ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOISE BENZECRI-LE ROY

Classification des champs méromorphes d'éléments de contact sur une variété analytique complexe

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 1 (1964), p. 131-144

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_131_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 1 (1964) 131-144

CLASSIFICATION DES CHAMPS MÉROMORPHES D'ÉLÉMENTS DE CONTACT SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

par F. BENZECRI-Le ROY (Rennes)

I. Introduction.

Précisons d'abord la notion d'application méromorphe d'une variété analytique complexe X dans une autre Y. X est supposée irréductible, Y compacte.

Une *application* (ensembiliste) de X dans Y peut être donnée par son graphe Γ, partie du produit $X \times Y$ telle que, pour tout $x \in X$, l'intersection $(x \times Y) \cap \Gamma$ soit réduite à un seul élément; l'on a, en désignant aussi par Γ l'application elle même :

$$\Gamma(x) = p^{Y}(x \times Y \cap \Gamma)$$

où p^{Y} désigne la projection sur Y du produit $X \times Y$.

Lorsque la condition pour $(x \times Y) \cap \Gamma$ d'être réduite à un élément quel que soit $x \in X$ n'est plus remplie, Γ ne définit plus une application mais une *correspondance.*

Lorsque le graphe Γ est un sous ensemble analytique de la variété analytique complexe produit $X \times Y$ en tout point de Γ, on dit que l'application ou la correspondance définie par Γ est *analytique.*

Rappelons que Γ est un sous-ensemble analytique de $X \times Y$ en $M \in X \times Y$ si :

$\exists$ U(M), voisinage de M dans $X \times Y$,

$\exists \{\varphi_i\}_{i \in I}$, famille finie de fonctions holomorphes sur U(M),

tels que :

$$\Gamma \cap U(M) = \{N | N \in U(M);\ \forall i \in I,\ \varphi_i(N) = 0\}$$

Intermédiaire entre la notion d'application et la notion de correspondance analytiques, la notion *d'application analytique avec singularités* peut être ainsi définie :

C'est une correspondance analytique qui est une application sur un ouvert partout dense de X.

$x \in X$ est dit *régulier* pour l'application avec singularités Γ s'il existe un voisinage $V(x)$ dans X sur lequel Γ soit une application analytique.

$x \in X$, s'il n'est pas régulier, est dit singulier.

$x \in X$ est dit *singulier ordinaire* si Γ est un sous-ensemble analytique en tout point de $x \times Y$.

Une application analytique avec singularités qui n'a que des singularités ordinaires est dite *méromorphe.* L'image d'un point x de X par une application méromorphe de X dans Y est donc un point de Y si x est régulier (ce qui a lieu sur un ouvert partout dense de X), un sous-ensemble analytique compact de Y si x est singulier.

L'ensemble S des points de X singuliers pour une application méromorphe de X dans Y possède la propriété remarquable d'être de codimension analytique supérieure ou égale à deux (ce qui signifie que, localement, S est contenu dans un sous ensemble analytique de X qui peut être défini comme ensemble des zéros communs à deux fonctions holomorphes sur X mais non comme lieu des zéros d'une seule fonction holomorphe).

Γ étant le graphe d'une application analytique avec singularités de X dans Y, une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{\Gamma}$ — fermeture de Γ — soit le graphe d'une application méromorphe de X dans Y est que l'ensemble des points singuliers de Γ soit de codimension supérieure ou égale à deux.

Nous aurons, dans la suite, à considérer une application méromorphe Γ d'une variété analytique complexe B dans l'espace $B \times Y$ où Y est un espace projectif, Γ possédant la propriété :

$$p^{B} \circ \Gamma = I_{B}^{B}$$

où p^{B} désigne la projection sur $B \times Y$ et I_{B}^{B} l'application identique de B. Une telle application peut être considérée comme une application méromorphe de B dans Y. Or, soit Γ une application de B dans Y dont le graphe ne soit pas identiquement contenu dans l'hyperplan d'équation $y_\nu = 0$ ($y_1 \ldots y_n$ étant des coordonnés homogènes dans Y et $\nu \in \{1, \ldots, n\}$); Γ est méromorphe si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$ distinct de ν, le quotient $\frac{y_i}{y_\nu}$ calculé au point $\Gamma(x)$ est une fonction méromorphe de x (cf Stoll math. Ann. 136).

