ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BRELOT

J. L. DOOB

Limites angulaires et limites fines

Annales de l'institut Fourier, tome 13, nº 2 (1963), p. 395-415

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_2_395_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13, 2 (1963), 395-415.

LIMITES ANGULAIRES ET LIMITES FINES [1]

par M. BRELOT (Paris) **et J. L. DOOB** (Urbana)

I. — INTRODUCTION

1. On connaît le résultat de Fatou (1906) [7] qui affirme, pour une fonction harmonique u bornée dans un domaine circulaire, l'existence de limites radiales ou même « angulaires » (non tangentielles), c'est-à-dire dans tout domaine de Stolz [2] de sommet X, en presque tout point-frontière X. Il fut diversement généralisé. On passa aux fonctions bornées dans un sens et aux limites angulaires dans une boule de $R^n (n \geqslant 2)$ ou, ce qui revient au même par une transformation de Kelvin, dans un demi-espace; il y a encore des limites angulaires finies presque partout. Doob [4] étendit le résultat au quotient u/h de deux fonctions harmoniques > 0, la limite angulaire étant finie, sur la frontière, presque partout au sens de la mesure qui permet de représenter h selon une intégrale de Poisson-Stieltjes. Par ailleurs Calderon [1] améliora l'hypothèse de Fatou en supposant la fonction u bornée seulement sur un domaine de Stolz de sommet X, pour tous les points X d'un ensemble-frontière e, le résultat étant l'existence de limites angulaires de u, finies, presque partout sur e. Carleson [2]

(1) Développement d'une conférence donnée au Séminaire de théorie du potentiel (Paris, déc. 1962). L'ouvrage récent de Constantinescu-Cornea [3^{bis}] contient, dans le cas de deux dimensions, certains résultats voisins. Nous ne pouvons sur les épreuves qu'y faire de brèves allusions.

(2) Dans la boule ou le demi-espace de R^n, soit Ω, on appellera domaine (ouvert connexe) de Stolz $\mathcal{C}$ de sommet X (sur la frontière), de rayon ρ, l'intersection avec une boule ouverte de centre X, rayon ρ, d'un domaine angulaire ou conique de révolution, de sommet X, contenu dans Ω, ainsi que sa frontière (X excepté). On dira qu'il est normal si l'axe est normal (à la frontière). On dira que $\mathcal{C}'$ est plus aigu que $\mathcal{C}$ s'il est contenu ainsi que sa frontière (sauf X) dans $\mathcal{C}$ au voisinage de X.

alla plus loin en supposant la fonction précédente seulement bornée dans un sens dans les mêmes domaines, et en se limitant, d'ailleurs inutilement comme on verra, au cas où e est presque toute la frontière.

2. D'autre part l'introduction de la frontière de Martin, non seulement pour un domaine borné de R^n, mais pour un espace de Green Ω et l'usage de la pseudo-limite ou limite fine en un point-frontière minimal, au sens de L. Naïm [9], allait conduire Doob [5] à des résultats d'expression analogue dans des conditions bien plus générales; le quotient u/h de deux fonctions harmoniques > 0 ou même surharmoniques > 0 dans Ω admet une limite fine *finie* à la frontière de Martin presque partout au sens de la mesure μ^h associée à h dans la représentation de Riesz-Martin. Il donnait même une transposition analogue des résultats de Calderon-Carleson, améliorant son théorème fondamental.

Aussi était-il fort ennuyeux de ne pouvoir jusqu'ici déduire de ces résultats très généraux les théorèmes sur les limites angulaires dans la boule ou le demi-espace. Nous allons ici combler cette lacune et approfondir les relations entre ces deux types de limite. Nous montrerons d'abord que la limite angulaire en un point est, pour le quotient de fonctions harmoniques > 0 données au voisinage, conséquence de la limite fine en ce point et même équivaut à la notion plus faible de limite semi-fine, de signification valable avec la frontière générale de Martin et invariante par transformation conforme. Le théorème général de Doob fournit alors celui des limites angulaires de Fatou-Doob, puis même celui de Calderon-Carleson que nous traiterons dans le cas d'un quotient u/h (on peut même donner des formes plus générales et locales des hypothèses et résultats). Cela donnera l'occasion de comparer, dans des résultats encore « statistiques » mais de sens inverse, les limites fines et angulaires de fonctions quelconques, en reprenant et étendant à R^n des résultats connus dans le cas plan (Constantinescu-Cornea [3]) [3], [3bis], Doob [6]).

Ainsi les théorèmes classiques sur les limites angulaires, qui n'ont pas le caractère invariant des limites fines, ne sont

[3] Ces auteurs utilisent en fait des notions voisines des limites et valeurs d'adhérence fine d'une fonction φ en un point-frontière minimal et remarquent que ce sont les mêmes si φ est continue ([3bis] p. 152).

plus, pour les fonctions considérées (de type harmonique ou quotients de telles fonctions) que des applications très particulières de la théorie des limites fines. Il resterait à retrouver de même les résultats sur les limites radiales de potentiels, ce qui sera l'objet d'un article ultérieur.

II. — RAPPELS SUR L'EFFILEMENT ET LES LIMITES FINES A LA FRONTIERE DE MARTIN. SEMI-EFFILEMENT.

3. Soit Ω un espace de Green, $G_{y_0}(y)$ la fonction de Green de pôle y_0, $\hat{\Omega}$ l'espace compact de Martin où Ω est partout dense, $\Delta = \hat{\Omega} - \Omega$ la frontière de Martin, Δ_1 la partie formée de points minimaux, $K(X, y)$ ou brièvement K_X, la fonction minimale associée à $X \in \Delta_1$ (et égale à 1 en y_0 fixé). Si Ω est une boule ou un demi-espace de $R^n (n \geqslant 2)$, $\hat{\Omega}$ est identifiable à l'adhérence dans $\overline{R}^n$ (R^n pourvu du point à l'infini).

Un ensemble $e \subset \Omega$ est effilé [4] en $X \in \Delta_1$ si $R_{K_X}^e(y) \not\equiv K(X, y)$ ($R_{K_X}^e$ réduite de K_X pour e est l'enveloppe inférieure des fonctions dans Ω surharmoniques $\geqslant 0$ majorant K_X sur e). D'où un premier exemple d'ensemble effilé : $\{y ; K_X < \lambda\}$ où $\lambda < \sup K_X$, est effilé puisque $\inf(K_X, \lambda)$ y majore K_X, mais est différente de K_X dans Ω.

Rappelons que si e est effilé en X, $R_{K_X}^{e \cap \sigma} \to 0$ en tout y, selon le filtre des sections du filtre des voisinages σ de X dans $\hat{\Omega}$.

