Annales de l'institut Fourier

Nachman Aronszajn

Potentiels besséliens

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n° 1 (1965), p. 43-58
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_43_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 43-58.

POTENTIELS BESSELIENS

par Nachman ARONSZAJN

On donne une revue des propriétés de certaines classes des potentiels besseliens dans R^n. On obtient leurs définitions directes (ne faisant pas appel à leurs représentations comme potentiels). On étudie leurs restrictions à certains sous-ensembles de R^n, notamment aux hyperplans k-dimensionnels et aux sous ensembles ouverts. On omet ici, par manque d'espace, la question des restrictions aux sous-variétés différentiables.

L'étude détaillée de ces classes de potentiels est justifiée par leur importance dans les problèmes différentiels, en particulier ceux du type elliptique.

Les démonstrations sont omises. Autant que possible on refère aux articles parus ou à paraître prochainement.

1. Notions, conventions et remarques préliminaires.

Le noyau besselien d'ordre $\alpha > 0$ dans R^n est donné par la fonction

$$(1.1)\quad G_\alpha(x) \equiv G_\alpha^{(n)}(x) = \frac{1}{2^{(n+\alpha-2)/2}\pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)} K_{(n-\alpha)/2}(|x|)|x|^{(\alpha-n)/2},$$

où K_ν est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce [2], [4]. La transformée de Fourier de G_α est donnée par

$$(1.1')\qquad G_\alpha(\xi) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}}.$$

Pour une fonction $f \in L^1_{loc}(R^n)$ (ou une mesure de Borel μ dans R^n) nous définissons le potentiel $G_\alpha f$ (ou $G_\alpha\mu$) par la formule

$$(1.2)\qquad \begin{gathered}(G_\alpha f)(x) = \int_{R^n} G_\alpha(x-y)f(y)\,dy \\ (\text{ou } (G_\alpha\mu)(x) = \int_{R^n} G_\alpha(x-y)\,d\mu(y)).\end{gathered}$$

Le potentiel est défini pour le point x si l'intégrale existe et est finie. Les points x où le potentiel n'est pas défini forment l'ensemble exceptionnel du potentiel. Le potentiel de f (ou μ) existe s'il est défini en un point au moins; alors il est défini p.p. et localement intégrable. Pour que le potentiel existe il est nécessaire et suffisant que

$$\text{(1.3)} \qquad \int (1 + |x|)^{(\alpha-n-1)/2} e^{-|x|} |f(x)|\, dx < \infty \quad \left(\text{ou} \int (1 + |x|)^{(\alpha-n-1)/2} e^{-|x|} |d\mu(x)| < \infty\right).$$

G_α peut être considéré comme un opérateur transformant la classe de fonctions (ou mesures) définie par (1.3) en une classe de fonctions qui seront appelées *potentiels d'ordre* α.

D'autre part, la convolution avec G_α a un sens pour toute distribution tempérée (pour le voir, il n'y a qu'à passer aux transformées de Fourier). L'opérateur G_α devient ainsi un automorphisme de $\mathscr{S}'$. L'opérateur G_0 est, de ce point de vue, considéré comme l'identité et l'automorphisme inverse à G_α, $\alpha > 0$, est dénoté par $G_{-\alpha}$. De cette manière les opérateurs G_α, $-\infty < \alpha < \infty$, forment un groupe continu a un paramètre. Quand on considèrera G_α comme un opérateur dans $\mathscr{S}'$ on le notera G_α^d et l'appellera *d-potentiel* (d'ordre α).

Tout potentiel est une distribution. Si la mesure μ satisfait à (1.3), et est une distribution tempérée, alors $G_\alpha\mu = G_\alpha^d\mu$ (l'égalité au sens des distributions). Si μ et ν sont deux mesures satisfaisant à (1.3), alors $G_\alpha\mu = G_\alpha\nu$ p.p. si et seulement si $\mu = \nu$.

On note $C(x, r)$ un cube de centre x et de côté r. Pour une fonction localement intégrable u, on définit la fonction corrigée u^c par

$$\text{(1.4)} \qquad u^c(x) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{C(x,r)} u(y)\, dy\text{[1]}.$$

Il est bien connu que $u^c(x)$ existe et est égale à $u(x)$, p.p. L'ensemble des x où $u^c(x)$ n'est pas défini et fini est l'ensemble exceptionnel de u^c. Une fonction u est dite une fonction corrigée si $u(x) = u^c(x)$ en dehors de l'ensemble exceptionnel de u^c. Le fait important pour nous est que la fonction corrigée de tout potentiel besselien est une extension de ce potentiel. De plus, pour un potentiel de mesure (ou fonction) non-négative, sa fonction corrigée lui est égale.

[1] Plus généralement on peut considérer une fonction bornée, mesurable, φ, s'annulant en dehors d'un compact, telle que $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y)\, dy = 1$, et définir la fonction corrigée par φ:

$$u^\varphi(x) = \lim_{r=0} \frac{1}{r^n} \int \varphi\left(\frac{x-y}{r}\right) u(y)\, dy.$$

On considèrera dans la suite des potentiels d'une classe linéaire $\mathfrak{F}$ de fonctions satisfaisant à (1.3). Les potentiels $G_\alpha f, f \in \mathfrak{F}$ forment une classe linéaire fonctionnelle relative à la classe exceptionnelle d'ensembles $\mathfrak{A}$ qui est la plus petite classe héréditaire et σ-additive contenant tous les ensembles exceptionnels des $G_\alpha f$. On sait que pour α fixe toutes ces classes exceptionnelles $\mathfrak{A}$ sont contenues dans une classe qui était désignée dans [2] par $\mathfrak{A}_\alpha$ (dans la notation acceptée plus loin, ce sera $\mathfrak{A}^{\alpha/2,2}$). On considère la classe fonctionnelle $G_\alpha(\mathfrak{F})$ ainsi obtenue comme une classe saturée rel. $\mathfrak{A}$ (c'est-à-dire qu'on lui adjoindra toute fonction qui est égale à une fonction $G_\alpha f, f \in \mathfrak{F}$, en dehors d'un ensemble de $\mathfrak{A}$). Pour $u \in G_\alpha(\mathfrak{F})$, la fonction corrigée u^c y appartient aussi et $u(x) = u^c(x)$ exc. $\mathfrak{A}$([2]).