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un *champ méromorphe d'éléments de contact* sur une variété analytique complexe :

Soit B une variété analytique complexe régulière, irréductible, de dimension q;

E l'espace fibré des vecteurs tangents à B (E est un espace fibré analytique complexe de base B, localement isomorphe à $B \times C^q$);

P(E) l'espace fibré projectif associé à E (P(E) est un espace fibré projectif analytique complexe de base B localement isomorphe à $P(C^{q-1})$;

π la projection canonique de (E-B) sur P(E). (Soit $\varphi \in E$; x la projection de φ sur B. φ est un vecteur tangent à B en x et $\pi(\varphi)$, le support de φ, un élément de contact de dimension 1 en x).

Un champ holomorphe de vecteurs sur B est une section holomorphe de E (*i.e* une section de E qui est une application holomorphe de la variété analytique complexe B dans la variété analytique complexe E).

Un champ méromorphe d'éléments de contact de dimension 1 sur B est une section méromorphe de P(E) (*i.e.* une section de P(E) qui est une application méromorphe de la variété analytique complexe B dans la variété analytique complexe P(E)).

On définit facilement ces sections méromorphes par $(q-1)$ fonctions méromorphes de q variables complexes en effet, E est, localement, isomorphe au produit $B \times C^q$, P(E) au produit $B \times P(C^q)$ et le résultat de Stoll rappelé plus haut s'applique.

Pour définir les champs méromorphes d'éléments de contact de dimensions supérieures à 1, on peut considérer, pour tout entier p :

$\overset{p}{\wedge} E$ dont la fibre en $x \in B$ est $\overset{p}{\wedge} E_x$;

$P\left(\overset{p}{\wedge} E\right)$ dont la fibre en $x \in B$ est $P\left(\overset{p}{\wedge} E_x\right)$.

Notons encore π la projection de $\overset{p}{\wedge} E$ sur $P\left(\overset{p}{\wedge} E\right)$. Pour chaque $x \in B$, on considère la variété de Grasmann de dimension p de E_x (*i.e.* l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de E_x). L'ensemble de toutes ces Grassmanniures, pour x parcourant B, constitue un espace fibré analytique complexe dont les sections méromorphes sont les champs méromorphes d'éléments de contact de dimension p. Or, pour tout $x \in B$, la fibre en x de cet espace fibré s'identifie à l'image par π, dans $P\left(\overset{p}{\wedge} E\right)$ du cône des p-vecteurs décomposables de $\overset{p}{\wedge} E_x$. Les champs méromorphes d'éléments de contact de dimension p sur B s'identifient donc aux sections méromorphes de l'espace fibré projectif analytique complexe $P\left(\overset{p}{\wedge} E\right)$ qui prennent leurs valeurs dans l'image par π des p-vecteurs décomposables de $\overset{p}{\wedge} E$.

Donc, classer les champs méromorphes d'éléments de contact de dimension p — entier supérieur ou égal à 1 — sur une variété analytique complexe conduit à classer les sections méromorphes d'un espace fibré projectif associé à un espace fibré vectoriel.

Nous allons nous poser le problème sous une forme plus générale : classer les sections méromorphes — lorsqu'elles existent — d'un espace fibré projectif analytique complexe **P** non nécessairement associé à un espace fibré vectoriel.

E désignera désormais un espace fibré vectoriel analytique complexe vectoriel de base B mais non nécessairement l'espace fibré des vecteurs tangents à B;

P(E) sera toujours l'espace fibré projectif associé à E π la projection canonique de (E — B) sur P(E);

P sera un espace fibré projectif analytique complexe de base B.

