Annales de l'institut Fourier

André Avez

Essais de géométrie riemannienne hyperbolique globale. Applications à la relativité générale

Annales de l'institut Fourier, tome 13, nº 2 (1963), p. 105-190
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_2_105_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13,2 (1963), 105-190.

ESSAIS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE HYPERBOLIQUE GLOBALE — APPLICATIONS A LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par **André AVEZ** (Paris)

INTRODUCTION

On sait depuis Mach qu'il est naturel de limiter la généralité des modèles d'univers en imposant à un espace-temps vide des géodésiques rectilignes. Cela pose le problème suivant : une variété complète à quatre dimensions, munie d'une métrique hyperbolique normale à tenseur de Ricci nul est-elle localement euclidienne? Dans une autre direction Lichnerowicz et Aufenkamp ont montré que la présence effective d'énergie interdisait à un espace-temps certaines propriétés globales. D'où le second problème : Quelles sont les variétés complètes à quatre dimensions, munies d'une métrique hyperbolique normale dont le tenseur de Ricci est elliptique?

Ce sont les problèmes précités qui ont servi de prétexte au présent travail. La difficulté essentielle réside dans l'absence de théorèmes globaux en signature non elliptique. Cela explique la division en chapitres correspondant à des techniques largement autonomes.

Le chapitre premier élabore une méthode « d'elliptisation » des problèmes de signature quelconque. Elle permet de conclure à la validité du principe de Mach sans autres hypothèses que la compacité et la stationnarité. On construit aussi un modèle d'univers stationnaire et compact, sans constante cosmologique, ce qui montre que l'existence de sections d'espace globales est essentielle au théorème d'Aufenkamp.

Le chapitre II démontre l'analogue « temporel » du théorème de Hopf-Rinow, en métrique hyperbolique normale. La technique de Myers montre alors que tout espace-temps complet dont la densité de matière est supérieure à un nombre positif, est fermé et homotope à zéro dans le temps. Dans une seconde partie, des théorèmes fins de J. Nash et C. B. Morrey permettent de démontrer l'existence d'une section d'espace globale, maximum au sens du calcul des variations, sur tout espace-temps périodique clos. En prenant cette variété comme support des conditions initiales des équations d'Einstein, on en déduit la validité du principe de Mach pour les espaces-temps périodiques clos. On montre du même coup que ces espaces-temps ne peuvent être à densité de matière positive en l'absence de constante cosmologique.

Le chapitre III tente l'extension aux métriques de signature quelconque de la théorie de Hodge-de Rham. On y montre les différences profondes avec le cas elliptique, et la nécessité de distinguer deux types de décomposition au sens de Hodge. De tels théorèmes de décomposition permettent d'appliquer les techniques de Bochner-Lichnerowicz.

Ce n'est pas par hasard que le nom du Professeur Lichnerowicz apparaît presqu'à chaque page de ce travail. La plupart des notions utilisées et la plupart des théorèmes en signature elliptique lui sont dus. Je ne peux terminer sans préciser que j'ai constamment bénéficié de ses critiques et de ses conseils.

CHAPITRE PREMIER

MÉTRIQUE ELLIPTIQUE ASSOCIÉE A UNE MÉTRIQUE DONNÉE

Dans ce chapitre nous montrons qu'on peut associer à toute métrique $g_{\alpha\beta}$ une famille de métriques elliptiques : soit $h_{\alpha\beta}$ l'une d'elles. Les propriétés géométriques relatives à $g_{\alpha\beta}$ se traduisent en termes de métriques $h_{\alpha\beta}$. Il apparaît alors que certains problèmes sont des problèmes elliptiques déguisés, pour lesquels on dispose de théorèmes classiques.

1. — Formules auxiliaires.

V_n désignera toujours une variété à n dimensions de classe C^r ($r \geqslant 1$), munie de métriques de classe C^{r-1}. Soient $g_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ deux telles métriques nous affecterons du signe $*$ les éléments relatifs à $h_{\alpha\beta}$.

Désignons par $\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ et $\overset{*}{\Gamma}_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ les symboles de Christoffel de $g_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ dans un même atlas. On sait que :

$$C_\alpha{}^\lambda{}_\beta = \overset{*}{\Gamma}_\alpha{}^\lambda{}_\beta - \Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta$$

est un tenseur du troisième ordre (voir par exemple : Eisenhart, *An introduction to differential geometry*, p. 103). Évaluons-le au point x de V_n, en choisissant en ce point un système de coordonnées normales au sens de $g_{\alpha\beta}$. Puisque $\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta = 0$.

$$C_\alpha{}^\lambda{}_\beta = \overset{*}{\Gamma}_\alpha{}^\lambda{}_\beta = \frac{1}{2}\, \overset{*}{h}{}^{\lambda\sigma}(\partial_\alpha h_{\sigma\beta} + \partial_\beta h_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma h_{\alpha\beta}),$$

où $\overset{*}{h}{}^{\lambda\sigma}$ est défini par

$$\overset{*}{h}{}^{\lambda\sigma} h_{\sigma\nu} = \delta_\nu{}^\lambda.$$

Mais $\nabla_\alpha h_{\sigma\beta} = \partial_\alpha h_{\sigma\beta}$, donc :

$$(1) \qquad C_\alpha{}^\lambda{}_\beta = \frac{1}{2} \overset{*}{h}{}^{\lambda\sigma}(\nabla_\alpha h_{\sigma\beta} + \nabla_\beta h_{\sigma\alpha} - \nabla_\sigma h_{\alpha\beta}).$$

Il est clair que $C_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ ne s'annule que si $\nabla_\alpha h_{\sigma\beta} = 0$. Si φ_α est un vecteur différentiable de V_n, on a :

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha \varphi_\beta = \partial_\alpha \varphi_\beta - \varphi_\nu \overset{*}{\Gamma}_\alpha{}^\nu{}_\beta$$
$$\nabla_\alpha \varphi_\beta = \partial_\alpha \varphi_\beta - \varphi_\nu \Gamma_\alpha{}^\nu{}_\beta$$

Par soustraction membre à membre, il en résulte :

$$(2) \qquad \overset{*}{\nabla}_\alpha \varphi_\beta = \nabla_\alpha \varphi_\beta - \varphi_\nu C^\nu_{\alpha\beta}.$$

Proposons-nous enfin, d'évaluer le tenseur de Ricci $\overset{*}{R}_{\alpha\beta}$ de $h_{\alpha\beta}$, en fonction du tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ de $g_{\beta\alpha}$.

En utilisant le système de coordonnées normales déjà considéré :

$$R_{\lambda\mu} = \partial_\alpha \Gamma_\lambda{}^\alpha{}_\mu - \partial_\lambda \Gamma_\alpha{}^\alpha{}_\mu.$$

Mais $\Gamma_\lambda{}^\alpha{}_\mu = \overset{*}{\Gamma}_\lambda{}^\alpha{}_\mu - C^\alpha_{\lambda\mu}$, donc :

$$R_{\lambda\mu} = \partial_\alpha \overset{*}{\Gamma}_\lambda{}^\alpha{}_\mu - \partial_\lambda \overset{*}{\Gamma}_\alpha{}^\alpha{}_\mu - \partial_\alpha C^\alpha_{\lambda\mu} + \partial_\lambda C^\alpha_{\alpha\mu}.$$

Comme on a :

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \overset{*}{\Gamma}_\lambda{}^\alpha{}_\mu - \partial_\lambda \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\alpha\mu} = \overset{*}{R}_{\lambda\mu} - \overset{*}{\Gamma}_\alpha{}^\alpha{}_\beta \overset{*}{\Gamma}_\lambda{}^\beta{}_\mu + \overset{*}{\Gamma}_\alpha{}^\beta{}_\lambda \overset{*}{\Gamma}_\beta{}^\alpha{}_\mu \\ = \overset{*}{R}_{\lambda\mu} - C^\alpha_{\alpha\beta} C^\beta_{\lambda\mu} + C_\alpha{}^\beta{}_\lambda C^\alpha_{\beta\mu},\end{aligned}$$

$$\partial_\nu C^\sigma_{\lambda\mu} = \nabla_\nu C_\lambda{}^\sigma{}_\mu,$$

il en résulte :

$$(3) \quad \overset{*}{R}_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} + \nabla_\alpha C^\alpha_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda C^\alpha_{\alpha\mu} + C^\alpha_{\alpha\beta} C^\beta_{\lambda\mu} - C_\alpha{}^\beta{}_\lambda C^\alpha_{\beta\mu}.$$

2. — Métrique elliptique associée à une métrique donnée.

Supposons définie sur V_n une métrique $g_{\alpha\beta}$ de signature p, c'est-à-dire telle que sa forme quadratique associée soit décomposable en une somme de p carrés négatifs et n-p carrés positifs. D'après Steenrod ([9], p. 206) il existe sur V_n un champ régulier et continu de $(n$-$p)$-plans

$$(4) \qquad g_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} + v_{\alpha\beta},$$

où $u_{\alpha\beta}$ est la métrique induite par $g_{\alpha\beta}$ sur les $(n\text{-}p)$-plans, $v_{\alpha\beta}$ celle induite sur les p-plans. Il est clair que les métriques $u_{\alpha\beta}$ et $-v_{\alpha\beta}$ sont elliptiques et continues. Il en résulte que :

$$h_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} - v_{\alpha\beta}$$

définit sur V_n une métrique elliptique, régulière et continue. Nous allons préciser cette construction en nous restreignant aux métriques hyperboliques normales, c'est-à-dire de signature $(n-1)$ (1).

Ici, le champ de $(n\text{-}p)$-plans sera un champ vectoriel v_α. Rappelons à ce propos qu'un vecteur X^α sera dit orienté dans le temps (ou temporel) si $g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta > 0$, isotrope si

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0,$$

orienté dans l'espace (ou spatial) si $g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta < 0$. Il est clair que v_α est temporel.

Définition (1, I). — *Soit v_α un vecteur temporel, nous appelons métrique associée à $g_{\alpha\beta}$ par l'intermédiaire de v_α la métrique :*

$$h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + 2\, v_\alpha v_\beta.$$

Comme il a été dit plus haut nous affecterons du signe * les éléments relatifs à $h_{\alpha\beta}$.

Théorèmes (1, I). — *Si $2\,v^2 - 1 > 0$, le discriminant de la métrique $g_{\alpha\beta}$ est > 0.*

Démonstration. — Choisissons en $x \in V_n$ un repère $(x, \vec{e}_\nu)$ orthogonal au sens de $g_{\alpha\beta}$ et tel que $\vec{e}_n$ soit colinéaire à $\vec{v}$. Posons $g = \text{dét}\,(g_{\alpha\beta})$ et $\overset{*}{h} = \text{Dét}\,(h_{\alpha\beta})$, on a :

$$\overset{*}{h} = \begin{vmatrix} -g_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -g_{n-1,\,n-1} & \\ 0 & & & -g_{nn} + 2(v_n)^2 \end{vmatrix} = (-1)^n . g . \left[1 - \frac{2(v_n)^2}{g_{nn}}\right].$$

(1) Certains de ces résultats ont été publiés dans une note (Voir [2]). Voir aussi Lichnerowicz ([4], p. 16).

Mais $g_{nn}g^{nn} = 1$, $v^2 = g^{nn}(v_n)^2$, donc :

$$\overset{*}{h} = (-1)^{n+1}.g.(2v^2 - 1).$$

Comme g est du signe de $(-1)^{n-1}$:

$$\overset{*}{h} = |g|.(2v^2 - 1) > 0.$$

Remarquons que si $\vec{v}$ est unitaire $\overset{*}{h} = |g|$.

A l'avenir *nous supposerons toujours* $2v^2 - 1 > 0$.

THÉORÈME (2, 1).

$$\overset{*}{h}{}^{\beta\gamma} = -g^{\beta\gamma} + \frac{2}{2v^2 - 1} v^\beta v^\gamma.$$

Démonstration. — Si δ^γ_α sont les symboles de Kronecker, on vérifie que :

$$h_{\alpha\beta}\left(-g^{\beta\gamma} + \frac{2v^\beta v^\gamma}{2v^2 - 1}\right) = \delta^\gamma_\alpha.$$

La régularité de $h_{\alpha\beta}$ entraîne le théorème.

Si en particulier, $\vec{v}$ est unitaire $\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$. Dans ce cas, dans tout repère : $\overset{*}{h} = |g|$. En effet :

$$\text{Dét}\,(\overset{*}{h}{}^{\beta\gamma}) = \text{Dét}(h^{\beta\gamma}) = \text{Dét}(h_{\nu\sigma}\, g^{\nu\beta}g^{\sigma\gamma})$$
$$= \text{Dét}(h_{\nu\sigma}).\text{Dét}(g^{\nu\beta}).\text{Dét}(g^{\sigma\gamma}).$$

Mais $\text{Dét}(\overset{*}{h}{}^{\beta\gamma}) = \overset{*}{h}{}^{-1}$, $\text{Dét}(g^{\nu\beta}) = g^{-1}$, donc : $\overset{*}{h}{}^{-1} = \overset{*}{h}.g^{-2}$.

Comme $\overset{*}{h} > 0$, $\overset{*}{h} = |g|$.

THÉORÈME (3, I). — *La métrique $h_{\alpha\beta}$ est elliptique.*

Démonstration. — Calculons la norme du vecteur arbitraire X_α. Posons $X_\alpha = V.v_\alpha + \varphi^\alpha$ où $\varphi^\alpha v_\alpha = 0$.

$$\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta = \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{2}{2v^2 - 1} v^\alpha v^\beta\right)X_\alpha X_\beta.$$

Mais

$$g^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta = V^2.v^2 + \varphi_\alpha\varphi^\alpha, \qquad v^\alpha X_\alpha = v^2.V,$$

d'où

$$\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta = \frac{v^2.V^2}{2v^2 - 1} - \varphi_\alpha\varphi^\alpha.$$

Mais $\varphi^\alpha v_\alpha = 0$ et $v^\alpha v_\alpha < 0$ entraînent $\varphi^\alpha\varphi_\alpha \leqslant 0$ et comme $2v^2 - 1 > 0$ on a :

$$\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta \geqslant 0,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $X_\alpha = 0$.

Nous allons maintenant utiliser la métrique associée pour démontrer une inégalité analogue à celle de Schwarz, et qui nous sera fort utile tout au long de ce travail.

Rappelons que la norme d'un vecteur φ_α est définie par :

$$N(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha\varphi^\alpha.$$

THÉORÈME (4, I). — 1° *Si dans la métrique hyperbolique normale* $g_{\alpha\beta}$ *on a* $N(\varphi_\alpha) > 0$, *pour tout vecteur* ψ_α *on a :*

$$N(\varphi_\alpha).N(\psi_\alpha) \leqslant (\varphi^\alpha\psi_\alpha)^2,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $\psi_\alpha = K\varphi_\alpha$.

2° *Si* $N(\varphi_\alpha) < 0$, $N(\psi_\alpha) < 0$, *alors :*

$$(\varphi^\alpha\psi_\alpha)^2 \leqslant N(\varphi_\alpha).N(\psi_\alpha).$$

Démonstration. — 1° Soit $h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{2\varphi_\alpha\varphi_\beta}{N(\varphi_\alpha)}$ la métrique associée au vecteur unitaire $\frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{N(\varphi_\alpha)}}$. Un calcul facile donne :

$$g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha = \overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}\varphi_\alpha,$$

par suite

$$(\varphi_\alpha\psi_\alpha)^2 = (g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\psi_\beta)^2 = (\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\psi_\beta)^2.$$

Appliquons l'inégalité de Schwartz, valide dans la métrique elliptique $h_{\alpha\beta}$:

$$(\varphi_\alpha\psi_\alpha)^2 \leqslant (\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta).(\overset{*}{h}{}^{\nu\mu}\psi_\nu\psi_\mu),$$

l'égalité n'ayant lieu que si $\psi_\alpha = K\varphi_\alpha$.

Mais $\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta = g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta = N(\varphi_\alpha)$,

$$\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta = - N(\psi_\alpha) + 2\frac{(\varphi_\alpha\psi^\alpha)^2}{N(\varphi_\alpha)},$$

d'où :

$$(\varphi^\alpha\psi_\alpha)^2 \leqslant - N(\varphi_\alpha).N(\psi_\beta) + 2(\varphi^\alpha\psi_\alpha)^2,$$

soit

$$N(\varphi_\alpha) . N(\psi_\alpha) \leqslant (\varphi^\alpha\psi_\alpha)^2,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $\psi_\alpha = K\varphi_\alpha$.

Il est clair que cette inégalité est vérifiée si φ_α est isotrope. Par contre l'égalité, c'est-à-dire $\varphi^\alpha\psi_\alpha = 0$, n'entraîne plus $\psi_\alpha = K\varphi_\alpha$.

2° Supposons maintenant φ_α et ψ_α orientés dans l'espace. Il existe un vecteur ν_α satisfaisant :

$$\nu^\alpha\varphi_\alpha = 0, \qquad \nu^\alpha\psi_\alpha = 0, \qquad N(\nu^\alpha) = 1.$$

Introduisons la métrique elliptique

$$l_{\alpha\beta} = - g_{\alpha\beta} + 2\nu_\alpha\nu_\beta.$$

On a aisément $(\varphi_\alpha\psi^\alpha)^2 = (\overset{*}{l}{}^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\psi_\beta)^2$. En appliquant l'inégalité de Schwarz, valable dans $l_{\alpha\beta}$:

$$(\varphi_\alpha\psi^\alpha)^2 \leqslant (\overset{*}{l}{}^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta) . (\overset{*}{l}{}^{\lambda\mu}\psi_\lambda\psi_\mu).$$

comme

$$\overset{*}{l}{}^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta = - N(\varphi_\alpha), \qquad \overset{*}{l}{}^{\lambda\mu}\psi_\lambda\psi_\mu = - N(\psi_\lambda),$$

On en déduit : $(\varphi_\alpha\psi_\beta)^2 \leqslant N(\varphi_\alpha) . N(\psi_\lambda)$, l'égalité n'ayant lieu que si $\psi_\lambda = K . \varphi_\lambda$.

3. — Application aux métriques conformes.

Définition (2, I). — *Deux métriques* $g_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$, *définies sur* V_n, *seront dites conformes s'il existe une fonction K positive telle que :*

$$h_{\alpha\beta} = K g_{\alpha\beta}.$$

$g_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ *seront supposées de classe* C^{r-1}, K *de classe* C^{r-1}.

Formules auxiliaires. — Il est clair que :

$$h^{\alpha\beta} = \frac{1}{K} g^{\alpha\beta}.$$

De (1) on déduit alors :

$$C_\alpha{}^\lambda{}_\beta = \frac{1}{2} (\delta^\lambda_\beta \partial_\alpha LK + \delta^\lambda_\alpha \partial_\beta LK - g_{\alpha\beta}\partial^\lambda LK).$$

Posons $\Delta_2 = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\partial_\beta$; la formule précédente et la formule (3) entraînent, puisque :

$$\nabla_\alpha C^\alpha_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda\partial_\mu LK - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}.\Delta_2 LK.$$

$$\nabla_\lambda C^\alpha_{\alpha\mu} = \frac{n}{2} \nabla_\lambda\partial_\mu LK,$$

$$C^\alpha_{\alpha\beta}C^\beta_{\lambda\mu} = \frac{n}{4}[2\partial_\lambda LK.\partial_\mu LK - g_{\lambda\mu}.\Delta_1 LK];$$

$$C^\beta_{\alpha\lambda}C^\alpha{}_\mu = \frac{1}{4}[(n+2)\partial_\lambda LK.\partial_\mu LK - 2g_{\lambda\mu}\Delta_1 LK],$$

$$(5)\quad \overset{*}{R}_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\nabla_\lambda\partial_\mu LK - \frac{g_{\lambda\mu}}{2}\Delta_2 LK + \left(\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)\partial_\lambda LK.\partial_\mu LK + \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4}\right) g_{\lambda\mu}.\Delta_1 LK.$$

Si K est constant, il résulte de cette dernière formule que $\overset{*}{R}_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu}$.

Réciproquement, cherchons des conditions pour que les tenseurs de Ricci soient égaux.

Théorème (5, I). — *Si la variété $V_n (n \neq 2)$ est compacte et de classe $C^r (r \geqslant 3)$, deux métriques conformes conduisent au même tenseur de Ricci si et seulement si elles sont proportionnelles (K = constante).*

Démonstration. — Notons qu'en passant au revêtement à deux feuillets on peut toujours supposer V_n orientable. Supposons donc $n \neq 2$ et $R_{\alpha\beta} = \overset{*}{R}_{\alpha\beta}$. De (5) résulte

$$(6)\quad \nabla_\lambda\partial_\mu LK + \frac{g_{\lambda\mu}}{n-2}\Delta_2 LK - \frac{1}{2}\partial_\lambda LK.\partial_\mu LK + \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}.\Delta_1 LK = 0.$$

Si la métrique $g_{\alpha\beta}$ est elliptique, en contractant en λ et μ :

$$\frac{2}{n-2}\Delta_2 LK + \frac{1}{2}\Delta_1 LK = 0.$$

Par intégration sur V_n il vient :

$\int_{V_n} \Delta_1 LK.dv = 0$, d'où, immédiatement, K = constant.

Si $g_{\alpha\beta}$ n'est pas elliptique, on ne peut appliquer le raisonnement ci-dessus. Transformons, la formule (6). Un calcul facile montre qu'elle est équivalente à :

$$\nabla_\lambda \partial_\mu K^{-\frac{1}{2}} = \frac{g_{\lambda\mu}}{(n-2)^2} \cdot K^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \Delta_2 K^{\frac{n-2}{2}}.$$

On est donc amené à résoudre en X une équation de la forme

$$\nabla_\lambda \partial_\mu X = r \cdot g_{\lambda\mu}.$$

Si p est la signature de $g_{\alpha\beta}$, avec les notations de la formule (4) on peut écrire :

$$g_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} + v_{\alpha\beta}.$$

Considérons le tenseur symétrique :

$$l^{\alpha\beta} = \frac{p}{n-p} u^{\alpha\beta} - v^{\alpha\beta}.$$

Par construction, il définit une forme quadratique elliptique et, compte renu des relations évidentes :

$$u^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} = n - p,\ v^{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = p,\ v^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} = 0,$$

on a : $l^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 0$.

De $\nabla_\lambda \partial_\mu X = r g_{\lambda\mu}$ on déduit donc : $l^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \partial_\mu X = 0$.

Équation de la forme $l^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} X + \sigma^\lambda \partial_\lambda X = 0$.

Mais V_n est compacte, X y atteint donc sa borne inférieure. Cela n'est possible d'après un théorème de Hopf (Voir [5]) que si X est constant sur V_n, c'est-à-dire K = constant.

De (5), on tire puisque $\overset{*}{h}{}^{\lambda\mu} = \frac{g^{\lambda\mu}}{K}$:

$$\overset{*}{R} = \frac{1}{K}\left[R + (1-n)\left[\Delta_2 LK + \left(\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)\Delta_1 LK\right]\right].$$

On transforme aisément cette formule en :

$$(7)\quad K\overset{*}{R} = R + \frac{2(1-n)}{\frac{n}{2} - 1} \cdot K^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{1} - 1\right)} \cdot . \Delta_2 K^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)}.$$

Si K est constant il résulte de cette formule que $K\overset{*}{R} = R$. Réciproquement, cherchons des conditions pour que les scalaires de courbure soient dans le rapport K.

THÉORÈME (6, I). — *Si la variété* V_n *est compacte et* $n \neq 2$; *deux métriques elliptiques conformes* ($h_{\alpha\beta} = K.g_{\alpha\beta}$) *conduisent à la relation* $K\overset{*}{R} = R$ *si et seulement si* $K =$ *constante.*

Démonstration. — Comme au théorème (6, I) on peut supposer V_n orientable. Supposons donc $n \neq 2$ et $K\overset{*}{R} = R$. La relation (7) entraîne :

$$\Delta_2 K^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)} = 0.$$

La métrique étant elliptique, il en résulte immédiatement $K =$ constante.

Le théorème est en défaut en signature non elliptique puisque l'équation $\Delta_2 X = 0$ peut avoir des solutions non trivales.

Un problème. — Étant donnée une métrique $g_{\alpha\beta}$, existe-t-il une métrique conforme $Kg_{\alpha\beta}$ pour laquelle $\overset{*}{R} = 0$?

D'après la relation (7), tout revient à résoudre en K l'équation :

$$R = (n-1)\left[\Delta_2 LK + \left(\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)\Delta_1 LK\right].$$

En posant $\varphi = K^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}$, on voit que tout revient à chercher les solutions positives de :

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right)R.\varphi + 2(1-n)\Delta_2\varphi = 0.$$

Si la métrique est elliptique, la première équation montre, par intégration sur V_n supposée compacte et orientable, que :

$$\int_{V_n} R\, dv = \frac{(n-1)(n-2)}{4} \int_{V_n} \Delta_1 LK.\, dv \geqslant 0.$$

Si $n \neq 2$, une condition nécessaire est donc :

$$\int_{V_n} R\, dv \geqslant 0.$$

Elle n'est sûrement pas suffisante, car si $\int_{V_n} R\, dv = 0$, on en déduit $K =$ constante, qui n'est solution que si $R \equiv 0$.