Les complémentaires dans Ω des ensembles effilés en X y forment un filtre $\mathcal{F}_X$ strictement plus fin que la trace $\mathcal{V}_X$ sur Ω du filtre des voisinages de X dans $\hat{\Omega}$. Les notions de lim, lim sup, et lim inf, valeur d'adhérence selon $\mathcal{F}_X$ pour des fonctions dans Ω seront dites fines. Elles jouissent des propriétés suivantes :

(α) Soit f appliquant Ω dans un espace à base dénombrable; la limite fine de f en X si elle existe est limite en X dans $\hat{\Omega}$ hors d'un ensemble convenable effilé en X. Toute valeur

[4] Des critères équivalents sont l'existence de φ surharmonique > 0 dans Ω telle que : $\liminf_{\substack{y \to X \\ y \in e}} \frac{\varphi(y)}{K_X(y)} > \liminf_{\substack{y \to X \\ y \in \Omega}} \frac{\varphi(y)}{K_X(y)}$ $\left(\text{qui vaut } \inf_{y \in \Omega} \frac{\varphi(y)}{K_X(y)}\right)$ ou encore la même inégalité en remplaçant $K_X(y)$ par $G_{y_0}(y)$. Voir Naïm [9]. On ne parlera dans ce mémoire que de cet *effilement à la frontière* (relatif à un espace donné).

d'adhérence fine de f en X est limite en X dans $\hat{\Omega}$ sur un ensemble convenable non effilé en X; si f est réelle, la lim sup (ou inf) de f en X est lim sup (ou inf) dans $\hat{\Omega}$ hors d'un ensemble convenable effilé en X.

Soulignons enfin que l'ensemble $\sigma_\lambda : \left\{ y \in \Omega, \dfrac{K_X(y)}{G_{y_0}(y)} \geqslant \lambda \right\}$ est de complémentaire effilé en X et décrit (pour $\lambda > 0$ fini) une base d'un filtre $\mathcal{F}'_X$ plus fin que celui des voisinages, mais l'effilement de e équivaut à ce que $R_{K_X}^{e \cap \sigma_\lambda} \to 0$ (en un point ou tout point) pour $\lambda \to +\infty$.

Nous renvoyons pour tout cela à Naïm [9] et Doob [5].

4. Ajoutons une notion de semi-effilement (considérée sous une forme équivalente par Mme Lelong [8] dans le demi-espace).

e sera dit semi-effilé en $X \in \Delta_1$ si $R_{\lambda G_{y_0}}^{e \cap \sigma_\lambda}(y)$ qui minore $R_{K_X}^{e \cap \sigma_\lambda}(y)$ tend vers 0 pour $\lambda \to +\infty$ (en un ou tout y). La sous-additivité de la réduite relative à des ensembles montre que la réunion finie d'ensembles semi-effilés est semi-effilée.

Les complémentaires dans Ω des ensembles semi-effilés en X forment fonc un filtre $\mathcal{F}''_X$ plus fin que $\mathcal{F}_X$:

$$\mathcal{V}_X \prec \mathcal{F}'_X \prec \mathcal{F}_X \prec \mathcal{F}''_X.$$

Les notions topologiques correspondantes seront dites semi-fines. Soulignons que la propriété « λ est valeur d'adhérence semi-fine de f en X » signifie : quel que soit le voisinage $\mathcal{W}$ de λ, l'ensemble $\{y, f(y) \in \mathcal{W}\}$ n'est pas semi-effilé en X.

Remarque. — D'une suite d'ensembles e_n semi-effilés en X, on déduit en choisissant convenablement $\lambda_n \to +\infty$, un ensemble $E = \bigcup \left(e_n \cap \sigma_{\lambda_n} \cap \complement \sigma_{\lambda_{n+1}}\right)$ semi-effilé.

Il suffit de prendre λ_n croissant, $\to +\infty$, tel que $\lambda \geqslant \lambda_n$ entraîne

$$\lambda R_{G_{y_0}}^{e_n \cap \sigma_\lambda}(y_1) < 1/n^2 \quad (y_1 \text{ fixé}).$$

Car alors si

$$\lambda_n \leqslant \lambda < \lambda_{n+1}, \qquad \lambda R_{G_{y_0}}^{E \cap \sigma_\lambda}(y_1) \leqslant \lambda R_{G_{y_0}}^{e_n \cap \sigma_\lambda}(y_1) + \sum_{i \geqslant n+1} \lambda_i R_{G_{y_0}}^{e_i \cap \sigma_\lambda}(y_1).$$

D'après cela la lim sup (ou inf) semi-fine de f réelle vaut la lim sup (ou inf) selon $\mathcal{F}''_X$ hors d'un ensemble convenable semi-effilé.

5. *Cas du demi-espace* (5) Ω de R^n (voir Mme Lelong [8], Naïm [9]). Si d_y est la distance de y au plan-frontière, $K_X(y)$ vaut $\frac{d_y}{|X-y|^n}$ à un facteur près et $G_{y_0}(y)$ est, à un facteur près, équivalent à $d_y(y \to X)$; $\frac{K_X(y)}{G_{y_0}(y)}$ est donc à un facteur près équivalent à $1/|X-y|^n(y \to X)$ et $\mathcal{F}'_X \equiv \mathcal{V}_X$.

Rappelons les critères d'effilement et semi-effilement du type de Wiener, en X. e étant donné, soit e_p l'intersection avec l'intersphère

$$S_p = \{s^{p+1} < |X-y| \leqslant s^p\} \quad 0 < s < 1$$

et $\gamma_p = R_{G_{y_0}}^{e_p}(y_1)$ (y_0, y_1 fixés quelconques).

La convergence de la série $\Sigma \frac{\gamma_p}{s^{np}}$ caractérise l'effilement.

La propriété: $\gamma_p/s^{np} \to 0$ $(p \to \infty)$ caractérise le semi-effilement.

On peut y remplacer l'intersphère par le lieu

$$1/s^{np} \leqslant \frac{K(X, y)}{G_{y_0}(y)} < 1/s^{n(p+1)}$$

et si e est dans un domaine de Stolz, on voit aussitôt qu'on peut remplacer dans ces critères γ_p/s^{np} par $m_p/s^{(n-2)p}$ où m_p est la masse totale associée à $\hat{R}_1^{e_p}(y)$, c'est-à-dire la capacité greenienne de e_p.

6. *Exemples dans le demi-espace.*

On sait (Mme Lelong [8]) que dans $R^n (n \geqslant 3)$ l'effilement en X de e situé dans un domaine de Stolz de sommet X équivaut à l'effilement classique dans R^n. Cela, qui permet de simplifier des démonstrations pour $n \geqslant 3$, ne sera pas utilisé.