Nous appellerons *projection admissible* de (E-B) sur **P** — lorsqu'il en existe — une projection, ρ, de (E — B) sur **P** satisfaisant aux conditions :

1) ρ commute avec les projections de **P** et E sur B;

2) il existe un isomorphisme d'espaces fibrés analytiques complexes, θ, de P(E) sur **P** tel que :

$$\theta \circ \pi = \rho.$$

(On vérifie que, ρ étant donné, θ est unique : nous l'appellerons isomorphisme associé à ρ).

Tout couple (E, ρ) formé d'un espace fibré vectoriel analytique complexe de base B, E, et d'une projection admissible de (E-B) sur **P**, ρ, sera appelé *couple associé* à **P** (par exemple, (E, π) est un couple associé à P(E)).

II. Classification des couples associés à P.

Nous appellerons isomorphisme de couples associés à **P** :

$$(E_1, \rho_1) \xrightarrow{\psi} (E_2, \rho_2),$$

un isomorphisme d'espaces fibrés vectoriels :

$$E_1 \xrightarrow{\psi} E_2$$

rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\rho_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\rho_2"] \\ & \mathbf{P} & \end{tikzcd}$$

Nous dirons que deux couples sont *de même classe* s'ils sont isomorphes.

Nous noterons $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ l'ensemble des classes de couples pour cette relation.

Théorème 1. — $\mathcal{C}(\mathbf{P})$, *s'il est non vide, est un espace simplement homogène de* $H^1(B, C^*_\omega)$ — C^*_ω *étant le faisceau des applications analytiques des ouverts de* B *dans* C^*.

Voici comment $H^1(B, C^*_\omega)$ opère sur $\mathcal{C}(\mathbf{P})$:

Identifions $H^1(B, C^*_\omega)$ à l'ensemble des classes, pour l'isomorphie, des espaces fibrés en droites analytiques complexes de base B. Soit Δ un espace fibré en droites analytique complexe de base B. Si E est muni d'une projection admissible, ρ, sur **P**, $E \otimes \Delta$ peut l'être également : en effet P(E) et $P(E \otimes \Delta)$ sont isomorphes. Soit φ l'isomorphisme qui à $d_x \in P(E)_x$ ($x \in B$) associe $d_x \otimes \Delta_x$, soit θ l'isomorphisme de P(E) sur **P** associé à ρ; $\theta \circ \varphi^{-1}$ est un isomorphisme de $P(E \otimes \Delta)$ sur **P**. Soit $\rho \otimes \Delta$ la projection admissible de $E \otimes \Delta$ sur **P** qui lui est associée : $(E \otimes \Delta, \rho \otimes \Delta)$ est un couple associé à **P**.

On vérifie que si $(E_1\rho)$ et (E_1, ρ_1) appartiennent à une même classe (*i.e* sont isomorphes) et si Δ et Δ_1 sont isomorphes (donc définissent le même élément de $H^1(B, C^*_\omega)$ alors $(E, \rho)\otimes\Delta$ et $(E_1, \rho_1)\otimes\Delta_1$ sont isomorphes (*i.e.* appartiennent à une même classe). On a donc bien défini une opération de $H^1(B, C^*_\omega)$ sur $\mathcal{C}(P)$.

On démontre que $H^1(B, C^*_\omega)$ opère comme un groupe transitivement et simplement.

III. Sections holomorphes d'un espace fibré vectoriel analytique complexe incluses dans une section méromorphe d'un espace fibré projectif analytique complexe P.

Soit (E, ρ) un couple associé à **P**;
Γ une section méromorphe de **P**;
σ une section holomorphe de E sur un ouvert U de B.
La section σ sera dite *incluse dans* Γ *par* ρ si :

$$\forall x \text{ régulier pour } \Gamma, \quad \begin{cases} \text{soit } \sigma(x) = 0 \\ \text{soit } \rho\circ\sigma(x) = \Gamma(x) \ \text{ si } \ \sigma(x) \neq 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(x)$ désigne la valeur — bien déterminée — de Γ au point régulier x.

