2\,\varphi'^2)\, dx.$$

Cet exemple montre donc que pour une distribution de la forme (1) qui vérifie (a) et (b), les mesures $m_{k,\,l}$ ne sont pas nécessairement positives ni uniques.

Exemple 2. — Soient données une mesure positive $m(x, t)$ sur $\mathbf{R}^d \times [0,1]$ et une suite $(a_l(x, t))_{l \in \mathrm{L}}$, indexée par la famille des indices de dérivation, de fonctions de carrés m-intégrables telle que :

(2) Pour toute partie compacte K de M, les fonctions a_l sont nulles sur $\mathrm{K} \times [0,1]$ à l'exception d'un nombre fini d'entre elles. On pose :

$$\langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle = \iint \Big(\sum_l a_l(x, t)\ \mathrm{D}^l \varphi(x)\Big)^2 dm(x, t)\ ; \tag{3}$$

on vérifie immédiatement que p est une distribution qui vérifie (a) et (b). On va montrer dans l'alinéa suivant qu'en dimension 1 tout second moment d'un processus à accroissements orthogonaux a la forme (3).

IV.1.3. *Forme canonique des moments du second ordre (en dimension 1).*

THÉORÈME IV.1.3. — *Pour qu'une forme bilinéaire sur*

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}) \times \mathcal{D}(\mathbf{R})$$

soit le moment du second ordre d'un processus à accroissement orthogonaux il faut et il suffit qu'elle puisse s'écrire sous la forme (3) *de l'exemple* IV.1.2 (2).

Démonstration. — La suffisance a été indiquée en IV.1.2; on démontre la nécessité : on utilise pour cela deux lemmes.

LEMME IV.1.3 (1). — *Soient un ouvert* M *de* $\mathbf{R}^d$ *et un cône convexe fermé* C *de distributions vérifiant* IV.1.2 (a); *à tout* $x \in \mathrm{C}$, *on peut associer un sous-espace borélien* E_x *de* C *contenu dans la réunion* E *des génératrices extrémales de* C *et une mesure de probabilité* μ_x *portée par* E_x *ayant* x *pour centre de gravité, c'est-à-dire telle que :*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{M}),\quad \langle x, \varphi \otimes \varphi \rangle = \int_{\mathrm{E}_x} \langle e, \varphi \otimes \varphi \rangle\, d\mu_x(e).$$

Démonstration du lemme. — On note, suivant III.1.1, Λ l'opérateur de dérivation croisée dans $\mathcal{D}$.

Soit x un élément non nul de C; on lui associe une suite croissante $(K_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de compacts recouvrant M, l'intérieur de chacun coupant le support de x; puisque x est une distribution, il existe une suite $(m_i, M_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de couples d'entiers telle que pour tout entier i et tout élément φ de $\mathcal{D}_{K_i}$, on ait :

$$\langle x, \varphi \otimes \varphi \rangle \leqslant (M_i)^2 \int | \Lambda^{m_i} \varphi |^2 \, dx.$$

A tout entier i, on associe une base orthonormale de $\mathcal{D}_{K_i}$ pour Q_{m_i+1} ([4], p. 154) notée $(\varphi_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$; on a alors, d'après le lemme III.1.2,

$$0 < \sum_n \langle x, \varphi_{i,n} \otimes \varphi_{i,n} \rangle \leqslant (M_i)^2 \; r_i^2 ;$$

on pose :

$$f_i = \frac{\sum_n \varphi_{i,n} \otimes \varphi_{i,n}}{\sum_n \langle x, \varphi_{i,n} \otimes \varphi_{i,n} \rangle}$$

et

$$f_x = \sum_i \frac{1}{2^i} f_i \, .$$

La relation de Parseval et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrent alors que pour tout élément φ de $\mathcal{D}_{K_i}$ et tout élément y de C, on a :

$$\langle y, \varphi \otimes \varphi \rangle \leqslant \left(\int | \Lambda^{m_i} \varphi |^2 \, dx \right) 2^i \, (M_i)^2 \, r_i^2 \, f_x (y).$$

On a donc finalement construit une forme linéaire f_x sur $\mathcal{D}'(M \times M)$ semi-continue inférieurement sur C vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $f_x(x) = 1$,

(2) $\{ y \in C \mid f_x(y) \leqslant 1 \}$ est compact.