Souvent on sature la classe $G_\alpha(\mathfrak{F})$ rel. $\mathfrak{A}_0$ où $\mathfrak{A}_0$ est la classe des ensembles de mesure nulle de Lebesgue; la classe $G_\alpha(\mathfrak{F})$ ainsi élargie sera dénotée $G_\alpha^d(\mathfrak{F})$ (même que $\mathfrak{F}$ puisse ne pas être $\subset \mathcal{S}'$!). Les classes d'équivalence de $G_\alpha^d(\mathfrak{F})$ rel. $\mathfrak{A}_0$ sont donc des distributions et chacune de ces classes contient une et une seule des classes d'équivalence de $G_\alpha(\mathfrak{F})$ rel. $\mathfrak{A}$.

La classe $G_\alpha^d(\mathfrak{F})$ apparaît comme plus facile à opérer puisqu'elle n'exige pas la détermination de la classe exceptionnelle $\mathfrak{A}$. Pourtant, si l'on veut parler des restrictions des fonctions aux sous-ensembles de R^n appartenant à $\mathfrak{A}_0$, il est essentiel de considérer la classe $G_\alpha(\mathfrak{F})$. D'autre part, même si l'on ne connaît pas la classe $\mathfrak{A}$, on est sûr qu'une fonction appartient à $G_\alpha(\mathfrak{F})$ si c'est une fonction corrigée appartenant à $G_\alpha^d(\mathfrak{F})$.

2. Les classes de fonctions-distributions L_α^p, $\tilde{\mathcal{B}}^{\alpha,p}$, et W_p^α.

Les espaces en question sont des espaces de Banach. L'ordre α et l'exposant p satisfont aux conditions $\alpha \geqq 0$, $1 \leqq p \leqq \infty$.

L_α^p, $a \geqq 0 : L_\alpha^p(R^n) = G_\alpha^d(L^p(R^n))$; pour $u \in L_\alpha^p(R^n)$,

$$(2.1) \qquad \|u\|_{\alpha,p} = \|G_{-\alpha}^d u\|_{L_p}.$$

$\tilde{\mathcal{B}}^{\alpha,p}$, $\alpha > 0$ ($\tilde{\mathcal{B}}^{0,p}$ sera défini dans la remarque 4): $u \in \tilde{\mathcal{B}}^{\alpha,p}(R^n)$ si $u \in L^p(R^n)$ et la norme $\|u\|_{\alpha,p,k}$, définie par la formule qui suit, est finie pour un entier $k > \alpha$.

$$(2.2) \qquad \|u\|_{\alpha,p,k}^p = \|u\|_{L^p}^p + \int_{R^n}\int_{R^n} \big|\,|t|^{-\alpha}\Delta_t^k u(x)\big|^p |t|^{-n}\, dx\, dt,$$

([2]) Exc. $\mathfrak{A}$ veut dire en dehors d'un ensemble de $\mathfrak{A}$.

où $\Delta_t^k u$ est la k-ième différence de $u(\Delta_t^1 u \equiv \Delta_t u = u(x+t) - u(x))$. Pour α et p fixés, les normes $\|u\|_{\alpha,p,k}$, pour tous les entiers $k > \alpha$, sont, deux à deux, équivalentes.

W_p^α, $\alpha \geqq 0$: on introduit $m = [\alpha]$, $\beta = \alpha - m$, donc $0 \leqq \beta < 1$. $u \in W_p^\alpha(R^n)$ si $D_i u \in L^p(R^n)$ pour toutes les dérivées d'ordre $|i| \leqq m$ et si la norme, $|u|_{\alpha,p}$, définie par la formule suivante est finie.

(2.3)

Pour $\alpha = m$ *entier*, $|u|_{m,p}^p = \sum_{|i| \leqq m} \|D_i u\|_{L^p}^p$,

Pour α *non-entier*,

$$|u|_{\alpha,p}^p = \sum_{|i| \leqq m} \left[\|D_i u\|_{L^p}^p + \int_{R^n} \int_{R^n} \left| \frac{D_i u(x) - D_i u(y)}{|x-y|^\beta} \right|^p \frac{dx\,dy}{|x-y|^n} \right] (^3).$$

Remarque 1. — Les espaces L_α^p et leur notation ont été introduits par A. P. Calderon [6]. Les espaces $\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p}$ sont un cas particulier d'une classe des espaces introduits par O. V. Besov [5]. Les espaces W_p^α ont été introduits pour α entier par S. L. Sobolev, pour α non-entier par E. Gagliardo [9] et L. E. Slobodetsky [15].

Les propriétés suivantes ont été obtenues par plusiers auteurs par des méthodes bien différentes (voir [4], [5], [6], [13], [19], [20]).

$$(2.4) \begin{cases} \text{Pour } \alpha \text{ non-entier, } W_p^\alpha = \tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p}, \\ \text{Pour } \alpha \text{ entier et } 1 < p < \infty,\ W_p^\alpha = L_\alpha^p. \end{cases}$$

$$(2.5) \begin{cases} \tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p} \subset L_\alpha^p \text{ pour } 1 \leqq p \leqq 2,\ \tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p} \supset L_\alpha^p \text{ pour } 2 \leqq p \leqq \infty, \\ W_p^\alpha \subset L_\alpha^p \text{ pour } 1 \leqq p \leqq 2,\ W_p^\alpha \supset L_\alpha^p \text{ pour } 2 \leqq p \leqq \infty. \end{cases}$$

(2.6) Pour $\alpha > \alpha'$, $L_\alpha^p \cup \tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p} \cup W_p^\alpha \subset L_{\alpha'}^p \cap \tilde{\mathscr{B}}^{\alpha',p} \cap W_p^{\alpha'}$.

(2.7) Pour $p = 2$, $L_\alpha^2 = \tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,2} = W_2^\alpha$.

(2.8) Pour $\alpha > -\gamma, \gamma > 0$, $G_\alpha^d(L_\gamma^p) = L_{\alpha+\gamma}^p$, $G_\alpha^d(\tilde{\mathscr{B}}^{\gamma,p}) = \tilde{\mathscr{B}}^{\alpha+\gamma,p}$.

Remarque 2. — Puisque tous nos espaces sont des espaces fonctionnels de Banach rel. $\mathfrak{A}_0$, si l'un est inclus dans l'autre (comme dans (2.5) et (2.6)), l'immersion est nécessairement continue. Si deux espaces sont égaux comme dans (2.4) et (2.7) les normes sont équivalentes. Aussi l'isomorphisme G_d^α dans le cas (2.8) est bi-continu.