Théorème 1. — *Si le contingent de $e \subset \Omega$ en X est contenu dans l'hyperplan-frontière, c'est-à-dire si*

$$d_y/|X-y| \to 0 \; (y \in e, \; y \to X),$$

e est semi-effilé en X.

(5) On peut montrer que les notions d'effilement et de semi-effilement en X dans le demi-espace sont équivalentes à celles relatives à la demi-boule d'intersection avec une boule de centre X, ou à tout domaine partiel contenant cette demi-boule, les points voisins de X sur la frontière étant identifiables à des points de la frontière de Martin de ce domaine.

La mesure harmonique $l_p(y)$ de l'intersection avec la frontière de l'intersphère

$$S'_p = \{y;\ s^{p+2} < |X - y| < s^{p-1}\}$$

admet sur l'ensemble

$$\{y,\ d_y \leqslant \alpha s^p,\ y \in S_p \cap \Omega,\ \alpha \text{ fixé } > 0\}$$

une borne inférieure $\lambda > 0$, qui par raison d'homothétie de centre X, ne dépend pas de p. Mais alors pour p assez grand, $R_{G_{y_0}}^{e_p}(y)$ est majoré, à un facteur fixe près par $d_p l_p(y)$ (6), où $d_p = \sup\ d_y(y \in e_p)$ satisfait à $d_p/s^p \to 0$.

Comme $l_p(y_1)$ (y_1 fixé) est de l'ordre de la mesure de Lebesgue de S'_p sur la frontière c'est-à-dire de l'ordre de $(s^p)^{n-1}$, on voit que le γ_p du critère est ici majoré à un facteur près, par $d_p(s^p)^{n-1}$ d'où $\gamma_p/s^{np} \to 0$.

Théorème 2. — *Dans le cas plan, avec les axes* Xx_1 *(frontière),* Xx_2 *(normale) considérons l'ensemble* E *du demi-plan* $x_2 > 0$ *défini par* $0 < x_1 < a$, $x_2 \leqslant f(x_1)$ *où* f *est croissante, prolongée par sa limite* 0 *à l'origine où elle admet alors une dérivée nulle.*

Alors E *est effilé en* X *si et seulement si* $\int_0^\varepsilon \frac{f(x_1)}{x_1^2}\,dx_1$ *est fini* (6 bis).

D'abord le γ_p correspondant est, d'après la démonstration précédente, majoré à un facteur près par $s^p f(s^p)$. D'autre part, $R_{G_{y_0}}^{e_p}(y_1)$ majore à un facteur près le produit de $f(s^{p+1})$ par la mesure harmonique en y_1, dans le demi-plan $x_2 > f(s^{p+1})$, de l'intervalle $s^{p+1} < x_1 < s^p$.

Cette mesure harmonique est de l'ordre de s^p, donc γ_p majore à un facteur près > 0 $s^p f(s^{p+1})$. Ainsi γ_p/s^{2p} majore et minore à des facteurs près > 0 $\frac{f(s^{p+1})}{s^{p+1}}$ resp. $\frac{f(s^p)}{s^p}$. Mais il en est de même de $\int_{s^{p+1}}^{s^p} \frac{f(x_1)}{x_1^2}\,dx_1$ d'où le résultat.

Extension. — Une adaptation facile montre que dans le demi-espace de R^n, l'ensemble de révolution autour de la

(6) Car $G_{y_0}(y) \leqslant K d_y$ au voisinage de X (K convenable > 0) et, sur e_p (p assez grand), $d_p l_p(y)$ majore λd_y donc $\frac{\lambda}{K} G_{y_0}(y)$.

(6 bis) On peut montrer que le théorème est valable aussi en remplaçant E par par la courbe $x_2 = f(x_1)$.

normale en X, engendré par l'ensemble E plan de type précédent est effilé sous les mêmes conditions, c'est-à-dire si la section méridienne de l'ensemble est effilée dans son demi-plan.

III. — LIMITES ET VALEURS D'ADHÉRENCE ANGULAIRES. THEOREME FONDAMENTAL

7. DÉFINITIONS. — *Soit f une application dans un espace Ω' d'un domaine Ω de* $R^n (n \geqslant 2)$ *par exemple un demi-espace, ou seulement une partie de Ω suffisante pour les notions qui suivent; et soit X un point-frontière où la frontière admet une tangente ou plan tangent.*

On dira que λ est *limite angulaire* de f en X si $f \underset{x \in \mathcal{C} \to X}{\to} \lambda$ pour *tout* domaine de Stolz $\mathcal{C}$ de sommet X.

On dira que λ est *valeur d'adhérence angulaire* de f en X, si c'est une valeur d'adhérence de f pour la trace du filtre des voisinages de X sur *un* domaine de Stolz.

On pourra aussi parler de limite angulaire ou valeur d'adhérence angulaire relatives à un $\mathcal{C}$ déterminé, comme les notions relatives au filtre qui est la trace sur $\mathcal{C}$ du filtre des voisinages de X.

Observons déjà, grâce au th 1, que si Ω' est localement compact, toute valeur d'adhérence semi-fine λ de f en X est dans la fermeture de l'ensemble des valeurs d'adhérence angulaires en X. Sinon on trouverait des domaines normaux de Stolz dont la réunion appartient à $\mathcal{F}''_X$ et où f serait extérieur à un voisinage compact de λ.

Inégalité de Harnack. — Rappelons que si, dans R^n fixé, B est une boule ouverte de centre y_0, rayon R, sup $\dfrac{u(y)}{u(y_0)}$ pour toute fonction harmonique $u > 0$ dans B et tout y tel que $|y - y_0| \leqslant \alpha$. R est une fonction de α seul, soit $\theta(\alpha)$ qui tend vers 1 quand $\alpha \to 0$.

Capacité greenienne dans un demi-espace Ω de R^n.

C'est pour l'ensemble $e \subset \bar{e} \subset \Omega$, la masse totale de la « distribution capacitaire », ou mesure associée à $\hat{R}_1^e$ (potentiel obtenu par régularisation de la réduite, dit potentiel capacitaire).

Une similitude de rapport ρ conservant Ω multiplie la capacité par ρ^{n-2}.

Car elle multiplie les dérivées premières par $1/\rho$ et l'aire d'une variété à $n - 1$ dimensions par ρ^{n-1}; en considérant le flux de $\hat{R}_1^e$ sortant d'une boule de Ω contenant e, on obtient le résultat. On peut aussi utiliser le laplacien au sens de Schwartz.