Il est aisé de voir que la donnée d'une section holomorphe non identiquement nulle de E définit, par ρ, une section méromorphe unique de **P** où elle soit incluse.

Inversement, peut-on, étant donné une section Γ méromorphe de **P**, trouver un couple (E, ρ) associé à **P** tel que E possède une section holomophe, σ, définissant, par ρ, la section Γ? La réponse — qui n'est pas immédiate à l'établir — est affirmative : il existe un tel couple. De plus, tous les couples associés à **P** possédant cette propriété sont isomorphes et l'on peut associer à Γ, de façon *canonique*, un couple $(E(\Gamma), \rho(\Gamma))$ et une section holomorphe $s(\Gamma)$ de $E(\Gamma)$ définissant Γ par ρ.

Les couples associés à **P** étant classés, on en déduira une classification des sections méromorphes de **P**. Dans le cas où la base B de **P** est compacte, nous pourrons d'une part étudier la structure d'une classe de sections méromorphes de **P** et, d'autre part, munir l'ensemble des classes d'une structure ordonnée.

1. Étude locale.

Tout $x \in B$ admet un voisinage $V(x)$ au dessus duquel $P_{V(x)}$ soit isomorphe au produit $B \times P(C^n)$: soit θ un isomorphisme $B \times P(C^n) \to P$; $(B \times C^n, \theta \circ \pi)$ est un couple associé à $P_{V(x)}$.

Pour simplifier les notations, nous allons supposer, pour cette étude locale, que $P = B \times P(C^n)$.

Théorème 2. — *Soit* Γ *une section méromorphe de* $P = B \times P(C^n)$. $\forall x \in B$, $\exists U(x)$ — *voisinage de* x *dans* B *et* $\exists$ s — *section holomorphe de* $B \times C^n$ *au-dessus de* $U(x)$ *telle que :*

1°) s *soit incluse dans* Γ *au-dessus de* $U(x)$.

2°) $\forall \sigma$ — *section holomorphe de* E *incluse dans* Γ *au-dessus de* $V \subset U(x)$ —

$$\forall x' \in V,$$
$$\sigma(x') = s(x') \times h(x')$$

où h *est une fonction holomorphe sur* V.

Démonstration. — Γ est défini par $(n-1)$ fonctions méromorphes sur B (cf I) :

$$\frac{y_i}{y_1} = \psi_i(x_1, \ldots, x_q)$$

$\forall x \in B$, chacune ce ces fonctions, étant définie sur un voisinage de x par le quotient de deux fonctions holomorphes, définit sur B un diviseur D_i et nous allons utiliser le fait que sur une variété complexe le groupe des diviseurs est réticulé.

Notons :

$$D_i = D_i^+ - D_i^-$$

où D_i^+ et D_i^- sont les plus petits diviseurs positifs dont D_i soit la différence.

Posons :

$$D'_1 = \sum_{i=2}^{n} D_i^-$$
$$D'_i = D_i + D'_1 \ (i = 2, \ldots, n)$$
$$D = \text{P.G.C.D. } D'_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

L'on a :

$$D'_1 - D > 0$$
$$D_i + D'_1 - D > 0$$

D'_1 — D est donc défini au voisinage de x par une fonction holomorphe, φ, non identiquement nulle. Les équations :

$$y_1 = \varphi, y_2 = \varphi \times \psi_2, \ldots, y_n = \varphi \times \psi_n$$

définissent au voisinage de x une section holomorphe de E, s, qui a les propriétés énoncés plus haut.