(3) Ici les dérivées sont prises au sens des distributions. On peut définir une autre norme $|u|_{\alpha,p}$ (voir [4]) appelée norme « standard » de forme plus compliquée, équivalente à celle donnée ici et qui aura les propriétés additionnelles suivantes: 1°) pour $p = 2$, elle coïncide avec la norme $\|u\|_{\alpha,2}$; 2°) elle ne dépend pas du choix des coordonnés dans R^n; 3°) $|u|_{\alpha,p}$, pour u et p fixés, est une fonction continue de α.

Remarque 3. — La propriété (2.4) semblerait indiquer que les espaces W_p^α sont essentiellement superflus (ils coïncident avec L_α^p ou $\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p}$ sauf pour α entier positif et $p = 1$ ou ∞). Pourtant, quand nous passerons à l'étude des restrictions aux sous-domaines de R^n, l'importance de W_p^α apparaîtra bien clairement.

Remarque 4. — En vertu de (2.8) on peut définir $\tilde{\mathscr{B}}^{0,p} = G_{-\alpha}^d(\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p})$. $\tilde{\mathscr{B}}^{0,p}$ est indépendant de α; c'est une classe linéaire des distributions tempérées. La propriété (2.5) montre que $\tilde{\mathscr{B}}^{0,p} \subset L^p$ pour $1 \leqq p \leqq 2$ et $\tilde{\mathscr{B}}^{0,p} \supset L^p$ pour $2 \leqq p \leqq \infty$.

Remarque 5. — Les classes $G_\alpha^d(W_p^\gamma)$ sont bien déterminées par les formules (2.4) et (2.8) sauf pour γ entier positif et $p = 1$ ou ∞. Dans ces cas exceptionnels on n'a pas beaucoup d'information sur ces classes en dehors des inclusions résultant de (2.5) et (2.6).

Le théorème suivant utilise l'interpolation complexe introduite par A. P. Calderon [7] et J. Lions [12].

THÉORÈME I. — *Pour* $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, L_α^p *(ou* $\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p}$*) est un espace d'interpolation par la méthode complexe entre* $L_{\alpha_1}^p$ *et* $L_{\alpha_2}^p$ *(ou* $\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha_1,p}$ *et* $\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha_2,p}$*).*

3. Les espaces de potentiels $P^{\alpha,p}$, $B^{\alpha,p}$ et $\check{P}^{\alpha,p}$.

En vertu de (2.6) les classes L_α^p, $\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p}$, et W_p^α sont des classes de potentiels-distributions $G_{\alpha'}^d$ des fonctions dans $L^p(R^n)$ pour $\alpha' < \alpha$. Puisque les fonctions $L^p(R^n)$ satisfont à la condition (1.3) pour tout α', il s'ensuit que chacune des classes L_α^p, $\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p}$, et W_p^α détermine une classe de potentiels que nous désignerons par $P^{\alpha,p}$, $B^{\alpha,p}$, et $\check{P}^{\alpha,p}$ respectivement. Cette définition pour $\check{P}^{\alpha,p}$ sera limitée au cas de α non-entier ou de α entier et $p > 1$; les cas exclus seront considérés dans la remarque 6. Les classes exceptionnelles correspondantes seront notées $\mathfrak{A}^{\alpha,p}$, $\mathfrak{B}^{\alpha,p}$, et $\check{\mathfrak{A}}^{\alpha,p}$. Ces classes de potentiels sont obtenues en prenant les fonctions corrigées dans les classes des fonctions-distributions correspondantes, et les classes exceptionnelles sont obtenues comme les plus petites classes héréditaires et σ-additives contenant les ensembles exceptionnels des fonctions corrigées en question.

THÉORÈME II. — *Pour* $\alpha > 0$, *et* $\alpha p > n$, $P^{\alpha,p}$, $B^{\alpha,p}$, *et* $\check{P}^{\alpha,p}$ *sont des espaces fonctionnels propres formés des fonctions continues; par conséquent, les classes* $\mathfrak{A}^{\alpha,p}$, $\mathfrak{B}^{\alpha,p}$, *et* $\check{\mathfrak{A}}^{\alpha,p}$ *sont égales à* (0). *Pour*

$p = 1$ *et* $\alpha = n$, $\check{\mathrm{P}}^{n,1}$ *est aussi formé des fonctions continues, et* $\check{\mathfrak{A}}^{n,1} = (0)$.

Les classes de potentiels introduites ici sont des classes fonctionnelles linéaires normées avec des normes induites des classes de fonctions-distributions correspondantes ([4]).

THÉORÈME III. [4]. — *Soit* $p < \infty$. *La classe* $\mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ *est un sous-espace dense dans chacune des classes* $\mathrm{P}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$, $\mathrm{B}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ *et ces dernières relativement à leurs classes exceptionnelles forment des espaces fonctionnels complets qui sont des complétions parfaites de la classe* $\mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ *pourvue des normes correspondantes. Cette assertion est vraie aussi pour* $\check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}$ *quand* 1°) α *est entier positif, et* $1 < p < \infty$, *et* 2°), α *est non-entier. Dans le premier cas* $\check{\mathrm{P}}^{\alpha,p} = \mathrm{P}^{\alpha,p}$ *et* $\check{\mathfrak{A}}^{\alpha,p} = \mathfrak{A}^{\alpha,p}$. *Dans le second cas,* $\check{\mathrm{P}}^{\alpha,p} = \mathrm{B}^{\alpha,p}$, *et* $\check{\mathfrak{A}}^{\alpha,p} = \mathfrak{B}^{\alpha,p}$.

Remarque 6. — Dans le cas exceptionnel quand α est un entier positif et $p = 1$, la classe $\mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ est encore dense dans $\mathrm{W}_1^\alpha(\mathrm{R}^n)$, et en lui donnant la norme de W_1^α, on peut poser le problème de sa complétion parfaite. Ce problème est résolu seulement pour $\alpha = 1$ [4]; la complétion parfaite existe; elle sera dénotée par $\check{\mathrm{P}}^{1,1}$, et sa classe exceptionnelle par $\check{\mathfrak{A}}^{1,1}$. On ne sait pas si les fonctions corrigées et leurs ensembles exceptionnels pour $u \in \check{\mathrm{P}}^{1,1}$ appartiennent a $\check{\mathrm{P}}^{1,1}$ et $\check{\mathfrak{A}}^{1,1}$ respectivement ([5]). Pour un entier $\alpha > 1$, on ne sait pas à présent si une complétion parfaite existe. On ne sait pas non plus si une complétion existe relativement à la classe $\check{\mathfrak{A}}_0^{\alpha,1}$, définie comme la plus petite classe héréditaire et σ-additive, contenant les ensembles exceptionnels des fonctions corrigées de W_1^α. Dans les cas en question on utilise pour le présent la notation $\check{\mathrm{P}}^{\alpha,1}$ pour la complétion « presque-parfaite » de C_0^∞ relativement à la classe $\check{\mathfrak{A}}^{\alpha,1} = \bigcap_{\alpha' < \alpha} \mathfrak{A}^{\alpha',1}$. Cette classe contient $\check{\mathfrak{A}}_0^{\alpha,1}$.