Comme application immédiate :

Lemme 1. — *Considérons dans le demi-espace Ω une boule variable* B [7] *dont le rayon est proportionnel dans le rapport fixe $\alpha (0 < \alpha < 1)$ à la distance d du centre au plan frontière.*

La capacité greenienne de B *dans Ω est de la forme $\alpha_0 d^{n-2}$, α_0 ne dépendant que de α.*

Par suite quand le centre de B *tend vers un point-frontière* X, $R_1^B(y_0)/d^{n-1}$ *reste compris entre deux nombres* > 0, *donc aussi* $R_{G^{y_0}}^{B}(y_0)/d^n$.

Remarque. — La propriété précédente, essentielle pour la suite, que $R_1^B(y_0)/d^{n-1}$ majore un nombre > 0 fixe résulte des considérations plus élémentaires suivantes, sans usage de la capacité.

Il suffit d'établir le même résultat avec $R_1^B(y_1)$ où y_1 est le point de la normale passant par le centre de B, à même distance que y_0 de la frontière. Or $R_1^B(y_1)$ majore la mesure harmonique en y_1 dans la boule B_1 de centre y_1, orthogonale à B, de l'intersection avec B de la frontière de B_1. Cette mesure harmonique est proportionnelle à l'angle (solide) sous lequel B est vu de y_1, lequel est pour $d \to 0$ un infiniment petit de l'ordre de d^{n-1}.

8. Théorème 3. — *Dans le demi-espace Ω considérons un domaine de Stolz $\mathcal{C}$ de sommet* X *sur l'hyperplan-frontière. Soient u et h harmoniques dans $\mathcal{C}$, h y étant > 0 et u/h borné dans un sens. Toute valeur d'adhérence angulaire de u/h relative à un domaine de Stolz $\mathcal{C}'$ plus aigu est une valeur d'adhérence semi-*

[7] Le potentiel capacitaire est le même pour une boule ouverte et sa fermeture et c'est R_1^B.

fine (donc fine) c'est-à-dire une valeur d'adhérence selon la trace de $\mathcal{F}''_X$ *sur* $\mathcal{C}$ [8].

Si par exemple $u/h > k$, on considère $v = u - kh > 0$ et on se ramène donc au cas de $u > 0$ dans $\mathcal{C}$.

Soit alors l une valeur d'adhérence de u/h relative à $\mathcal{C}'$, par exemple finie > 0 (raisonnement analogue dans les autre cas). Il existe une suite de points $y_p \in \mathcal{C}'$ de limite X, tels que $\dfrac{u(y_p)}{h(y_p)} \to l$; donc pour ε fixé > 0, à partir d'un rang p_0, $l - \varepsilon < \dfrac{u(y_p)}{h(y_p)} < l + \varepsilon$.

Si α est choisi assez petit, la boule B_p de centre y_p et rayon αd_p (d_p distance du centre à la frontière) sera dans $\mathcal{C}'$ pour $p \geqslant p_1$ convenable $\geqslant p_0$; et dans la boule concentrique B'_p de rayon $\beta\alpha d_p$, on aura alors :

$$\frac{l - \varepsilon}{\theta^2(\beta)} < \frac{u}{h} < (l + \varepsilon)\theta^2(\beta) \quad (\theta \text{ défini plus haut, n}^o\ 7)$$

ε' étant donné, un choix convenable de ε et β donne dans $B'_p(p \geqslant p_1)$:

$$l - \varepsilon' < \frac{u}{h} < l + \varepsilon'.$$

Voyons donc que $\bigcup_{p \geqslant p_1} B'_p$ n'est pas semi-effilé en X.

D'abord K_X/G_{y_0} majore au voisinage de X, $\dfrac{1}{|X - y|^n}$ à un facteur près. Mais sur B'_p $\dfrac{|X - y|}{d_p}$ est majoré par un nombre indépendant de p; donc K_X/G_{y_0} y majore d_p^{-n} à un facteur près indépendant de p assez grand. Ainsi, si $\lambda_p = \rho d_p^{-n}$ avec une constante ρ convenable, l'ensemble

$$\sigma_{\lambda_p} = \{y,\ K_X(y)/G_{y_0}(y) \geqslant \lambda_p\}$$

contient B_p (p assez grand) et $\lambda_p \to +\infty$.

Alors

$$\lambda_p R_{G_0}^{\bigcup_i B'_i \cap \sigma_{\lambda''}} (y_0)$$

[8] Ce résultat est voisin du dernier théorème (dans R^2) de l'ouvrage [3 bis] nouvellement paru.

majore à un facteur constant près

$$d_p^{-n} R_{G^p_{y_0}}^{B'_p}(y_0)$$

donc d'après le lemme 1, un nombre > 0 fixe (p assez grand). Cela entraîne que $\bigcup B'_p$ n'est pas semi-effilé ($p \geqslant p'$ quelconque).

THÉORÈME 4. — *Soient u et h harmoniques dans le demi-espace Ω, au voisinage du point-frontière X (c'est-à-dire dans la demi-boule d'intersection de Ω avec une boule ouverte de centre X). On suppose $h > 0$ et u/h borné dans un sens. Alors l'existence pour u/h d'une limite angulaire au point X équivaut à celle d'une limite semi-fine en X (nécessairement égale). Donc la limite fine entraîne la limite angulaire.*

S'il y a en effet une limite semi-fine λ, toutes les valeurs d'adhérence semi-fines valent λ, donc aussi les valeurs d'adhérence angulaires et il y a limite angulaire λ. Réciproquement soit λ, limite angulaire, et $\mathcal{V}_n$ une suite de voisinages décroissants de λ, sur la droite numérique, d'intersection λ. Introduisons une suite quelconque de domaines normaux de Stolz, de demi-angle au sommet tendant vers $\pi/2$ et conservons de chacun l'intersection $\mathcal{C}_n$ avec une boule de centre X, assez petite pour que, si $y \in \mathcal{C}_n$, $u(y)/h(y)$ soit dans $\mathcal{V}_n$. On voit que

$$d_y/|X - y| \to 0 \ \left(y \in \complement\left(\bigcup \mathcal{C}_n\right),\ y \to X\right)$$

Donc $\complement\left(\bigcup \mathcal{C}_n\right)$ est semi-effilé en X (théorème 1) tandis que

$$u(y)/h(y) \to \lambda \ \left(y \in \bigcup \mathcal{C}_n,\ y \to X\right).$$

Remarque. — Sous les mêmes hypothèses, les valeurs d'adhérence angulaires et semi-fines forment respectivement des intervalles d'extrémités identiques (et ces extrémités sont des valeurs d'adhérence semi-fines).

9. *Un contre-exemple fondamental.* — Comme l'a montré Choquet dans une étude inédite, *une fonction harmonique > 0 dans le demi-plan peut admettre en X une limite angulaire sans avoir de limite fine.*

Nous en extrayons un exemple qui suffira.