Une section holomorphe, s, de $P \times C^n$ jouissant, au dessus d'un ouvert U de B, de la propriété 2°) du Théorème sera dite *génératrice pour* Γ au dessus de U. Plus généralement si (E, ρ) est un couple associé à un espace fibré projectif **P** nous dirons qu'une section holomorphe, s, de E est génératrice par ρ pour une section méromorphe Γ de **P** au dessus d'un ouvert U de B si :

$\forall\sigma$ incluse dans Γ au dessus de $V \subset U$, $\sigma = s \times h$ où h est une fonction holomorphe sur V.

Le théorème énoncé plus haut établit l'existence, dans le cas où $\mathbf{P} = B \times P(C^n)$, pour tout $x \in B$, d'un voisinage U de x et d'une section de $B \times C^n$ génératrice pour Γ au dessus de U. Ce résultat étant local, il vaut aussi dans le cas où **P** est un espace fibré projectif analytique complexe quelconque; l'on peut aussi, dans l'énoncé du théorème remplacer $B \times C^n$ par n'importe quel espace fibré vectoriel analytique complexe muni d'une projection admissible, ρ, sur **P** : il faut alors remplacer « incluse » par « incluse par ρ ».

On établit aisément les propriétés énoncés ci-dessous des sections de E génératrices pour Γ par ρ — (E, ρ) étant un couple associé à **P** et Γ une section méromorphile de **P**.

g_1) Soit s une section de E génératrice pour Γ par ρ. Si $s(x)$ est nul, alors, quel que soit σ, section holomorphe de E incluse dans Γ par ρ au-dessus d'un voisinage de x, $\sigma(x)$ est nul.

g_2) Soit σ une section holomorphe de E incluse dans Γ par ρ au-dessus d'un ouvert U de B, x un point de U. Si $\sigma(x)$ n'est pas nul, σ est génératrice pour Γ par ρ au voisinage de x.

g_3) Un point x de B est singulier pour Γ si et seulement si il existe une section de E génératrice pour Γ par ρ nulle en ce point.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition. — *Les sections de* E *génératrices pour* Γ *sont les sections holomorphes de* E *incluses dans* Γ *et dont l'ensemble* *des zéros coïncide avec l'ensemble des points singuliers de* Γ — *ensemble qui est de codimension analytique supérieure ou égale à deux.*

2. Étude globale: théorème d'existence.

Nous appellerons *triple associé* à $(\mathbf{P}, \Gamma)$ — Γ étant une section méromorphe de l'espace fibré analytique complexe projectif $\mathbf{P}$ — tout triple (E, s, ρ) où (E, ρ) est un couple associé à $\mathbf{P}$ et s une section génératrice pour Γ par ρ.

Nous allons établir le

Théorème 3. — *Étant donné* $(\mathbf{P}, \Gamma)$ (*cf ci-dessus*), *il existe un triple* $(E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma))$ *canoniquement associé à* $(\mathbf{P}, \Gamma)$.

D'où il résulte :

Corollaire. — *Si* $\mathbf{P}$ *possède une section méromorphe, il existe un couple associé à* $\mathbf{P}$.

Pour établir le théorème d'existence, on procède de la façon suivante :

a) On définit les isomorphismes de triples

$$(E, s, \rho) \to (E', s', \rho')$$

par un isomorphisme de couples :

$$(E, \rho) \,\psi \to (E', \rho')$$

tel que :

$$\psi \circ s = s'$$

b) On démontre que si, au-dessus d'un ouvert U de B il existe deux triples associés à $(\mathbf{P}_U, \Gamma_U)$ — $\mathbf{P}_U$ et Γ_U désignant les restrictions à U de $\mathbf{P}$ et de Γ — il existe un isomorphisme unique entre ces triples.

c) L'étude locale faite plus haut permet d'affirmer l'existence locale de triples associés à $(\mathbf{P}, \Gamma)$: tout $x \in B$ admet un voisinage assez petit, U, pour que $\mathbf{P}_U$ soit isomorphe à $U \times P(C^n)$. $U \times C^n$ est muni d'une projection admissible, ρ, sur $\mathbf{P}_U$. D'après le théorème 2, x possède, dans U, un voisinage U′ assez petit pour qu'il existe une section de $U \times C^n$, s, génératrice pour $\Gamma_{U'}$, par ρ. $(U' \times C^n, s, \rho)$ est un triple associé à $(\mathbf{P}_{U'}, \Gamma_{U'})$.

d) Globalement, si l'on s'attache seulement à montrer l'existence d'un triple associé à (P, Γ), sans souci de canonicité, il suffit de considérer un recouvrement de B par des ouverts U_i tels qu'il existe, pour chaque i, un triple $(U_i \times C^n, s_i, \rho_i)$.