On applique maintenant le théorème de Choquet ([6]);

L'ensemble $\{ y \in C \mid f_x(y) \leqslant 1 \}$ est un compact métrisable dont les points extrémaux forment un G_δ contenu dans E; en particulier, la section des points extrémaux par $\{ y \mid f_x(y) = 1 \}$ est un sous-espace borélien E_x de C contenu dans E. Il existe une mesure de Radon positive de masse unité sur $\{ f_x(y) \leqslant 1 \}$ portée par E_x et ayant x pour centre de gravité. C'est aussi une mesure de probabilité sur l'espace standard C portée par E_x, d'où le résultat.

LEMME IV.1.3 (2). — *Soit un ouvert* M *de* $\mathbf{R}^d$; *l'ensemble* C *des distributions sur* $M \times M$ *vérifiant* IV.1.2 (a) *et* (b) *est un cône convexe fermé. Pour* $d = 1$, *la réunion* E *de ses génératrices extrémales est l'ensemble des carrés tensoriels de distributions à support réduit à un point appartenant à* M.

Démonstration du lemme. — Soient un élément x de C et un nombre λ; on note $\mathcal{H}_x$ l'espace de Hilbert complété de D par rapport à x, A_λ l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ ayant leur support dans $]-\infty, \lambda]$, $\mathcal{A}_\lambda$ son adhérence dans $\mathcal{H}_x$; l'espace $\mathcal{A}_\lambda$ étant un sous-espace fermé de $\mathcal{H}_x$, on peut former la projection P_λ de $\mathcal{H}_x$ dans $\mathcal{A}_\lambda$; on note q_λ la forme bilinéaire sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ définie par :

$$q_\lambda(\varphi, \psi) = \langle P_\lambda \varphi, P_\lambda \psi \rangle_{\mathcal{H}_x} .$$

On voit immédiatement que q_λ est continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$; d'après le théorème des noyaux, elle est donc définie par une distribution à 2 variables sur $M \times M$ qui vérifie évidemment IV.1.2 (a). On va prouver qu'elle vérifie aussi IV.1.2 (b) :

Soient φ et ψ à supports disjoints; l'un au moins des supports, celui de φ par exemple, ne contient pas λ; φ est alors la somme d'un élément φ_1 de A_λ et d'un élément φ_2 orthogonal à $\mathcal{A}_\lambda$; le support de φ_1 étant contenu dans celui de φ ne coupe pas celui de ψ; on a donc :

$$q_\lambda(\varphi, \psi) = \langle \varphi_1, \psi \rangle_{\mathcal{H}_x} = \langle x, \varphi_1 \otimes \psi \rangle = 0.$$

Ceci montre donc que q_λ vérifie les conditions IV.1.2 (a) et (b) et par suite est un élément de C. La distribution $q_\lambda(u, v)$ a d'ailleurs un support contenu dans $\{u = v \leqslant \lambda\}$ et $x - q_\lambda$ a un support contenu dans $\{ u = v \geqslant \lambda \}$.

Soit alors un point λ tel que les deux ensembles $\{ u = v < \lambda \}$ et $\{ u = v > \lambda \}$ coupent le support de x; on aura : $x = q_\lambda + (x - q_\lambda)$, les deux termes du second membre n'étant pas proportionnels puisqu'ils ont des supports différents; il en résulte que x n'est pas sur une génératrice extrémale : tout élément de E est donc à support ponctuel sur le diagonale de $M \times M$; la décomposition classique des formes quadratiques positives en somme de carrés donne alors le résultat du lemme.

Démonstration du théorème IV.1.3 :

Soit p une distribution sur $M \times M$ non nulle et vérifiant les propriétés IV.1.2 (a) et (b); les deux lemmes permettent d'écrire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle = \int_{E_p} \langle e, \varphi \otimes \varphi \rangle \, d\mu(e), \tag{3}$$

où tout élément de E_p est de la forme :

$$e = \sum_{k=0}^{q} a_k \, \delta_{x_0}^{(k)} \otimes \sum_{k=0}^{q} a_k \, \delta_{x_0}^{(k)} \tag{4}$$

Il s'agit maintenant de transformer l'expression abstraite (3) en l'expression plus élémentaire IV.1.2 (3). On va d'abord préciser la forme (4).