On considère la suite $a_n = e^{-n^\alpha}\left(\frac{1}{2} < \alpha < 1\right)$, donc telle que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, $a_n - a_{n+1} \sim \alpha \frac{a_n}{n^{1-\alpha}}$ et

$$a_n - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_{n+2}) \sim 2\alpha^2 a_n n^{2\alpha-2} = o\,(a_n - a_{n+1}).$$

Pour le demi-plan $x_2 > 0$, introduisons la donnée-frontière f, égale sur Ox_1 à 1 dans $[a_{2p+1}, a_{2p}[$, à -1 dans $[a_{2p+2}, a_{2p+1}[$, enfin à 0 ailleurs.

Montrons d'abord que la solution du problème de Dirichlet correspondant admet une limite angulaire nulle à l'origine. On évitera une démonstration directe un peu longue en utilisant le résultat classique que pour une donnée-frontière φ telle que $\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} \varphi\, dt \underset{x_1 \to 0}{\to} 0$, il y a une limite angulaire 0 à l'origine. C'est le cas de notre f.

De même en prenant f égale à 1 ou -1 alternativement dans les intervalles :

$$[(a_{n+2} + a_{n+1})/2, \qquad (a_{n+1} + a_n)/2[$$

En prenant f égale à 0 ou 1 alternativement dans les intervalles (dans l'un ou l'autre cas) et 1/2 ailleurs, on obtient une fonction harmonique > 0 tendant vers 1/2 dans tout domaine de Stolz de sommet à l'origine.

Or traçons les triangles isocèles ayant comme bases ces intervalles successifs (d'un type ou de l'autre) et d'angle à la base θ constant. On voit que si θ est assez petit, la fonction harmonique considérée (mesure harmonique d'un système des intervalles pris de deux en deux) est dans chacun de ces triangles, extérieure à l'intervalle (1/4, 3/4). Il suffit donc de voir que ce système de triangles, pour l'un des types au moins, forme un ensemble non-effilé en 0. Or, supposons l'effilement des deux systèmes donc de la réunion; la contradiction se voit en considérant la courbe $x_2 = \lambda x_1 \left(\log \frac{1}{x_1}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}$ qui, pour λ assez petit, est contenue dans la réunion des triangles précédents, ainsi que l'ensemble qu'elle délimite au-dessous; il suffit alors de voir que d'après le th. 2, cet ensemble n'est pas effilé ([8 bis]).

([8 bis]) Ajoutons sur les épreuves qu'on peut construire une fonction holomorphe bornée dans le demi-plan admettant en X une limite angulaire mais pas de limite fine.

IV. — EFFILEMENT ET LIMITE FINE DANS LE PLAN.

10. On peut apporter des compléments importants; on sait (Mme Lelong [8]) que pour $n \geqslant 2$ les demi-droites D issues du point-frontière X du demi-espace pour lesquelles X est adhérent à $D \cap e$, lorsque e est effilé en X, rencontrent toute sphère (circonférence) de centre X selon un ensemble polaire. Donc *dans le cas plan*, il existe des domaines (mêmes normaux) de Stolz, de demi-angle au sommet arbitrairement voisin de $\pi/2$, dont les côtés ne rencontrent pas e (effilé en X) sur un segment d'extrémité X.

Dans ce même cas plan, voici une propriété nouvelle (analogue à celle de l'effilement classique).

Théorème 5. — *Le rabattement circulaire sur la normale au point* X *d'un ensemble e contenu dans un domaine de Stolz (rabattement formé des intersections avec cette normale des circonférences de centre* X *rencontrant e) conserve l'effilement et le semi-effilement en* X.

Car la fonction de Green de deux points est majorée par passage aux points rabattus; la polarité est conservée et la distribution capacitaire μ de e_p (V. n° 7) donne par rabattement une mesure dont le potentiel de Green majore 1 quasi-partout sur l'ensemble rabattu e'_p, donc majore le potentiel capacitaire de e'_p. Le rabattement opéré sur e_p minore donc la capacité et le critère du type de Wiener (n° 5) donne le résultat.

Extension. — La proposition s'étend au rabattement sur une demi-droite quelconque issue de X dans Ω. Cela résulte de ce que cette transformation majore la fonction de Green de deux points pris dans un domaine de Stolz, à une quantité additive *bornée* près. De sorte qu'une distribution capacitaire de total assez petit devient une mesure de potentiel $\geqslant 1/2$, *q.p.* sur l'image.

Corollaire. — *Si e contenu dans un domaine de Stolz de sommet* X *est semi-effilé en* X, *il existe des circonférences arbitrairement petites ne rencontrant pas e.*

Cela résulte de ce qu'une demi-droite issue de X n'est pas semi-effilée. Cette propriété vient de ce que, dans le critère du type de Wiener (n° 5), le m_p correspondant est constant car il est conservé par homothétie de centre X.

THÉORÈME 6. — *Soit dans le demi-plan Ω un domaine de Stolz $\mathcal{C}$ de sommet X où h est harmonique > 0 et u harmonique quelconque. Toute valeur d'adhérence angulaire de u/h en X relative à $\mathcal{C}'$ plus aigu est comprise entre les lim-sup et inf fines de u/h dans $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire selon la trace de $\mathcal{F}_X$ sur $\mathcal{C}$).*

En particulier si $h > 0$ et u sont définis harmoniques au voisinage de X sur Ω, la limite fine de u/h entraîne la limite angulaire.

Si λ est lim. sup. fine, supposée p. ex. finie, de u/h, on a $u/h < \lambda + \varepsilon$ hors d'un ensemble e effilé en X. Soit $\mathcal{C}_1$ un domaine de Stolz plus aigu que $\mathcal{C}$ mais contenant $\mathcal{C}'$, et dont les côtés ne coupent pas e. Introduisons une suite de circonférences de centres X à rayon tendant vers 0 ne coupant pas e dans $\mathcal{C}_1$; elles délimitent avec $\mathcal{C}_1$ des domaines δ_p sur la frontière desquelles $\frac{u}{h} < \lambda + \varepsilon$ (p assez grand). Cela vaut donc aussi dans δ_p d'où $\limsup\limits_{\substack{x \to X \\ x \in \mathcal{C}_1}} \frac{u}{h} \leqslant \lambda + \varepsilon$ (ε arbitraire) d'où le théorème.

Applications. — Si $f = u + iv$ est holomorphe dans le demi-plan (au voisinage du point frontière X) et admet une limite fine *finie* en X, elle y admet une limite angulaire égale.

C'est là un résultat de Constantinescu-Cornea ([3] p. 62) maintenant immédiat.