4. — Notion d'espace-temps stationnaire ou conforme à un espace-temps stationnaire.

Définition (3, I) (2). — *Un espace-temps stationnaire est une variété* V_4 *de classe* $C^r (r \geqslant 4)$, *munie d'une métrique hyperbolique normale* $g_{\alpha\beta}$ *de classe* C^{r-1}, *et sur laquelle il existe un groupe connexe d'isométries à trajectoires orientées dans le temps, ne laissant invariant aucun point de* V_4. *Les trajectoires du groupe sont appelées les lignes de temps.*

Le vecteur de Killing ξ^α, générateur du groupe d'isométrie, est donc tel que :

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0, \qquad \xi^2 = \xi^\alpha \xi_\alpha > 0.$$

De la première formule on déduit en particulier :

$$\nabla_\alpha \xi^\alpha = 0, \qquad \xi^\alpha \partial_\alpha \xi = 0.$$

Nous introduisons avec M. Lichnerowicz (3) les tenseurs $\varphi_\lambda = \dfrac{\xi_\lambda}{\xi^2}$ et $H_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda \varphi_\mu - \nabla_\mu \varphi_\lambda$. La nullité du tenseur $H_{\lambda\mu}$ signifie que φ_α est localement un gradient.

Les lignes de temps sont alors, localement, trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces orientées dans l'espace. S'il en est ainsi on dira que l'espace-temps est statique orthogonal.

Définition (4, I). — *Nous dirons qu'un espace-temps stationnaire* V_4 *est compact dans l'espace si on peut trouver un compact K de* V_4, *tel que la réunion des lignes de temps s'appuyant sur* K *recouvre* V_4.

Supposons, en particulier qu'il existe une variété à trois dimensions V_3, de classe C^r, et un homéomorphisme h, de classe C^r, de V_4 sur le produit topologique $V_3 \times R$ satisfaisant :

a) Les variétés $h^{-1}(\{x\} \times R)$, où $x \in V_3$, sont les lignes de temps de V_4.

b) Les variétés $h^{-1}(V_3 \times \{t\})$, où $t \in R$, sont orientées dans l'espace.

(2) Voir Lichnerowicz [5].
(3) Voir [5], p. 112.

Si V_3 est compacte, c'est-à-dire s'il existe des sections d'espace compactes, en prenant $K = h^{-1}(V_3 \times \{t_0\})$ on voit que V_4 est compacte dans l'espace. Par contre la compacité dans l'espace n'implique pas que V_4 soit un produit topologique.

Notons enfin que si V_4 est compacte, elle est *a fortiori* compacte dans l'espace.

Définition (5, I) [4]. — *Un espace-temps conforme à un espace-temps stationnaire est une variété* V_4 *de classe* $C^r (r \geqslant 4)$, *munie d'une métrique hyperbolique normale de classe* C^{r-1} : $g_{\alpha\beta}$, *sur laquelle est défini un groupe connexe de transformations conformes à trajectoires orientées dans le temps et ne laissant invariant aucun point de* V_4. *Le vecteur de Killing* $\vec{\xi}$, *générateur du groupe, est tel que* [1] :

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha - \frac{1}{2} \nabla_\lambda \xi^\lambda . g_{\alpha\beta} = 0, \qquad \xi^2 = \xi^\alpha \xi_\alpha > 0.$$

Il est clair qu'un espace-temps stationnaire est conforme à un espace-temps stationnaire. C'est le cas particulier où

$$\nabla_\lambda \xi^\lambda = 0.$$

De la même manière on introduira la notion d'espace-temps conforme à un espace-temps statique orthogonal : ce sera un espace-temps stationnaire tel que :

$$H_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda \left(\frac{\xi_\mu}{\xi^2} \right) - \nabla_\mu \left(\frac{\xi_\lambda}{\xi^2} \right) = 0.$$

Définition (6, I). — *Un espace-temps extérieur est une variété* V_4 *de classe* $C^r (r \geqslant 4)$, *munie d'une métrique hyperbolique normale* $g_{\alpha\beta}$ *de classe* C^{r-1} *dont le tenseur de Ricci est nul.*

5. — Formules fondamentales pour un espace-temps conforme à un espace-temps stationnaire.

Plaçons nous sur un espace-temps conforme à un espace-temps stationnaire, et soit ξ_α son vecteur de Killing.

[4] Voir Lichnerowicz [7], chapitre v. Voir aussi [6], pp. 45-46.

Si $f(\xi)$ est une fonction de ξ de classe C^r, nous poserons :

$$l_\alpha = f.\xi_\alpha.$$

D'autre part, pour alléger les notations, la divergence d'un vecteur X sera désignée par δX. De l'identité :

$$R_{\alpha\beta}l^\alpha = \nabla^\alpha\nabla_\beta l_\alpha - \partial_\beta\delta l.$$

On tire, par contraction avec l^β :

$$(8)\quad R_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta + \nabla_\alpha l_\beta\nabla^\beta l^\alpha - (\delta l)^2 = \nabla^\alpha(l^\beta\nabla_\beta l_\alpha - l_\alpha.\delta l).$$

Évaluons le membre de gauche. Évidemment :

$$(9)\qquad R_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta = f^2 R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta.$$

Remarquons que de $\nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\delta\xi = 0$, on tire par contraction en $\xi^\alpha\xi^\beta$:

$$(10)\qquad \xi^\alpha\partial_\alpha\xi = \frac{1}{4}\xi.\delta\xi.$$

Par suite :

$$(11)\quad \delta l = \nabla_\lambda(f\xi^\lambda) = f'.\xi^\lambda\partial_\lambda\xi + f.\delta\xi = \delta\xi\left(f + \frac{1}{4}\xi.f'\right).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha l_\beta\nabla^\beta l^\alpha &= \nabla_\alpha(f\xi_\beta).\nabla^\beta(f.\xi^\alpha)\\ &= (f'\partial_\alpha\xi.\xi_\beta + f\nabla_\alpha\xi_\beta)(f'.\partial^\beta\xi.\xi^\alpha + f\nabla^\beta\xi^\alpha)\\ &= f'^2(\xi^\alpha\partial_\alpha\xi)^2 + 2ff'\nabla^\alpha\xi^\beta\partial_\beta\xi.\xi_\alpha + f^2\,\nabla_\alpha\xi_\beta.\nabla^\beta\xi^\alpha.\end{aligned}$$

En remplaçant dans le second terme $\nabla^\alpha\xi^\beta$ par

$$-\nabla^\beta\xi^\alpha + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}.\delta\xi$$

et en utilisant (10) :

$$(12)\quad \nabla_\alpha l_\beta\nabla^\beta l^\alpha = (\delta\xi)^2\left(\frac{1}{16}f'^2\xi^2 + \frac{1}{4}\xi ff'\right) - 2ff'.\xi\Delta_1\xi + f^2\nabla^\alpha\xi^\beta\nabla_\beta\xi_\alpha.$$

Introduisons maintenant la métrique $h_{\alpha\beta}$ associée à $g_{\alpha\beta}$ par l'intermédiaire du vecteur $\xi^{-1}.\xi_\alpha$.

D'après le théorème (3, I) la métrique $h_{\alpha\beta}$ est elliptique puisque $\xi^{-1}\xi_\alpha$ est unitaire. D'après le théorème (2, I) :

$$\overset{*}{h}{}^{\beta\gamma} = \left(-g^{\beta\gamma} + 2\frac{\xi^\beta\xi^\gamma}{\xi^2}\right) = h^{\beta\gamma}.$$

Dans cette métrique on a :

$$\overset{*}{\Delta}_1\xi = \overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi\,\partial_\beta\xi = \left(-g^{\alpha\beta} + 2\frac{\xi^\alpha\xi^\beta}{\xi^2}\right)\partial_\alpha\xi\,\partial_\beta\xi.$$

Soit d'après (10)

$$\overset{*}{\Delta}_1\xi = -\Delta_1\xi + \frac{1}{8}(\delta\xi)^2. \tag{13}$$

Désignons par Ω^2 le carré du tenseur $\nabla_\alpha\xi_\beta$ dans la métrique $\overset{*}{h}_{\alpha\beta}$:

$$\Omega^2 = \overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{h}{}^{\beta\mu}\nabla_\alpha\xi_\beta\nabla_\lambda\xi_\mu$$

$$= \left(-g^{\alpha\lambda} + \frac{2\xi^\alpha\xi^\lambda}{\xi^2}\right)\left(-g^{\beta\mu} + \frac{2\xi^\lambda\xi^\mu}{\xi^2}\right)\nabla_\alpha\xi_\beta.\nabla_\lambda\xi_\mu.$$

En développant et en utilisant (10) :

$$\Omega^2 = \nabla_\alpha\xi_\beta\nabla^\alpha\xi^\beta - 2\Delta_1\xi - 2\frac{\xi^\alpha\xi^\lambda}{\xi^2}\nabla_\alpha\xi_\beta\nabla_\lambda\xi^\beta + \frac{1}{4}(\delta\xi)^2.$$

Enfin, en remplaçant dans les premier et troisième termes $\nabla_\alpha\xi_\beta$ par $-\nabla_\beta\xi_\alpha + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}.\delta\xi$:

$$\Omega^2 = -\nabla_\beta\xi_\alpha\nabla^\alpha\xi^\beta - 4\Delta_1\xi + \frac{3}{4}(\delta\xi)^2.$$

Soit, avec (13),

$$\nabla_\alpha\xi_\beta\nabla^\beta\xi^\alpha = -\Omega^2 + 4\,\overset{*}{\Delta}_1\xi + \frac{1}{4}(\delta\xi)^2.$$

Cette dernière formule et les formules (8, 9, 11, 12, 13) donnent :

$$f^2R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta + \overset{*}{\Delta}_1\xi(2ff'\xi + 4f^2) - f^2\Omega^2 + (\delta\xi)^2\left(\frac{-3}{4}f^2 - \frac{ff'}{2}\xi\right)$$
$$= \nabla^\alpha(l^\beta\nabla_\beta l_\alpha - l_\alpha.\delta l).$$

En résumé, en posant $\varphi = f^2$, on a établi le

THÉORÈME (6, I). — *Soit* V_4 *un espace-temps conforme à un espace-temps stationnaire, de vecteur de Killing* ξ_α. *Si* φ *est une fonction positive de classe* C^r *de* ξ_α *et si les éléments étoilés sont relatifs à la métrique elliptique :*

$$-g_{\alpha\beta} + 2\,\xi^{-2}.\xi_\alpha\xi_\beta,$$

on a:

$$\varphi R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta + \overset{*}{\Delta}_1\xi(4\varphi + \xi\varphi') - \varphi.\Omega^2 - \frac{1}{4}(\delta\xi)^2(3\varphi + \xi\varphi') = \nabla^\alpha(l^\beta\nabla_\beta l_\alpha - l_\alpha.\delta l),$$

où

$$l_\alpha = \sqrt{\varphi}.\xi_\alpha, \qquad \Omega^2 = \overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{h}{}^{\beta\mu}\nabla_\alpha\xi_\beta\nabla_\lambda\xi_\mu.$$

Examinons le cas particulier où l'espace-temps est stationnaire. Dans ces conditions $\delta\xi = 0$, et de (11) il résulte $\delta l = 0$. La formule du théorème (6, I) se simplifie en :

$$\varphi R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta + \overset{*}{\Delta}_1\xi.(4\varphi + \xi\varphi') - \varphi.\Omega^2 = \nabla^\alpha(l^\beta\nabla_\beta l_\alpha).$$

Calculons le membre de droite :

$$l^\beta\nabla_\beta l_\alpha = f.\xi^\beta\nabla_\beta(f.\xi_\alpha) = f^2.\xi^\beta\nabla_\beta\xi_\alpha + ff'.\xi_\alpha\xi^\beta\partial_\beta\xi;$$

mais

$$\xi^\beta\partial_\beta\xi = 0, \qquad \xi^\beta\nabla_\beta\xi_\alpha = -\xi^\beta\nabla_\alpha\xi_\beta = -\xi\partial_\alpha\xi,$$

donc

$$l^\beta\nabla_\beta l_\alpha = -\xi f^2.\partial_\alpha\xi = -\xi\varphi\partial_\alpha\xi.$$

Par suite, si on pose $F(\xi) = \int\xi\varphi.d\,\xi$, il vient

$$(14) \qquad \nabla^\alpha(l^\beta\nabla_\beta l_\alpha) = -\nabla^\alpha(\xi\varphi\partial_\alpha\xi) = -\Delta_2 F.$$

Évaluons le laplacien de F dans la métrique $h_{\alpha\beta}$. Pour cela, notons que puisque $\xi^{-1}\xi_\alpha$ est unitaire, d'après une remarque du théorème (1, I), $\overset{*}{h} = |g|$. D'autre part :

$$\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}\partial_\alpha F = \left(-g^{\alpha\beta} + 2\frac{\xi^\alpha\xi^\beta}{\xi^2}\right)F'.\partial_\alpha\xi = -\partial^\beta\xi.F' = -\partial^\beta F.$$

Par conséquent :

$$\overset{*}{\Delta}_2 F = \frac{1}{\sqrt{\overset{*}{h}}}\partial_\beta\left[\sqrt{\overset{*}{h}}\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}\partial_\alpha F\right] = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\beta[\sqrt{|g|}\partial^\beta F] = -\Delta_2 F.$$

Avec (14), on a donc :

$$\nabla^\alpha(l^\beta\nabla_\beta l_\alpha) = \overset{*}{\Delta}_2 F.$$

En résumé on a démontré le :

THÉORÈME (7, I). — *Soit* V_4 *un espace-temps stationnaire, de vecteur de Killing* ξ_α. *Si* φ *est une fonction positive de classe* C^r *de* ξ, *et si les éléments étoilés sont relatifs à la métrique elliptique* $-g_{\alpha\beta}+2\frac{\xi_\alpha\xi_\beta}{\xi^2}$ *on a :*

$$\varphi R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta+\overset{*}{\Delta}_1\xi.(4\varphi+\xi\varphi')-\varphi.\Omega^2=\overset{*}{\Delta}_2F,$$

où

$$\Omega^2=\overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{h}{}^{\beta\mu}\nabla_\alpha\xi_\beta\nabla_\lambda\xi_\mu,$$
$$F=\int\xi\varphi.d\xi.$$

Remarque. — Si on prend $\varphi=\xi^{-4}$, la formule précédente se réduit à :

$$\text{(15)}\qquad \frac{1}{\xi^4}(R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta-\Omega^2)=-\frac{1}{2}\overset{*}{\Delta}_2(\xi^{-2}).$$

Revenons aux espaces-temps conformes à un espace-temps stationnaire les plus généraux. Nous allons établir une formule qui ne fait intervenir que le tenseur

$$H_{\lambda\mu}\equiv\nabla_\lambda\left(\frac{\xi_\mu}{\xi^2}\right)-\nabla_\mu\left(\frac{\xi_\lambda}{\xi^2}\right)$$

Évaluons le carré de ce tenseur dans la métrique $h_{\alpha\beta}$ déjà utilisée.

Si on pose $u_\alpha=\frac{\xi_\alpha}{\xi}$, on a vu que :

$$h_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}+2u_\alpha u_\beta,\qquad \overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}=-g^{\alpha\lambda}+2u^\alpha u^\lambda,$$

donc

$$\begin{aligned}H^2&=\overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{h}{}^{\beta\mu}H_{\alpha\beta}H_{\lambda\mu}\\&=2(-g^{\alpha\lambda}+2u^\alpha u^\lambda)(-g^{\beta\mu}+2u^\beta u^\mu)\nabla_\alpha(\xi^{-1}u_\beta)\\&\qquad[\nabla_\lambda(\xi^{-1}u_\mu)-\nabla_\mu(\xi^{-1}u_\lambda)].\end{aligned}$$

En développant et en tenant compte de :

$$u^\alpha u_\alpha=1,\qquad u^\alpha\nabla_\beta u_\alpha=0,$$

on a :

$$\begin{aligned}\text{(16)}\quad H^2=2\xi^{-2}[&\nabla^\lambda u^\mu\nabla_\lambda u_\mu-\nabla^\lambda u^\mu\nabla_\mu u_\lambda-\xi^{-2}\nabla_1\xi\\&+\xi^{-2}(u^\lambda\partial_\lambda\xi)^2-2u^\alpha\nabla_\alpha u^\mu.u^\lambda\nabla_\lambda u_\mu-2\xi^{-1}.\partial_\mu\xi.u^\alpha\nabla_\alpha u^\mu].\end{aligned}$$

En revenant à la définition de u_α et en utilisant (10) et

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \delta\xi = 0,$$

on trouve :

$$H^2 = \xi^{-4} \left[-4 \nabla^\lambda \xi^\mu \nabla_\mu \xi_\lambda - 8 \Delta_1 \xi + \frac{3}{2} (\delta\xi)^2 \right].$$

Finalement, en utilisant l'estimation de $\nabla^\lambda \xi^\mu \nabla_\mu \xi_\lambda$ faite au théorème (5, 1) et la formule (13) :

$$H^2 = \xi^{-4} \left[4\Omega^2 - 8 \overset{*}{\Delta}_1 \xi - \frac{1}{2} (\delta\xi)^2 \right].$$

Avec le théorème (6, I) on en déduit le :

Théorème (8, I). — *Avec les notations et les hypothèses du théorème* (6, I), *si on pose* $H^2 = \overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda} \overset{*}{h}{}^{\beta\mu} H_{\alpha\beta} H_{\lambda\mu}$, *on a :*

$$\varphi R_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta + (2\varphi + \xi\varphi') \overset{*}{\Delta}_1 \xi - \frac{\varphi}{4} \xi^4 H^2 - \left(\frac{\delta\xi}{4}\right)^2 \left(\frac{7\varphi}{2} + \xi\varphi'\right) = \nabla^\alpha (l^\beta \nabla_\beta l_\alpha - l_\alpha \delta l).$$

Théorème (9, I). — *Avec les notations et les hypothèses du théorème* (7, I) *on a :*

$$\varphi R_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta + (2\varphi + \xi\varphi') \overset{*}{\Delta}_1 \xi - \frac{\varphi}{4} \xi^4 H^2 = \overset{*}{\Delta}_2 F.$$

Démonstration. — Résulte du théorème précédent car, dans le cas stationnaire

$$\delta\xi = 0, \qquad \delta l = 0, \qquad \nabla^\alpha (l^\beta \nabla_\beta l_\alpha) = \overset{*}{\Delta}_2 F.$$

Cas particulier : Si on prend $\varphi = \xi^{-2}$, la précédente formule devient :

$$\xi^{-2} . R_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta - \frac{1}{4} \xi^2 H^2 = \overset{*}{\Delta}_2 L\xi$$

analogue à une formule donnée par Lichnerowicz [5].

[5] Voir [5], p. 119, formule (69,3).

6. — Espaces-temps extérieurs conformes à un espace-temps stationnaire.

Théorème (10, I). — *Si un espace-temps extérieur stationnaire V_4 est compact et orientable, il est localement euclidien.*

Démonstration. — La formule (15) du théorème (7, I) s'écrit :

$$\frac{1}{2}\overset{*}{\Delta}_2(\xi^{-2}) = \xi^{-4}.\Omega^2 \geqslant 0.$$

Si dv^* désigne l'élément de volume de V_4 dans la métrique elliptique $-g_{\alpha\beta} + 2\frac{\xi_\alpha\xi_\beta}{\xi^2}$, on a :

$$\int_{V_4}\overset{*}{\Delta}_2(\xi^{-2})dv^* = 0.$$

Il en résulte $\Omega^2 = 0$, donc $\nabla_\alpha\xi_\beta = 0$. Les identités de Bianchi entraînent $R_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^\delta = 0$. Mais Bel (6) a démontré que si $R_{\alpha\beta} = 0$ cette dernière égalité entraînait ξ_α isotrope ou $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nul. Comme ξ_α est temporel, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ et V_4 est localement euclidien.

Remarque. — Le même raisonnement montre qu'il ne peut exister d'univers vide à constante cosmologique k positive, qui soit stationnaire, compact et orientable. En effet,

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}kg_{\alpha\beta},$$

et la formule (15) s'écrit :

$$\frac{1}{2}\xi^{-2}.k + \xi^{-4}\Omega^2 = \frac{1}{2}\overset{*}{\Delta}_2(\xi^{-2}) > 0.$$

incompatible avec V_n compacte et orientable.

Afin d'étendre ce résultat aux espaces-temps compacts dans l'espace, rappelons un théorème de Lichnerowicz (7).

Si une fonction u bornée, de classe C^2, sur une variété

(6) Voir [3], p. 60-61.
(7) Voir [5], p. 134.

riemannienne connexe V_4 est telle que son laplacien soit positif ou nul et si elle atteint son maximum en un point de V_4, elle est constante sur V_4.

Théorème (11, I). — *Si un espace-temps extérieur stationnaire* V_4 *est compact dans l'espace, il est localement euclidien.*

Démonstration. — Par hypothèse il existe un sous-ensemble compact K de V_4, tel que la réunion des lignes de temps s'appuyant sur K recouvre V_4.

La compacité de K entraîne que ξ^{-2} atteint son maximum sur K. La formule (15) donne :

$$\frac{1}{2}\overset{*}{\Delta}_2(\xi^{-2}) = \frac{\Omega^2}{\xi^4} \geqslant 0. \tag{17}$$

Mais $\xi^\alpha \partial_\alpha \xi = 0$ montre que ξ est constant sur les lignes de temps; ξ^{-2} atteint donc son maximum sur V_4 et d'après le théorème de Lichnerowicz, ξ^{-2} est constant sur V_4. Par suite, (17) entraîne $\Omega^2 = 0$, et le raisonnement s'achève comme au théorème précédent. La remarque du théorème précédent vaut encore ici.

Théorème (12, I). — *Si un espace-temps extérieur* V_4 *est conforme à un espace-temps stationnaire, et s'il est compact et orientable, il est localement euclidien.*

Démonstration. — Dans la formule du théorème (8, I), faisons $\varphi = \xi^{-2}$.

Il vient :

$$\xi^{-2} R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta - \frac{\xi^2}{4} H^2 - \frac{3}{8}(\delta\xi)^2 . \xi^{-2} = \nabla^\alpha (l^\beta \nabla_\beta l_\alpha - l_\alpha \delta l).$$

Par intégration sur V_4, qui est compact et orientable, et puisque $R_{\alpha\beta} = 0$:

$$\int_{V_4} \left[\frac{\xi^2}{4} H^2 + \frac{3}{8}\frac{(\delta\xi)^2}{\xi^2}\right] dv = 0.$$

Il en résulte $H \equiv 0$, $\delta\xi \equiv 0$. L'espace-temps est donc stationnaire, et on est ramené au théorème (10, I).

7. — Espaces-temps stationnaires en schéma fluide parfait. Champ électromagnétique.

Aufenkamp [8] a établi le théorème suivant : il ne peut exister de modèle d'univers stationnaire à section d'espace orientable compacte en l'absence de constante cosmologique. Nous nous proposons d'étendre ce résultat aux espaces-temps stationnaires compacts ou compacts dans l'espace.

Schéma fluide parfait champ électromagnétique. — Si $R_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur de Ricci de l'espace-temps :

$$(18) \quad R_{\alpha\beta} = \chi\Big[(\rho + p)u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(\rho - p) + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\rho}F_\beta{}^\rho\Big] - \frac{k}{2} g_{\alpha\beta}.$$

où χ est une constante qui ne dépend que des unités choisies, k la constante cosmologique, ρ la densité p la pression, $F_{\alpha\beta}$ le tenseur champ électromagnétique, u_α le vecteur vitesse unitaire généralisé.