Les formules (2.5), (2,6), (2.7) et (2.8) donnent le

THÉORÈME IV. — *a*) *Pour* $1 \leqq p \leqq 2$,

$$\mathrm{B}^{\alpha,p} \cup \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p} \subset \mathrm{P}^{\alpha,p} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{B}^{\alpha,p} \cup \check{\mathfrak{A}}^{\alpha,p} \subset \mathfrak{A}^{\alpha,p};$$

pour $2 \leqq p \leqq \infty$,

$$\mathrm{B}^{\alpha,p} \cap \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p} \supset \mathrm{P}^{\alpha,p} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{B}^{\alpha,p} \cap \check{\mathfrak{A}}^{\alpha,p} \supset \mathfrak{A}^{\alpha,p}.$$

b) *Pour* $\alpha > \alpha'$,

$$\mathrm{P}^{\alpha,p} \cup \mathrm{B}^{\alpha,p} \cup \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p} \subset \mathrm{P}^{\alpha',p} \cap \mathrm{B}^{\alpha',p} \cap \check{\mathrm{P}}^{\alpha',p}$$

([4]) Sur les notions des classes fonctionnelles normées, espaces fonctionnels, complétion fonctionnelle, etc, voir [1].

([5]) W. Flemming [8] a prouvé que $\check{\mathfrak{A}}^{1,1}$ est la classe des ensembles de mesure de Hausdorf $(n - 1)$-dimensionnelle nulle.

et

$$\mathfrak{A}^{\alpha,p} \cup \mathfrak{B}^{\alpha,p} \cup \check{\mathfrak{A}}^{\alpha,p} \subset \mathfrak{A}^{\alpha',p} \cap \mathfrak{B}^{\alpha',p} \cap \check{\mathfrak{A}}^{\alpha',p}.$$

c) Pour $p = 2$,

$$\mathrm{P}^{\alpha,2} = \mathrm{B}^{\alpha,2} = \check{\mathrm{P}}^{\alpha,2} \equiv \mathrm{P}^{\alpha}\,(^6);\ \mathfrak{A}^{\alpha,2} = \mathfrak{B}^{\alpha,2} = \check{\mathfrak{A}}^{\alpha,2} \equiv \mathfrak{A}_{2\alpha}\,(^6).$$

d) Pour $\alpha > 0$ *et* $\gamma > 0$,

$$\mathrm{G}_\alpha(\mathrm{P}^{\gamma,p}) = \mathrm{P}^{\alpha+\gamma,p} \text{ et } \mathrm{G}_\alpha(\mathrm{B}^{\gamma,p}) = \mathrm{B}^{\alpha+\gamma,p}.$$

Le théorème suivant donne la caractérisation des classes $\mathfrak{A}^{\alpha,p}$ et $\mathfrak{B}^{\alpha,p}$ (donc aussi de $\check{\mathfrak{A}}^{\alpha,p}$) dans les cas où elles ne se réduisent pas à (0).

THÉORÈME V. [4]. — *Soit* $\alpha p \leqq n$. *a)* $\mathfrak{A}^{\alpha,p}$ *est formé par des ensembles* A *pour lesquels il existe une fonction non-négative* $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{R}^n)$ *telle que* $(\mathrm{G}_\alpha f)(x) = \infty$ *pour* $x \in \mathrm{A}$.

b) Soit $0 < \varepsilon < \min(\alpha, 1)$. *La classe* $\mathfrak{B}^{\alpha,p}$ *est formée par les ensembles* B *pour lesquels il existe une fonction non-négative* $f \in \tilde{\mathscr{B}}^{\varepsilon,p}$, *telle que* $(\mathrm{G}_{\alpha-\varepsilon} f)(x) = \infty$ *pour* $x \in \mathrm{B}$; *cette définition ne dépend pas du choix de* ε.

Nous passons maintenant à la caractérisation directe des fonctions dans nos classes de potentiels. A cet effet nous introduisons la notion des dérivées ponctuelles $\mathrm{D}_i u(x)$ de façon un peu plus restrictive que d'ordinaire. La dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ est définie au point $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ si la fonction $u(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0 . x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)$ est définie et absolument continue dans un intervalle ouvert de la variable x_k contenant x_k^0 et a une dérivée finie $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ au point x_k^0. La dérivée ponctuelle $\mathrm{D}_i u = \dfrac{\partial^{|i|} u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{|i|}}}$ est définie en prenant successivement les dérivées ponctuelles $\dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{i_2}}$, etc.

Si u et sa dérivée ponctuelle $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ appartiennent à $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^n)$ alors $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ est la dérivée au sens des distributions de u. La proposition inverse n'est pas vraie en général.

(6) Les notations P^α et $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ sont celles de [2].

THÉORÈME VI. [4]. — *Soit u une fonction corrigée. Pour qu'elle appartienne à* $\check{P}^{\alpha,p}$ *il faut et il suffit que toutes les dérivées ponctuelles* $D_i u$ *d'ordre* $|i| \leqq \alpha$ *existent, appartiennent à* L^p, *et les dérivées d'ordre* $|i| = [\alpha]$ *appartiennent à* W_p^β *où* $\beta = \alpha - [\alpha]$.

Remarque 7. — 1°) La caractérisation des fonctions $u \in \check{P}^{\alpha,p}$ donnée ci-dessus s'applique à tous les cas où $\check{P}^{\alpha,p}$ est une classe de potentiels; il suffit alors de caractériser les fonctions corrigées appartenant à cette classe. En vertu de nos conventions de la remarque 6, le seul cas douteux est celui de $\check{P}^{1,1}$; dans ce cas on ne sait pas si la fonction corrigée d'une fonction dans $\check{P}^{1,1}$, appartient à $\check{P}^{1,1}$. Pour $\check{P}^{1,1}$ la condition du théorème VI est nécessaire mais on ne sait pas si elle est aussi suffisante; on sait seulement que si la condition est satisfaite, la fonction corrigée est égale à une fonction de $\check{P}^{1,1}$ en dehors d'un ensemble de la classe $\bigcap\limits_{\alpha' < 1} \mathfrak{A}^{\alpha',1}$.