V. — RESULTATS GLOBAUX

11. *Limites angulaires.*

Rappelons d'abord un lemme assez connu [9]

LEMME 2. — *Soient Ω un demi-espace de R^n ($n \geqslant 2$), A_0 un ensemble borné de la frontière Ω^*, A une partie de Ω; on suppose que pour tout $X \in A_0$ il existe un domaine de Stolz*

[9] Voir p. ex. Calderon [1] dont les développements p. 48-49 inspirent ou contiennent en partie ce lemme et la démonstration.

de sommet X *contenu dans* A. *Alors, étant donné* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* B_ε *de* Ω^* *et un nombre* $\delta > 0$ *tels que*

a) *pour tout* $X \in B_\varepsilon$, A *contient la partie du domaine normal de Stolz de sommet* X, *demi-angle* $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, *rayon* 2δ, *qui est à distance* $< \delta$ *de* Ω^*

b) $A_0 - A_0 \cap B_\varepsilon$ *est de mesure extérieure de Lebesgue (sur* Ω^**)* $< \varepsilon$.

Conséquence :

Il existe sur A_0 un ensemble de mesure nulle α tel que pour tout $X \in A_0 - \alpha$ et tout angle choisi $\varphi < \frac{\pi}{2}$, il existe un domaine de Stolz normal contenu dans A, de sommet X et d'angle φ.

Il suffit de prendre pour α la réunion pour les valeurs entières de p_0 des ensembles

$$\bigcap_{p \geqslant p_0} (A_0 - A_0 \cap B_{1/p}).$$

En considérant les domaines de Stolz de sommet X_0 fixé, de direction d'axe, d'angle et de rayon variant sur des ensembles dénombrables denses, on ramène le lemme au cas où les domaines de Stolz de l'énoncé se déduisent par translation d'un domaine fixe $\mathcal{C}_0$ de sommet X_0. Mais alors on remarque que la réunion de ces domaines contient aussi les translatés de $\mathcal{C}_0$ dont les sommets sont les points adhérents à A_0. Ainsi on pourra supposer aussi A_0 fermé.

Soit alors E_n (borélien) l'ensemble des points $X \in A_0$ tels que tout point x du domaine normal de Stolz γ_n^X (sommet X, angle fixé θ, rayon $1/n$) soit dans un translaté de $\mathcal{C}_0$ de sommet dans A_0, c'est-à-dire tel que le translaté de $(-\mathcal{C}_0)$ (symétrique de $\mathcal{C}_0$ par rapport au sommet) selon $\overrightarrow{x - X_0}$ rencontre A_0. Grâce à un théorème de densité, on voit que presque tout point de A_0 (au sens de la mesure de Lebesgue sur Ω^*) est dans $\bigcup E_n$. D'où le résultat que $e = \bigcup_1^N E_n$ est, pour N fixé convenable, de mesure arbitrairement voisine de celle de A_0 et que la réunion des $\gamma_{1/N}^X$ $(X \in e)$ est dans A. On achève aisément.

THÉORÈME 7. — *Soit f une application du demi-espace Ω dans un espace Ω' compact métrisable. Alors, exception faite des points d'un ensemble de Ω^* (hyperplan-frontière) de mesure de Lebesgue nulle: (α) toute valeur d'adhérence angulaire de f au point-frontière X est valeur d'adhérence en X relative à tout domaine de Stolz de sommet X, et (β) l'ensemble des valeurs d'adhérence angulaire de f en X est compact. Par suite: (γ) en presque tous les points où f admet une limite angulaire relative à un domaine de Stolz, f admet une limite angulaire.*

L'assertion (β) résulte de la première (α) car il y a évidemment compacité de l'ensemble des valeurs d'adhérence en un point relatives à un domaine de Stolz fixé. Montrons donc la 1re et supposons donné pour tout point X de Ω^* un domaine de Stolz de sommet X, dit associé à X. Soit K un compact de Ω' et A_0 l'ensemble dans Ω^* des points X pour lesquels *toutes* les valeurs d'adhérence de f relatives au domaine de Stolz associé à X sont dans K. Si $\hat{K}$ est un voisinage de K, $f^{-1}(\hat{K})$ est un ensemble de Ω qui contient pour tout point de A_0 un domaine de Stolz de sommet en ce point. D'après le lemme, il existe un ensemble $\alpha_{\hat{K}} \subset A_0$, de mesure nulle, tel que, pour tout point $X \in A_0 - \alpha_{\hat{K}}$, $f^{-1}(\hat{K})$ contient un domaine de Stolz normal de sommet X et demi-angle arbitrairement voisin de $\pi/2$. En faisant varier le voisinage $\hat{K}$ dans une famille dénombrable d'ouverts d'intersection K et réunissant les ensembles $\alpha_{\hat{K}}$ correspondants, on voit que, hors d'un ensemble « d'exception » de A_0, de mesure nulle sur Ω^*, toute valeur d'adhérence angulaire de f en un point de A_0 est un point de K. On fait alors parcourir à K les réunions finies de fermetures K_i d'une base dénombrable de la topologie de Ω'. On prend comme domaines associés aux X, les translatés d'un domaine de Stolz de base et on fait parcourir à celui-ci tous les domaines de sommet fixe, rayon 1; demi-angle rationnel, d'axe dans un ensemble dénombrable dense de directions. A chacun de ces K et de ces domaines de base correspondent ainsi un A_0 et un sous-ensemble « d'exception ». La réunion de ces sous-ensembles est bien un ensemble exceptionnel du théorème.

Car si X n'y appartient pas, soit $\mathcal{C}$ un domaine de Stolz de sommet X et λ une valeur d'adhérence angulaire en X. $\mathcal{C}$ est moins aigu qu'un domaine $\mathcal{C}_1$ translaté d'un domaine de base $\mathcal{C}_0$ de la famille dénombrable considérée. Soit K l'ensemble compact des valeurs d'adhérence de f relatives à $\mathcal{C}_1$ en X et constatons que $\lambda \in K$. Sinon on pourrait couvrir K par un nombre fini de K_i, (considérés plus haut) ne contenant pas λ; à leur réunion $\bigcup_{i \in I} K_i$ et à $\mathcal{C}_0$ correspondent un $A_0 \ni \lambda$ et un ensemble d'exception qui ne contient pas X. De sorte que λ devrait être dans $\bigcup_{I \in i} K_i$.

Remarque. — On pourrait démontrer d'abord la proposition finale (γ) du th. 7 sur les limites, puis en déduire (α), en procédant comme dans [6] th. 4,3.

EXTENSION. — *La proposition finale* (γ) *est encore vraie si Ω' est supposé seulement métrisable.*

Nous pouvons supposer Ω' complet: car en le complétant selon Ω'' le théorème que l'on va établir pour Ω'' montre que l'existence d'une limite angulaire pour *un* domaine de Stolz de sommet $X \in A \subset \Omega^*$ entraîne celle d'une limite angulaire égale *p.p.* sur A, de sorte que si la 1[re] est dans Ω', de même la seconde.