Théorème (13, I). — *Si ξ_α est un vecteur orienté dans le temps et si $k \leqslant 0$, alors $R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geqslant 0$, l'égalité n'étant obtenu que si : $\rho = p = 0$, $F_{\alpha\beta} = 0$, $k = 0$.*

Démonstration. — D'après le théorème (4, I), puisque u_α est orienté dans le temps :

$$(u_\alpha\xi^\alpha)^2 \geqslant N(u_\alpha).N(\xi_\alpha) = \xi^2,$$

donc :

$$\Big[(\rho + p)u_\alpha u_\beta - \frac{g_{\alpha\beta}}{2}(\rho - p)\Big]\xi^\alpha\xi^\beta = (\rho + p)(u_\alpha\xi^\alpha)^2 - \frac{1}{2}(\rho - p)\xi^2 \geqslant \frac{\xi^2}{2}(\rho + 3p).$$

L'antisymétrie de $F_{\alpha\beta}$ entraîne $F_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0$. Si on intro-

[8] Voir [1].

duit la métrique elliptique $h_{\alpha\beta} = - g_{\alpha\beta} + 2\xi^{-2}.\xi_\alpha\xi_\beta$, on sait que $\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta} = - g^{\alpha\beta} + 2\xi^{-2}\xi^\alpha\xi^\beta$, par suite :

$$\left(\frac{1}{4} g_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\rho}F_{\beta}{}^{\rho}\right)\xi^\alpha\xi^\beta = \xi^2\left(\frac{1}{4} F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu} - \frac{\xi^\alpha}{\xi} F_{\alpha\rho}\cdot\frac{\xi^\beta}{\xi} F_{\beta}{}^{\rho}\right)$$
$$= \frac{\xi^2}{4}\left(- g^{\alpha\lambda} + 2\frac{\xi^\alpha\xi^\lambda}{\xi^2}\right)\left(- g^{\beta\mu} + 2\frac{\xi^\beta\xi^\mu}{\xi^2}\right)F_{\alpha\beta}.F_{\lambda\mu}$$
$$= \frac{\xi^2}{4}\overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{h}{}^{\beta\mu}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu} \geqslant 0.$$

L'égalité n'étant obtenue que si $F_{\alpha\beta} = 0$.

De (18) et des inégalités précédentes, on tire :

$$\frac{R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta}{\xi^2} \geqslant \left[\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \frac{1}{4}\overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{h}{}^{\beta\mu}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}\right] - \frac{1}{2}k \geqslant 0,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $\rho = p = 0$, $F_{\alpha\beta} = 0$, $k = 0$.

Théorème (14, I). — *En schéma fluide parfait champ électromagnétique, tout espace-temps statique orthogonal, compact et orientable est à constante cosmologique positive.*

Démonstration. — Puisque $H = 0$, la formule du théorème (9, I) s'écrit :

$$\overset{*}{\Delta}_2 L\xi = R_{\alpha\beta}\frac{\xi^\alpha\xi^\beta}{\xi^2}.$$

Désignons par $d\overset{*}{v}$ l'élément de volume de V_4 dans la métrique elliptique $- g_{\alpha\beta} + 2\frac{\xi_\alpha\xi_\beta}{\xi^2}$. En intégrant les deux membres de la précédente égalité sur V_4, il vient :

$$\int_{V_4} R_{\alpha\beta}\frac{\xi^\alpha\xi^\beta}{\xi^2}d\overset{*}{v} = 0.$$

Mais si $k \leqslant 0$ c'est impossible d'après le théorème précédent, donc $k > 0$.

Théorème (15, I). — *En schéma fluide parfait champ électromagnétique, tout espace-temps statique orthogonal, compact dans l'espace, est à constante cosmologique positive.*

Démonstration. — Si $k \leqslant 0$, le théorème (13, I) entraîne $R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geqslant 0$. Or $\overset{*}{\Delta}_2 L\xi = R_{\alpha\beta}\frac{\xi^\alpha\xi^\beta}{\xi^2}$, donc $\overset{*}{\Delta}_2 L\,\xi \geqslant 0$. Le raisonnement du théorème (11, I) montre que $L\xi =$ constante sur tout V_4, donc aussi $R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $k \leqslant 0$ et la présence effective de matière.

Théorème (16, I). — *En schéma fluide parfait champ électromagnétique, si un espace-temps stationnaire est feuilleté par des sections d'espace compactes, il est à constante cosmologique positive.*

Démonstration. — Soit $u =$ constante, l'équation des feuilles. Puisqu'elles sont orientées dans l'espace, $\varphi_\alpha = \partial_\alpha u$ est orienté dans le temps.

Soit ξ_α le vecteur de Killing engendrant le groupe d'isométrie. Puisque $\delta\xi = 0$, l'identité

$$R_{\alpha\beta}\xi^\alpha = \nabla^\alpha\nabla_\beta\xi_\alpha - \partial_\beta\delta\xi. \text{ s'écrit :}$$
$$R_{\alpha\beta}\xi^\alpha = \nabla^\alpha\nabla_\beta\xi_\alpha.$$

Multiplions les deux membres par φ^β :

$$R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\varphi^\beta = \nabla^\alpha(\varphi^\beta\nabla_\beta\xi_\alpha) - \nabla^\alpha\varphi^\beta\nabla_\beta\xi_\alpha.$$

Mais $\nabla_\alpha\varphi_\beta$ est symétrique, $\nabla_\alpha\varphi_\beta$ antisymétrique; il reste :

$$R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\varphi^\beta = \nabla^\alpha(\varphi^\beta\nabla_\beta\xi_\alpha).$$

La formule de Stokes donne, par intégration sur le volume D bordé par deux sections d'espace :

$$\int_D R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\varphi^\beta\,dv = \int_{\partial D} \nabla_\alpha\xi_\beta.\varphi^\alpha n^\beta\,d\sigma,$$

où n^α est le vecteur normal unitaire de ∂D, $d\sigma$ son élément d'aire. Comme φ_α est normal aux sections d'espace, φ^β et n^β sont colinéaires, donc $\nabla_\alpha\xi_\beta.\varphi^\alpha n^\beta = 0$.

Il reste :

$$\int_D R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\varphi^\beta\,dv = 0.$$

Un raisonnement dû à Lichnerowicz (9) montre que si la

(9) Voir [5], p. 143.

constante cosmologique est négative ou nulle, $R_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\varphi^{\beta} \geqslant 0$. Cela entraînerait avec la formule précédente :

$$R_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\varphi^{\beta} = 0.$$

Ce qui est en contradiction avec la présence effective de matière.

8. — Sur un modèle d'univers stationnaire, compact, orientable et sans section d'espace globale.

Le théorème (16, I) de Aufenkamp pose les problèmes suivants :

Étant donné un espace-temps compact et orientable, existe-t-il toujours une section d'espace globale compacte?

Dans la négative peut-on néanmoins étendre le théorème (16, I) sous la forme suivante : « En schéma fluide parfait champ électromagnétique il ne peut exister d'espace-temps compact en l'absence de constante cosmologique »?

Nous allons répondre à ces questions en construisant un modèle d'univers U doué des propriétés suivantes :

Il est compact et orientable mais sans section d'espace globale compacte.

Il est stationnaire et schématise un fluide parfait champ électromagnétique.

La constante cosmologique est nulle.

Les lignes de temps sont fermées.

La topologie de U.

Rappels (10). — Soient V_n une variété de dimension n, orientable et différentiable, W_{n-1} une sous-variété de dimension $n-1$, compacte, orientable, et différentiable.

Si γ est un lacet de V_n, c'est-à-dire une application continue de T^1 dans V_n, on peut définir un nombre algébrique d'intersections de γ orienté et de W_{n-1} orienté. Ce sera l'indice de Kronecker $W_{n-1} \wedge \gamma[1]$, on sait qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.

Supposons V_n compact et porteur d'un champ de vecteur $\vec{u}$, régulier et différentiable, dont les trajectoires γ sont fermées.

(10) Voir G. de Rham [8], pp. 99-103.

Si W_{n-1} est transverse à $\vec{u}$, $\vec{u}$ oriente le fibré normal de W_{n-1} Avec cette orientation il est clair que $W_{n-1} \wedge \gamma[1] \geqslant 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $W_{n-1} \cap \gamma = \emptyset$.

LEMME 1. — *Si* S^3 *est la sphère centrée à l'origine et de rayon unité de l'espace euclidien* E^4 *rapporté au repère orthonormé* $(Oxyzt)$, *il n'existe pas sur* S^3 *de surface orientable transverse au champ* $\vec{u}$ *de composantes* $(-y, x, -t, z)$.

Démonstration. — La restriction du champ $\vec{u}$ à S^3 définit sur S^3 un champ de vecteurs tangents et unitaires puisque :

$$x(-y) + yx + z(-t) + tz = 0.$$
$$(-y)^2 + x^2 + (-t)^2 + z^2 = 1.$$

Les trajectoires γ sont définies par le système différentiel :

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{-t} = \frac{dt}{z},$$

dont l'intégration est immédiate. On trouve :

$$x = A \cos \theta, \qquad y = A \sin \theta,$$
$$z = B \cos(\theta + C), \qquad t = B \sin(\theta + C),$$

où les constantes d'intégration A, B, C, sont liées par $A^2 + B^2 = 1$, Les trajectoires γ sont donc fermées : elles définissent une fibration de Hopf de S^3. De plus, comme S^3 est simplement connexe, elles sont homotopes à zéro. Par suite, quelle que soit la variété compacte, orientable et différentiable W_2 de S^3 : $W_2 \wedge \gamma\,[1] = 0$. Le lemme résulte alors de la remarque qui le précède.

LEMME 2. — *Sur la variété* $S^3 \times T^1$ *il n'existe pas de sous-variété compacte, orientable différentiable à trois dimensions, et transverse au champ vectoriel dont la protection sur* T^1 *est nulle et la projection sur* S^3 *le champ précité.*

Démonstration. — Par l'absurde. Soit W_3 une sous-variété de $S^3 \times T^1$, compacte, orientable, différentiable, à trois dimensions, et transverse au champ précité. Pour tout $t \in T^1$,

$S^3 \times \{t\}$ coupe W_3 suivant une surface $W_2(t)$, compacte, orientable, différentiable et transverse au champ du lemme 1 dans

$$S^3 \times \{t\}.$$

D'après le lemme 1, $W_2(t) = \emptyset$; cela pour tout t, donc $W_3 = \emptyset$.

Théorème (17, I). — Sur la variété $S^3 \times T^1$ il n'existe par de sous-variété compacte, orientable, différentiable, et orientée dans l'espace au sens d'une métrique hyperbolique normale définie sur $S^3 \times T^1$ et pour laquelle le champ du lemme 2 serait orienté dans le temps.

Démonstration. — Résulte de ce que toute variété orientée dans l'espace est transverse au champ du lemme 2.

La métrique de S^3. — Convenons définitivement que les indices latins sont relatifs à S^3. Nous allons munir S^3 d'une métrique hyperbolique normale g_{ij}.

Soit l_{ij} la métrique elliptique induite sur S^3 par son plongement trivial dans E^4. On a vu que le champ $\vec{u}$ de E^4 induisait sur S^3 un champ de vecteurs tangents et unitaires au sens de l_{ij} : soit u_i.

D'après le théorème (3, I) la métrique :

$$g_{ij} = -l_{ij} + ru_iu_j, \qquad r > 1,$$

est hyperbolique normale et u_i est orienté dans le temps.

Contrairement à la convention faite dans la deuxième partie, nous affecterons d'une astérisque les éléments relatifs à g_{ij}; les éléments non étoilés étant relatifs à l_{ij}. Moyennant cette convention et le théorème (2, I), on a :

$$g^{*ij} = -l^{ij} + \frac{r}{r-1} u^iu^j.$$

Calculons maintenant le tenseur de Ricci $\overset{*}{R}_{ij}$ dans la métrique g_{ij}.

Le tenseur dérivé du premier ordre du vecteur $\vec{u}$ de E^4 a pour matrice dans le repère $(Oxyzt)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice est antisymétrique, $\vec{u}$ engendre un groupe d'isométries de E^4. Ce groupe laisse invariant S^3 puisque $\vec{u}$ est tangent à S^3; il induit donc sur S^3, munie de la métrique l_{ij}, un groupe d'isométries. Ainsi : $\nabla_i u_j + \nabla_i u_j = 0$. La formule (1) donne alors :

$$C^k_{ij} = \frac{1}{2} \overset{*}{g}{}^{kl}(\nabla_i g_{lj} + \nabla_j g_{li} - \nabla_l g_{ij})$$
$$= \frac{r}{2}\left[- l^{ks} + \frac{r-1}{r} u^k u^s\right][\nabla_i(u_s u_j) + \nabla_j(u_i u_s) - \nabla_s(u_i u_j)]$$
$$= r(u_j \nabla^k u_i + u_i \nabla^k u_j).$$

Puisque $\nabla_i u^i = 0$, on en tire $C^i_{ij} = 0$.

Comme il est bien connu, le tenseur de Ricci de S^3 dans la métrique l_{ij} est $R_{ij} = 2\, l_{ij}$. Par suite, compte tenu de

$$\nabla_i u_j = - \nabla_j u_{i'}, \qquad \nabla_i u^i = 0,$$

l'identité :

$$R_{ki} u^k = \nabla^k \nabla_i u_k - \partial_i \delta u \qquad \text{s'écrit} \qquad 2u_i = - \nabla^k \nabla_k u_i.$$

Cela, joint à la formule donnant C^k_{ij} entraîne :

$$\nabla_k C^k_{ij} = -4 r u_i u_j + 2r \nabla^k u_i \nabla_k u_i.$$

De même, on déduit : $C^l_{ki} C^k_{lj} = r^2 . u_i u_j \nabla^l u^k \nabla_k u_l$.

Les formules précédentes et la formule (3) entraînent :

$$\overset{*}{R}_{ij} = 2 l_{ij} - 4 r u_i u_j + 2r \nabla^k u_i . \nabla_k u_j + r^2 . u_i u_j \nabla^l u^k \nabla_l u_k.$$

Évaluons $\nabla^k u_i . \nabla_k u_j$.

Rapportons E^4 au système de coordonnées polaires

$$(x^1, x^2, x^3, x^4).$$

La distance d'un point M de E^4 à l'origine étant x^4, (x^1, x^2, x^3) fixant la position de la trace de OM sur S^3. Les indices latins varieront de 1 à 3, les indices majuscules de 1 à 4.

Enfin, nous affecterons d'une barre les éléments relatifs à E^4 muni de sa métrique usuelle. Puisque x^4 est la distance OM, $\bar{l}^{44} = \bar{l}_{44} = 1$.

Puisque le système de coordonnées est orthogonal :

$$\bar{l}^{4i} = \bar{l}_{4i} = 0.$$

Puisque l_{ij} est la métrique induite par le prolongement trivial dans H^4 : $(\bar{l}_{ij})_{S^3} = l_{ij}$, $(\bar{l}^{ij})_{S^3} = l^{ij}$.

Puisque le champ u_i de S^3 est la restriction à S^3 du champ $\vec{\bar{u}}$ de E^4 : $\bar{u}^4 = \bar{u}_4 = 0$, $(\bar{u}_i)_{S^3} = u_i$.

Par suite :

$$(\overline{\nabla}_i \bar{u}_j)_{S^3} = (\partial_i \bar{u}_j - \overline{\Gamma}^{A}_{ij} \bar{u}_A)_{S^3} = (\partial_i u_j - \overline{\Gamma}^{k}_{ij} u_k)_{S^3}.$$

Mais :

$$(\overline{\Gamma}^{k}_{ij})_{S^3} = \frac{1}{2} (\bar{l}^{kA}(\partial_i \bar{l}_{Aj} + \partial_j \bar{l}_{Ai} - \partial_A \bar{l}_{ij}))_{S^3}$$

$$= \frac{1}{2} l^{ks}(\partial_i \bar{l}_{sj} + \partial_j l_{si} - \partial_s l_{ij}) = \Gamma^{k}_{ij},$$

donc :

$$(\overline{\nabla}_i \bar{u}_j)_{S^3} = \nabla_i u_j.$$

De même, puisque $\vec{\bar{u}}$ engendre un groupe d'isométries de E^4 $(- \overline{\nabla}_4 \bar{u}_i)_{S^3} = (\overline{\nabla}_i \bar{u}_4)_{S^3} = (\partial_i \bar{u}_4 - \overline{\Gamma}^{A}_{i4} \bar{u}_A)_{S^3} = - (\overline{\Gamma}^{k}_{i4} u_k)_{S^3}$.

Mais :

$$(\overline{\Gamma}^{k}_{i4})_{S^3} = \frac{1}{2} (\bar{l}^{kA}(\partial_i \bar{l}_{A4} + \partial_4 \bar{l}_{Ai} - \partial_A \bar{l}_{i4}))_{S^3} = \frac{1}{2} l^{ks}(\partial_4 \bar{l}_{si})_{S^3} = \delta^k_i ;$$

car sur S^3 :

$$(\partial_4 \bar{l}_{si})_{S^3} = (2\, x^4 . (\bar{l}_{si})_{S^3})_{S^3} = 2 l_{si}.$$

Par suite :

$$(\overline{\nabla}_4 \bar{u}_i)_{S^3} = u_i.$$

Sur S^3, on a donc :

$$(\overline{\nabla}_A \bar{u}_i \overline{\nabla}^A \bar{u}_j)_{S^3} = (\bar{g}^{44} \overline{\nabla}_4 \bar{u}_i \overline{\nabla}_4 u_j + \bar{g}^{kl} \overline{\nabla}_k u_i . \overline{\nabla}_l \bar{u}_j)_{S^3}$$

$$= u_i u_j + \nabla^k u_i . \nabla_k u_j.$$

Mais de l'évaluation de $\overline{\nabla}_A \bar{u}_B$ trouvée dans le repère $(Oxyzt)$ on tire :

$$\overline{\nabla}_A \bar{u}_B . \overline{\nabla}^B \bar{u}_C = - \bar{l}_{AC}.$$

Par suite :

$$\overline{\nabla}_A \bar{u}_i \overline{\nabla}^A \bar{u}_j = \bar{l}_{ij}.$$

Avec la formule ci-dessus, cela donne :

$$\nabla^k u_i . \nabla_k u_j = l_{ij} - u_i u_j, \qquad \text{et} \qquad \nabla^k u^l \nabla_k u_l = 2.$$

En portant dans l'expression trouvée pour $\overset{*}{R}_{ij}$.

$$\overset{*}{R}_{ij} = 2(r+1)l_{ij} + (2r^2 - 6r)u_i u_j$$
$$= -2(r+1)g_{ij} + 4r(r-1)u_i u_i.$$

La métrique de $S^3 \times T^1 = U$. — Nous avons muni S^3 de la métrique hyperbolique normale g_{ij}. Munissons T^1 de la métrique triviale changée de signe. La variété U sera le produit riemannien de ces deux variétés. Chaque point de U est donc repéré par les coordonnées x^i de sa projection sur S^3 et la coordonnée x^4 de sa projection sur T^1. Ce système de coordonnées est évidemment orthogonal au sens de la métrique de U.

Les indices latins variant de 1 à 3, les indices grecs de 1 à 4; si provisoirement, nous désignons par $f_{\lambda\mu}$ la métrique de U :

$$f_{ij} = g_{ij}, \qquad f_{4i} = 0, \qquad f_{44} = -1.$$

Cela montre que cette métrique est hyperbolique normale et qu'on peut encore la désigner par $g_{\lambda\mu}$. Enfin, désignons encore par u_α le champ de U du lemme 2, et par v_α le champ de vecteurs unitaires tangents aux variétés facteurs images de T^1. D'après la formule donnant $\overset{*}{R}_{ij}$ au paragraphe précédent, le tenseur de Ricci de U est

$$(19) \quad R_{\alpha\beta} = -2(r+1)(g_{\alpha\beta} + v_\alpha v_\beta) + 4r(r-1)u_\alpha u_\beta.$$

Théorème (18, I). — *Pour tout* X^α, $R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant 0$.

Démonstration. — Avec les notations antérieures :

$$R_{44} = 0, \qquad R_{4i} = 0, \qquad R_{ij} = 2(r+1)l_{ij} + (2r^2 - 6r)u_i u_j.$$

Donc

$$R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 2(r+1)l_{ij}X^i X^j + (2r^2 - 6r)(u_i X^i)^2.$$

Mais u_i est unitaire dans la métrique elliptique l_{ij} donc $(u_i X^i)^2 \leqslant l_{ij}X^i X^j$. Le théorème résulte alors de ce que $r > 1$.

Théorème (19, I). — *Le champ* u_α *engendre sur* U *un groupe d'isométries à trajectoires orientées dans le temps et fermées.*

Démonstration. — Que les trajectoires soient fermées résulte de la définition de $\vec{u}$ et de l'étude faite sur la topologie de U.

Ces trajectoires sont orientées dans le temps. En effet :

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = g_{ij}u^i u^j = (-l_{ij} + ru_i u_j)u^i u^j = r - 1 > 0.$$

Montrons enfin que $\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha = 0$.

Puisque U est un produit riemannien, il suffit de démontrer que u_i engendre un groupe d'isométries de S^3 munie de g_{ij}. En revenant aux notations du paragraphe « La métrique de S^3 » et en utilisant la formule (2)

$$\overset{*}{\nabla}_i u_j = \nabla_i u_j - u_k C_i{}^k{}_j.$$

Mais on a vu que u_i engendrait un groupe d'isométries de S^3 munie de l_{ij} et que $C_i{}^k{}_j = r(u_j\nabla^k u_i + u_i\nabla^k u_j)$. Par suite $u_k C_i{}^k{}_j = 0$, et ainsi :

$$\overset{*}{\nabla}_i u_j + \overset{*}{\nabla}_j u_i = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i = 0.$$

Interprétation physique de U.

Rappels (11). — Si s_0, s_1, s_2, s_3, désignent les valeurs propres d'un tenseur normal symétrique $\chi T_{\lambda\mu}$ par rapport au tenseur métrique $g_{\lambda\mu}$, pour que $T_{\lambda\mu}$ puisse être interprété comme le tenseur impulsion-énergie d'un schéma fluide parfait champ électromagnétique, il faut et il suffit que :

$$s_0 > s_1, \qquad s_0 > s_2, \qquad s_1 > s_3, \qquad s_2 \geqslant s_3,$$
$$s_1 + s_2 \leqslant 0, \qquad s_0 + s_3 > \frac{s_1 + s_2}{2}.$$

Notons que le cas de $s_2 = s_3$ correspond, avec les notations de Lichnerowicz à : $\eta = 0$, $U_3 = 0$.

Théorème (20, I). — *Si* $r > 1 + \sqrt{2}$, U *schématise un fluide parfait champ électromagnétique sans constante cosmologique.*

Démonstration. — Avec les notations du théorème (13, I) les équations d'Einstein s'écrivent

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(R + k) = \chi T_{\lambda\mu}.$$

(11) Voir Lichnerowicz [5], pp. 18-26.

Avec (19) et en observant que : $g_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu = 1$, $g_{\lambda\mu}v^\lambda v^\mu = -1$ on tire :

$$\chi T_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}\left(-\frac{k}{2} - 2r^2 + 3r + 1\right) - 2(1 + r)v_\lambda v_\mu + 4r(r - 1)u_\lambda u_\mu.$$

Les valeurs propres de $\chi T_{\lambda\mu}$ par rapport à $g_{\lambda\mu}$ sont :

$$s_0 = -\frac{1}{2}k + 2r^2 - r + 1,$$

relative au vecteur propre orienté dans le temps u_α,

$$s_1 = -\frac{1}{2}k - 2r^2 + 5r + 3,$$
$$s_2 = s_3 = -\frac{k}{2} - 2r^2 + 3r + 1.$$

Des calculs faciles montrent que $T_{\lambda\mu}$ peut être interprété comme le tenseur impulsion énergie d'un schéma fluide parfait champ électromagnétique, dès que $k = 0$, $r > 1 + \sqrt{2}$.

Résumé. — En réunissant les résultats obtenus dans cette huitième partie, on voit que le modèle d'univers U est compact, orientable, homéomorphe à $S^3 \times T^1$, sans section d'espace globale, stationnaire, à lignes de temps fermées, et schématisant un fluide parfait champ électromagnétique sans constante cosmologique.

Remarquons que l'orientabilité n'est pas essentielle puisqu'on peut remplacer S^3 par la variété non orientable obtenue en identifiant ses points diamétralement opposés.

Remarquons encore que bien que le premier nombre de Betti de U ne soit pas nul, il n'existe pas de vecteur φ_α fermé ($\nabla_\alpha\varphi_\beta = \nabla_\beta\varphi_\alpha$) et orienté dans le temps, comme cela résulte de la démonstration du théorème (16, I).

9. — Schéma matière pure en mouvement irrotationnel.

Avec les notations de la septième partie, le tenseur de Ricci dans un tel schéma est donné par :

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\chi\rho}{2}(-g_{\alpha\beta} + 2u_\alpha u_\beta).$$

Comme u_α est unitaire, il résulte du théorème (3, I) que la métrique $-g_{\alpha\beta}+2u_\alpha u_\beta$ est elliptique. Par suite, pour tout X^α : $R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant 0$.

Dans cette partie, nous supposerons le vecteur ρu_α de classe C_2 par morceaux et le mouvement irrotationnel [12].