Soit une suite croissante (K_i) de compacts recouvrant M, l'intérieur de chacun d'eux coupant le support de p; la suite (m_i, M_i) étant définie comme dans le lemme, on voit que la relation $f_p(e) = 1$ où e est donnée par (4), entraîne, si x appartient à K_i :

$$\sum_n \left(\sum_{k=0}^{q} a_k \, D^k \varphi_{i,n}(x) \right)^2 \leqslant 2^i (M_i)^2 \, r_i^2 \; ;$$

la suite $(\varphi_{i,n})$ étant une base orthonormée pour Q_{m_i+1}, on en déduit :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{K_i}, \quad \left| \sum_{k=0}^{q} a_k \, D^k \varphi(x) \right|^2 \leqslant 2^i (M_i)^2 \, r_i^2 \, Q_{m_i+1}(\varphi) \; ;$$

Il en résulte immédiatement que q est nécessairement inférieur ou égal à m_i et que les a_k sont majorés par un nombre qui dépend de x mais non de e. Il existe donc une suite (q_n, M'_n) de couples de nombres entiers positifs telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle = \sum_n \int \left(\sum_{k=0}^{q_n} y_k \, D^k \varphi(x) \right)^2 d\mu_n(x, y_1, \ldots, y_{q_n})$$

où les mesures μ_n sont des mesures positives sur $M \times \mathbf{R}^{q_n}$, portées par les $K_n \times \{ |y_1| \leqslant M'_n, \ldots, |y_{q_n}| \leqslant M'_n \}$, dont la somme des normes est inférieure ou égale à 1. Par intégrations partielles, on peut alors écrire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle = \int \sum_{k,l=0}^{\infty} D^k \varphi(x) \, D^l \varphi(x) \, d\mu_{k,l}(x),$$

où les supports des $\mu_{k,l}$ s'éloignent à l'infini et où pour tout élément φ

de $\mathcal{D}$, l'expression à intégrer est positive ou nulle. En utilisant une mesure positive μ telle que chaque mesure $\mu_{k,l}$ soit de base μ, le second membre s'écrit :

$$\int \left[\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l}(x) \, \mathrm{D}^k \varphi(x) \, \mathrm{D}^l \varphi(x) \right] d\mu(x),$$

où les $a_{k,l}$ sont μ-intégrables, leurs supports s'éloignent à l'infini et le crochet est μ-presque partout positif pour tout φ. En utilisant une suite (φ_n) partout dense dans $\mathcal{D}$ et en remplaçant les $a_{k,l}$ par zéro en tout point x où le crochet est négatif pour l'un des φ_n, (ensemble de mesure nulle), on ne modifiera pas l'intégrale et le crochet sera partout positif pour tout φ. On peut alors l'écrire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}(x) \, \mathrm{D}^l \varphi(x) \right)^2 ;$$

où les $c_{k,l}$ sont des fonctions de carré μ-intégrable, nulles pour k ou l supérieur ou égal à q_n sur le compact K_n. Posant alors :

$$\nu = \sum_k \frac{1}{k^2} \delta_{1/k}, \quad \mu(x, t) = \mu(x) \otimes \nu(t),$$

on obtient le résultat du théorème.

IV.1.4. *Fonctions aléatoires à accroissements orthogonaux au sens classique.*

On rappelle qu'une fonction aléatoire f sur $\mathbf{R}$ ou sur un ouvert M de $\mathbf{R}$ est dite *à accroissements orthogonaux au sens classique* si pour tout couple (a, b), (a', b') d'intervalles disjoints, $f(b) - f(a)$ et $f(b') - f(a')$ sont orthogonaux. Les fonctions aléatoires à accroissements orthogonaux au sens classique et les distributions aléatoires à accroissements orthogonaux sont reliées par la proposition suivante :

Proposition IV.1.4. — *Pour qu'une fonction aléatoire f soit à accroissements orthogonaux au sens classique, il faut et il suffit que sa distribution dérivée f' soit une distribution aléatoire à accroissements orthogonaux dont le moment du second ordre p soit de la forme :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle p, \varphi \otimes \varphi \rangle = \int \varphi^2(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \tag{1}$$

où μ est une mesure positive portée par M.