Ramenons-nous encore au cas de domaines de Stolz déduits par translation d'un domaine fini S. On suppose qu'en tout $X \in A$, f a une limite *selon* S_X de sommet X, translaté de S (c.-à-d. quand $y \in S_X$ tend vers X). Nous pouvons nous ramener au cas de A borélien, car si A_1 est l'ensemble des points-frontière X où f a une limite selon S_X, A_1 est borélien pour la raison suivante: soit $\varphi(X, r) = \sup_{\substack{y, y' \in S_X \\ \text{dist.}(y, X) < r \\ \text{dist.}(y', X) < r}} \text{dist.}\ [f(y), f(y')]$.

Alors pour chaque r, $\varphi(\cdot, r)$ est *s.c.* inférieurement et $A_1 = \{X : \lim_{r \to 0} \varphi(X, r) = 0\}$. Nous pouvons encore supposer A borné, puis prendre sur A un compact K, tel que A-K soit de mesure de Lebesgue arbitrairement petite, et que $\varphi(X, r)$ converge uniformément vers 0 ($r \to 0$, $X \in K$). On se ramène ainsi au cas de A compact et de la limite de f en $X \in A$ selon S_X, continue comme fonction de X sur A. L'ensemble F de ces limites est donc un compact de Ω', contenant une suite $\{Y_n\}$ dense sur F. D'après le théorème précédent dist. $(f(y), F)$ et dist. $(f(y), Y_n)$ qui appliquent Ω dans le compact $[0, +\infty]$, ont des limites angulaires $p.p$ sur A, la 1^re^ étant nulle et la seconde finie. Soit X_0 un point de A où il y a ces limites. On voit que pour tout $Y \in F$, dist. $(f(y), Y)$ a une limite angulaire en X_0. Si $y_n \to X_0$ dans un domaine de Stolz de sommet X_0, associons $Y_n \in F$ tel que

$$\text{dist. } (f(y_n), Y_n) \to 0.$$

Pour une suite extraite, $Y_{n_p} \to Y' \in F$ et

$$\text{dist. } (f(y_{n_p}), Y') \to 0.$$

Donc la limite angulaire de dist. $(f(y), Y')$ en X_0 est nulle. $f(y)$ a donc une limite angulaire $p.p$ sur A.

12. *Limites angulaires et limites fines.*

Dans la suite, si E est une partie de la frontière d'un ouvert A, on notera $\mu(., E, A)$ la mesure harmonique de E relative à A.

THÉORÈME 8. — *Soient Ω un demi-espace de $R^n (n \geqslant 2)$, A_0 un ensemble de points-frontière, A un ouvert de Ω. Supposons que, pour tout $X \in A_0$, A contienne un domaine de Stolz de sommet X. Alors $\complement A$ est effilé en presque tout point de A_0 (au sens de la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan-frontière Ω^*).*
La démonstration est empruntée à celle du théorème 9 donnée par Constantinescu-Cornea dans le cas $n = 2$ [(3) p. 57 Satz 20).

Grâce au lemme 2, on peut supposer que A_0 est compact et que pour tout $X \in A_0$, A contient les points à distance $< \delta$ de Ω^* du domaine de Stolz normal de sommet X, demi-angle $\pi/4$, rayon 2δ. Soit $0 < \alpha < 1$ et

$$A' = \{y; \mu(y, A_0, \Omega) > \alpha\};$$

d'après l'allure selon Doob [5] de la solution du problème de Dirichlet-Martin à la frontière, $\mu(y, A_0, \Omega)$ tend finement vers 1 et presque tout point de A_0, donc $\complement A'$ est effilé en presque tout point de A_0. Il suffira donc de prouver que si A'_δ est l'ensemble des points de A' à distance $< \delta$ de Ω^*, $A'_\delta \subset A$ si α est assez grand. Or si y est un point de Ω-A à distance $d < \delta$ de Ω^*, il est à une distance $\geqslant d\sqrt{2}$ de A_0 et la mesure harmonique en y de $\complement A_0$ majore une constante $c > 0$ indépendante d'un tel y (à cause de son interprétation comme angle solide) d'où $\mu(y, A_0, \Omega) < 1 - c$. Si $\alpha > 1 - c$, on déduit que $A'_\delta \subset A$.

Théorème 9 [10]. — *Soit f une application du demi-espace Ω dans un espace métrique Ω'. Alors en presque tout point de la frontière Ω^* où f a une limite angulaire* [11], *f admet une limite fine qui lui est égale.*

Soit A_0 l'ensemble de Ω^* où f a une limite angulaire, notée $\varphi(X)$. A tout $X \in \Omega^*$, associons le domaine de Stolz $\mathcal{C}_X^r$ normal, de sommet X, demi-angle θ fixé $< \frac{\pi}{2}$ et rayon r. Soit $V_r(X)$ l'oscillation de f dans ce domaine. Puisque la fonction $V_r(.)$ est semi-continue inférieurement, $\lim\limits_{r \to 0} V_r$ est une fonction borélienne, qui s'annule sur un ensemble $B \supset A_0$.

Sur B, V_r tend vers 0, uniformément sur un compact K tel que $B - K$ soit de mesure $< \varepsilon$ donné. Il suffira donc de voir que sur $K \cap A_0$, f a presque partout une limite fine égale à $\varphi(X)$.

Soit ρ_n tel que $V_{\rho_n}(X) \leqslant \frac{1}{n}$ sur K. La réunion des $\mathcal{C}_X^{\rho_n}$ pour les $X \in K \cap A_0$ est un ouvert Ω_n qui appartient à $\mathcal{F}_X$ pour presque tous les X de $K \cap A_0$, d'après le théorème précédent. Notons $D(a, b)$ la distance de deux points a et b de Ω' et remarquons que la restriction de φ à $K \cap A_0$ est continue; alors

$$y \in \mathcal{C}_Y^{\rho_n}, \qquad Y \in K \cap A_0$$

implique

$$D(f(y), \varphi(X)) \leqslant D(f(y), \varphi(Y)) + D(\varphi(Y), \varphi(X))$$

qui sera $\leqslant 2/n$ si $|X - Y|$ est assez petit.

Donc $D(f(y), \varphi(X)) \leqslant \frac{2}{n}$ si $X \in K \cap A_0$ et y dans Ω_n tel que $|y - X|$ soit assez petit. Donc l'ensemble

$$\left\{ y : D(f(y), \varphi(X)) \leqslant \frac{2}{n} \right\}$$

[10] Extension à l'espace R^n de [6] th. 4.2 donné dans R^2.