LEMME. — *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\nabla_\alpha u_\beta = \nabla_\beta u_\alpha.$$

Démonstration. — Pour que le mouvement soit irrotationnel, il faut et il suffit que les lignes de courant soient orthogonales à une même hypersurface locale, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire non nul r tel que :

$$\nabla_\beta(ru_\alpha) = \nabla_\alpha(ru_\beta).$$

En développant et en contractant les deux membres avec u^α, il reste puisque $u^\alpha\nabla_\alpha u_\beta = 0$: $\partial_\beta r = (u^\alpha\partial_\alpha r)u_\beta$. En portant cette valeur de $\partial_\beta r$ dans $\nabla_\alpha(ru_\beta) = \nabla_\beta(ru_\beta)$, on obtient

$$\nabla_\alpha u_\beta = \nabla_\beta u_\alpha.$$

Formule auxiliaire. — En schéma matière pure, le vecteur $\varphi_\alpha = \rho u_\alpha$ est conservatif. L'identité $R_{\alpha\beta}\varphi^\alpha = \nabla^\alpha\nabla_\beta\varphi_\alpha - \partial_\beta\delta\varphi$ se réduit donc à $R_{\alpha\beta}\varphi^\alpha = \nabla^\alpha\nabla_\beta\varphi_\alpha$. Multiplions les deux membres par φ^β :

$$R_{\alpha\beta}\varphi^\alpha\varphi^\beta = \nabla^\alpha(\varphi^\beta\nabla_\beta\varphi_\alpha) - \nabla^\alpha\varphi^\beta\nabla_\beta\varphi_\alpha.$$

Évaluons le membre de gauche :

$$R_{\alpha\beta}\varphi^\alpha\varphi^\beta = \frac{\chi\rho}{2}(-g_{\alpha\beta}+2u_\alpha u_\beta)\rho u^\alpha.\rho u^\beta = \frac{\chi\rho^3}{2}.$$

Évaluons $\nabla^\alpha\varphi^\beta\nabla_\beta\varphi_\alpha$:

En remplaçant φ_α par ρu_α, en développant et en tenant compte du lemme, il reste :

$$\nabla_\alpha\varphi_\beta\nabla^\beta\varphi^\alpha = -(u^\alpha\partial_\alpha\rho)^2 + \rho^2\nabla_\alpha u_\beta\nabla^\alpha u^\beta.$$

Nous avons déjà noté que la métrique $h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}+2u_\alpha u_\beta$ est elliptique. D'après le théorème (2, I) : $h^{\alpha\beta} = \overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}$.

(12) Voir Lichnerowicz [5], p. 79.

Par suite, en tenant compte du lemme :

$$\overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{h}{}^{\beta\mu}\nabla_\alpha u_\beta \nabla_\lambda u_\mu = (-g^{\alpha\lambda} + 2u^\alpha u^\lambda)(-g^{\beta\mu} + 2u^\beta u^\mu)\nabla_\alpha u_\beta \nabla_\lambda u_\mu$$
$$= \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta \geqslant 0.$$

l'égalité à zéro n'étant obtenue que si $\nabla_\alpha u_\beta = 0$.

D'autre part :

$$\varphi^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha = \rho u^\beta . \nabla_\beta(\rho u_\alpha) = \frac{u_\alpha u^\beta \partial_\beta \rho^2}{2}.$$

En réunissant les résultats précédents, on obtient :

$$\frac{\chi\rho^3}{2} + (u^\alpha \partial_\alpha \rho)^2 + \rho^2 \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta = \frac{1}{2}\nabla^\alpha(u_\alpha u^\beta \partial_\beta \rho^2).$$

Par intégration sur une chaîne D de V_4, la formule de Stokes donne :

$$\int_D \left[\frac{\chi\rho^3}{2} + (u^\alpha \partial_\alpha \rho)^2 + \rho^2 \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta\right] dv = \frac{1}{2}\int_{\partial D} u_\alpha n^\alpha . u^\beta \partial_\beta \rho^2 . d\sigma$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire du bord ∂D de D, n^α son vecteur unitaire normal.

Théorème (21, I). — *En schéma matière pure animée d'un mouvement irrotationnel, l'ensemble des régions occupées par la matière ne peut être compact. En particulier l'espace-temps ne peut être compact.*

Démonstration. — Si l'ensemble E des régions occupées par la matière était compact, on pourrait appliquer la formule auxiliaire avec D = E mais ∂E est engendré par des lignes de courant, donc $u_\alpha n^\alpha = 0$, et il resterait :

$$\int_E \left[\frac{\chi\rho^3}{2} + (u^\alpha \partial_\alpha \rho)^2 + \rho^2 \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta\right] dv = 0.$$

C'est impossible puisque la quantité intégrée est positive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Aufenkamp, *C. R. Acad. Sci.*, 232, 1951, 213-214.
[2] A. Avez, *C. R. Acad. Sci.*, 240, 1955, 485-487.
[3] L. Bel, *La radiation gravitationnelle*, C.D.U. et S.E.D.E.S., 5, Place de la Sorbonne, Paris.

[4] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connections et des groupes d'holonomie*, Dunod, Paris.
[5] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris.
[6] A. Lichnerowicz, *Problèmes globaux en mécanique relativiste*, Hermann, Paris, 1939.
[7] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris.
[8] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris.
[9] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton, University Press, qui emprunte ses démonstrations à C. Ehresmann. *C. R. Acad. Sci.*, 216, 1943, 628.

CHAPITRE II

MÉTHODES VARIATIONNELLES GLOBALES

Les variétés V_n étudiées dans ce chapitre sont essentiellement à métrique hyperbolique normale.

Nous démontrons qu'étant donnés deux points joints par un arc différentiable γ orienté dans le temps, la classe d'homotopie de γ contient un arc de géodésique temporelle de longueur maximum dès que V_n est compacte ou complète au sens de Ehresmann. Cela permet d'atteindre des propriétés topologiques des variétés d'Einstein par la technique de Myers.

Si V_n est périodique close, nous démontrons l'existence d'une section d'espace globale, compacte et orientable, d'aire maximum. En prenant cette variété comme support des conditions initiales des équations d'Einstein, nous démontrons le principe de Mach et un théorème analogue à celui de Aufenkamp.

1. — Géodésiques temporelles.

Soit, une fois pour toute dans ce chapitre, V_n une variété de classe C^∞ munie d'une métrique hyperbolique normale $g_{\alpha\beta}$ de classe C^∞ ($n - 1$ carrés négatifs, 1 carré positif).

Définition (1, II). — *Soit γ $[0,1] \to V_n$, un arc continu orienté de V_n. L'orientation de γ détermine en chacun de ses points une orientation de son contingent. Nous dirons que γ est orienté dans le temps (resp. isotrope, resp. orienté dans l'espace) au point $x \in \gamma$, si le contingent* [13] *orienté de γ au point x est dans (resp. sur, resp. à l'extérieur) le cône du futur de x.*

[13] Voir par exemple : G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Vuibert, Paris.

Si une courbe est orientée dans le temps en tout point, nous dirons qu'elle est temporelle.

Définitions analogues pour une courbe isotrope et une courbe spatiale.

Il est clair qu'une courbe temporelle contenue dans un compact de V_n est lipschitzienne.

Rappelons que si une géodésique de V_n est orientée dans le temps (resp. isotrope, resp. orientée dans l'espace) en un point, elle est temporelle (resp. isotrope, resp. spatiale) ([14]).

Définition (2, II). — *Deux arcs continus γ_0 et γ_1 orientés dans le temps ou isotropes seront dits t-homotopes s'il existe une application continue φ :*

$$[0, 1] \times [0, 1] \to V_n$$

telle que :

a) $\varphi(\{0\} \times [0, 1]) = \gamma_0, \qquad \varphi(\{1\} \times [0,1]) = \gamma_1.$

b) *Il existe deux points fixes a et b tels que pour tout u de* $[0, 1]$, $\varphi(\{u\} \times \{0\}) = 1$, $\varphi(\{u\} \times \{1\}) = b$.

Cela implique que γ_0 et γ_1 ont mêmes extrémités a et b.

c) *Pour tout u de* $[0, 1]$, $\varphi(\{u\} \times [0,1])$ *est temporelle ou isotropes.*

Il est clair que deux arcs t-homotopes sont homotopes. D'une formule classique d'homotopie ([15]) il résulte immédiatement que $\gamma_1 - \gamma_0$ est un bord.

Si γ est un arc temporel ou isotrope, l'ensemble des arcs t-homotopes à γ sera dit la classe de t-homotopie de γ.

Définition (3, II) ([16]). — *V_n sera dite complète dans le temps au sens de Ehresmann, ou plus simplement t-complète, si quel que soit $a \in V_n$ et quel que soit le chemin $\bar{\gamma}$ temporel ou isotrope de l'espace de Minkowski tangent en a à V_n, $\bar{\gamma}$ est le développement d'un chemin γ de V_n. Evidemment γ est temporel ou isotrope.*

Il est clair que « complète » implique « t-complète ».

([14]) Par exemple : M. Riesz, L'intégrale de Riemann — Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math*, 81 (1949), pp. 1-223.

([15]) G. de Rham, *Variétés différentiables*, Formule (3), p. 68 (Hermann, Paris, 1955).

([16]) Voir G. Ehresmann [3].

LEMME (1, II). — *Si* V_n *est compacte ou t-complète, la réunion* $C(\gamma_0)$ *des arcs de la classe de t-homotopie d'un arc temporel* γ_0 : $[0, 1] \rightarrow V_n$ *est compacte.*

Preuve. — Si V_n est compacte, il suffit de montrer que $C(\gamma_0)$ est un fermé. Mais cela résulte de ce que la limite au sens de la convergence uniforme d'une suite d'arcs temporels ou isotropes est un arc temporel ou isotrope. Supposons donc V_n t-complète.

Soient a et b les extrémités de γ_0, γ_1 un arc t-homotope à γ_0. $\gamma_0 - \gamma_1$ est un cycle homotope à zéro, il définit donc un élément h de la composante de l'identité du groupe d'holonomie homogène en a. h laisse globalement invariant chacun des demi-cônes de directions temporelles ou isotropes de sommet a. Comme un tel demi-cône de directions est homéomorphe à une boule B_{n-1}, il existe d'après Brouwer une direction temporelle invariante par h.

Comme de plus h conserve les longueurs au sens de $g_{\alpha\beta}$, h laisse invariant le vecteur unitaire en a, $(u^\alpha)_a$, porté par la direction précitée. Par suite, $(u^\alpha)_a$ engendre un champ u^α par transport parallèle le long de $\gamma_0 - \gamma_1$, et si t^α est un vecteur tangent à $\gamma_0 - \gamma_1$, $t^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$.

On a vu que $\gamma_0 - \gamma_1$ est un bord. Il existe donc une surface S de V_n qu'on peut toujours supposer différentiable, telle que $\partial S = \gamma_0 - \gamma_1$. Il est aisé de voir que puisque le long de $\gamma_0 - \gamma_1$: $t^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$, on peut prolonger u^α en un champ noté encore u^α qui sera unitaire comme $(u^\alpha)_\alpha$, différentiable et fermé. La formule de Stokes appliquée à S donne alors :

$$\int_{\gamma_0} u_\alpha \, dx^\alpha = \int_{\gamma_1} u_\alpha \, dx^\alpha. \tag{1}$$

Ceci posé, remarquons que la donnée en a de $(u^\alpha)_a$ définit une longueur affine sur les courbes de V_n issues de a : c'est la longueur du développement d'une telle courbe sur l'espace tangent en a à V_n muni de la métrique elliptique

$$-(g_{\alpha\beta})_a + 2(u_\alpha)_a . (u_\beta)_a.$$

Comme u^α est transporté par parallélisme le long de $\gamma_0 - \gamma_1$, la longueur affine de γ_1 est encore :

$$l(\gamma_1) = \int_{\gamma} \sqrt{(-g_{\alpha\beta} + 2u_\alpha u_\beta) \, dx^\alpha \, dx^\beta}.$$

En paramétrant γ_1 par son arc s au sens de $g_{\alpha\beta}$ et en désignant par t^α son vecteur unitaire tangent :

$$l(\gamma_1) = \int_{\gamma_1} \sqrt{-1 + 2(u_\alpha t^\alpha)^2}\, ds.$$

De même

$$l(\gamma_0) = \int_{\gamma_0} \sqrt{-1 + 2(u_\alpha t^\alpha)^2}\, ds.$$

Mais d'après l'inégalité de Schwarz du chapitre I :

$$1 \leqslant u_\alpha t^\alpha, \qquad \text{donc} \qquad u_\alpha t^\alpha \leqslant \sqrt{-1 + 2(u_\alpha t^\alpha)^2}$$

et

$$(2) \quad \int_{\gamma_0} u_\alpha\, dx^\alpha = \int_{\gamma_0} u_\alpha t^\alpha .\, ds \leqslant \int_{\gamma_0} \sqrt{-1 + 2(u_\alpha t^\alpha)^2\, ds}.$$

D'autre part :

$$\sqrt{-1 + 2(u_\alpha t^\alpha)^2} \leqslant \sqrt{2} . u_\alpha t^\alpha,$$

donc;

$$(3) \quad \int_{\gamma_1} \sqrt{-1 + 2(u_\alpha t^\alpha)^2 .}\, ds \leqslant \sqrt{2} \int_{\gamma_1} u_\alpha t^\alpha .\, ds = \sqrt{2} \int_{\gamma_1} u_\alpha\, dx^\alpha.$$

Les relations (1), (2), (3) entraînent

$$\int_{\gamma_1} \sqrt{-1 + 2(u_\alpha t^\alpha)^2} .\, ds < \sqrt{2} \int_{\gamma_0} \sqrt{-1 + 2(u_\alpha t^\alpha)^2} .\, \mathrm{ds}.$$

Ainsi, la longueur affine de tout arc γ_1 est majorée à $\sqrt{2}$ près par la longueur affine de γ_0. Les développements sur l'espace T_a tangent en a à V_n des courbes t-homotopes à γ_0 sont donc contenus dans un compact K de T_a.

Soit x_i une suite de points de $C(\gamma_0)$. Par hypothèse il existe une suite de courbes γ_i t-homotopes à γ_0 avec : $x_i \in \gamma_i$ pour tout i. Les γ_i se développent sur T_a en des courbes $\overline{\gamma}_i$ contenant les images $\overline{x}_i$ des x_i. La famille $\overline{\gamma}_i$ est Lipschitzienne et contenue dans le compact K, d'après le théorème d'Arzela on peut donc en extraire une famille, notée encore $\overline{\gamma}_i$, convergeant vers une courbe $\overline{\gamma}$, les $\overline{x}_i$ convergeant vers un point $\overline{x}$ de $\overline{\gamma}$.

Il est clair que $\overline{\gamma}$ est temporelle ou isotrope. Comme V_n est t-complète, $\overline{\gamma}$ est le développement d'une courbe γ de V_n. Il est aisé de voir que dans ce développement $\overline{x}$ est l'image d'un point x de $C(\gamma_0)$ qui est point d'accumulation des x_i. Par suite $C(\gamma_0)$ est compact.

LEMME (2, II). — *Soit γ un arc de géodésique temporel assez petit. Sa longueur est supérieure ou égale à celle de tout arc de classe* C^1 *qui lui est t-homotope.*

Preuve. — Soit S une sous-variété à $(n-1)$ dimensions de classe C^2, orientée dans l'espace. Il existe un voisinage de S dont tout point est atteint une fois et une seule par les géodésiques normales à S. On définit ainsi un système de coordonnées de Gauss $(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n = s)$ où S a pour équation $x^n = 0$.

Dans ce système les composantes de $g_{\alpha\beta}$ sont :

$$g_{nn} = 1, \qquad g_{ni} = 0 \qquad \text{si} \qquad 0 < i < n,$$
$$g_{ij}X^iX^j \leqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < i, j < n$$

pour tout X^i.

Soit $\breve{ab}$ un arc de géodésique normal à S en a et contenu dans le voisinage ci-dessus. Soit $\widehat{ab}$ un arc de courbe temporel de classe C^1, t-homotope à $\breve{ab}$. Il est tout entier dans le voisinage considéré et sa longueur est

$$\int_{\widehat{ab}} \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta} = \int_{\widehat{ab}} \sqrt{(dx^n)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j}$$
$$\leqslant \int_{\widehat{ab}} dx^n = \text{longueur } \breve{ab}.$$

Tout arc de géodésique temporelle assez petit peut s'interpréter comme un arc $\breve{ab}$. Le lemme en résulte. Ce raisonnement montre que la longueur d'une courbe de classe C^1 temporelle est un invariant concave.

L'inverse de la longueur d'une telle courbe est donc un invariant convexe positif. D'après un théorème de L. Tonelli, il en résulte :

LEMME (3, II). — *La longueur est une fonction semi-continue supérieurement sur l'espace des arcs de classe* C^1 *temporels, pour la topologie de la convergence uniforme.*

Le complété de cet espace est l'espace $\mathfrak{T}$ des arcs temporels ou isotropes. Le lemme (3, II) et un théorème de Fréchet (voir [4]) sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues montrent qu'on peut définir la longueur d'un arc temporel γ_1 comme la plus grande limite des longueurs des arcs temporels de classe C^1 convergeant uniformément vers γ. Cela montre du même coup la validité du lemme (3, II) sur l'espace $\mathfrak{T}$.

THÉORÈME (1, II). — *Soit* V_n *une variété compacte ou t-complète. Chaque classe de t-homotopie contient une géodésique qui réalise le maximum des longueurs des arcs de sa classe. En particulier, si deux points de* V_n *sont les extrémités d'un arc temporel ils peuvent être joints par une géodésique.*

Preuve. — Soit $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow V_n$ un arc temporel. D'après le lemme (1, II) la réunion $C(\gamma_0)$ des arcs qui lui sont t-homotopes est un compact.

Soit une suite d'arcs t-homotopes à γ_0. Puisque orientés dans le temps ou isotropes, et contenus dans $C(\gamma_0)$, ils sont équicontinus. La compacité de $C(\gamma_0)$ et le théorème d'Ascoli-Arzela entraînent l'existence d'un arc d'accumulation. La classe de t-homotopie de γ_0 est donc compacte pour la topologie de la convergence uniforme.

D'après le lemme (3, II) et ses conséquences, la longueur des courbes de la classe est une fonction semi-continue supérieurement. La compacité de la classe entraîne l'existence d'un arc γ de la classe de longueur maximum. Un raisonnement standard et le lemme (2, II) montrent que γ est un arc de géodésique.

Ce théorème étend dans une certaine mesure le théorème de convexité des espaces riemanniens complets :

La t-complétude entraîne la convexité dans le temps. Il faut renoncer à une convexité spatiale, comme le montre l'exemple des espaces à courbure constante. Rappelons maintenant des résultats classiques (voir Synge [13]) sur la variation seconde de la longueur d'un arc de géodésique.

2. — Variation seconde de la longueur d'une géodésique.

Les indices grecs varieront de 1 à n, les indices latins de 1 à $n - 1$.

Soit AB un arc simple de géodésique temporelle de V_n, dont nous repérerons les points d'un voisinage par les coordonnées de Fermi $(x^1, \ldots, x^n)$: x^n est l'arc de géodésique compté sur AB à partir de A. On prend en A un repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$ tel que $\vec{e}_n = \partial_n \vec{M}$. On obtient un repère orthonormé $\vec{e}_\alpha(P)$ au point P de $\widehat{AB}$ en le transportant par parallélisme le long de AB. Enfin les x^i sont les coordonnées normales géodésiques en P, dans le repère $\vec{e}_i(P)$, sur la variété engendrée par les géodésiques normales à $\widehat{AB}$ en P.

Dans ces coordonnées :

$$(1)\quad g_{\alpha\beta}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta = n, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta, \\ -1 & \text{si} \quad \alpha = \beta = i. \end{cases} \qquad \partial_\gamma g_{\alpha\beta}(P) = 0$$

Par suite :

$$\Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta(P) = 0, \qquad \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(P) = 0.$$

De même :

$$\partial_{n\gamma} g_{\beta\alpha}(P) = 0, \qquad \text{donc} \qquad \partial_n \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta(P) = 0.$$

Soit s la longueur de $\widehat{AB}$. Définissons une application de classe C^∞ par :

$$\varphi : [0, s] \times [0, 1] \to V_n$$

vérifiant

a)
$$\varphi([0, s] \times \{0\}) = \widehat{AB},$$

d'où résulte

$$x^n[\varphi(\{u\} \times \{0\})] = u, \qquad x^i[\varphi(\{u\} \times \{0\})] = 0.$$

b)
$$\frac{\partial}{\partial v} x^n[\varphi(\{u\} \times \{0\})] = 0.$$

On appellera courbes variées de $\widehat{AB}$ les courbes

$$\varphi([0, s] \times \{v_0\}),$$

où $v_0 \in [0, 1]$. La longueur de ces courbes entre u_1 et u_2 est :

$$L(v_0) = \int_{u_1}^{u_2} \left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{u\partial} \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \right)^{\frac{1}{2}} du.$$

Introduisons les notations suivantes : Si X est une fonction définie sur φ $([0, s] \times [0, 1])$,

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad X' = \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Ainsi :

$$\xi^\alpha \equiv \dot{X}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u}, \qquad \eta^\alpha \equiv x^{\alpha\prime} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}, \qquad \text{et} \qquad \xi^{\alpha\prime} = \dot{\eta}^\alpha.$$

En coordonnées de Fermi on a :

(2) $\xi^n(u, 0) = 1, \qquad \xi^i(u, 0), \qquad \eta^n(u, 0) = 0.$

Si on pose $F(u, v) = (g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta)^{1/2}$, on tire donc de (1)

$$F(u, 0) = 1.$$

On a $F' = \frac{1}{2F}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} \cdot \eta^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma + 2g_{\beta\gamma} \cdot \xi^\beta\dot{\eta}^\gamma)$. Mais sur $\widehat{AB}$, $\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$ et d'autre part :

$$g_{\beta\gamma}\xi^\beta\dot{\eta}^\gamma = g_{nn}\xi^n\dot{\eta}^n = \dot{\eta}^n = 0,$$

puisque pour $v = 0$ et pour tout u on a $\eta^n = 0$.

Par suite, sur $\widehat{AB}$, $F'(u, 0) = 0$ et $L'(0) = \int_{u_1}^{u_2} F'(u, 0)du = 0$.

Résultat naturel puisque $\widehat{AB}$ est une géodésique.

De la même manière :

(3) $$L''(v_0) = \int_{u_1}^{u_2} F''(u, v_0)\, du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2F}(F^2)''\, du - \int_{u_1}^{u_2} \frac{F'^2}{F} du.$$

Pour $v_0 = 0$, on vient de voir que $F'(u, 0) = 0$. La seconde intégrale est donc nulle. La première s'écrit en tenant compte de (1) et de $F(u, 0) = 1$:

$$\int_{u_2}^{u_2} \left(\frac{1}{2}\partial_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} \cdot \eta^\delta\eta^\gamma . \xi^\alpha\xi^\beta + g_{\alpha\beta}\dot{\eta}^\alpha\dot{\eta}^\beta + \dot{\eta}^{n'}\right) du.$$

Évaluons la parenthèse.

A cause de (1) le tenseur de courbure se réduit le long de $\widehat{AB}$ à :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial_{\gamma\beta}g_{\alpha\delta} + \partial_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - \partial_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - \partial_{\delta\beta}g_{\alpha\gamma}).$$

En utilisant (2) :

$$\partial_{\gamma\delta}g_{\alpha\beta} \cdot \eta^\delta\eta^\gamma\xi^\alpha\xi^\beta = \partial_{\gamma\delta}g_{nn} \cdot \eta^\gamma\eta^\delta = \partial_{ij}g_{nn} \cdot \eta^i\eta^j.$$

Et puisque $\partial_{n\alpha}g_{\beta\gamma} = 0$ sur $\widehat{AB}$:

$$\frac{1}{2}\partial_{\gamma\delta}g_{\alpha\beta}\eta^\delta\eta^\gamma\xi^\alpha\xi^\beta = - R_{injn}\eta^i\eta^j.$$

D'autre part :

$$\dot{\eta}^{n'} = \frac{\partial}{\partial u}[\eta^{n'}].$$

Finalement, pour $v_0 = 0$, (3) s'écrit :

$$L''(0) = \int_{u_1}^{u_2} [- R_{injn}\eta^i\eta^j + g_{\alpha\beta}\dot\eta^\alpha\dot\eta^\beta]\, du + |\eta^{n'}|_{u_1}^{u_2}$$

On peut poser $\eta^\alpha = \eta\mu^\alpha$, où $\mu^\alpha\mu_\alpha = -1$. Alors

$$\dot\eta^\alpha = \dot\eta\mu^\alpha + \eta\dot\mu^\alpha, \qquad g_{\alpha\beta}\dot\mu^\alpha\mu^\beta = 0.$$

Avec ces notations :

$$(4) \quad L''(0) = \int_{u_1}^{u_2} [\eta^2(- R_{injn}\mu^i\mu^j + g_{\alpha\beta}\dot\mu^\alpha\dot\mu^\beta) - \dot\eta^2]\, du + |\eta^{n'}|_{u_1}^{u_2}$$

Si, en particulier, $u_1 = 0$, $u_2 = s$, et si les extrémités de $\widehat{AB}$ sont fixes dans la variation :

$$(5) \quad L''(0) = \int_0^s [\eta^2(- R_{injn}\mu^i\mu^j + g_{\alpha\beta}\dot\mu^\alpha\dot\mu^\beta) - \dot\eta^2]\, du.$$

En intégrant par parties $\dot\eta^2$ on obtient encore :

$$(6) \quad L''(0) = \int_0^s [\eta^2(- R_{injn}\mu^i\mu^j + g_{\alpha\beta}\dot\mu^\alpha\dot\mu^\beta) + \eta.\ddot\eta]\, du.$$

3. — L'homotopie temporelle de V_n.