2°) Pour $1 < p < \infty$, on peut remplacer la condition du théorème VI par la condition suivante, d'apparence plus faible, qui est plus facile à vérifier: les dérivées ponctuelles

$$\frac{\partial^l u}{\partial x_k^l}, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, [\alpha],$$

appartiennent à L^p, et celles d'ordre $[\alpha]$ appartiennent à W_p^β.

3°) Pour $p = \infty$, $\check{P}^{\alpha,\infty} = C^{[\alpha],\beta}$. Ici $C^{m,\beta}$, pour m entier $\geqq 0$ et $0 < \beta \leqq 1$, est la classe des fonctions, qui, avec toutes leurs dérivées d'ordre $\leqq m$ satisfont à la condition de Hölder d'ordre β. On met ici

$$C^{m,0} \equiv C^{m-1,1}$$

pour $m > 0$ et $C^{0,0} = L^\infty$.

Remarque 8. — Les classes $B^{\alpha,p}$ sont des classes de potentiels pour tout $\alpha > 0$; donc, pour caractériser leurs fonctions on peut se limiter aux fonctions corrigées. La caractérisation la plus simple d'apparence est par le fait que la norme $\|u\|_{\alpha,p,k}$ est finie pour un entier $k > \alpha$. Pourtant, la vérification de cette condition comportant l'évaluation des intégrales avec des différences d'un large ordre k peut être compliquée. Si α n'est pas entier, la relation $B^{\alpha,p} = \check{P}^{\alpha,p}$ permet d'utiliser la condition du théorème VI. Pour α entier positif, on peut utiliser la condition suivante: les dérivées ponctuelles $D_i u$ d'ordre $\leqq \alpha - 1$ existent, appartiennent à L^p, et celles d'ordre $\alpha - 1$ ont la norme $\|D_i u\|_{1,p,2}$ finie.

Remarque 9. — La caractérisation des fonctions dans $P^{\alpha,p}$ est plus compliquée et moins « directe » que pour les classes $\check{P}^{\alpha,p}$ et $B^{\alpha,p}$. Comme auparavant on peut se limiter ici aux fonctions corrigées. Si α est un entier et $1 < p < \infty$, en vertu de $P^{\alpha,p} = \check{P}^{\alpha,p}$ on peut encore utiliser la condition du théorème VI. Si α est non-entier, et $1 < p < \infty$, on peut former la fonction $v = G_{m-\alpha}u$ avec m entier $> \alpha$, et appliquer la condition du théorème VI pour prouver que $v \in P^{m,p} = \check{P}^{m,p}$. Si $p = 1$, ou $p = \infty$, on peut prendre un entier m tel que $2m > \alpha$, et caractériser la fonction $u \in P^{\alpha,p}$ par le fait que $(1 - \Delta)^m G_{2m-\alpha} u \in L^p$ où l'opérateur différentiel $(1 - \Delta)^m$ est pris au sens des distributions. Bien entendu, les conditions dans les derniers deux cas sont pratiquement aussi compliquées à vérifier que la condition $G_{-\alpha}u \in L^p$ (7).

4. Restrictions aux hyperplans.

Pour un espace fonctionnel on ne peut parler de restrictions qu'aux ensembles qui ne sont pas exceptionnels. Ainsi pour les classes L^p_α, $\tilde{\mathscr{B}}^{\alpha,p}$, et W^α_p, on ne peut parler de restrictions qu'aux ensembles de mesure positive. Mais, pour les classes $P^{\alpha,p}$, $B^{\alpha,p}$, et $\check{P}^{\alpha,p}$, les restrictions existent pour une grande variété d'ensembles de mesure nulle. Les plus étudiées sont les restrictions aux sous-espaces R^k de R^n, ou, ce qui revient au même, aux hyperplans k-dimensionnels de R^n. Le théorème principal ici est le suivant [4], [9], [15], [17], [19]:

THÉORÈME VII. — *Soit $n = n' + n''$, avec n' et n'' des entiers positifs, et soit $\alpha > n''/p$. Les restrictions des fonctions dans $B^{\alpha,p}(R^n)$ aux sous-espaces $R^{n'}$ forment exactement la classe $B^{\alpha-n''/p,p}(R^{n'})$. Si $p > 1$, les restrictions des fonctions dans $P^{\alpha,p}$ appartiennent à $B^{\alpha-n''/p,p}(R^{n'})$. Si $p < \infty$, toute fonction dans $B^{\alpha-n''/p,p}(R^{n'})$ est la restriction d'une fonction dans $P^{\alpha,p}$.*

Remarque 10.—Le problème des restrictions pour $\check{P}^{\alpha,p}(R^n)$ à $R^{n'}$ est résolu par le théorème précédent sauf dans le cas où $p = 1$ ou ∞, et $\alpha = m$ est un entier. Par la remarque 7, on voit immédiatement que les restrictions de $\check{P}^{m,\infty}(R^n)$ à $R^{n'}$ forment exactement la classe $\check{P}^{m,\infty}(R^{n'})$. Si l'on considère $\check{P}^{m,1}$ comme les complétions

(7) Il est à noter que l'on a des formules intégrales pour exprimer les potentiels inverses $G_{-\alpha}u$ (voir [4]). On doit remarquer que E. M. Stein [16] a donné des caractérisations directes plus satisfaisantes pour $P^{\alpha,p}$, mais pour des valeurs de α et p bien restreintes.

presque parfaites (voir remarque 6), un résultat de E. Gagliardo [9] prouve que les restrictions de $\check{P}^{m,1}(R^n)$ forment la classe $\check{P}^{m-n'',1}(R^{n'})$.

P. Szeptycki [18] a prouvé récemment le théorème suivant (ce théorème a été établi précédemment pour $p = 2$ [2]).

Nous introduisons les notations suivantes. Nous considérons les points $x \in R^n$ comme couples $x = (x', x'')$, $x' \in R^{n'}$, $x'' \in R^{n''}$, $n = n' + n''$, et pour une fonction $u(x)$ nous écrivons $u(x) = u(x', x'') = u_{x'}(x'')$.