Sur $U_i \cap U_j$ il existe un isomorphisme g^{ji} (cf *b*) unique :

$$(U_i \cap U_j \times C^n, s_{i U_i \cap U_j}, \rho_i) \to (U_i \cap U_j \times C^n, s_{j U_i \cap U'_j}, \rho_j)$$

L'unicité de g^{ji} pour tout couple (i, j) entraîne que quels que soient i, j, k, l'on a, sur $U_i \cap U_j \cap U_k$:

$$g^{kj} \circ g^{ji} = g^{ki}.$$

Par suite, les g^{ji} définissent sur l'espace somme $\Sigma\, U_i \times C^n$ une relation d'équivalence R; $\Sigma\, U_i \times C^n/R$ est un espace fibré vectoriel analytique complexe muni d'une projection admissible, ρ, et d'une section holomorphe, s, qui, restreintes à U_i, coïncident respectivement avec ρ_i et s_i. La section s est génératrice pour Γ par ρ.

c) Pour construire *canoniquement* $(E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma))$, il faut considérer *tous* les triples de la forme $(U \times C^n, s, \rho)$; ils forment un faisceau d'ensembles, $\mathfrak{U}$, $GL(n, C)_\omega$-principal — où $GL(n, C)_\omega$ désigne le faisceau de groupes des applications analytiques des ouverts de B dans le groupe des automorphismes de C^n — *i.e* :

i) Tout $x \in B$ admet un voisinage, $U(x)$ tel que $\mathfrak{U}(U(x))$ soit non vide.

ii) Quel que soit U — ouvert de B tel que $\mathfrak{U}(U)$ soit non vide, $GL(n, C)_\omega(U)$ opère sur $\mathfrak{U}(U)$ de la façon suivante.

Soit $(U \times C^n, s, \rho) \in \mathfrak{U}(U)$ et $g \in GL(n, C)_\omega(U)$; notons $\bar{g}$ l'automorphisme de $U \times C^n$ muni de sa structure d'espace fibré analytique complexe de base U :

$$\forall x \in U, \forall z \in C^n, \bar{g} : (x, z) \to (x, g(x)z)$$

On pose :

$$g(U \times C^n, s, \rho) = (U \times C^n, \bar{g} \circ s, \rho \circ \bar{g}^{-1})$$

iii) L'opération définie en *ii*) est simple et transitive.

Notons $\tilde{\mathfrak{U}}$ l'espace étalé de germes associé au faisceau $\mathfrak{U}$, $\tilde{\mathcal{G}}_x$ le groupe des germes en $x \in B$ d'applications analytiques de B dans le groupe des automorphismes de C^n valant l'identité en x : $\tilde{\mathcal{E}}_x$ est un sous-groupe invariant de $\tilde{GL}(n, C)_{\omega x}$ — groupe des germes en x d'applications de B dans le groupe des automorphismes de C^n. $\tilde{\mathfrak{U}}_x$ étant un espace simplement homogène de $\tilde{GL}(n, C)_{\omega x}$, $\tilde{\mathcal{E}}_x$ définit sur $\tilde{\mathfrak{U}}_x$ une relation d'équivalence, notée $(\tilde{\mathcal{E}}_x)$.