Nous allons adapter une méthode due à Myers (voir [10]). Conservons les notations du paragraphe précédent, et choisissons le long de $\widehat{AB}$, $(n-1)$ vecteurs μ^j, notés $\mu^j_{(i)}$ et définis en coordonnées de Fermi par $\mu^j_{(i)} = \delta^j_i$. Il vient sur $\widehat{AB}$: $\dot\mu^\alpha = 0$, et (6) se réduit à :

$$(7) \qquad L''(0) = \int_0^s [- \eta^2 R_{knkn} + \eta\ddot\eta]\, du.$$

Ceci posé, d'après le théorème (1, II) une classe de t-homotopie contient une géodésique de longueur maximum.

Soit $\widehat{AB}$ cette géodésique, et s sa longueur. On doit avoir $L''(0) \leqslant 0$ pour toute fonction η positive ou nulle et nulle en A et B; en particulier pour $\eta = \sin\dfrac{\pi}{s}u$.

Pour ce choix de η, (7) entraîne donc :

$$\int_0^s \eta^2 \left[- R_{knkn} - \frac{\pi^2}{s^2}\right] du \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } k.$$

Additionnons membre à membre les $(n-1)$ inégalités obtenues en donnant à k les valeurs 1, ... $n-1$, et observons que

$$\sum_{k=1}^{n-1} R_{knkn} = -R_{nn} = -R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta.$$

Il vient :

$$\int_0^s \eta^2 \left[R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta - (n-1)\frac{\pi^2}{s^2}\right] du \leqslant 0.$$

Par suite, si la courbure de Ricci est supérieure ou égale à e^2 (c'est-à-dire $X_\alpha X^\alpha = 1 \Longrightarrow R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant e^2$), on doit avoir

$$s \leqslant \frac{\pi\sqrt{n-1}}{e}.$$

D'où le

THÉORÈME (2, II). — *Si* V_n *est compacte ou t-complète et si* $X^\alpha X_\alpha = 1 \Longrightarrow R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant e^2$, *les classes de t-homotopie n'admettent pas de courbe de longueur supérieure à* $\frac{\pi\sqrt{n-1}}{e}$. *En particulier les éventuels lacets temporels de* V_n *sont homotopes à zéro.*

De façon imagée, V_n est « compacte dans le temps » et « homotope à zéro dans le temps ».

COROLLAIRE. — *Si* V_4 *est un espace-temps compact ou t-complet schématisant un fluide parfait champ électromagnétique, et si sa constante cosmologique est négative ou la densité de matière supérieure à un nombre positif, alors* V_4 *est compacte et homotope à zéro dans le temps.*

Preuve. — Avec les notations du théorème (13, I) on a :

$$X^\alpha X_\alpha = 1 \rightarrow R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant \chi\left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \frac{1}{4}\overset{*}{h}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{h}{}^{\beta\mu}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}\right] - \frac{1}{2}k.$$

Si $k < 0$: $R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant -\frac{1}{2}k > 0$.

Si $\rho \geqslant a^2$: $R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant 2\chi a^2 > 0$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent.

Nous allons retrouver ce résultat pour une voie plus simple.

Soient V_4 un espace-temps compact ou t-complet, $\widehat{AB}$ une géodésique temporelle. Si le point A n'a pas de point conjugué sur $\widehat{AB}$, il existe un voisinage de $\widehat{AB}$ recouvert par un faisceau régulier et différentiable de géodésiques temporelles issues de A. Si u^α est le vecteur unitaire tangent à ces géodésiques, on a :

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0, \qquad \nabla_\alpha u_\beta = \nabla_\beta u_\alpha, \qquad \text{sauf en A.}$$

Par suite l'identité $R_{\alpha\beta} u^\alpha = \nabla^\alpha \nabla_\beta u_\alpha - \partial_\beta \nabla_\alpha u^\alpha$ s'écrit en contractant avec u^β :

$$R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + \nabla^\alpha u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = -\frac{d}{ds} \nabla_\alpha u^\alpha, \tag{9}$$

où s est l'arc de géodésique compté à partir de A.

Lemme (4, II). — $\nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta \geqslant \frac{1}{3} (\nabla_\alpha u^\alpha)^2$, *l'égalité n'étant obtenue que si* $\nabla_\alpha u_\beta = C(g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta)$.

Preuve. — Dans un repère orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 ; \vec{e}_3, \vec{e}_4 = \vec{u})$ on a :

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0 \implies \nabla_4 u_\beta = 0, \qquad \nabla_\alpha u_\beta = \nabla_\beta u_\alpha \implies \nabla_\beta u_4 = 0.$$

Si les indices latins varient de 1 à 3, on a donc :

$$\nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta = \nabla_i u_j \nabla^i u^j = \sum_{i,j} \nabla_i u_j \nabla_j u_i.$$

Considérons la matrice A d'éléments $\nabla_i u_j$, on a donc

$$\nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta = \text{trace } A^2.$$

Comme d'autre part $\nabla_\alpha u^\alpha = -\sum_i \nabla_i u^i = -\text{trace } A$, tout revient à démontrer que $\text{tr } A^2 \geqslant \frac{1}{3} (\text{tr } A)^2$.

Si on pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

on a :

$$3\mathrm{tr}\,A^2 - (\mathrm{tr}\,A)^2 = 3(a^2 + 2b^2 + d^2 + 2c^2 + 2e^2 + f^2) - (a + d + f)^2 = 6b^2 + 6c^2 + 6e^2 + (a - d)^2 + (a - f)^2 + (d - f)^2 \geqslant 0.$$

L'égalité n'est obtenue que si :

$$b = c = e = 0, \qquad a = d = f,$$

c'est-à-dire $A = C.Id$, ou $\nabla_\alpha u_\beta = C(g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta)$.

Supposons que $X^\alpha X_\alpha = 1 \Longrightarrow R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant e^2 > 0$.

Il résulte de ce lemme que (9) peut s'écrire :

$$\varphi + \frac{1}{3}X^2 + \frac{d}{ds}X = 0,$$

où

$$\varphi = \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta - \frac{1}{3}(\nabla_\alpha u^\alpha)^2 + R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geqslant e^2,$$
$$X = \nabla_\alpha u^\alpha.$$

Cette équation s'écrit, en posant $y = \exp \int \frac{X}{3}\,ds$,

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{\varphi}{3}\cdot y = 0.$$

D'après la théorie de Sturm, si $\varphi \geqslant e^2$, l'écart de deux zéros successifs d'une solution est $\leqslant \frac{\pi\sqrt{3}}{e}\cdot$ Or, les zéros de y correspondent à des discontinuités de $\nabla_\alpha u^\alpha$. En remarquant que si un arc géodésique $\widehat{AB}$ réalise le maximum des longueurs des arcs de sa classe de t-homotopie il ne porte pas de points conjugués, on voit qu'on a démontré le théorème (2, II) pour $n = 4$.

4. — Notion de variété périodique close.

Définition (4, II). — *Soit R la droite numérique. Nous dirons qu'une variété* V_n *est périodique et close s'il existe une variété à* $(n - 1)$ *dimensions* V_{n-1} *compacte, orientable, de classe* C^∞, *et un homéomorphisme* h *:* $V_n \to V_{n-1} \times R$ *de classe* C^∞ *tels que :*

a) *les variétés* $h^{-1}(\{x\} \times \mathrm{R})$, *où* $x \in \mathrm{V}_{n-1}$, *sont orientées dans le temps,*

b) *les variétés* $h^{-1}(\mathrm{V}_{n-1} \times \{t\})$, *où* $t \in \mathrm{R}$, *sont orientées dans l'espace,*

c) *la métrique* ds^2 *de* V_n *est de classe* C^∞, *et il existe un nombre T appelé période tel que le* ds^2 *soit invariant par*

$$(x, t) \to (x, t + \mathrm{T}).$$

Un espace-temps isométrique à une variété périodique close sera dit périodique clos.

La variété compacte W_n.

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie sur V_n par :

$$h^{-1}(x \times t) = h^{-1}(x' \times t') \bmod. \mathcal{R} \Longleftrightarrow x = x', t = t' \bmod (\mathrm{T}).$$

La variété quotient $\mathrm{W}_n = \mathrm{V}_n/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\mathrm{V}_{n-1} \times \mathrm{S}^1$. En particulier, elle est compacte et orientable. $\mathcal{R}$ définit une projection $p : \mathrm{V}_n \to \mathrm{W}_n$ de classe C^∞ qui, évidemment, est une isométrie locale.

Coordonnées adaptées au caractère périodique.

Tout point de V_n est de la forme $h^{-1}(x \times t)$, où $x \in \mathrm{V}_{n-1}$, $t \in \mathrm{R}$.

Si on a choisi sur V_{n-1} un système de carte dans lequel x a pour coordonnées $(x^1, \ldots, x^{n-1})$, les nombres $(x^1, \ldots, x^{n-1}, t)$ seront dits coordonnées adaptées au caractère périodique pour le point (x, t). Le même système de coordonnées vaut sur W_n avec la restriction $0 \leqslant t < \mathrm{T}$.

Dans ces conditions $t = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$, ou plus brièvement $t = f(x)$, f étant de classe $\mathrm{C}^p (p \geqslant 0)$, représente dans V_n (resp. W_n; si $0 \leqslant f < \mathrm{T}$) une variété homéomorphe à V_{n-1}. Réciproquement si Σ est une variété à $(n - 1)$ dimensions orientée dans l'espace, il lui correspond une fonction

$$f = \mathrm{V}_{n-1} \to \mathrm{R}.$$

Formule de cohomologie pour les variétés périodiques closes.

Soit V_n la variété périodique close précitée. Donnons nous sur R une fonction C^∞ croissante $f(t)$ telle que

$$f(t + \mathrm{T}) \equiv f(t) + a,$$

où a est une constante. Cela définit sur S^1 (de longueur T) une fonction dont la dérivée est C^∞ et non nulle. L'image inverse de cette fonction dans h définit sur W_n une fonction U discontinue mais dont le gradient φ_α est continu, non nul, et orienté dans le temps puisque orthogonal aux variétés

$$h^{-1}(V_{n-1} \times \{t\}).$$

Ainsi le vecteur φ_α est fermé et orienté dans le temps. Sur $W_n - S$ ($S = h^{-1}(V_{n-1} \times t_0)$, $t_0 \in S^1$) il se réduit au gradient de U; sa période relative à $h^{-1}(\{x\} \times S^1)$ est donc :

$$P = \oint_\gamma \varphi_\alpha \, dx^\alpha = \int_\gamma \partial_\alpha U \, dx^\alpha, \qquad \text{où} \qquad \gamma = h^{-1}(\{x\} \times S^1).$$

Mais la dernière intégrale est égale à la variation de U à la traversée de $S = h^{-1}(V_{n-1} \times \{t_0\})$, c'est-à-dire a. On a donc :

$$\int_\gamma \varphi_\alpha \, dx^\alpha = a. \tag{1}$$

Soit v_α un vecteur cofermé de classe C^1. Comme S est de volume nul :

$$\int_{W_n} \varphi_\alpha \, v^\alpha \, dv = \int_{W_n - S} \varphi_\alpha v^\alpha . \, dv.$$

Mais sur $W_n - S$, $\varphi_\alpha = \partial_\alpha U$, donc :

$$\int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha . \, dv = \int_{W_n - S} \partial_\alpha U . v^\alpha \, dv.$$

or $\nabla_\alpha(U v^\alpha) = \partial_\alpha U . v^\alpha + U \nabla_\alpha v^\alpha = \partial_\alpha U . v^\alpha$, par suite

$$\int_{W_n - S} \partial_\alpha U . v^\alpha . \, dv = \int_{W_n - S} \nabla_\alpha (U n^\alpha) \, dv.$$

Si n^α est le vecteur normal unitaire, $d\sigma$ l'élément d'aire de ∂S la formule de Stokes donne :

$$\int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha \, dv = \int_{\partial(W_n - S)} U . v^\alpha n_\alpha \, d\sigma.$$

Mais $\partial(W_n - S) = S_1 - S_0$, où S_1 et S_0 sont deux exemplaires de S munis d'orientations évidentes.

Par suite :

$$\int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha \, dv = \int_{S_1} U . v^\alpha n_\alpha \, d\sigma - \int_{S_0} U . v^\alpha n_\alpha \, d\sigma.$$

Sur S_1 et S_0, U prend des valeurs constantes dont la différence est la variation de U à la traversée de S, c'est-à-dire a. Ainsi, compte tenu de (1) :

$$\int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha . \, dv = P \int_S v^\alpha n_\alpha . \, d\sigma.$$

THÉORÈME (3, II). — *Soient* V_n *une variété périodique close,* W_n *la variété compacte* $V_n/\mathcal{R}$. Σ *une variété compacte orientable à* $(n-1)$ *dimensions orientée dans l'espace,* φ_α *une 1-forme fermée temporelle,* v_α *une 1-forme cofermée,* P *la période de* φ *relative à l'une quelconque des variétés* $h^{-1}(x \times S^1)$, *alors :*

$$\int_{W_n} (\varphi, v) = P \int_\Sigma v^*.$$

Preuve. — Σ est homologue à $S = h^{-1}(V_{n-1} \times t_0)$, où $t_0 \in S^1$. Comme v^α est cofermé $\int_\Sigma v^* = \int_S v^*$. Le théorème résulte alors de la formule qui le précède.

5. — Sur une conjecture en métrique elliptique.

Soit V_n une variété de dimension n, compacte, orientable, munie d'une métrique elliptique de classe $C^p (p \geqslant 1)$.

Rappelons que la classe d'homotopie d'une sous-variété compacte de V_n est l'ensemble des variétés qui s'en déduisent par homotopie, la dimension de la classe étant la borne inférieure des dimensions des variétés de la classe.

Si une classe d'homotopie est de dimension $n-1$, les aires de ses éléments sont bornées inférieurement par un nombre positif. Il semble naturel de conjecturer qu'il existe dans la classe une variété d'aire minimum, c'est-à-dire l'aire est inférieure ou égale à l'aire de toute autre variété de la classe. Si V_n est de classe C^∞ il paraît non moins raisonnable de conjecturer que cette variété est de classe C^3.

Nous allons montrer que ces conjectures entraînent le théorème suivant : soit V_n une variété riemannienne compacte de classe C^∞. Si sa courbure de Ricci est positive, son homotopie à $(n-1)$ dimensions est nulle. Si sa courbure de Ricci est positive ou nulle et son homotopie à $n-1$ dimensions non nulle (en particulier si $\Pi_{n-1}(V_n) \neq 0$), elle est localement réductible.

Supposons l'homotopie à $(n - 1)$ dimensions non triviale. D'après la conjecture il existe une sous-variété Σ à $(n - 1)$ dimensions, compacte, de classe C^3, d'aire minimum. On peut toujours supposer Σ et V_n orientables en passant aux revêtements à deux feuillets. Choisissons alors une orientation du fibré normal de Σ et portons dans le sens qu'elle définit les géodésiques issues de Σ et normales à Σ. Il existe un voisinage V de Σ dont tout point est atteint une fois, et une fois seulement, par ces géodésiques. Soit u^α le vecteur unitaire tangent à ces géodésiques orientées comme il a été dit. Le vecteur u^α est de classe C^3 sur V et vérifie : $u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$, $\nabla_\alpha u_\beta = \nabla_\beta u_\alpha$. Si s est l'arc de géodésique compté à partir de Σ on a aisément :

$$R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta = \frac{d}{ds} (\nabla_\alpha u^\alpha).$$

Intégrons les deux membres sur une géodésique normale à Σ :

$$H = \int_0^s [R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta]\, ds = -(\nabla_\alpha u^\alpha)_s + (\nabla_\alpha u^\alpha)_0.$$

mais Σ est d'aire minimum dans sa classe d'homotopie, c'est donc une variété minima au sens de la géométrie différentielle, donc $(\nabla_\alpha u^\alpha)_0 = 0$. Ainsi $H = (\nabla_\alpha u^\alpha)_s$. En intégrant sur le volume V bordé par Σ et une variété parallèle $\Sigma(s)$:

$$\int_V H \,.\, dv = -\int_V \nabla_\alpha u^\alpha \,.\, dv.$$

La formule de Stokes appliquée en remarquant que u^α est orthogonal à $\Sigma(s)$ et Σ entraîne :

$$\int_V H\, dv = \text{aire } \Sigma - \text{aire } \Sigma(s).$$

Mais $\Sigma(s)$ est homotope à Σ, donc aire $\Sigma \leqslant$ aire $\Sigma(s)$ et

$$\int_V H\, dv \leqslant 0.$$

On ne peut en particulier, avoir $H > 0$, ce qui serait le cas d'après la définition de H si la courbure de Ricci était positive.

Si la courbure de Ricci est positive ou nulle et si l'homotopie à $(n - 1)$ dimensions n'est pas nulle, le raisonnement précédent montre que $H = 0$ sur V, donc $\nabla_\alpha u_\beta = 0$ sur V. Considérons la composante connexe C de V_n contenant V et sur laquelle il existe un vecteur φ_α à dérivée covariante nulle et se réduisant à u_α sur V. Évidemment C est fermé. Si C ne coïncide pas avec V_n, il admet un bord non vide B. Mais le raisonnement précédent montre qu'il existe un « cylindre » maximal de C sur lequel $\nabla_\alpha \varphi_\beta = 0$, et que ce cylindre est un ouvert. En tant que maximal ce cylindre devrait contenir des points de B et en tant qu'ouvert il devrait être intérieur à C, donc $B = \emptyset$ et $C = V_n$.

Une méthode de résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles globales consistera, comme le montre l'exemple précédent, à chercher des supports remarquables pour les conditions initiales. Nous allons l'appliquer aux variétés périodiques closes pour lesquelles nous démontrerons la validité de la conjecture énoncée dans ce paragraphe.

6. — Existence de sous-variété spatiale d'aire maximum sur une variété périodique close.

V_n est, une fois pour toutes dans ce paragraphe, une variété de classe C^∞ munie d'une métrique hyperbolique normale $g_{\alpha\beta}$ de classe C^∞, périodique et close au sens du paragraphe IV.

Définition (5, II). — *Avec les notations du paragraphe IV, soit $t = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ une sous-variété compacte de V_n. Nous dirons qu'elle est orientée dans l'espace (resp. isotrope) au point x, si son contingent en ce point est à l'extérieur (resp. sur) du cône temporel. Si elle est orientée dans l'espace en tous ses points, nous dirons qu'elle est spatiale. Définition analogue dans le cas isotrope.*

Il est clair qu'une telle sous-variété Σ orientée dans l'espace ou isotrope, est lipschitzienne.

L'ensemble des sous-variétés $t = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ orientées dans l'espace ou isotropes, muni de la topologie de la convergence uniforme, est un espace $\mathfrak{D}$. Si on impose à f d'être de classe C^1 on définit un sous-espace $\mathfrak{D}'$ de $\mathfrak{D}$. On désignera par $\mathfrak{D}''$ l'espace $\mathfrak{D}'$ métrisé par la distance :

$$d(f, g) = \operatorname*{Max}_{V_{n-1}} \left\{ |f - g| + \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} \right| \right\}.$$

LEMME (5, II). — *$\mathfrak{D}$ est compact: c'est le complété de $\mathfrak{D}'$.*

Preuve. — W_n est compact; les éléments d'une suite f_i de $\mathfrak{D}$ sont donc également bornés: $0 \leqslant f_i(x) < T$.

Comme les f_i sont orientées dans l'espace ou isotropes, elles sont équi-continues. Le lemme résulte alors du théorème d'Ascoli-Arzela.

L'aire d'un élément de $\mathfrak{D}'$ est bien définie: c'est l'intégrale étendue à V_{n-1} de la racine carrée du déterminant de la métrique induite sur l'élément.

L'aire est une fonctionnelle positive ou nulle, continue sur $\mathfrak{D}'$; elle est manifestement concave. L'inverse de l'aire est donc une fonctionnelle positive, continue sur $\mathfrak{D}''$, et convexe. D'après un théorème de Haar ([17]) c'est donc une fonctionnelle semi-continue inférieurement sur D'. Par suite l'aire est semi-continue supérieurement sur $\mathfrak{D}'$. Donnons de ce fait une démonstration directe.

LEMME (6, II). — *L'aire est une fonction semi-continue supérieurement sur $\mathfrak{D}'$.*

Preuve. — On peut se borner à le démontrer pour le sous-espace de $\mathfrak{D}'$ constitué par les sous-variétés orientées dans l'espace et de classe C^1, en remarquant qu'une variété de $\mathfrak{D}'$ est limite au sens de $\mathfrak{D}''$ de variétés de ce sous-espace et que l'aire est continue sur $\mathfrak{D}''$.

Soient alors Σ une sous-variété spatiale de $\mathfrak{D}'$, $\Sigma_i (i = 1,2...)$ une suite de sous-variétés spatiale de $\mathfrak{D}'$ convergeant vers Σ au sens de la topologie de $\mathfrak{D}'$. Il existe un voisinage V de Σ recouvert par les géodésiques normales à Σ, chaque point de V étant atteint une fois et une seule. Puisque Σ est orientable, orientons son fibré normal: cela oriente les géodésiques précédentes. Soit u^α le vecteur unitaire tangent à ces géodésiques. Si i est assez grand, $\Sigma_i - \Sigma$ est le bord d'un domaine D_i de V.

La formule de Stokes donne:

$$\int_{D_i} \nabla_\alpha u^\alpha . \, dv = \int_{\Sigma_i} u^\alpha n_\alpha d\sigma - \text{aire } \Sigma,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à $\sum_i$. Mais d'après l'inégalité

([17]) Voir 6, voir aussi P. Gillis [5], p. 70.

de Schwarz vue au chapitre I : $u_\alpha n^\alpha \geqslant 1$. Par suite :

$$\int_{\Sigma_i} u_\alpha n^\alpha \, d\sigma \geqslant \text{aire } \Sigma_i$$

et ainsi :

$$\text{aire } \Sigma_i \leqslant \text{aire } \Sigma + \int_{D_i} \nabla_\alpha u^\alpha . \, dv.$$

Or :

$$\left| \int_{D_i} \nabla_\alpha u^\alpha . \, dv \right| \leqslant \operatorname*{Max}_{D_i} |\nabla_\alpha u^\alpha| . \text{ volume } D_i,$$

et

$$\lim_{i=\infty} \text{volume } D_i = 0;$$

donc

$$\overline{\lim_{i=\infty}} \text{ aire } \Sigma_i \leqslant \text{aire } \Sigma \qquad \text{(C.Q.F.D.)}$$

THÉORÈME (4, II). — *L'aire d'une sous variété Σ de $\mathfrak{D}$ est la plus grande limite des aires des sous-variétés de $\mathfrak{D}'$ convergeant uniformément vers Σ. C'est une fonction semi-continue supérieurement au sens de la topologie de $\mathfrak{D}$.*

Preuve. — L'aire est une fonction semi-continue supérieurement sur $\mathfrak{D}'$. Comme $\mathfrak{D}$ est le complété de $\mathfrak{D}'$, il résulte d'un théorème de Fréchet (voir [4]) que l'aire se prolonge de façon unique sur $\mathfrak{D}$, où elle est encore une fonction semi-continue supérieurement.

Nous allons établir l'existence d'une borne supérieure des aires des sous-variétés de $\mathfrak{D}$.