Démonstration. — Si la fonction f est à accroissement orthogonaux au sens classique, il existe une fonction F sur M croissante telle que

$$\forall\, t \geqslant s \in \mathrm{M}, \quad \mathbf{E}\,\{|f(t) - f(s)|^2\} = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(s), \quad \mathrm{F}(0) = 0;$$

on a alors, pour tout élément φ de $\mathcal{D}(\mathrm{M})$:

$$\mathbf{E}\,\{\langle f', \varphi\rangle^2\} = \mathbf{E}\,\{\langle f, \varphi'\rangle^2\} = \int \varphi^2(t)\,\mathrm{dF}(t), \quad ([9], \text{ ch. } 9).$$

Le moment du second ordre de f' vérifie les propriétés IV.1.2 (a) et (b) ; f' est bien à accroissement orthogonaux et son moment du second ordre a la forme (1).

Réciproquement, soit X une distribution aléatoire possédant un moment p du second ordre de la forme (1) ; l'application θ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ définie par :

$$\theta\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{x} \varphi(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pour } x < 0,$$

$$\theta\varphi(x) = \int_{x}^{+\infty} \varphi(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pour } x \geqslant 0,$$

et donc

$$\theta\varphi' = -\varphi,$$

est une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}_p = \mathrm{L}^2(\mu)$. Le processus Y transformé du second ordre (III.7.4) a pour dérivée la distribution aléatoire X et pour moment du second ordre la distribution fonction $\mathrm{G}(x, y)$ définie par :

$$\mathrm{G}(x, y) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } xy \leqslant 0, \\ -\ \mathrm{F}(\sup(x, y)) \ \text{ si } x < 0,\ y \leqslant 0, \\ +\ \mathrm{F}(\inf\ (x, y)) \ \text{ si } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

où la fonction F est la fonction nulle à l'origine, croissante, dont la dérivée distribution est la mesure.

On voit alors que pour tout point de continuité x_0 de F, chaque suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant vaguement au sens des mesures vers ε_{x_0} est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}_\mathrm{G}$; elle converge dans $\mathcal{H}_\mathrm{G}$ et si on appelle $\mathrm{Y}(x_0)$ la limite (au sens de l'extension du second ordre), on a :

$$\mathbf{E}\,[|\mathrm{Y}(x_0) - \mathrm{Y}(y_0)|^2] = |\mathrm{F}(x_0) - \mathrm{F}(y_0)|\ ;$$

c'est-à-dire que Y est une fonction aléatoire à accroissements orthogonaux au sens classique.

IV.1.5. *Intégrales aléatoires* (en dimension 1). — Soient une distribution aléatoire X à accroissements orthogonaux et son extension du second ordre (III.7.5). Si le moment du second ordre de X est défini par une mesure μ (IV.1.4 (1)), cette extension est une isométrie de $L^2(\mu)$ sur un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On note cette application

$$\{F \to \int_M F(x)\, X(x)\, dx\}.$$

Lorsque X est la dérivée d'une fonction aléatoire f à accroissements orthogonaux au sens classique (prop. IV.1.4), on obtient l'intégrale aléatoire de Ito $\int F(x)\, df(x)$.

2. Processus stationnaires.

IV.2.1. Définitions, caractérisations. — *On dit qu'une distribution aléatoire* X *sur* $\mathbf{R}^d$ *et un processus stationnaire si pour tout élément* h *de* $\mathbf{R}^d$, *sa translatée par* h $\delta_h * X$ *est une distribution aléatoire de même loi.*

La génération de $\mathcal{B}(\mathcal{D}')$ par les demi-espaces ouverts montre qu'un processus stationnaire est une distribution aléatoire X telle que pour tout élément h de $\mathbf{R}^d$ et tout élément φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, la φ-marge et la $(\delta_h * \varphi)$-marge de X (mesures de probabilité sur $\mathbf{R}$) soient identiques. Pour toute famille Φ de p éléments de $\mathcal{D}$ et tout élément h de $\mathbf{R}^d$, la Φ-marge et la $(\delta_h * \Phi)$-marge de X (mesures de probabilité sur $\mathbf{R}^p$) sont identiques.

La détermination de la loi d'une distribution aléatoire à partir de sa fonctionnelle caractéristique montre qu'un processus stationnaire est une distribution aléatoire X telle que pour tout élément h de $\mathbf{R}^d$ et tout élément φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{L}_X(\varphi)$ soit égal à $\mathcal{L}_X(\delta_h * \varphi)$.