[11] Ou seulement limite angulaire $\varphi(X)$ relative à un domaine de Stolz normal d'angle fixé ou même relative à un domaine de Stolz variable quelconque.

est élément de $\mathcal{F}_X$ pour presque tout X de $K \cap A_0$. De là le théorème.

Corollaire. — *Soit f une application du demi-espace Ω dans un espace Ω' compact métrisable. Alors en presque tout point-frontière* X, *toute valeur d'adhérence fine de f en* X *est une valeur d'adhérence angulaire de f en* X (12).

Soit K un compact de Ω', pourvu d'une métrique, et $d(z)$ la distance dans Ω' de z à K. Dire que $d(f(y))$ admet en X une limite fine (resp. angulaire) nulle équivaut à ce que toute valeur d'adhérence fine (resp. angulaire) de f en X appartient à K.

Considérons l'ensemble $e_K \subset \Omega^*$ où $d(f(y))$ a une limite angulaire nulle. Alors $d(f(y))$ a en tout point de e_K une limite fine nulle, sauf sur un ensemble e'_K de mesure nulle (théorème précédent). Faisons varier K dans la famille dénombrable des réunions finies des fermetures K_i des ensembles d'une base dénombrable de la topologie de Ω' et soit A la réunion des e'_K correspondants, qui est de mesure nulle sur Ω^*.

Soit $X \in \complement A$ et K(X) l'ensemble compact des valeurs d'adhérence angulaire de f en X (V. th. 7). $X \in e_{K(X)}$. Toute valeur λ d'adhérence fine de f en X est bien dans K(X) : sinon on pourrait couvrir K(X) par des K_i ($i \in I$ fini) précédents ne contenant pas λ ; toute valeur d'adhérence angulaire de f en X est dans $\chi = \bigcup_{i \in I} K_i$. X est dans e_χ mais non dans e'_χ ; donc toute valeur d'adhérence fine doit être dans χ, qui, pourtant, ne contient pas λ ; cette contradiction entraîne l'assertion.

13. *Théorème de Fatou et extensions.*

D'après le théorème 4, le théorème de Fatou même étendu aux quotients est conséquence immédiate du résultat général de Doob pour la frontière de Martin rappelé dans l'introduction.

Retrouvons maintenant le théorème de Calderon-Carleson que nous améliorons comme suit :

Théorème 10. — *Soit h harmonique > 0 dans le demi-espace Ω. Supposons u définie harmonique sur un ouvert partiel ω*

(12) Ceci étend à l'espace R^n le théorème 4.3 de [6] dans R^2 et équivaut, grâce à notre th 7, pour f continue, au théorème 19-1 [3 bis] donné dans R^2.

contenant un domaine de Stolz variable dont le sommet décrit un ensemble-frontière e de Ω^*; on suppose que, dans chacun de ces domaines de Stolz, u/h est borné dans un sens (pouvant varier). Alors u/h admet une limite angulaire finie aux points de e, sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle et sur un ensemble γ de μ^h-mesure nulle (μ^h correspondant à h dans sa représentation intégrale dans Ω).

On se ramène au cas de ω connexe et de la limitation dans un même sens (en considérant les deux parties de e pour les deux sens de limitation), par exemple au cas de la limitation inférieure de u/h. On se ramène alors au cas de $u > 0$ sur les domaines de Stolz considérés : car en considérant l'ensemble e_n des X pour lesquels $\frac{u}{h} > -n$ sur le domaine de Stolz associé à X, on appliquera le résultat supposé valable, pour $u + nh > 0$, h et e_n, d'où le théorème pour u, h et $e = \bigcup e_n$.

Alors d'après le th. 8, le complémentaire de ω dans Ω est effilé aux points de e, sauf sur un ensemble α_1 de mesure de Lebesgue nulle.

Appliquons le théorème fondamental de Doob, rappelé au début, à ω, u et $h > 0$, en remarquant (Naïm [8]) que, à tout point X de $e - \alpha_1$ correspond un point minimal X' de la frontière de Martin de ω; que l'effilement d'un ensemble de ω est le même en X pour Ω et en X' pour ω et que, si on considère un ensemble de points X de $e - \alpha_1$ et celui de leurs correspondants X', ils sont simultanément de μ^h-mesure nulle dans la représentation intégrale de h relative à Ω ou ω. Donc, dans nos hypothèses, u/h admet aux points de $e - \alpha_1$ sauf sur un ensemble γ de μ^h-mesure nulle, une limite fine finie relative à Ω.

Mais ω contient pour tout X de e un domaine de Stolz normal d'angle arbitraire, sauf sur un ensemble α_2 de mesure nulle (lemme 2). Donc en tout point de e hors $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \gamma$, le th. 3 montre que toute valeur d'adhérence angulaire de u/h vaut la limite fine c'est-à-dire qu'il y a limite angulaire égale à cette limite fine finie.

Extensions. — On peut supposer h harmonique seulement donnée > 0 sur l'intersection Ω_0 de Ω et d'un ouvert contenant ω et e. Les points de e sont identifiables à des points de la frontière de Martin de chaque composante connexe Ω^i de Ω_0 et l'énoncé s'étend en prenant pour γ un ensemble de mesure nulle relativement à la représentation intégrale de h dans chaque Ω^i (cette notion d'ensemble de mesure nulle est invariante quand Ω_0 varie).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. Calderon. On the behaviour of harmonic fonctions at the boundary *Trans. Am. Math. Soc.*, 68 (1950), 47-54.

[2] L. Carleson. On the existence of boundary values for harmonic fonctions in several variables; *Arkiv för matematik*, 4, (1961), 393-399.

[3] C. Constantinescu et A. Cornea. Über das Verhalten der analytischen Abbildungen Riemannscher Flächen auf dem idealen Rand von Martin. *Nagoya Math. Journal*, 17 (1960), 1-87.

[3 bis] C. Constantinescu et A. Cornea. Ideale Ränder Riemannscher Flächen (Ergeb., Bd 32, Springer, 1963).

[4] J. L. Doob. A relativized Fatou theorem, *Proceed. Nat. Acad. of Sci., U.S.A.* 45, (1959), 215-222.

[5] J. L. Doob. A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem, *Annales Inst. Fourier*, 9, (1959), 293-300.

[6] J. L. Doob. Conformally invariant cluster value theory, *Illinois Journal of Math*, 5, (1961), 521-549.

[7] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta math.*, 30, (1906), 335-400.

[8] Mme Lelong. Étude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, *Annales de l'E.N.S.*, 66, (1949) p. 125-159.

[9] Mlle L. Naïm. Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Annales de l'Institut Fourier*, t. 7, (1957), 183-285.