LEMME (7, II). — *Soient V_n une variété munie d'une métrique hyperbolique normale, périodique et close, et W_n l'espace compact $V_n/\mathfrak{R}$. Il existe toujours sur W_n, et par suite sur V_n, un champ de vecteurs cofermés v de norme supérieure ou égale à 1.*

Preuve. — Soient $(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n = t)$ un système de coordonnées adapté au caractère périodique sur W_n, $g_{\alpha\beta}$ l'expression du tenseur métrique dans ce système. Le vecteur v^α défini par : $v^i = 0 \, (i = 1, \ldots, n-1)$, $v^n = A . |g|^{-\frac{1}{2}}$, où $A = \operatorname*{Max}_{V_n} \sqrt{\frac{|g|}{g_{nn}}}$, répond à la question car

$$g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = g_{nn} v^n v^n \geqslant 1,$$

$$\nabla_\alpha v^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha [\sqrt{|g|} \, v^\alpha] = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^n} [\sqrt{|g|} \, v^n] = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial A}{\partial x^n} = 0.$$

Théorème (5, II). — *L'aire des sous-variétés de $\mathfrak{D}$ est bornée supérieurement par un nombre* $B > 0$. *Il existe dans $\mathfrak{D}$ une sous-variété* S_B *d'aire B.*

Preuve. — Montrons l'existence du nombre B. A cause de la semi-continuité supérieure de l'aire et de la densité de $\mathfrak{D}'$ dans $\mathfrak{D}$, il suffit de prouver l'existence d'une borne supérieure des aires des sous-variétés de $\mathfrak{D}'$. Soit S l'une d'elles. Avec les notations du théorème (3, II) :

$$\int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha \, dv = P \int_S v^\alpha n_\alpha \, d\sigma,$$

où, grâce au lemme précédent, on a pû choisir v^α cofermé et de norme supérieure ou égale à 1. Il est clair que $v^\alpha n_\alpha$ ne s'annule pas sur S et peut être supposé positif. D'après l'inégalité de Schwarz du chapitre I :

$$v^\alpha n_\alpha \geqslant 1, \qquad \text{par suite} \qquad \left| \frac{1}{P} \int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha \, dv \right| \geqslant \text{aire S.}$$

Le membre de gauche ne dépend pas de S donc aire S a une borne supérieure B. La seconde partie du théorème résulte de la compacité de $\mathfrak{D}$ établie au lemme (5, II) et de la semi-continuité supérieure de l'aire (théorème 4, II). On remarquera que $P^{-1} \int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha \, dv$ ne dépend que de la « direction » de la classe d'homologie de φ_α car la substitution

$$\varphi_\alpha \to \lambda \varphi_\alpha + \partial_\alpha U (\lambda \in R)$$

donne

$$P^{-1} \to \lambda^{-1} P^{-1}, \qquad \int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha \, dv \to \lambda \int_{W_n} \varphi_\alpha v^\alpha \, dv.$$

Nous allons démontrer que S_B est de classe C^2.

Lemme (8, II). — *Le problème de la recherche du maximum de l'aire*

$$\int_{V_{n-1}} F\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, t; \quad \frac{\partial t}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial t}{\partial x^{n-1}}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$$

d'une sous-variété $t = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ *de $\mathfrak{D}$, est un problème elliptique au signe près.*

Preuve. — Analogue à celle d'un théorème de Lichnerowicz ([8], p. 43). Si $t = f_B(x^1, \ldots, x^{n-1})$ est l'équation de S_B en coordonnées adaptées au caractère périodique, f_B est lipschitzienne. Par suite f_B est dérivable presque partout et $t_i = \frac{\partial f_B}{\partial_x i}$ définit pour chaque i une distribution de support V_{n-1}. Par conséquent

$$\partial_\alpha f_B = \begin{cases} \partial_i f_B & \text{si} \quad \alpha = i \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = n \end{cases}$$

définit un courant de degré 1, de support S_B, sur V_n. Puisque S_B est spatiale au sens de la définition (5, II), $g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f_B . \partial_\beta f_B > 0$, là où f_B est dérivable, c'est-à-dire p.p.

Comme dans le cas où S_B est de classe C^2, le fait que l'aire de S_B soit extrémale entraîne :

$$(g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu} - g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu})\, \partial_\lambda f_B . \partial_\mu f_B .\ (\partial_{\alpha\beta} f_B - \Gamma_\alpha{}^\rho{}_\beta \partial_\rho f_B) = 0.$$

On doit chercher le signe de :

$$(g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu} - g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu})\partial_\lambda f_B . \partial_\mu f_B . V_\alpha V_\beta = N(\partial_\alpha f_B) . N(V_\alpha) - (V^\alpha \partial_\alpha f_B)^2.$$

Or, $N(\partial_\alpha f_B) > 0$ p.p. ; l'inégalité de Schwarz entraîne :

$$N(\partial_\alpha f_B) . N(V_\alpha) - (V^\alpha \partial_\alpha f_B)^2 \leqslant 0.$$

Le problème est donc elliptique au signe près.

Mais C. B. Morrey a démontré ([9]) que si un problème elliptique attaché à une intégrale de la forme :

$$\int_{V_{n-1}} F\left(x^1, \ldots, x^{n-1}; t; \frac{\partial t}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial t}{\partial x^{n-1}}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$$

admettait une solution de classe C^1, la solution était de classe C^2. D'autre part J. Nash ([11]) a démontré que s'il admettait une solution lipschitzienne cette solution était de classe C^1. Comme f_B est lipschitzienne, on a le

THÉORÈME (6, II). — *Il existe une sous-variété de $\mathfrak{D}$ de classe C^2 et d'aire maximum.*

7. — Applications.

Considérons un espace-temps V_4 périodique clos de tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$.

Soit W_4 la variété $V_4/\mathcal{R}$ (voir paragraphe IV) et p la projection canonique : p : $V_4 \to W_4$. D'après le théorème (6, II) il existe sur W_4 une variété S_B. Il est clair que $p^{-1}(S_B)$ est formé de variétés à trois dimensions de classe C^2, compactes, orientées dans l'espace, est d'aire maximum B, dont l'équation est :

$$t = f_B(x^1, x^2, x^3) + k.T, \qquad \text{où} \qquad k \in Z.$$

Soient Σ et Σ' deux telles variétés de V_4 d'équations :

$$t = f_A(x^1, x^2, x^3) \qquad \text{et} \qquad t = f_A + T.$$

Ainsi $\Sigma' - \Sigma$ est le bord d'une partie V de V_4 telle que, si $\overline{V}$ est la fermeture de V, $p(\overline{V}) = W_4$.

Feuilletons V_4 par les variétés parallèles à Σ. Leurs trajectoires orthogonales sont des géodésiques de vecteur unitaire tangent u^α. Comme Σ est de classe C^2, u^α est de classe C^1, et la formule :

$$H \equiv \int_0^s [R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta] \, ds = -(\nabla_\alpha u^\alpha)_s + (\nabla_\alpha u^\alpha)_0.$$

du paragraphe 5 est valable. Mais Σ est une variété minima, donc $(\nabla_\alpha u^\alpha)_0 = 0$, et il reste :

$$H \equiv \int_0^s [R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta] \, ds = - \nabla_\alpha u^\alpha.$$

Intégrons H sur V :

$$\int_V H \, dv = - \int_V \nabla_\alpha u^\alpha \, dv = - \int_{\Sigma'} u^\alpha n_\alpha \, d\sigma + \int_\Sigma u^\alpha n_\alpha \, d\sigma,$$

où n_α est le vecteur unitaire normal à Σ ou Σ'. Mais sur Σ : $u^\alpha = n^\alpha$, donc $\int_\Sigma u^\alpha n_\alpha \, d\sigma =$ aire Σ. D'après l'inégalité de Schwarz, sur Σ' :

$$u^\alpha n_\alpha \geqslant 1, \quad \text{donc} \quad \int_\Sigma u^\alpha n_\alpha \, d\sigma \geqslant \int_{\Sigma'} d\sigma = \text{aire } \Sigma' = \text{aire } \Sigma.$$

Par suite :

$$\int_V H \, dv \leqslant 0. \tag{1}$$

Étudions le signe de H. Pour cela commençons par étudier le signe de $\nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta$: dans la métrique elliptique (théorème 1, I)

$$h_{\alpha\beta} = - g_{\alpha\beta} + 2u_\alpha u_\beta, \qquad \text{on a } h^{*\lambda\mu} = h^{\lambda\mu}.$$

Ainsi, $h^{*\alpha\lambda}\nabla_\alpha u_\beta = (-g^{\alpha\lambda} + 2u^\alpha u^\lambda)\nabla_\alpha u_\beta = -\nabla^\lambda u_\beta$ puisque $u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0$. Et puisque $\nabla_\lambda u_\mu = \nabla_\mu u_\lambda$ on a :

$$h^{*\beta\mu}\nabla_\lambda u_\mu = h^{*\beta\mu}\nabla_\mu u_\lambda.$$

Donc $\nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta = h^{*\alpha\lambda} h^{*\beta\mu} \nabla_\alpha u_\lambda . \nabla_\beta u_\mu \geqslant 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $\nabla_\alpha u_\beta = 0$.

Étudions le signe de $R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$: si l'espace-temps est vide $R_{\alpha\beta} = 0$. En schéma fluide parfait-champ électromagnétique et si la constante cosmologique est négative ou nulle, il existe des domaines où $R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta > 0$ d'après le théorème (13, I). Dans les deux cas il en résulte que

$$H \equiv \int_0^s [R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + \nabla_\alpha u_\beta \nabla^\alpha u^\beta]\, ds \geqslant 0,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $\nabla_\alpha u_\beta = 0$, $R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0$. De l'inégalité (1) on déduit le :

Théorème (7, II). — *Si un espace-temps extérieur est périodique et clos, il est localement euclidien.*

Preuve. — En effet $R_{\alpha\beta} = 0$ et $\nabla_\alpha u_\beta = 0$ entraînent, comme au théorème (10, I), V_4 localement euclidien.

Théorème (8, II). — *En schéma fluide parfait champ électromagnétique un espace-temps périodique clos est à constante cosmologique positive.*

Preuve. — Sinon, il existerait des domaines de V_4 où $H > 0$. Comme $H \geqslant 0$ partout, on en pourrait avoir $\int_{V_4} H . dv \leqslant 0$.

Si on revient aux espaces-temps compacts les plus généraux, leur premier membre de Betti n'est pas nul. Mais d'après le modèle d'univers construit au chapitre premier on ne peut espérer trouver des sections d'espaces globales et les méthodes précédentes ne s'appliquent plus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Avez, *C. R. Acad. Sci.*, 250, 1960, 3585-3587.
[2] P. Bidal et G. de Rham, *Comm. Math. Helv.*, 19, 1946-1947.
[3] C. Ehresmann, Colloque de topologie algébrique (espaces fibrés), Bruxelles, 1951.

[4] M. FRECHET, Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes, *Fund. Math*, Vol. 7, 1925, 210-224.

[5] P. GILLIS, Sur les problèmes réguliers du calcul des variations de la forme $I(z) = \int_{D_n} F(p_i)\, d(x^i) =$ minimum, *Studia Mathematica*, 8, 1939, 68-77.

[6] HAAR, *Mathematische Annalen*, 97, 1927, 124-158.

[7] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connections et des groupes d'holonomie*, Dunod, Paris.

[8] A. LICHNEROWICZ, L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des *n* corps, *Journ. de Math.*, t. 23, Fasc. 1, 1944.

[9] C. B. MORREY, *Ann. Math. Studies*, N° 33, Princeton, 1954, 101-159.

[10] MYERS, Riemannian manifolds in the large, *Duke Math.*, vol 1, 1935, 42-43.

[11] J. NASH, *Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A.*, 43, 1957, 754-758.

[12] SYNGE, On the neighborhood of a geodesic in riemannian space. *Duke Math*, vol. 1, 1935.

CHAPITRE III

VARIÉTÉS DE G. DE RHAM

Ce chapitre vise à étudier les variétés V_n compactes et orientables par la technique des formes harmoniques, en l'absence d'hypothèse sur la signature de la métrique $g_{\alpha\beta}$. Les résultats obtenus à l'aide de cette méthode par les différents auteurs, reposaient tous sur le fait qu'en métrique elliptique

$$\int_{V_n} t_{\alpha\cdots}\, t^{\alpha\cdots}\, dv = 0 \Longrightarrow t_{\alpha\cdots} = 0.$$

Ici, l'existence de tenseurs isotropes rend ce type de raisonnement inutilisable. Nous lui en substituons un autre reposant sur un lemme analogue à celui de Du Boi Reymond en calcul des variations.

Notations et rappels [18]. — Les variétés envisagées seront toujours compactes, orientables, munies d'une métrique $g_{\alpha\beta}$ de classe C^∞.

Les p-tenseurs α et β, ont un produit scalaire local en $x_0 \in V_n$, noté (α, β) et défini par : $(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{p!}\alpha_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}\beta^{\lambda_1 \cdots \lambda_p}$.

L'espace vectoriel des p-tenseurs définis sur V_n, est muni d'un produit scalaire noté $< \alpha, \beta >$ et défini par :

$$< \alpha, \beta > = \int_{V_n} (\alpha, \beta)\,.\, dv.$$

En métrique non elliptique $< \alpha, \beta >$ ne définit pas une norme, puisque $< \alpha, \alpha > = 0 \not\Longrightarrow \alpha = 0$.

Cet espace vectoriel est muni de la topologie faible [19] : des p-tenseurs t_j convergent faiblement vers le p-tenseur t,

(18) Voir, par exemple, Lichnerowicz [6], pp. 169-189.
(19) L. Schwartz [8], tome I, pp. 72-73.

si les $< t_j, \varphi >$ convergent vers $< t, \varphi >$ quel que soit le p-tenseur φ. Nous noterons : $t_j \rightharpoonup t$.

Enfin, Λ_p, F_p, C_p, h_p, c_p, H_p désignerons les espaces des p-formes de classe C^0 respectivement : quelconques, fermées, cofermées, homologues à zéro, cohomologues à zéro, harmoniques.

1. — Caractérisation de la métrique par l'espace C_1.

Lemme (1, III). — *Si un p-tenseur φ est orthogonal à un sous-ensemble K, dense dans l'espace des p-tenseurs, alors* $\varphi = 0$.

Démonstration. — Soit λ un p-tenseur quelconque. Il existe une suite $\Psi_i \in K$ telle que $\Psi_i \rightharpoonup \lambda(\lambda, \varphi)$, donc

$$< \varphi, \Psi_i > \rightarrow < \varphi, \lambda(\lambda, \varphi) >.$$

Mais

$$< \varphi, \Psi_i > = 0, \qquad < \varphi, \lambda.(\lambda, \varphi) > = < (\lambda, \varphi), \qquad (\lambda, \varphi) >,$$

donc

$$< (\lambda, \varphi), \qquad (\lambda, \varphi) > = 0.$$

Comme (φ, λ) est continu, $(\varphi, \lambda) = 0$. Comme λ est arbitraire; $\varphi = 0$.

On en déduit, en particulier, que si un tenseur d'ordre 2 est orthogonal à un sous-ensemble dense dans l'espace des tenseurs symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre 2, il est antisymétrique (resp. symétrique).

Cette remarque servira plus loin.

Lemme (2, III). — *Si $A_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique de classe C^1, l'application $\varphi_\alpha \rightarrow A_{\alpha\beta}\varphi^\beta$ est un endomorphisme de F_1 (resp. h_1) si et seulement si $A_{\alpha\beta} = k.g_{\alpha\beta}$, où $k =$ constante.*

Démonstration. — La condition est manifestement suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Pour tout vecteur fermé φ_α, $A_{\alpha\beta}\varphi^\beta$ doit être fermé, c'est-à-dire :

$$(1) \quad (\nabla_\lambda A_{\alpha\beta} - \nabla_\beta A_{\alpha\lambda})\varphi^\alpha + (A_{\alpha\beta}\nabla_\lambda\varphi^\alpha - A_{\alpha\lambda}\nabla_\beta\varphi^\alpha) = 0.$$

Soit V_α un vecteur arbitraire en un point arbitraire $(x^\alpha)_0 \in V_n$.

Prenons des coordonnées normales x^α en ce point, et posons $U = \frac{1}{2}(V_\alpha x^\alpha)^2$. Il est aisé de construire une fonction U' définie sur V_n tout entier, de classe C^1, et dont la restriction à un voisinage de $(x^\alpha)_0$ soit U. Le champ fermé $\varphi_\alpha = \partial_\alpha U'$ est tel que $(\varphi_\alpha)_{x_0} = 0$, $(\nabla_\alpha \varphi_\beta)_{x_0} = V_\alpha V_\beta$. (1) donne alors :

$$A_{\alpha\beta}V^\alpha V_\lambda = A_{\alpha\lambda}V_\beta V^\alpha, \qquad \text{soit} \qquad A_{\alpha\beta}V^\alpha = kV_\beta;$$

V_α est arbitraire, donc $A_{\alpha\beta} = k \cdot g_{\alpha\beta}$.

Cette valeur de $A_{\alpha\beta}$ substituée dans (1) donne :

$$\varphi_\beta \partial_\lambda k = \varphi^\lambda \partial^\beta k.$$

Comme on peut trouver sur V_n un champ fermé dont la restriction à $(x^\alpha)_0$ soit un vecteur $(\varphi_\alpha)_0$ arbitraire, cette dernière égalité entraîne $\partial_\lambda k = 0$, soit $k =$ constante.

Il est clair que ce lemme vaut sans hypothèses topologiques sur V_n.

Lemme (3, III). — *Si* $A_{\alpha\beta}$ *est un tenseur symétrique de classe* C^1, *l'application* $\varphi_\alpha \to A_{\alpha\beta}\varphi^\beta$ *est un endomorphisme de* C_1, *si et seulement si* $A_{\alpha\beta} = kg_{\alpha\beta}$, *où* $k =$ *constante.*

Démonstration. — La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Pour tout vecteur cofermé φ_α, $A_{\alpha\beta}\varphi^\beta$ doit être cofermé. Par conséquent, pour toute fonction V de classe C^1 sur V_n :

$$\int_{V_n} A^{\alpha\beta}\varphi_\alpha \partial_\beta V \,.\, dv = 0.$$

Prenons en particulier $\varphi_\alpha = \nabla^\lambda F_{\lambda\alpha}$, où $F_{\lambda\alpha}$ définit une 2-forme arbitraire. En usant de la formule de Stokes, il vient

$$F^{\lambda\alpha}\nabla_\lambda(A_\alpha{}^\beta \partial_\beta V) = 0.$$

Comme $F_{\alpha\beta}$ est un tenseur antisymétrique arbitraire, le lemme (1, III) montre que

$$\nabla_\lambda(A_\alpha{}^\beta \partial_\beta V)$$

est symétrique, c'est-à-dire que $(A_\alpha{}^\beta \partial_\beta V)$ est fermé. L'application $\partial_\alpha V \to A_{\alpha\beta}\partial^\beta V$ est donc un endomorphisme de h_1. Comme V est arbitraire, le lemme (2, III) entraîne $A_{\alpha\beta} = kg_{\alpha\beta}$, $k =$ constante.

Ce lemme suppose essentiellement V_n compacte.

THÉORÈME (1, III). — *Considérons deux métriques de signatures quelconques $g_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$ sur V_n. Désignons par C_1 $(g_{\alpha\beta})$ et $C_1(h_{\alpha\beta})$ les espaces des 1-formes cofermées respectivement dans $g_{\alpha\beta}$ et dans $h_{\alpha\beta}$. Si $n \neq 2$ et C_1 $(g_{\alpha\beta}) \subseteq C_1(h_{\alpha\beta})$, alors*

$$h_{\alpha\beta} = k . g_{\alpha\beta},$$

k = constante.

Démonstration. — Définissons $\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{h}$ par $\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$, $\overset{*}{h} = \text{Dét}\ (h_{\alpha\beta})$.

Soit $\varphi_\alpha \in C_1(g_{\alpha\beta})$, alors $\varphi_\alpha \in C_1(h_{\alpha\beta})$ et pour toute fonction V de classe C^1 sur V_n :

$$\int_{V_n} \varphi_\alpha . \partial_\beta V . \overset{*}{h}{}^{\alpha\beta} . \sqrt{|\overset{*}{h}|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = 0.$$

Par suite

$$\int_{V_n} \varphi_\alpha \partial_\beta V . \overset{*}{h}{}^{\alpha\beta} . \left|\frac{\overset{*}{h}}{g}\right|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = 0.$$

Ce qui prouve que :

$$\varphi_\alpha \overset{*}{h}{}^{\alpha\beta} \left|\frac{\overset{*}{h}}{g}\right|^{\frac{1}{2}} \in C_1(g_{\alpha\beta}).$$

Ainsi, l'application $\varphi^\beta \to \varphi_\alpha \overset{*}{h}{}^{\alpha\beta} \left|\frac{\overset{*}{h}}{g}\right|^{\frac{1}{2}}$ est un endomorphisme de l'espace $C_1(g_{\alpha\beta})$. D'après le lemme (3, III) :

$$\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta} . \left|\frac{\overset{*}{h}}{g}\right|^{\frac{1}{2}} = \lambda . g^{\alpha\beta}$$

(λ = constante).

C'est-à-dire :

$$h_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}, \qquad \lambda = \pm |k|^{\frac{n}{2}-1}.$$

Si $n \neq 2$, k est donc une constante.

Alors que l'espace F_1 ne dépend que de la structure différentiable de V_n, la donnée de C_1 détermine la métrique à un coefficient numérique près. A toute propriété métrique doit donc correspondre une propriété de C_1. Nous allons traduire cette correspondance pour les espaces d'Einstein.

2. — Caractérisation des espaces d'Einstein.

THÉORÈME (2, III). — *Lorsque* $n \neq 2$, V_n *est un espace d'Einstein si et seulement si l'application* $\varphi_\alpha \to \nabla^\lambda \nabla_\lambda \varphi_\alpha$ *est un endomorphisme de* F_1.

Démonstration. — Si φ_α est un vecteur fermé, et si

$$R_{\alpha\beta} = k \,.\, g_{\alpha\beta},$$

l'identité :

$$R^\alpha{}_\beta \varphi_\alpha = \nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha - \partial_\beta \nabla_\alpha \varphi^\alpha, \tag{1}$$

s'écrit

$$k \,.\, \varphi_\beta + \partial_\beta (\nabla^\alpha \varphi_\alpha) = \nabla^\alpha \nabla_\alpha \varphi_\beta .$$

Mais $n \neq 2 \Longrightarrow k =$ constante, $k \,.\, \varphi_\beta$ est donc fermé et par suite $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \varphi_\beta$ l'est aussi. La condition est donc nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Si φ_α étant fermé, $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \varphi_\beta$ l'est aussi (1) montre que $R^\alpha{}_\beta \varphi^\beta$ est fermé. Comme φ_α est arbitraire dans F_1, le lemme (2, III) entraîne $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$.

THÉORÈME (3, III). — *Même théorème pour* h_1.

Démonstration. — Même démonstration.

Ces deux derniers théorèmes sont locaux, au même titre que le lemme dont ils dérivent.

THÉORÈME (4, III). — *La variété* V_n $(n \neq 2)$ *est un espace d'Einstein si et seulement si l'application* $\varphi_\alpha \to \nabla^\lambda \nabla_\lambda \varphi_\alpha$ *est un endomorphisme de* C_1.

Démonstration. — En passant au revêtement orientable à deux feuillets, on voit que l'hypothèse d'orientabilité est surabondante.

La condition est nécessaire : si φ_α est cofermé, l'identité

$$R_{\alpha\beta} \varphi^\alpha = \nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha - \partial_\beta \nabla_\alpha \varphi^\alpha, \tag{1}$$

s'écrit

$$k \,.\, \varphi_\beta = \nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha$$

et puisque k est constant, $\nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha$ est cofermé.

Pour toute fonction V de classe C^2 sur V_n, on a donc

$$\int_{V_n} \partial^\beta V . \nabla^\alpha \nabla_\beta \varphi_\alpha . dv = 0.$$

La formule de Stokes entraîne :

$$\int_{V_n} \nabla^\alpha \partial^\beta V . \nabla_\beta \varphi_\alpha . dv = 0.$$

A cause de la symétrique de $\nabla_\alpha \partial_\beta V$:

$$\int_{V_n} \nabla^\beta \partial^\alpha V . \nabla_\beta \varphi_\alpha . dv = 0.$$

Une nouvelle application de la formule de Stokes donne

$$\int_{V_n} \partial^\alpha V . \nabla^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha . dv = 0.$$

Puisque $\partial^\alpha V$ est arbitraire, cela montre que $\nabla^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha$ est cofermé. La condition est suffisante : φ_α étant cofermé, supposons que $\nabla^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha$ le soit. Les calculs faits ci-dessus montrent que $\nabla^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha$ est cofermé. D'après (1), $R^\alpha{}_\beta \varphi_\alpha$ l'est donc aussi. L'application $\varphi_\alpha \to R^\beta{}_\alpha \varphi_\beta$ est donc un endomorphisme de C_1. Le lemme (3, III) entraîne $R_{\alpha\beta} = k . g_{\alpha\beta}$.

Nous allons poursuivre l'étude des espaces d'Einstein à tenseur de Ricci nul et préciser les techniques nécessaires à cette étude.

3. — Rappels de résultats sur les formes harmoniques [20].

Adjointe d'une forme.