IV.2.2. *Moments d'un processus stationnaire :* Soit un processus stationnaire X sur $\mathbf{R}^d$ possédant un moment d'ordre entier $p \geqslant 1$; ce moment est défini par une distribution $H_p(x_1, ..., x_p)$ à p variables appartenant à $\mathbf{R}^d$ et on déduit de (IV.2.1) que pour tout élément h de $\mathbf{R}^d$, si on appelle h_p l'élément de $(\mathbf{R}^d)^p$ dont les p projections sont égales à h, on a :

$$\delta_{h_p} * H_p = H_p.$$

Soit alors K_p la distribution composée de H_p par le changement de variables :

$$x_1 = y_1, \quad x_2 - x_1 = y_2, \ldots, x_p - x_1 = y_p \,;$$

elle est invariante par toute translation parallèle au premier axe et est donc indépendante de y_1. Ceci signifie qu'il existe une distribution $L_p(y_2, \ldots, y_p)$ à $(p-1)$ variables appartenant à $\mathbf{R}^d$ telle que :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}((\mathbf{R}^d)^p), \quad \langle H_p, \varphi\rangle = \langle L_p, \textstyle\int \varphi(y_1, y_2 + y_1, \ldots, y_p + y_1)\, dy_1\rangle.$$

Dans les cas particuliers $p = 1$, $p = 2$, ceci s'énonce :

PROPOSITION IV.2.2. : *L'espérance mathématique d'un processus stationnaire* X *sur* $\mathbf{R}^d$ *est une constante* k*; son moment d'ordre* 2 *est défini par une distribution* C *de type positif à* d *variables :*

$$\mathbf{E}[\langle X, \varphi\rangle] = k \int \varphi\, dx,$$

$$\mathbf{E}[\langle X, \varphi\rangle \langle X, \psi\rangle] = \langle C, \varphi * \check{\psi}\rangle \quad \text{où} \quad \check{\psi}(x) = \psi(-x).$$

IV.2.3. *Opérations et processus stationnaires :* Soient deux distributions aléatoires indépendantes X et Y sur $\mathbf{R}^d$, X étant stationnaire ; pour tout $h \in \mathbf{R}^d$, $\delta_h * X$ et Y sont encore indépendantes et les couples (X, Y) et $(\delta_h * X, Y)$ ont donc même loi. Il en résulte :

PROPOSITION IV.2.3. — *Le produit tensoriel* $\bigotimes_1^n X_i$ *des processus stationnaires* $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ *indépendants sur* $\mathbf{R}^{d_i}$ *respectivement est un processus stationnaire sur* $\mathbf{R}^d$ $(d = \sum_1^n d_i)$. *Le produit de convolution* $X * Y$ *de facteurs indépendants sur* $\mathbf{R}^d$, X *étant stationnaire, est un processus stationnaire quand il est défini* (cf. th. III.5.3 et th. III.7.4).

En appliquant la proposition à un couple (X, Y) dont le second élément n'est pas aléatoire, on obtient :

COROLLAIRE IV.2.3. — *Le produit de convolution d'un processus stationnaire et d'une distribution est un processus stationnaire ; en particulier, les dérivées et les translatées des processus stationnaires, sont des processus stationnaires.*

3. Processus Gaussiens.

IV.3.1. DÉFINITION. — *On dit qu'une distribution aléatoire* X *sur un ouvert* M *de* $\mathbf{R}^d$ *est un processus Gaussien si pour tout élément* φ *de* $\mathcal{D}$ (M), *la variable aléatoire* $\langle X, \varphi\rangle$ *est une variable Gaussienne.*

Les propriétés élémentaires des variables aléatoires numériques Gaussiennes montrent alors que pour une distribution aléatoire X soit un processus Gaussien, il faut et il suffit que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \mathcal{L}_X(\varphi) = \exp\left[i\langle \mathbf{E}, \varphi\rangle - \frac{1}{2}\langle C, \varphi \otimes \varphi\rangle\right],$$

où la distribution $\mathbf{E}$ est l'espérance mathématique de X et où la distribution de type positif C est sa covariance.

La proposition IV.2.2 permet de caractériser les processus Gaussiens définis sur $\mathbf{R}^d$ stationnaires : ce sont ceux dont l'espérance mathématique est une constante et dont la covariance est définie par une distribution de type positif à d variables (formules IV.2.2).

IV.3.2. *Transformations de processus Gaussiens.*

On utilise les deux principes suivants :

Principe de transformation presque sûre : Soient donnés un ouvert M de $\mathbf{R}^d$, un ouvert M_1 de $\mathbf{R}^{d_1}$, et une application linéaire continue t de $\mathcal{D}(M_1)$ dans $\mathcal{D}$ (M) ; à tout processus Gaussien X sur M, on associe la distribution aléatoire X_1 sur M_1, image de X par la transposée de t ; pour tout élément φ_1 de $\mathcal{D}(M_1)$, on a :

$$\langle X_1, \varphi_1\rangle = \langle X, t\,\varphi_1\rangle.$$

X_1 est donc un processus Gaussien.