THÉORÈME VIII. — *Soit* $1 < p < \infty$. *Si* $u \in P^{\alpha,p}(R^n)$, *alors pour tout* β, $0 \leqq \beta \leqq \alpha$, $u_{x'} \in P^{\beta,p}(R^{n''})$ *sauf pour un ensemble des* x' *appartenant à* $\mathfrak{A}^{\alpha-\beta,p}(R^{n'})$. *Si* $u \in B^{\alpha,p}(R^n)$ *alors pour* $0 < \beta \leqq \alpha$, $u_{x'} \in B^{\beta,p}(R^{n''})$ *sauf sur un ensemble de* $\mathfrak{A}^{\alpha-\beta,p}(R^{n'})$, *et pour* $0 \leqq \beta < \alpha$, $u_{x'} \in P^{\beta,p}(R^{n''})$ *sauf sur un ensemble de* $\mathfrak{B}^{\alpha-\beta,p}(R^{n'})$.

5. Restrictions aux ensembles ouverts de R^n.

Nous allons considérer maintenant les restrictions des fonctions dans nos classes à un sous-ensemble ouvert D de R^n. Ces classes de restrictions sont notées respectivement $P^{\alpha,p}(R^n|D)$, $B^{\alpha,p}(R^n|D)$, et $\check{P}^{\alpha,p}(R^n|D)$. Pour qu'une fonction u définie dans D appartienne à une de ces classes, il est nécessaire qu'elle appartienne à la classe locale correspondante, $P^{\alpha,p}_{\text{loc}}(D)$, $B^{\alpha,p}_{\text{loc}}(D)$, $\check{P}^{\alpha,p}_{\text{loc}}(D)$ [8]. Cette condition est loin d'être suffisante. Nous ne connaissons pas de définitions intrinsèques et directes des classes $P^{\alpha,p}(R^n|D)$ et $B^{\alpha,p}(R^n|D)$ à cause du manque de caractérisations directes appropriées des fonctions dans les classes $P^{\alpha,p}$ et $B^{\alpha,p}$. Pourtant, pour une large classe des domaines D on trouve une définition bien satisfaisante de la classe $\check{P}^{\alpha,p}(R^n|D)$ en procédant comme suit (voir [3]).

On définit la norme $|u|_{\alpha,p,D}$ par la formule (2.3) où l'on remplace R^n par D (comme domaine d'intégration). On note alors $\check{P}^{\alpha,p}(D)$ la classe des fonctions $u \in \check{P}^{\alpha,p}_{\text{loc}}(D)$ avec $|u|_{\alpha,p,D} < \infty$. Il est clair que $\check{P}^{\alpha,p}(R^n|D) \subset \check{P}^{\alpha,p}(D)$. Pour avoir l'inclusion inverse, on doit établir des théorèmes d'extension. Pour une large classe des domaines D on peut établir de tels théorèmes sous une forme très forte. Notamment, on prouve le:

THÉORÈME IX. — EXTENSION SIMULTANÉE. *Il existe un opérateur linéaire* E *défini pour toutes les fonctions mesurables dans* D, *les*

(8) u appartient à la classe locale si pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ s'annulant en dehors d'un compact dans D, φu, étendue par 0 en dehors de D, appartient à la classe globale considérée.

transformant en fonctions mesurables dans R^n *avec les propriétés suivantes.* 1°) $\tilde{u} = \mathrm{E}u$ *est une extension de la fonction u.* 2°) *Si* $u \in \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{D})$, $\tilde{u} \in \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$. 3°) *Il existe une fonction positive, croissante,* $\gamma_p(\alpha)$, *pour* $\alpha \geqq 0$, *telle que si* $u \in \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{D})$, *alors,* $|\mathrm{E}u|_{\alpha,p} \leqq \gamma_p(\alpha)|u|_{\alpha,p,\mathrm{D}}$.

Remarque 11. — Très souvent l'extension simultanée E du théorème IX ne satisfait aux conditions du théorème que pour $p > 1$, tandis que pour $p = 1$ elle satisfait aux conditions plus faibles. Deux cas se présentent :

A) La condition 2°) est encore valable pour $p = 1$ et tout $\alpha \geqq 0$ mais dans la condition 3°) la fonction $\gamma_1(\alpha)$, tout en étant mesurable, positive et finie pour tout $\alpha \geqq 0$, n'est plus croissante; on peut seulement affirmer que $\gamma_1(\alpha)$ est bornée sur tout compact ne contenant pas des entiers.

B) Pour $p = 1$, les conditions 2°) et 3°) ne sont assurées que pour $\alpha > 0$ non-entier ou $\alpha = 0$. La fonction $\gamma_1(\alpha)$ de la condition 3°) n'est pas définie pour les α entiers positifs, mais autrement a les mêmes propriétés que dans le cas A).

On ne sait pas si cet affaiblissement des propriétés de l'opérateur E pour $p = 1$ est dans la nature des choses ou s'il est dû aux méthodes de construction et de démonstration utilisées.

Avant de décrire les domaines pour lesquels ce théorème est prouvé, nous allons montrer comment ce théorème peut servir pour définir, d'une manière intrinsèque (mais pas très directe), les classes

$$\mathrm{P}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D}).$$

On utilise le fait que pour α entier et $1 < p < \infty$, $\mathrm{P}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n) = \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$, donc, $\mathrm{P}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D}) = \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D}) = \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{D})$. En utilisant l'interpolation complexe (voir théorème I), on définit alors $\mathrm{P}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D})$ pour α non-entier et $1 < p < \infty$. Pour définir les classes $\mathrm{B}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D})$ on se sert du fait que pour α non-entier, et tout p, $\mathrm{B}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n) = \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$, donc $\mathrm{B}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D}) = \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D}) = \check{\mathrm{P}}^{\alpha,p}(\mathrm{D})$. Pour obtenir $\mathrm{B}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n|\mathrm{D})$ quand α est un entier positif, on met α entre deux nombres positifs non-entiers, α_1 et α_2, et applique encore l'interpolation complexe.

Nous dirons qu'un ensemble ouvert $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^n$ appartient à la classe $\mathscr{E}(\gamma_p)$, où $\gamma_p(\alpha)$ est une fonction positive croissante, (pour $p = 1$, $\gamma_1(\alpha)$ pourrait ne satisfaire qu'aux conditions plus faibles de la remarque 11, A) ou B)), si le théorème IX est valable pour D avec la fonction $\gamma_p(\alpha)$ dans la partie 3°). On dira que $\mathrm{D} \in \mathscr{E}$ (D a la propriété d'extension simultanée) si $\mathrm{D} \in \mathscr{E}(\gamma_p)$ pour une fonction $\gamma_p(\alpha)$.