Si η est la forme élément de volume de V_n, on appelle adjointe d'une p-forme α la $(n\text{-}p)$-forme notée $\ast\alpha$ et définie par ses composantes :

$$(\ast\alpha)_{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n} = \frac{1}{p!} \eta_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \alpha^{\lambda_1 \dots \lambda_p}.$$

Rappelons la relation

$$\ast\ast\alpha = \varepsilon_g . (-1)^{p(n-p)} . \alpha, \qquad \varepsilon_g = (-1)^{\text{signe } g}.$$

[20] Ces deux premiers paragraphes ont fait l'objet d'une note : A. Avez [1]. Voir aussi [4] et [6] auquel les notations sont empruntées.

qui permet de définir l'opérateur $\overline{\ast}^1$ sur les p-formes par :

$$\overline{\ast}^1 = \varepsilon_g . (-1)^{p(n-p)} \ast .$$

Opérations d, δ —, Δ.

Soit d l'opérateur de différentiation extérieure sur les p-formes. L'opérateur δ sur les p-formes, fait correspondre à toute p-forme α une $(p-1)$-forme définie par :

$$\delta\alpha = (-1)^p . \overline{\ast}^1 \, d \ast \alpha.$$

De la relation $dd = 0$, on déduit $\delta\delta = 0$.

Rappelons encore que δ est l'adjoint de d par rapport à $<, >$.

Enfin, nous introduirons l'opérateur Δ, qui à toute p-forme α fait correspondre une p-forme et qui est défini par : $\Delta = d\delta + \delta d$. Pour les o-formes, on vérifie que Δ est l'opposé du laplacien Δ_2.

Rappelons enfin que les opérateurs Δ et $\ast$ commutent.

Théorèmes de Hodge-de Rham.

G. de Rham a démontré, dans un raisonnement qui ne fait intervenir que la structure différentiable de la variété, le théorème suivant [21] :

La dimension de l'espace quotient F_p/h_p est finie et égale au $p^{\text{ème}}$ nombre de Betti $B_p(V_n)$ de la variété V_n.

Les éléments de F_p/h_p sont appelés les p-classes d'homologie sur les réels.

Définissons une p-forme harmonique α par la condition $\Delta\alpha = 0$. En métrique elliptique, Hodge et de Rham ont établi que chaque classe d'homologie contenait une forme harmonique et une seule. D'une manière précise on a ce que nous désignerons par

Théorème de forte décomposition.

$$\Lambda p = h_p \times C_p \times (F_p \cap C_p).$$

Pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 5 nous introduirons le

Théorème de faible décomposition.

$h_p \times C_p \times (F_p \cap C_p)$ est dense dans Λ_p au sens de la topologie faible.

[21] G. de Rham. Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions (Thèse), *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 10 (1931), pp. 115-200.

(22) Voir A. Avez [2].

DÉFINITIONS :

Variétés fortement de G. de Rham: celles pour lesquelles le théorème de forte décomposition est vrai.

Variétés faiblement de G. de Rham: celles pour lesquelles le théorème de faible décomposition est vrai.

En métrique elliptique toute variété est fortement de G. de Rham. Nous verrons qu'il n'en est rien en métrique de signature quelconque.

Il est clair qu'une variété fortement de G. de Rham, l'est faiblement. La réciproque est fausse, comme nous l'établirons au paragraphe 5. La notion de variété faiblement de G. de Rham suffira pour presque toutes les applications.

THÉORÈME DE BOCHNER-LICHNEROWICZ [23]. — Énonçons-le : *Si une variété riemannienne compacte orientable admet une courbure de Ricci nulle, toute 1-forme harmonique est à dérivée covariante nulle.*

Si, en particulier, la variété est de dimension 4 et de caractéristique d'Euler-Poincaré $X\ (V_4)$ nulle :

$$X(V_4) = B_0 - B_1 + B_2 - B_3 + B_4 = 0$$

et le théorème de dualité d'Alexander :

$$B_0 = B_4 = 1, \qquad B_1 = B_3, \text{ entraînent :}$$

$$B_1 = 1 + \frac{B_2}{2} \geqslant 1.$$

D'après la théorie de Hodge- de Rham, il existe donc une 1-forme harmonique sur V_4. Le théorème de Bochner-Lichnerowicz montre qu'elle est à dérivée covariante nulle. Les équations de Gauss-Codazzi montrent alors que V_4 est localement euclidienne.

L'extension de ce dernier résultat aux variétés V_4 munie d'une métrique hyperbolique normale, démontrerait la proposition B de Lichnerowicz [24] pour les espaces temps compacts. D'où l'intérêt d'une étude des variétés de G. de Rham.

[23] Lichnerowicz [7], p. 5.
[24] Lichnerowicz [5].

4. — Variétés faiblement de G. de Rham.

L'existence des variétés de G. de Rham, en métrique non elliptique, sera démontrée au paragraphe 5.

Tout au long de ce paragraphe les variétés envisagées seront *faiblement de G. de Rham*, sauf mention express.

Nous nous proposons d'étendre à de telles variétés des résultats classiques en métrique elliptique.

LEMME (4, III). — *Etant donné une p-forme u sur* V_n, *si pour toute p-forme* α *on a*

$$\langle du, d\alpha \rangle = 0 \ (resp.\ \langle \delta u.\ \delta\alpha \rangle = 0),$$

alors $du = 0$ (*resp.* $\delta u = 0$).

Démonstration. — Soit s une $(p+1)$-forme arbitraire de $h_{p+1} \times c_{p+1} \times (F_{p+1} \cap C_{p+1})$.

Il existe des formes α, β, γ telles que

$$s = d\alpha + \delta\beta + \gamma, \qquad \delta\gamma = 0.$$

Par hypothèse $\langle du, d\alpha \rangle = 0$; d'autre part $\langle du, \delta\beta \rangle = 0$, $\langle du, \gamma \rangle = \langle u, \delta\gamma \rangle = 0$, donc $\langle du, s \rangle = 0$. Le lemme (1, III) entraîne, puisque s est arbitraire dans

$$h_{p+1} \times c_{p+1} \times (F_{p+1} \cap C_{p+1}) \text{ dense dans } \Lambda_{p+1},\ du = 0.$$

Même démonstration pour δ.

LEMME (5, III). — *Etant donnée une p-forme u sur* V_n, *si pour toute p-forme* $t \in h_p \times c_p \times (F_p \cap C_p)$ *on a*

$$\langle du, dt \rangle = 0.\ (resp.\ \langle \delta u, \delta t \rangle = 0),$$

alors $du = 0$ (*resp.* $\delta u = 0$).

Démonstration. — $\langle du, dt \rangle = 0$ pour

$$\forall t \in h_p \times c_p \times (F_h \cap C_p).$$

En particulier si $t = \delta\lambda$, où $\lambda \in \Lambda_{p+1}$; donc

$$\langle du, d\delta\lambda \rangle = \langle \delta\ du, \delta\lambda \rangle = 0.$$

Comme λ est arbitraire dans Λ_{p+1}, le lemme précédent entraîne $\delta\, du = 0$. Par suite, pour toute $(p+1)$-forme μ :

$$\langle \delta du, \mu \rangle = \langle du, d\mu \rangle = 0.$$

Une nouvelle application du lemme précédent entraîne $du = 0$.

Théorème (5, III). — *Si a et b sont deux constantes non nulles, U une p-forme de V_n, on a :*

$$U \in F_p \cap C_p \Longleftrightarrow a.d\,\delta u + b\delta\, du = 0.$$

En particulier

$$F_p \cap C_p = H_p.$$

Démonstration. — Il est évident que

$$du = 0, \delta u = 0 \Longrightarrow a.\, d\delta u + b.\, \delta du = 0.$$

Réciproquement $a.\, d\delta u + b.\delta du = 0 \Longrightarrow$ pour $\forall s \in \Lambda p$:

(1) $$a \langle \delta u, \delta s \rangle + b \langle du, ds \rangle = 0.$$

Si $s \in h_p \times c_p \times (C_p \cap F_p)$, il existe des formes α, β, γ telles que : $s = d\alpha + \delta\beta + \gamma$, $\delta\gamma = 0$. En substituant à s la forme s-$d\alpha$ dans (1), il vient $\langle du, ds \rangle = 0$, donc $\langle \delta u, \delta s \rangle = 0$. Comme s est arbitraire dans $h_p \times c_p \times (C_p \cap F_p)$, le lemme précédent entraîne $du = 0$, $\delta u = 0$.

Théorème (6, III). — *La décomposition de Hodge-de-Rham est unique.*

Démonstration. — Soit $u \in h_p \times c_p + (F_p \cap C_p)$, avec :

$$u = d\alpha + \delta\beta + \gamma = d\alpha' + \delta\beta' + \gamma'$$
$$d\gamma = d\gamma' = 0, \qquad \delta\gamma = \delta\gamma' = 0.$$

On en tire $d(\alpha - \alpha') + \delta(\beta - \beta') + (\gamma - \gamma') = 0$.

Si $s \in \Lambda p$:

$$\langle d(\alpha - \alpha'), ds \rangle = -\langle ds, \delta(\beta - \beta') \rangle - \langle ds, \gamma - \gamma' \rangle = 0.$$

Comme s est arbitraire dans Λp, le lemme (4, III) entraîne $d(\alpha - \alpha') = 0$, c'est-à-dire $d\alpha = d\alpha'$.

De même

$$\delta\beta = \delta\beta'; \qquad \gamma = \gamma'.$$

Théorème (7, III). — *Le $p^{\text{ème}}$ nombre de Betti $B_p(V_n)$ est supérieur ou égal à la dimension de H_p.*

Démonstration. — A chaque forme harmonique de H_p correspond une p-classe d'homologie $h + du$, $u \in \Lambda_{p+1}$. Il suffit de montrer que, réciproquement, chaque classe d'homologie contient au plus une forme harmonique.

Soient deux formes harmoniques d'une même classe : h et h'. Il existe $u \in \Lambda_{p-1}$ telle que : $h - h' = du$.

Le théorème d'unicité entraîne :

$$h = h', \qquad du = 0.$$

En particulier : $\dim H_p < \infty$.

LEMME (6, III). — *Sur* V_n, *une p-forme harmonique* w, *orthogonale à toutes les p-formes harmoniques, est nulle.*

Démonstration. — Soit $v \in h_p \times c_p \times (F_p \cap C_p)$. Il existe des formes α, β, γ telles que :

$$v = d\alpha + \delta\beta + \gamma, \qquad d\gamma = 0, \qquad \delta\gamma = 0.$$

Puisque $w \in H_p$, le théorème (5, III) entraîne $dw = 0$, $\delta w = 0$. Par suite

$$\langle d\alpha, w\rangle = \langle \delta\beta, w\rangle = 0,$$

et comme, par hypothèse, $\langle \gamma, w\rangle = 0$, on a $\langle v, w\rangle = 0$. Le lemme (1, III) entraîne $w = 0$.

Si V_n est faiblement de G. de Rham, nous avons seulement : $\dim H_p \leqslant B_p(V_n)$. Nous allons montrer qu'on a l'égalité si V_n est fortement de G. de Rham. Cette dernière hypothèse n'est sans doute pas nécessaire comme le montrera l'étude des V_2.

THÉORÈME (8, III). — *Sur une variété* V_n *fortement de G. de Rham, soient a et b deux constantes non nulles,* $\beta \in \Lambda_p$. *Pour que l'équation :*

$$a \,.\, d\delta X + b \,.\, \delta\, dX = \beta$$

soit résoluble en X, il faut et il suffit que β *soit orthogonale à* H_p.

Démonstration. — C'est nécessaire : d'après le théorème (5, III), $\gamma \in H_p \Longrightarrow d\gamma = 0$, $\delta\gamma = 0$. Donc :

$$\langle \beta, \gamma\rangle = a \,.\, \langle d\delta X, \gamma\rangle + b\,\langle \delta\, dX, \gamma\rangle$$
$$a\,\langle \delta\, X, \delta\gamma\rangle + b\,\langle dX, d\gamma\rangle = 0.$$

Montrons que c'est suffisant : puisque le théorème de forte décomposition est valide, il existe des formes α, η, σ, telles que :

$$\beta = d\alpha + \delta\eta + \sigma, \qquad d\sigma = 0, \qquad \delta\sigma = 0.$$

Mais α, $\delta\eta$, β sont orthogonales à H_p, il en est donc de même de σ et, d'après le lemme (6, III), $\sigma = 0$. Tout revient donc à résoudre :

$$a.\ d\delta X + b.\delta\, dX = d\alpha + \delta\eta.$$

L'unicité de la décomposition de Hodge entraîne

$$a.\ d\delta X = d\alpha, \qquad b.\delta\, dX = \delta\eta.$$

Puisque V_n est fortement de G. de Rham, on peut supposer, en remplaçant α par sa composante cohomologue à zéro, et η par sa composante homologue à zéro, que α est cohomologue à zéro et η homologue à zéro.

Il suffit donc de savoir résoudre :

$$(1) \qquad a\delta X = \alpha,$$
$$(2) \qquad b.\ dX = \eta.$$

Comme α est cohomologue à zéro, (1) a une solution X_1. Posons $X = X_1 + \delta Y$, Y étant à déterminer. Il suffit de vérifier (2), c'est-à-dire :

$$(3) \qquad d\delta Y = \frac{1}{b}\eta - dX_1.$$

Comme $\frac{1}{b}\eta$ est homologue à zéro, $dZ = \frac{1}{b}\eta - dX_1$ a une solution Z; si δY est la composante cohomologue à zéro de Z, on a bien (3).

Si $a = b = 1$ ce théorème se réduit au théorème H de Hodge ([25]).

THÉORÈME (9, III). — *Sur une variété* V_n *fortement de G. de Rham,* $B_p(V_n) = \dim H_p$.

Démonstration. — D'après le théorème (7, III) il suffit de démontrer que chaque p-classe d'homologie contient une

([25]) P. Bidal et G. de Rham [4].

forme harmonique. Si α appartient à l'une de ces classes d'après le théorème de forte décomposition il existe des formes λ, μ, h telles que :

$$\alpha = d\lambda + \delta\mu + h, \qquad h \in \mathrm{H}_p = \mathrm{C}_p \cap \mathrm{F}_p.$$

Mais α, $d\lambda$, $h \in \mathrm{F}_p \Longrightarrow \delta\mu \in \mathrm{F}_p$; $\delta\mu$ est donc orthogonale à C_p. D'après le lemme (4, III) $\delta\mu = 0$, et $\alpha = d\lambda + h$. La classe α contient donc la forme harmonique h.

5. — Variétés de G. de Rham à deux dimensions.

Les buts essentiels de ce paragraphe sont :

1° Démontrer l'existence, en métrique non elliptique, de variétés faiblement de G. de Rham.

2° Indiquer dans quelle voie chercher une caractérisation de ces variétés.

3° Résoudre les même problèmes, en métrique non elliptique, pour les variétés fortement de G. de Rham.

4° Montrer qu'il existe des variétés faiblement de G. de Rham qui ne sont pas fortement de G. de Rham.

Ces problèmes seront traités en dimension 2.

Toute variété V_2 compacte, orientable, à deux dimensions, munie d'une métrique elliptique, est fortement de G. de Rham. Il reste à examiner les V_2 munies d'une métrique hyperbolique normale. Leur caractéristique d'Euler-Poincaré $X(V_2)$ est nulle, et elles sont homéomorphes au tore T^2 ([26]). Considérons le tore $T^2 = T^1 \times T^1$ comme résultant de l'identification des côtés opposés du carré :

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

dans le plan $x \circ y$. Le tore T^2 pseudo-euclidien sera celui muni de la métrique $g_{\alpha\beta}$ définie par ses composantes relative à $x\,O\,y$: $g_{11} = a^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = -b^2$.

THÉORÈME (10, III). — *Pour que le tore pseudo-euclidien* T^2 *soit faiblement de G. de Rham il faut et il suffit que ses géodésiques isotropes ne soient pas fermées.*

([26]) N. Steenrod, p. 207 [9].

Démonstration. — Posons une fois pour toutes :

$$e_n(u) = \exp.\ 2\pi i\ nu,\ n \text{ entier},\ u \in \mathrm{R}; \quad e_{pq} = e_p(x)e_q(y).$$

Si les géodésiques isotropes sont fermées, a et b sont commensurables, il existe des entiers p et q tels que $p^2/a^2 = q^2/b^2$. Pour de tels entiers

$$\Delta(e_{pq}) = -\Delta_2(e_{pq}) = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}e_{pq} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e_{pq} = 0.$$

Ainsi, la o-forme e_{pq} est harmonique sans être fermée, puisqu'elle ne se réduit pas à une constante. Il résulte du théorème (5, III) que T_2 ne peut être faiblement de G. de Rham.

Réciproquement, supposons que les géodésiques isotropes ne soient pas fermées. Les nombres a et b sont incommensurables et, quels que soient les entiers p et q non nuls,

$$p^2/a^2 - q^2/b^2 \neq 0.$$

Ceci posé, montrons que $h_r \times c_r \times (\mathrm{F}_r \cap \mathrm{C}_r)$ est dense dans Λ_r.

a) $r = 0$.

L'égalité $\Delta(e_{pq}) = 4\pi^2(p^2/a^2 - q^2/b^2)e_{pq}$ montre que l'équation en X, $\Delta\mathrm{X} = e_{pq}$, a une solution :

$$\frac{e_{pq}}{4\pi^2(p^2/a^2 - q^2/b^2)} \quad (p,\ q \text{ non tous deux nuls}).$$

Si $\mathrm{P}(x, y) = \Sigma\Sigma a_{pq}.e_{pq}$, où les a_{pq} sont des constantes toutes nulles à l'exception d'un nombre fini d'entre elles, est un polynôme trigonométrique, il en résulte que l'équation en $\mathrm{X} : \Delta\mathrm{X} = \mathrm{P}(x, y) - a_{00}$, admet la solution :

$$\mathrm{X} = \Sigma\Sigma \frac{a_{pq}.e_{pq}}{4\pi^2(p^2/a^2 - q^2/b^2)}.$$

Or, l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense sur Λ_0 au sens de la convergence uniforme; il l'est donc à fortiori au sens de la convergence faible. Comme un élément de cet ensemble peut s'écrire, comme on vient de le voir, $\Delta\mathrm{X} + a_{00} = \delta(d\mathrm{X}) + a_{00} \in \mathrm{C}_0 \times \mathrm{H}_0$, il en résulte que $\mathrm{C}_0 \cap \mathrm{H}_0$ est dense dans Λ_0.

b) $r = 2$.

Si $\ast U$ désigne l'ensemble des formes adjointes des formes de l'ensemble U, on a évidemment :

$$\ast C_0 = h_2, \qquad \ast H_0 = H_2, \qquad \ast \Lambda_0 = \Lambda_2.$$

La densité de C_0 et H_0 dans Λ_0 entraîne donc celle de $h_2 \times H_2$ dans Λ_2 puisque :

$$x_i \rightharpoonup x \Longrightarrow \ast x_i \rightharpoonup \ast x.$$

c) $p = 1$.

Posons $\omega_0 = \{\Delta X;\ X \in \Lambda_0\}$. On a vu que $\omega_0 \times H_0$ est dense dans Λ_0. Mais Λ_1 est isomorphe à $\Lambda_0 \times \Lambda_0$ dans l'application $\varphi_\alpha \to (\varphi_1, \varphi_2)$, puisqu'il existe sur T^2 un système de coordonnées global. Par suite :

$$(1) \qquad (\omega_0 \times H_0) \times (\omega_0 \times H_0)$$

est dense dans Λ_1. Comme la métrique est pseudo-euclidienne, $\Delta(\varphi_\alpha) = (\Delta\varphi)_\alpha$, où φ_α est envisagé comme o-forme dans le membre de gauche. Par suite, si on pose $\omega_1 = \{\Delta\varphi;\ \varphi \in \Lambda_1\}$, on a : $\omega_1 = \omega_0 \times \omega_0$. D'autre part $H_0 \times H_0$ définit l'espace des vecteurs parallèles ($\nabla_\alpha \varphi_\beta = 0$) sur T^2, donc $H_0 \times H_0$ est isomorphiquement contenu dans H_1. La relation (1) montre donc que $\omega_1 \times H_1$ est dense dans Λ_1. Comme $\omega_1 \in h_1 \times c_1$, il en résulte que $h_1 \times c_1 \times H_1$ est dense dans Λ_1. Ce théorème établit l'existence de variétés faiblement de G. de Rham en métrique non elliptique. Nous allons établir l'existence de variétés fortement de G. de Rham en métrique non elliptique.

Lemme (7, III). — *Pour les variétés V_2 compactes, orientables, munies d'une métrique $g_{\alpha\beta}$ C^∞, le théorème de forte décomposition est équivalent à l'énoncé suivant :*

L'équation $\Delta_2 X = f$ est résoluble en X si et seulement si $\int_{V_2} f . d\sigma = 0$. En notant X et f des fonctions définies sur V_2, $d\sigma$ l'élément d'aire de V_2 dans la métrique $g_{\alpha\beta}$.

Démonstration. — Il est clair que $\int_{V_2} f . d\sigma = 0$ est une condition nécessaire de résolution de l'équation en X : $\Delta_2 X = f$. Montrons que si V_2 est fortement de G. de Rham, cette condition est suffisante.

Le théorème de forte décomposition pour les 0-formes entraîne l'existence d'une 1-forme ν et d'une 0-forme r telles que : $f = \delta\nu + r$, $dr = 0$ (c'est-à-dire : $r =$ constante). Par intégration sur V_2, $\int_{V_2} f . d\sigma = 0$ et $\int_{V_2} \delta\nu . d\sigma = 0$ entraînent $\int_{V_2} r . d\sigma = r \cdot \int_{V_2} 1 . d\sigma = 0$, soit $r = 0$. On a donc :

$$f = \delta\nu.$$

Le théorème de forte décomposition pour les 1-formes entraîne l'existence d'une 0-forme A et d'une 1-forme γ telles que : $\nu = dA + \gamma$, $\delta\gamma = 0$. Par suite $f = \delta\, dA$. La fonction $-$ A est donc solution de $\Delta_2 X = -\delta\, dX = f$.

Réciproquement, montrons que la possibilité de résoudre en X l'équation $\Delta_2 X = f$, lorsque $\int_{V_2} f . d\sigma = 0$, entraîne le théorème de forte décomposition.

a) *o-formes.*

Soit s une 0-forme. Déterminons une constante r par la condition $\int_{V_2} (s - r)\, d\sigma = 0$. L'équation en X, $s - r = \Delta_2 X$, admet par hypothèse une solution A et, en posant $\nu = -dA$, on a bien : $s = \delta\nu + r$, $dr = 0$.

b) *2-formes.*

Il s'agit de montrer que pour toute 2-forme u on peut trouver une 1-forme β et une 2 forme t telles que :

$$u = d\beta + t, \qquad \delta t = 0.$$

Or, $\ast u$ est une 0-forme. D'après ce qui précède, on sait trouver une 1-forme ν et une 0-forme r telles que :

$$\ast u = \delta\nu + r, \qquad dr = 0.$$

De la définition $\delta\nu = \ast^{-1} . d . \ast\nu$, on tire, en posant $\beta = -(\ast\nu)$:

$$\ast u = -\ast^{-1}\, d\beta + r.$$

Mais $\ast\ast u = -u$; d'autre part, si on pose $t = -\ast r$, on a :

$$\delta t = -\delta\ast r = \ast^{-1}\, dr = 0, \qquad \text{car} \qquad dr = 0.$$

Donc :

$$u = d\beta + t, \qquad \delta t = 0.$$

c) 1-*formes.*

Il s'agit de montrer que pour toute 1-forme s on peut trouver une 0-forme β, une 2-forme ν et une 1-forme r, telles que :

$$s = d\beta + \delta\nu + r, \qquad dr = 0, \qquad \delta r = 0.$$

L'équation en X : $\delta s = \Delta_2 X$ est résoluble par hypothèse, puisque $\int_{V_2} \delta s \,.\, d\sigma = 0$. Si X_1 est une solution, posons $\beta = - X_1$, on a : $\delta s = \delta\, d\beta$ et $\gamma = s - d\beta$ est cofermée. Tout revient à chercher ν et r telles que : (1) $\gamma = \delta\nu + r$, $dr = 0$, puisque la condition $\delta r = 0$ est remplie.

Si Y_1 est solution de $d\gamma = d\delta Y$, il suffira de poser $\nu = Y_1$, $r = \gamma - \delta Y_1$, pour que (1) soit satisfaite. Montrons l'existence de Y_1, $\delta(\ast\gamma) = \Delta_2 Z$ a au moins une solution Z_1, puisque $\int_{V_2} \delta(\ast\gamma) . d\sigma = 0$. Posons $Y_1 = \overset{-1}{\ast} Z_1$, il vient :

$$\delta(\ast\gamma) = - \delta\, d(\ast y_1).$$

Pour les 1-formes : $-\ast\delta = d\ast$, donc $\delta(\ast\gamma) = \delta(\ast\delta y_1)$. Mais $\delta = (-1)^p \overset{-1}{\ast}\, d\ast$ et $\ast\ast = \varepsilon_g(-1)^p$ entraînent

$$\delta\ast = - \overset{-1}{\ast}\, d,$$

donc : $\overset{-1}{\ast}\, d\gamma = \overset{-1}{\ast}\, d\delta\, Y_1$, soit $d\gamma = d\delta\, Y_1$. Ainsi $Y_1 = \overset{-1}{\ast} Z_1$ est bien solution de $d\gamma = d\delta\, Y$.