Principe de transformation en loi : Soient donnés un ouvert M de $\mathbf{R}^d$, un ouvert M_1 de $\mathbf{R}^{d_1}$, et un processus Gaussien X sur M ; soient Γ le moment d'ordre 2 de X et $\mathcal{H}_\Gamma$ l'espace de Hilbert associé (III.7.4) ; à toute application linéaire continue θ de $\mathcal{D}(M_1)$ dans $\mathcal{H}_\Gamma$, on associe la distribution aléatoire X_1 transformée du second ordre de X par θ. Pour tout élément φ_1 de $\mathcal{D}(M_1)$, on a alors :

$$\langle X_1, \varphi_1\rangle = \langle X, \theta\varphi_1\rangle$$

où le second membre est entendu au sens de l'extension du second ordre de X. Toute limite en loi de variables aléatoires Gaussiennes numériques étant Gaussienne, la distribution aléatoire X_1 est un processus Gaussien.

Exemples d'applications :

(a) *Intégration presque sûre par rapport à une coordonnée :* On pose $M = M_1 = \mathbf{R}^d$; soient un élément φ_0 de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ tel que $\int \varphi_0(\sigma)\, d\sigma = 1$ et l'application t de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ définie par :

$$(t \cdot \varphi)(x_1, \ldots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \left[\varphi_0(\sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau, x_2, \ldots, x_d)\, d\tau - \varphi(\sigma, x_2, \ldots, x_d) \right] d\sigma.$$

Pour tout processus Gaussien X sur $\mathbf{R}^d$, le processus Gaussien X_1 défini par le premier principe est la primitive par rapport à x_1 du processus X s'annulant en tout élément φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ qui est de la forme :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_d) = \varphi_0(x_1)\, \psi(x_2, \ldots, x_d).$$

(b) *Intégration en loi par rapport à une coordonnée :* On pose $M = M_1 = \mathbf{R}$; soient un processus Gaussien X sur $\mathbf{R}$ et son moment du second ordre Γ ; on suppose qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a, +a]}, \Gamma(\varphi, \varphi) \leqslant M \int \varphi^2(\sigma)\, d\sigma.$$

Pour tout élément φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, on pose :

$$(\theta\varphi)(x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(\tau)\, d\tau, & x < 0, \\ +\displaystyle\int_{x}^{+\infty} \varphi(\tau)\, d\tau, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

L'application θ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{H}_\Gamma$. Le processus Gaussien X_1 défini par le second principe est la primitive de X dont l'extension du second ordre s'annule sur ε_0 (s'annule à l'origine).

IV.3.3. *Représentations des processus Gaussiens.*

THÉORÈME IV.3.3 a. — *Soient un processus Gaussien* X *sur un ouvert* M *de* $\mathbf{R}^d$ *d'espérance mathématique nulle et son moment du second ordre* Γ ; *soit* $\mathcal{H}_\Gamma$ *l'espace hilbertien associé à* $\mathcal{D}$ *et* Γ ; *si* (φ_n) *est une base* *orthonormale de $\mathcal{H}_\Gamma$ et si (λ_n) est une suite de variables aléatoires Gaussiennes numériques normalisées de même espace d'épreuves et indépendantes, la série $\sum_n \lambda_n \varphi_n$ converge en loi vers* X.

Démonstration. — Elle résulte immédiatement de l'expression des fonctionnelles caractéristiques des sommes partielles de la série et du théorème III.6.5.

Le théorème ci-dessus est un théorème de représentation en loi. En fait le théorème III.7.2 permet de montrer qu'on peut extraire de la suite des sommes partielles une sous-suite convergeant presque sûrement, les différentes limites étant indiscernables et de même loi que X. Plus précisément :

THÉORÈME IV.3.3 b. — *Si (φ_n) est une base orthonormale de $\mathcal{H}_\Gamma$, la suite $(\langle X, \varphi_n \rangle)$ au sens de l'extension du second ordre est une suite de variables aléatoires Gaussiennes numériques normalisées de même espace d'épreuves et indépendantes. De plus on peut extraire de la suite des sommes partielles de la série $\sum_n (\langle X, \varphi_n \rangle) \varphi_n$ une sous-suite convergeant presque sûrement, les différentes limites étant indiscernables de* X.