Les domaines les plus généraux appartenant à $\mathscr{E}$ que nous construisons sont obtenus de manière suivante. Nous définissons d'abord les domaines du type SLG (graphe lipschitzien simple) et prouvons qu'ils appartiennent tous à $\mathscr{E}$ [3]. Ensuite, nous appliquons deux principes généraux pour former des domaines dans $\mathscr{E}$ de nouveaux domaines dans $\mathscr{E}$. Nous appelons ces principes le *principe de localisation* et *le principe des quasi-complexes réguliers.*

Un domaine de type SLG s'obtient comme suit: on considère un vecteur $\theta \in \mathrm{R}^n$ avec $|\theta| = 1$, et dans un hyperplan $(n-1)$-dimensionnel perpendiculaire à θ on prend un rectangle B (la base de D) et l'on met $\mathrm{D} = [x : x = z + t\theta, z \in \mathrm{B}, 0 < t < f(z)]$, où $f(z)$ est une fonction positive lipschitzienne définie sur B avec une borne inférieure positive.

A. P. Calderon [6] a prouvé le premier théorème d'extension pour les domaines du type SLG, mais il l'a fait seulement pour des entiers α et non sous la forme d'extension simultanée. Le théorème IX pour ces domaines s'obtient par l'application de deux idées. L'une est la réflexion de Lichtenstein d'ordre infini à travers un hyperplan (due à R. T. Seeley [14]) (9) et l'autre est l'adaptation de la réflexion à la Lichtenstein au cas d'un graphe lipschitzien [3].

Remarque 11.1. — L'opérateur d'extension E construit pour un domaine SLG satisfait au théorème IX sans exception pour $p = 1$ quand la fonction de graphe $f(z)$ est du type $\mathrm{C}^{\infty,1}$ (c'est-à-dire que la fonction et ses dérivées de tous les ordres sont lipschitziennes). Pour un domaine SLG général on est dans le cas exceptionnel A) de la remarque 11.

Pour énoncer le principe de localisation sous sa forme la plus générale, nous devons introduire les notions suivantes.

Pour un ensemble ouvert U, on désigne par U^δ, $\delta > 0$, l'ensemble U diminué du δ-voisinage fermé de sa frontière $\partial\mathrm{U}$. Un recouvrement ouvert, $\{\mathrm{U}_k\}$ d'un ensemble A est dit *ample*, d'ampleur δ, si $\{\mathrm{U}_k^\delta\}$ forme aussi un recouvrement de A. Le recouvrement $\{\mathrm{U}_k\}$ est dit de rang fini s, si pour chaque U_k, $\mathrm{U}_k \cap \mathrm{U}_l \neq 0$ est vrai pour au plus s indices l.

THÉORÈME X. — PRINCIPE DE LOCALISATION [3]. *Soit* $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^n$ *un ensemble ouvert tel qu'il existe un recouvrement ouvert* $\{\mathrm{U}_k\}$ *de la*

(9) La réflexion de Lichtenstein d'ordre fini à travers un hyperplan ou une hypersurface suffisamment régulière a été considérée il y a longtemps par L. Lichtenstein [11] et M. R. Hestenes [10].

frontière ∂D *tel que* 1°) *le recouvrement* $\{U_k\}$ *est ample et de rang fini;* 2°) $D \cap U_k \in \mathscr{E}(\gamma_p)$, *pour tout* k *avec une fonction* $\gamma_p(\alpha)$ *indépendante* de k. Alors $D \in \mathscr{E}$.

Remarque 11.2. — La démonstration du théorème X est obtenue par la construction explicite de l'opérateur d'extension E' pour le domaine D avec une fonction correspondante $\gamma'_p(\alpha)$. Notons que les propriétés de la fonction $\gamma'_1(\alpha)$ déterminent s'il n'y a pas d'exception dans le théorème IX pour $p = 1$, ou, s'il y en a une correspondant au cas A) ou B) de la remarque 11. On peut préciser l'énoncé du théorème X comme suit: la fonction $\gamma'_1(\alpha)$ correspond au même cas d'exception (ou au cas sans exception) que la fonction $\gamma_1(\alpha)$.

Pour formuler le principe des quasi-complexes réguliers, nous avons besoin de quelques notions additionnelles.

Pour un ensemble $F \subset R^n$, on met $r_F(x) = \inf_{y \in F} |x - y|$. Pour deux ensembles fermés, F_1 et F_2, nous définissons la pente $\omega(F_1, F_2)$ par la formule suivante:

$$\omega(F_1, F_2) = \inf_{x \notin F_1 \cap F_2} \frac{r_{F_1}(x) + r_{F_2}(x)}{\min(1, r_{F_1 \cap F_2}(x))}. \tag{5.1}$$

On vérifie aisément que si $F_1 \cap F_2 = 0$, $\omega(F_1, F_2) = \inf |x_1 - x_2|$ pour $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. De manière intuitive, mais bien imprécise, on peut exprimer le fait que $\omega(F_1, F_2) = 0$ en disant que, ou bien en un point $x \in F_1 \cap F_2$ il y a une direction tangente commune à F_1 et F_2, ou bien il y a une asymptote commune à F_1 et F_2.

Soit $x(\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, un arc simple dans R^n. Avec un nombre κ, $0 < \kappa \leqq 1$, on forme le domaine ouvert

$$\bigcup_{0 \leqq \tau \leqq 1} S(x(\tau), \kappa |x(\tau) - x(0)|).$$

Ce domaine est appelé un conoïde d'arc axial $x(\tau)$, sommet $x(0)$, ouverture κ, et rayon $|x(\tau) - x(0)|$. Pour un ensemble ouvert D, on définit la propriété (C) suivante:

(C) *Il existe deux nombres positifs* r *et* $\kappa \leqq 1$ *tels que pour tout point* $x \in \partial D$ *il existe un conoïde de sommet* x, *rayon* r, *et d'ouverture* κ *contenu dans* D.

Les nombres r et κ sont appelés les (C)-constantes de D.

Une *quasi-cellule* Q est une ensemble fermé, égal à la fermeture de son intérieur, $\overline{Q^0} = Q$, tel que son intérieur Q^0 satisfait à la condition (C). Les (C)-constantes de Q^0 sont aussi celles de Q.

Un quasi-complexe régulier (dans [3] on l'appelle « système régulier ») est un système $\{Q_k\}$, fini ou infini, des quasi-cellules satisfaisant aux conditions suivantes: il existe des nombres positifs r_0, κ_0, et ω_0 et un entier positif s tels que:

1°) Toutes les quasi-cellules Q_k ont leurs (C)-constantes $\geqq r_0$ et $\geqq \kappa_0$ respectivement.