L'ensemble $E(\Gamma)$ est l'ensemble :

$$\bigsqcup_{x\in B} \{\mathfrak{U}_x/(\tilde{\mathcal{E}}_x)\}$$

On démontre qu'il existe sur $E(\Gamma)$ une unique structure d'espace fibré vectoriel analytique complexe telle que l'espace étalé correspondant des germes de sections holomorphes soit isomorphe à $\tilde{\mathfrak{U}}$.

Notons : $T = \bigsqcup_{U\in\mathcal{O}(B)} \mathfrak{U}(U)$ — où $\mathcal{O}(B)$ est l'ensemble des ouverts de B ;

$\forall\, t\in T,\ t = (U(t)\times C^n,\ s(t),\ \rho(t))$;

$\forall\, t, t'\in T$, $g_t^{t'}$ l'unique élément de $GL(n, C)_\omega(U(t)\cap U(t'))$ faisant passer de t à t' au-dessus de $U(t)\cap U(t')$.

L'ensemble $E(\Gamma)$ est alors le quotient de l'ensemble :

$$\{(t,\ x,\ y) \mid \quad t\in T, \quad x\in U(t), \quad y\in C^n\}$$

par la relation $\mathfrak{R}$:

$$(t, x, y) \sim (t', x', y') \quad \rightleftarrows \quad x = x' ;\ g_t^{t'}(x)y = y'.$$

Les cartes de $B\times C^n$ sur $E(\Gamma)$ définissant la structure fibrée analytique complexe de $E(\Gamma)$ sont les :

$$\begin{aligned}(t) : U(t)\times C^n &\to E(\Gamma)\\ (x, y) &\to \mathfrak{R}(t, x, y)\end{aligned}$$

et les changements de cartes sont les $g_t^{t'}$.

La projection $\rho(\Gamma)$ et la section $s(\Gamma)$ se définissent facilement par la condition de rendre, pour tout $t\in T$, commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} U(t)\times C^n \arrow[rr, "(t)"] \arrow[dr, "\rho(t)"'] & & E(\Gamma) \arrow[dl, "\rho(\Gamma)"] \\ & P & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U(t)\times C^n \arrow[rr, "(t)"] & & E(\Gamma) \\ & U(t) \arrow[ul, "s(t)"] \arrow[ur, "s(\Gamma)"'] & \end{tikzcd}$$

IV. Classification des sections méromorphes de P dans le cas où la base B est compacte.

A Γ nous avons associé canoniquement un triple $(E(\Gamma), s(\Gamma), \rho(\Gamma)$, donc un couple $(E(\Gamma), \rho(\Gamma))$; ce couple a une classe, k, dans $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ (cf II)e; k sera aussi la *classe de* Γ.

Nous allons définir :

a) Pour l'ensemble des sections d'une même classe k un espace projectif ambiant $P(k)$ dont il est un ouvert de Zariski (*i. e.* le complémentaire d'une variété algébrique).

b) Sur l'ensemble des classes, une structure ordonnée (dérivant de celle de $H^1(B, C^*_\omega)$.

Soit k une classe de sections méromorphes de **P**. Pour tout couple (E, ρ) associé à **P** de classe k, désignons par : $S(E)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes de E (B étant compact, $S(E)$ est de dimension finie) $P(S(E))$ l'espace projectif associé à $S(E)$.

Si, (E, ρ), (E', ρ') sont deux couples associés à **P** de classe k, ils sont isomorphes. De ce que B est compact, il résulte que l'ensemble de tous les isomorphismes $(E, \rho) \rightarrow (E', \rho')$ est un espace homogène de C^*; cet espace d'isomorphismes définit donc un isomorphisme unique de $P(S(E))$ sur $P(S(E'))$. (E, ρ), (E', ρ') décrivant k, l'ensemble des isomorphismes $P(S(E)) \rightarrow P(S(E'))$ correspondants définit sur $\bigsqcup_{(E,\rho)\in k} P(S(E))$ une relation d'équivalence. Le quotient de $\bigsqcup_{(E,\rho)\in k} P(S(E))$ par cette relation est l'espace projectif $P(k)$ (isomorphe à $P(S(E))$ pour tout $(E, \rho) \in k$).