IV.3.4. *Exemples :*

(a) Sur $\mathbf{R}^d$, on pose $\mathcal{L}_B(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int \varphi^2(s)\, ds\right)$; tout processus de loi B est appelé distribution de Wiener sur $\mathbf{R}^d$. On peut le décomposer sur toute base orthonormale de L^2 (IV.3.3). C'est un processus Gaussien stationnaire à accroissement orthogonaux.

(b) Sur $\mathbf{R}$, on peut calculer la primitive de la distribution de Wiener nulle à l'origine (IV.3.2). On obtient un processus W de loi :

$$\mathcal{L}_W(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\iint h(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy\right),$$

où $h(x, y)$ est défini par (IV.2.1) :

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } xy \leqslant 0, \\ -\sup(x, y) \text{ si } x < 0,\ y < 0, \\ +\inf(x, y) \text{ si } x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Un tel processus est une fonction aléatoire à accroissement orthogonaux au sens classique (IV.1.4) qui est appelée fonction aléatoire de Wiener ; ses différentes décompositions se déduisent par intégration de celles de B. Ses propriétés de continuité sur [0, 1] se déduiront par exemple ([16]) de la représentation de la restriction de B à [0, 1] sur la base orthonormale de Haar.

(c) Soit Γ une forme quadratique définie positive continue sur $L^2(\mathbf{R}^d) \times L^2(\mathbf{R}^d)$; elle définit un opérateur symétrique positif borné sur $L^2(\mathbf{R}^d)$; soit G la racine carrée symétrique positive de cet opérateur ; G définit une application linéaire continue θ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ dans $L^2(\mathbf{R}^d)$. La transformée du second ordre de B par θ a pour loi :

$$\mathcal{L}(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\Gamma(\varphi, \varphi)\right).$$

Plus généralement, la nature sur tout compact des distributions de type positif sur $\mathbf{R}^{2d}$ montre que tout processus Gaussien sur $\mathbf{R}^d$ est localement la transformée du second ordre d'une dérivée de B par une application θ de ce type.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, Livre 3, Ch. 1 et 2, 3e édition, Hermann, Paris (1958).

[1*a*] N. Bourbaki, op. cit., 2e édition, Hermann, Paris (1951).

[2] N. Bourbaki, op. cit., Livre 3, Ch. 9, 2e édition (1958).

[3] N. Bourbaki, op. cit., Livre 5, Ch. 1.2, 2e édition (1952).

[4] N. Bourbaki, op. cit., Livre 5, Ch. 3.4, 2e édition (1955).

[5] N. Bourbaki, op. cit., Livre 6, Ch. 1.2, 2e édition (1955).

[6] G. Choquet, *Ann. Inst. Fourier*, 10 (1960), 333-344.

[7] J. Delporte, Thèse, Lille (1963).

[8] J. Dieudonné et L. Schwartz, *Ann. Inst. Fourier*, 1 (1949), 61-101.

[9] J. L. Doob, Stochastics Processes, J. Wiley, New-York (1953).

[10] X. Fernique, *C.R. Acad. Sc.*, 256 (1963), 5274-5275.

[11] X. Fernique, *C.R. Acad. Sc.*, 258 (1964) 6058-6060.

[12] X. Fernique, *C.R. Acad. Sc.*, 261 (1965), 3949-3950.

[13] I. M. Gelfand, *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 100 (1955), 853.

[14] M. Loeve, Probability Theory, Van Nostrand, New-York (1960).

[15] R. A. Minlos, *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 119 (1958), 439-442.

[16] J. NEVEU, Bases Mathématiques du Calcul de probabilité, Masson, Paris (1964).

[17] Yu. V. PROHOROV, Convergence of random processes and limit theorems, *Th. Prob. Appl.* 1 (1956), 157-214.

[18] L. SCHWARZ, Théorie des distributions, tome 1, 2e édition, Hermann, Paris (1957).

[19] L. SCHWARTZ, op. cit., tome 2, 1re édition, Paris (1951).

Xavier FERNIQUE,

Département de Mathématique
Université de Strasbourg
2, rue Goethe,
67 - Strasbourg

(*Thèse, Fac. Sciences, Strasbourg,* 1966)