2°) Pour tous k et l, $\omega(Q_k, Q_l) \geqq \omega_0$.

3°) Le quasi-complexe est de rang fini s; c'est-à-dire, pour chaque k, $Q_k \cap Q_l \neq 0$ est vrai pour au plus s indices l.

4°) La frontière $\partial\left(\bigcup_k Q_k\right)$ ne divise localement l'intérieur $\left(\bigcup_k Q_k\right)^0$ en aucun de ses points; c'est-à-dire que pour chaque $x \in \partial(\cup Q_k)$ il y a des voisinages U_x aussi petits que l'on veut, tels que $U_x \cap (\cup Q_k)^0$ est connexe.

Les conditions 1°, 2°, et 3° ont pour conséquence que $\cup Q_k$ est une quasi-cellule.

Deux quasi-cellules, Q_1 et Q_2, sont dites contiguës si leur intersection $Q_1 \cap Q_2$ est au moins $(n-1)$-dimensionnelle.

Théorème XI [3]. — le principe des quasi-complexes réguliers. *Soit* $\{Q_k\}$ *un quasi-complexe régulier. Supposons que pour chaque couple* Q_k *et* Q_l *de quasi-cellules contiguës,* $(Q_k \cup Q_l)^0 \in \mathscr{E}(\gamma_p)$ *pour une fonction* $\gamma_p(\alpha)$ *indépendante de k et l. Alors* $\left(\bigcup_k Q_k\right)^0 \in \mathscr{E}$.

Remarque 11.3. — L'opérateur d'extension E′ pour le domaine $(\cup Q_k)^0$ et sa fonction $\gamma'_p(\alpha)$, obtenus dans le théorème XI sont en général dans le cas exceptionnel B) de la remarque 11 indépendamment du type de la fonction $\gamma_p(\alpha)$.

Par l'application du principe de localisation nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire XII [3]. — *Pour qu'un domaine convexe* $D \subset R^n$ *appartienne à* $\mathscr{E}$ *il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition* (C).

Il est à remarquer que pour les dimensions $n = 1$ ou 2, tout domaine convexe satisfait à (C). Pour dimension $n \geqq 3$, tout domaine convexe, borné, satisfait à (C) de même que tout domaine convexe non-borné contenant un cône infini de dimension n. Pourtant, pour toutes dimensions $n \geqq 3$, on peut construire des domaines convexes non-bornés qui ne satisfont pas à la condition (C).

Remarque 11.4. — Le corollaire XII est obtenu en appliquant le théorème X avec les domaines $D \cap U_k$ du type SLG. Il résulte des remarques 11.1 et 11.2 que l'opérateur d'extension construit dans le corollaire sera en général dans le cas exceptionnel A) de la remarque 11.

En appliquant le principe des quasi-complexes réguliers on obtient le:

COROLLAIRE XIII [3]. — *Tout polyèdre géométrique n-dimensionnel, fini, dont la frontière ne divise pas localement l'intérieur (en particulier quand la frontière est une variété topologique* $(n - 1)$*-dimensionnelle) appartient à* $\mathcal{E}$.

Remarque 11.5. — En vertu de la remarque 11.3, l'opérateur d'extension du corollaire XIII est, en général, dans le cas exceptionnel B) de la remarque 11. Il est pourtant à noter que pour les polyèdres convexes (et pour certains autres de structure suffisamment simple) on peut construire un opérateur d'extension en appliquant successivement la réflexion oblique à la Lichtenstein à travers les faces du polyèdre. De cette manière on évite les cas exceptionnels de la remarque 11.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN and K. T. SMITH, Functional spaces and functional completion, *Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble*, 6 (1956), 125–185.

[2] N. ARONSZAJN and K. T. SMITH, Theory of Bessel potentials, Part I, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 11 (1961), 385-475.

[3] R. ADAMS, N. ARONSZAJN and K. T. SMITH, Theory of Bessel potentials, Part II (à paraître prochainement).

[4] N. ARONSZAJN, FUAD MULLA and P. SZEPTYCKI, On spaces of potentials connected with L^p classes, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 13 (1963), 211-306.

[5] O. V. BESOV, On a family of functional spaces. Theorems about restrictions and extensions, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, 126, 6 (1959), 1163-1165.

[6] A. P. CALDERON, Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol. IV, Partial Differential Equations (1961), 33-49.

[7] A. P. CALDERON, Intermediate spaces and interpolation, *Reports of the Conference on Functional Analysis*, Warsaw, 1960.

[8] W. H. FLEMING, Functions whose partial derivatives are measures, *Bull. Am. Math. Soc.*, 64 (1958), 364-366.

[9] E. GAGLIARDO, Caratterizzazioni della tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in *n* variabili, *Rendiconti Sem. Mat.* Padova, 27 (1957), 284-305.

[10] M. R. Hestenes, Extension of the range of a differentiable function, *Duke Math. Journ.*, 8 (1941), 183-192.

[11] L. Lichtenstein, Eine elementare Bemerkung zur reelen Analysis, *Math. Zeit.*, 30 (1929), 794-795.

[12] J. L. LIONS, Une construction d'espaces d'interpolation, *C.R. Ac. Sci.*, Paris, 251 (1961), 1853-1855.

[13] S. M. NIKOLSKII, Theorems about restrictions, extensions, and approximations of differentiable functions of several variables (survey article), *Usp. Mat. Nauk.*, 16, 5 (1961), 63-114.

[14] R. T. SEELEY, Extension of C^∞ functions defined in a half-space. A paraître prochainement dans *Proc. Am. Math. Soc.*

[15] L. I. SLOBODECKII, Spaces of S. L. Soblev of fractional order, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 118 (1958), 243-246.

[16] E. M. STEIN, The characterization of functions arising as potentials I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 (1961), 102-104.

[17] E. M. STEIN, The characterization of functions arising as potentials II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 (1962), 577-584.

[18] P. SZEPTYCKI, On restrictions of functions in the spaces $P^{\alpha,p}$ and $B^{\alpha,p}$. Technical Report 5 Univ. Kansas. A paraître dans *Proc. Am. Math. Soc.*

[19] M. H. TAIBLESON, Smoothness and differentiability conditions for functions and distributions in E_n. Dissertation, Univ. Chicago, 1962.

[20] J. L. LIONS, J. PEETRE, *Inst. des Hautes Études Sci.*, 19 (1964).

Nachman ARONSZAJN,
The University of Kansas,
Department of Mathematics,
Lawrence, Kansas (U.S.A.).