Nous allons utiliser la

PROPOSITION. — *Soit* Γ *une section méromorphe de* P *dont la base* B *est compacte;* (E, ρ) *un couple associé à* P.

Si E possède une section globale, s, génératrice pour Γ par ρ, toute section, σ, holomorphe, de E incluse dans Γ par ρ et non identiquement nulle est génératrice pour Γ par ρ et s'écrit λs où $\lambda \in C^*$.

En effet, $\sigma = hs$ où h est une fonction holomorphe sur B. B étant compact, h est constant sur B.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \{k\} \arrow[rr, "I_{\{k\}}^{M(P)}"] \arrow[dr, "\eta_\rho"'] & & M(P) \\ & P(S(E)) \arrow[ur, "\gamma_\rho"'] & \end{tikzcd}$$

où $\{k\}$ désigne l'ensemble des sections méromorphes de classe k;

M(P) l'ensemble de toutes les sections méromorphes de P;

(E, ρ) un couple de classe k;

$I_{\{k\}}^{M(P)}$ l'inclusion de $\{k\}$ dans M(**P**);

η_ρ l'application ainsi définie :

Soit $\Gamma \in \{k\}$; (E, ρ), étant de classe k, est isomorphe à (E(Γ), $\rho(\Gamma)$); donc E possède une section génératrice pour Γ par ρ, s, et toutes les sections de E incluses dans Γ par ρ lui sont homothétiques de rapport non nul (cf. la proposition ci-dessus); ces sections incluses dans Γ par ρ (qui sont aussi génératrices) définissent donc un élément unique, $\eta_\rho(\Gamma)$, de P(S(E));

γ_ρ l'application ainsi définie :

Soit $d \in$ P(S(E)); π désignant la projection canonique de S(E) sur P(S)E)), $\pi^{-1}(d)$ est constitué, dans S(E), par des sections holomorphes de E toutes homothétiques entre elles : elles définissent, par ρ, une même section méromorphe de **P** où elles soient incluses : $\gamma_\rho(d)$.

On démontre que ce diagramme est commutatif; par suite, η_ρ est injective.

D'autre part, soit $d \in$ P(S(E)). Les éléments de $\pi^{-1}(d)$ sont des sections de E se déduisant les unes des autres par multiplication par un nombre complexe non nul : elles ont donc le même ensemble de zéros, Z(d). D'où une correspondance :

$$\begin{array}{rcl} P(S(E)) & \to & B \\ d & \to & Z(d) \end{array}$$

Soit $\sigma \in \pi^{-1}(d)$; σ est incluse dans la section méromorphe $\gamma_\rho(d)$ qu'elle définit. Elle est *génératrice* pour cette section méromorphe par ρ si et seulement si l'on a :

$$\mathrm{cod}\,.\,Z(d) \geqslant 2$$

Or, σ est génératrice par ρ pour $\gamma_\rho(d)$ si et seulement si $\gamma_\rho(d) \in \{k\}$. En effet, si σ est génératrice par ρ pour $\gamma_\rho(d)$, (E, σ, ρ) est un triple associé à (**P**, $\gamma_\rho(d)$). Mais à $\gamma_\rho(d)$ est associé canoniquement $(\mathrm{E}(\gamma_\rho(d)),\ s(\gamma_\rho(d)),\ \rho(\gamma_\rho(d))$. Ces deux triples sont isomorphes (cf Théorème 3, démonstration $\bar{b}$)) et (E, ρ) est isomorphe à $\mathrm{E}(\gamma_\rho(d)),\ \rho(\gamma_\rho(d)))$; $\gamma_\rho(d)$ est donc de classe k. D'autre part, si $\gamma_\rho(d)$ est de classe k, toutes les sections holomorphes de E incluses dans $\gamma_\rho(d)$ par ρ sont génératrices.