THÉORÈME (11, III). — *Si, avec les notations du début de ce paragraphe,* $\left|\dfrac{g_{11}}{g_{22}}\right| = a^2/b^2$ *est un nombre algébrique* ([27]), T^2, *muni de la métrique pseudo-euclidienne* $g_{\alpha\beta}$, *est fortement de G. de Rham.*

Démonstration. — Soit f une fonction continue sur T^2 telle que $\int_{T^2} f\, dx\, dy = 0$. Elle définit une distribution sur T^2 et, si a_{pq} désignent ses coefficients de Fourier :

$$a_{pq} = \int_{T^2} f(x, y) e_p(x) e_q(y)\, dx_\Lambda\, dy,$$

on sait ([28]) que sa série de Fourier $\sum\limits_{p^2+q^2\neq 0} a_{pq} e_{pq}$ converge, dans

([27]) C'est-à-dire vérifiant une équation algébrique à coefficients entiers, de degré m.

l'espace $(\mathcal{D}')_{T^2}$ des distributions sur T^2, vers la distribution f. Il en résulte [28] que

$$\lim_{p^2+q^2\to\infty} \frac{a_{pq}}{(1 + p^2 + q^2)^K} = 0$$

pour K entier assez grand.

Ceci posé, considérons la série de Fourier

$$\sum_{|p|+|q|\neq 0} \frac{a_{pq} \cdot e_{pq}}{4\pi^2(p^2/a^2 - q^2/b^2)}; \tag{1}$$

Montrons qu'elle converge dans $(\mathcal{D}')_{T^2}$ vers une distribution X_1. D'après Schwartz, il suffit de montrer que ses coefficients sont à croissance lente. Formons

$$\frac{a_{pq}}{4\pi^2(p^2/a^2 - q^2/b^2)(1 + p^2 + q^2)^L}, \qquad \text{L entier} > K; \tag{2}$$

On peut l'écrire, en posant $L = K + N$:

$$\frac{a^2 . a_{pq}}{4\pi^2(1 + p^2 + q^2)^K} \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{p^2}{q^2} - \dfrac{a^2}{b^2}\right)(1 + p^2 + q^2)^N . q^2}. \tag{3}$$

Mais puisque a^2/b^2 est un nombre algébrique, il vérifie une équation de degré m et le théorème de Liouville donne :

$$\left|\frac{a^2}{b^2} - \frac{p^2}{q^2}\right| > \frac{1}{q^{2m+2}}.$$

Si on a pris dans (3) $N > m$, on voit donc que

$$\left|\frac{a_{pq}}{4\pi^2\left(\dfrac{p^2}{a^2} - \dfrac{q^2}{b^2}\right)(1 + p^2 + q^2)^L}\right| \leqslant \frac{a^2 . |a_{pq}|}{4\pi^2(1 + p^2 + q^2)^K} \to 0.$$

Ainsi, les coefficients de (1) sont à croissance lente et (1) définit une distribution X_1 dans $(\mathcal{D}')_{T^2}$. (1) Si f est C^2 cela entraîne que les dérivées de X^1 sont des mesures positives : ainsi, X^1 est de classe C^2.

Calculons ΔX_1 :

[28] L. Schwartz, p. 81, tome II [8].

Puisque la série (1) converge dans $(\mathcal{D}')_{T^2}$, on peut la dériver terme à terme [29] d'où :

$$\Delta X_1 = \sum_{|p|+|q|\neq 0} \frac{a_{pq}}{4\pi^2(p^2/a^2 - q^2/b^2)} \Delta e_{pq}.$$

Mais, dans la démonstration du théorème (10, III) on a déjà noté que

$$\Delta e_{pq} = 4\pi^2\left(\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2}\right)\cdot e_{pq},$$

$$\Delta X_1 = \sum_{|p|+|q|\neq 0} a_{pq}\,.\,e_{pq} \equiv f.$$

L'équation $\Delta X = f$ admet donc une solution dans $\mathcal{D}_{T^2}$ si $\int_{T^2} f\,dx\,dy = 0$. D'après le lemme (7, III) il en résulte que T^2 est fortement de G. de Rham.

Ce théorème démontre l'existence de V_2 fortement de G. de Rham.

THÉORÈME (12, III). — *Si, avec les notations du théorème* (11, III), a^2/b^2 *est un nombre de Liouville* [30], T^2 *muni de la métrique euclidienne* $g_{\alpha\beta}$ *est faiblement de G. de Rham sans l'être fortement.*

Démonstration. — Puisque a/b est irrationnel, d'après le théorème (10, III), T^2 est faiblement de G. de Rham. La démonstration du théorème précédent et la majoration de Liouville montrent que les coefficients de Fourier d'une éventuelle solution de $\Delta X = f$, pour f astreint seulement à

$$\int_{T^2} f\,.\,dx\,dy = 0,$$

ne peuvent être à croissance lente. Puisqu'il n'existe pas de solution dans $(\mathcal{D}')_{T^2}$, il n'en existe pas, à fortiori, dans $\mathcal{D}_{T^2}$.

Revenons aux variétés V_2 à deux dimensions, compactes orientables, les plus générales; c'est-à-dire munies d'une métrique hyperbolique normale pas nécessairement pseudo-euclidienne. Nous nous proposons de déterminer celles de ces variétés qui sont fortement de G. de Rham.

[29] L. Schwartz, p. 81, Tome II [8].
[30] Cf. par exemple : Valiron, *Théorie des fonctions*, tome I, p. 16 (Masson).

Lemme (8, III). — *Si* V_2, *munie de la métrique* $g_{\alpha\beta}$, *est fortement de G: de Rham, elle l'est encore dans la métrique*

$$\exp(r) \cdot g_{\alpha\beta},$$

où r est une fonction sur V_2.

Démonstration. — Affectons du signe — les éléments relatifs à la métrique

$$\exp(r) \cdot g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}.$$

En particulier

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = \exp(-r) \cdot g^{\alpha\beta},$$
$$h \equiv \text{Dét.}\,(h_{\alpha\beta}) = \exp.\,(2r) \cdot g.$$

Par suite :

$$(1) \qquad \bar{d\sigma} = \sqrt{|h|}\, dx^1\, dx^2 = \exp(r)\, d\sigma.$$

$$(2) \qquad \bar{\Delta}_2 X = \frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_\alpha[\sqrt{|h|}\, \bar{h}^{\alpha\beta} \partial_\beta X]$$
$$= \frac{\exp(-r)}{|g|^{\frac{1}{2}}} \partial_\alpha[\sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta} \partial_\beta X] = \exp(-r) \cdot \Delta_2 X.$$

D'après le lemme (7, III); il suffit de montrer que si

$$\int_{V_2} f \cdot \bar{d\sigma} = 0,$$

l'équation $\bar{\Delta}_2 X = f$ est résoluble. Mais, d'après (1) et (2), cela revient à montrer que $\Delta_2 X = \text{resp}\,(r).\,f$ est résoluble si $\int_{V_2} f \cdot \exp(r)\, d\sigma = 0$; ce qui résulte du fait que V_2, munie de la métrique $g_{\alpha\beta}$ est fortement de G. de Rham.

Théorème (13, III). — *Pour que la variété* V_2, *à deux dimensions, compacte, orientable, munie d'une métrique hyperbolique normale, soit fortement de G. de Rham, il faut et il suffit qu'elle soit globalement conforme à un tore pseudo-euclidien fortement de G. de Rham. En particulier, il faut que ses géodésiques isotropes ne soient pas fermées.*

Démonstration. — Conservons les notations du lemme précédent. Rapportons localement V_2, muni de la métrique $g_{\alpha\beta}$, à ses géodésiques isotropes. L'élément ds prend la forme

$$ds^2 = 2\, g_{12}\, du^1\, du^2,$$

et le scalaire de courbure [31]

$$K = -\frac{1}{g_{12}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} \operatorname{Log}(g_{12}).$$

Dans la métrique exp. $(r) . g_{\alpha\beta}$, les géodésiques isotropes sont les mêmes et le scalaire de courbure est donné par

$$\overline{K} = -\frac{1}{\exp. (r) . g_{12}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} \operatorname{Log}[\exp. (r) g_{12} \\ = \exp. (-r)\left[K - \frac{1}{g_{12}} \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} r\right].$$

Mais, dans le système d'axes envisagés :

$$|g|^{\frac{1}{2}} = |g_{12}|, \qquad g^{12} . g_{12} = 1,$$

d'où

$$\Delta_2 r = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha [\sqrt{|g|}\, g_{\alpha\beta} \partial_\beta r] = \frac{2}{g_{12}} \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} r.$$

Finalement :

(1) $$\overline{K} = \exp(-r)\left[K - \frac{1}{2} \Delta_2(r)\right].$$

La caractéristique $\chi(V_2)$ est nulle, la formule de Gauss-Bonnet donne donc : $\int_{V_2} K\, d\sigma = 0$. Par suite, si V_2, muni de $g_{\alpha\beta}$, est fortement de G. de Rham il existe (lemme 7, III) une fonction r telle que : $\Delta_2 r = 2\, K$. La formule (1) montre que $\overline{K} = 0$. La métrique exp. $(r) . g_{\alpha\beta}$ est donc pseudo-euclidienne et, d'après le lemme précédent, V_2 munie de cette métrique est fortement de G. de Rham.

Réciproque immédiate.

En particulier, si V_2 est fortement de G. de Rham, elle est faiblement de G. de Rham et, d'après le théorème (10, III), les géodésiques isotropes, communes aux métriques $g_{\alpha\beta}$ et exp. $(r) g_{\alpha\beta}$, ne peuvent être fermées.

En résumé, il semble que les variétés faiblement de G. de Rham soient caractérisées par des propriétés globales de leur champ de « cônes » isotropes défini par $ds^2 = 0$.

[31] Par exemple : Eisenhart, *An introduction to differential geometry*, p. 155, Princeton University Press.

Le problème de leur détermination reste ouvert. Par contre, la détermination des variétés fortement de G. de Rham semble à peu près inaccessible dans l'état actuel de nos connaissances sur l'approximation des réels par des fractions. C'est pourquoi nous éviterons d'utiliser dans les applications l'hypothèse de forte décomposition. A ce titre, nous allons démontrer, sur un exemple, que l'hypothèse de forte décomposition n'est pas nécessaire pour démontrer l'existence d'une forme harmonique dans chaque classe d'homologie. On peut donc espérer améliorer le théorème (9, III).

THÉORÈME (14, III). — *Sur le tore pseudo-euclidien* T^2 *faiblement de G. de Rham, chaque classe d'homologie contient une forme harmonique.*

Démonstration. — a) 0-*formes.* — Toute constante sur T^2 définit une 0-forme harmonique. Par suite $F_0 = H_0$.

b) 2-*formes.* — La 2-forme éléments d'aire σ est à dérivée covariante nulle, elle définit donc une 2-forme harmonique. Si φ est une 2-forme, on peut trouver une constante k telle que $\int_{T^2}(\varphi - k\sigma) = 0$ (φ homologue à $k\sigma$).

c) 1-*formes.* — Si φ est une 1-forme fermée, il suffit de démontrer qu'il existe une 0-forme X telle que $\Delta X = \delta\varphi$. La 1-forme $\varphi - dX$ est homologue à φ et harmonique.

Désignons par U et V les composantes du vecteur φ dans le système de coordonnées canoniques sur T^2, U et V définissent deux distributions sur T^2, de séries de Fourier respectives : $U = \Sigma u_{pq}\, e_{pq}$, $V = \Sigma v_{pq}\, e_{pq}$. Ces séries convergent dans $(\mathcal{D}')_{T^2}$ et peuvent être dérivées termes à termes, donc :

$$\delta\varphi = - g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \varphi_\beta = \frac{v'_y}{b^2} - \frac{u'_x}{a^2},$$

soit

$$\delta\varphi = 2\pi i \Sigma\left[\frac{q v_{pq}}{b^2} - \frac{p u_{pq}}{a^2}\right] e_{pq} \tag{1}$$

puisque

$$\frac{\partial}{\partial y} e_{pq} = 2\pi i q \,.\, e_{pq}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} e_{pq} = 2\pi i p \,.\, e_{pq}.$$

Mais $d\varphi = 0$, c'est-à-dire $v'_x - u'_y = 0$;

donc

$$\Sigma[pv_{pq} - qu_{pq}]e_{pq} = 0$$

et, par suite

$$pv_{pq} - qu_{pq} = 0.$$

En particulier $u_{0q} = 0$. D'après (1), il vient

$$\delta\varphi = 2\pi i \sum_{p\neq 0}\left(\frac{q^2}{b^2} - \frac{p^2}{a^2}\right)\frac{u_{pq}}{p}\,.\,e_{pq}.$$

Ceci posé, considérons la série de Fourier

$$-\frac{i}{2\pi}\sum_{p\neq 0}\frac{u_{pq}}{p}e_{pq}.$$

Ses coefficients $\frac{u_{pq}}{p}$ sont à croissance lente, en même temps que les u_{pq}; elle converge donc dans $(\mathcal{D}')_{T^2}$. Elle converge même dans Λ_0 vers une fonction X, puisque ses coefficients sont majorés en module par ceux de $U \in \Lambda_0$. Le raisonnement de la fin du théorème (11, III) montre que $\Delta X = \varphi$.

6. — Applications.

THÉORÈME (15, III). — *Sur une variété V_n faiblement de G. de Rham, compacte, orientable, munie d'une métrique hyperbolique normale, la nullité d'une dérivée covariante d'ordre quelconque d'un tenseur entraîne la nullité de la dérivée première de ce tenseur* ([32]).

Démonstration. — Si φ est un tenseur arbitraire, en raisonnant par récurrence on voit qu'il suffit de démontrer que

$$\nabla\nabla\varphi = 0 \Longrightarrow \nabla\varphi = 0.$$

Supposons φ d'ordre 1 pour fixer les idées. De l'hypothèse :

$$(1) \qquad \nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi_\gamma = 0.$$

on tire par contraction avec φ^γ

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi^2 = \nabla_\alpha\varphi_\gamma\nabla_\beta\varphi^\gamma, \qquad \text{où} \qquad \varphi^2 = \varphi_\alpha\varphi^\alpha.$$

([32]) En métrique elliptique, voir Lichnérowicz [7], p. 4.

Il résulte de (1), en dérivant les deux membres de (2), que $\nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi^2$ est à dérivée covariante nulle. Le tenseur symétrique d'ordre deux $\nabla_\alpha \partial_\beta \varphi^2$ est donc de signature constante sur V_n. Puisque V_n est compacte, la fonction φ^2 atteint son maximum en $x_0 \in V_n$ et son minimum en $x_1 \in V_n$. Les signatures de $(\nabla_\alpha \partial_\beta \varphi^2) x_0$ et $(\nabla_\alpha \partial_\beta \varphi^2) x_1$ ne peuvent être les mêmes que si $\nabla_\alpha \partial_\beta \varphi^2 = 0$.

Le gradient $\partial_\beta \varphi^2$ définit donc un champ de vecteurs parallèles et s'annule au moins une fois; il est donc nul, et $\varphi^2 =$ constante.

Il résulte de (2) que

$$\nabla_\alpha \varphi_\gamma \nabla_\beta \varphi^\gamma = 0. \tag{3}$$

On pouvait remarquer que

$$\nabla_\sigma \nabla_\alpha \partial_\beta \varphi^2 = 0 \Longrightarrow \nabla_\sigma (\Delta \varphi^2) = 0 \Longrightarrow \Delta \varphi^2 = \text{constante}.$$

Cette dernière égalité entraîne $\Delta \varphi^2 = 0$ par intégration sur V_n. Puisque V_n est faiblement de G. de Rham, le théorème (5, III) entraîne $\varphi^2 =$ constante. Mais la première démonstration a l'avantage de ne pas supposer V_n de G. de Rham.

Si X^α et Y^β désignent deux vecteurs arbitraires (3), entraîne $X_\alpha \nabla^\alpha \varphi^\gamma .\ Y^\beta \nabla_\beta \varphi^\gamma = 0$. Cela montre que les vecteurs de la forme $X^\alpha \nabla_\alpha \varphi_\gamma$ sont orthogonaux entre eux et isotropes (faire $X^\alpha = Y^\alpha$).

Puisque la métrique est hyperbolique normale, ces vecteurs sont donc colinéaires à un même vecteur isotrope I_α. C'est-à-dire qu'il existe un vecteur V_α tel que :

$$\nabla_\alpha \varphi_\gamma = V_\alpha . I_\gamma. \tag{4}$$

Puisque $\nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi_\gamma = 0$, φ_γ est harmonique. D'après le théorème (5, III) il est donc fermé. Ainsi, $\nabla_\alpha \varphi_\gamma = \nabla_\gamma \varphi_\alpha$ et, avec (4), en remplaçant I_γ par un vecteur proportionnel :

$$\nabla_\alpha \varphi_\gamma = I_\alpha I_\gamma. \tag{5}$$

Les relations (1) et (5) :

$$\nabla_\beta I_\alpha . I_\gamma + \nabla_\beta I_\gamma . I_\alpha = 0. \tag{6}$$

Supposons $I_\alpha \neq 0$. En contractant par un vecteur X^α arbitraire, mais tel que $X^\alpha I_\alpha \neq 0$:

$$\nabla_\beta I_\gamma = -\frac{X^\alpha \nabla_\beta I_\alpha}{I^\alpha X_\alpha} \cdot I_\gamma.$$

Il existe donc un vecteur l_β tel que :

$$\nabla_\beta I_\gamma = l_\beta I_\gamma$$

en portant dans (6), il vient $l_\beta I_\alpha I_\gamma = 0$. Comme on a supposé $I_\alpha \neq 0$, $l_\beta = 0$ et ainsi : $\nabla_\beta I_\gamma = 0$ qui tient même si $I_\alpha = 0$.

Ceci posé, soit γ une géodésique de V_n, issue d'un point arbitraire x_0, orientée dans le temps et de vecteur unitaire tangent u^α, (5) donne :

$$u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \varphi_\beta = (u^\alpha I_\alpha)^2,$$

c'est-à-dire en désignant par s l'arc de γ :

$$\frac{d}{ds}(u^\beta \varphi_\beta) = (u^\alpha I_\alpha)^2.$$

Comme I_α est à dérivée covariante nulle $(u^\alpha I_\alpha)^2$ est constant le long de γ et, par intégration :

$$(u^\gamma \varphi_\gamma)_s - (u^\gamma \varphi_\gamma)_0 = (u^\alpha I_\alpha)^2 . s.$$

Si γ est fermée au sens de E. Cartan et de longueur l : $(u^\gamma \varphi_\gamma)l = (u^\gamma \varphi_\gamma)_0$, donc

$$u^\alpha I_\alpha = 0.$$

Si γ n'est pas fermée, puisque V_n est compacte $u^\gamma \varphi_\gamma$ est bornée sur la variété. Puisque s n'est pas borné, cela implique encore $u^\alpha I_\alpha = 0$. Ainsi, quel que soit $x_0 \in V_n$ et pour tout vecteur u_α temporel, unitaire, en ce point : $u^\alpha I_\alpha = 0$; donc $I_\alpha = 0$. L'égalité (5) montre alors que $\nabla_\alpha \varphi_\beta = 0$. Il est probable que ce théorème reste vrai si la signature de la métrique est quelconque et si V_n n'est pas de G. de Rham.

THÉORÈME (16, III). — *Sur une variété faiblement de G. de Rham* $V_n (n \neq 2)$, *compacte, orientable, à tenseur de Ricci* *nul, toute 1-forme définissant une transformation infinitésimale conforme est à dérivée covariante nulle* (1).

Démonstration. — Si la 1-forme ξ définit une transformation infinitésimale conforme de V_n, Lichnerowicz a démontré ([7], p. 129) la relation :

$$\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right)d\delta\xi = Q\xi$$

où l'opérateur Q est défini par : $\alpha_j \rightarrow 2\, R_{ij}{}^{\alpha i}$.

Si le tenseur de Ricci est nul il vient

$$\delta\, d\xi + 2\left(1 - \frac{2}{n}\right)d\delta\xi = 0.$$

Si $n \neq 2$ le coefficient de $d\delta\xi$ n'est pas nul et le théorème (5, III) entraîne $\delta\xi = 0$, $d\xi = 0$. Puisque $\delta\xi = 0$, ξ définit une isométrie et puisque $d\xi = 0$, $\nabla_\alpha\xi_\beta = 0$.

Théorème (17, III). — *Tout espace-temps extérieur stationnaire, compact, orientable et faiblement de G. de Rham est localement euclidien.*

Démonstration. — Puisque V_4 est stationnaire, il existe un champ de vecteurs de Killing ξ_α orientés dans le temps : $\xi^\alpha\xi_\alpha > 0$. Puisque V_4 est vide, $R_{\alpha\beta} = 0$. Du théorème précédent résulte $\nabla_\alpha\xi_\beta = 0$. Les identités de Bianchi entraînent alors $R_{\alpha\beta},_{\lambda\mu}\xi^\alpha = 0$. Puisque $R_{\alpha\beta} = 0$, cela n'est possible que si ξ^α est isotrope ou si $R_{\alpha\beta}\lambda_\mu = 0$ (Bel [3], p. 61). Par hypothèse $\xi^\alpha\xi_\alpha > 0$, donc $R_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$.

Le même théorème tient évidemment si V_4 est supposé conforme à un espace-temps stationnaire. Ce théorème débarrasse de leurs hypothèses topologiques des résultats de Lichnerowicz ([5], p. 44-47).

Théorème (18, III). — *Si V_n, $n \neq 2$, est une variété faiblement de G. de Rham, compacte, orientable, à courbure riemannienne scalaire R nulle, toute transformation infinitésimale conforme est une isométrie infinitésimale* ([33]).

([33]) En métrique elliptique ce théorème est dû à Lichnerowicz ([7], p. 134).

Démonstration. — Si la 1-forme ξ définit sur V_n une transformation infinitésimale conforme, Lichnerowicz a démontré ([7], p. 122) la relation :

$$\left(2 - \frac{2}{n}\right)\Delta\delta\xi = - \mathfrak{L}(\xi)R + \frac{2}{n} R\delta\xi.$$

Si, en particulier, $R = 0$; $\Delta\delta\xi = 0$.

Comme la variété est faiblement de G. de Rham, le théorème (5, III) entraîne $\delta\xi =$ constante. Mais $\int_{V_n} \delta\xi . dv = 0$, donc $\delta\xi = 0$ et ξ définit une isométrie infinitésimale.

Théorème (19, III). — *Tout espace-temps V_4 faiblement de G. de Rham, compact, orientable, décrivant un schéma électromagnétique pur et conforme à un espace-temps stationnaire, est stationnaire.*

Démonstration. — Puisque l'espace-temps est conforme à un espace-temps stationnaire (voir, pour la définition, [5], p. 44), il porte une 1-forme ξ orientée dans le temps et qui définit une transformation infinitésimale conforme. D'autre part, en schéma électromagnétique pur le tenseur de Ricci s'écrit :

$$R_{\alpha\beta} = x\left[\frac{1}{4} g_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\rho}F_{\beta}{}^{\rho}\right],$$

où x est une constante, F la 2-forme champ électromagnétique. Par contraction on tire $R = 0$. Le théorème précédent entraîne le résultat.

Il importerait de savoir dans quelle mesure on peut se libérer des hypothèses : « V_4 stationnaire », dans l'énoncé du théorème (17, III). On obtiendrait ainsi la proposition B de Lichnerowicz sous la seule condition que V_4 soit de G. de Rham.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Avez, Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété soit un espace d'Einstein, *C. R. Acad. Sci.*, 248, 1959.

[2] A. Avez, Théorie de Hodge de Rham en métriques de signature quelconque *C. R. Acad. Sci.*, 249, 1959 et 250, 1960.

[3] L. Bel, *La radiation gravitationnelle.* C.D.U. et S.E.D.E.S., 5, place de la Sorbonne, Paris, Ve.

[4] P. Bidal et G. de Rham, Les formes différentielles harmoniques, *Comm. Math. Helv.*, 19, 1946-1947.
[5] A. Lichnerowicz, *Problèmes globaux en mécanique relativiste.* Hermann, Paris, 1939.
[6] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holomonie*, Dunod, Paris.
[7] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris.
[8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, t. I et II, Hermann, Paris, 1951.
[9] N. Steenrod, The topology of fibre bundles. *Princeton mathematical séries*, 14.

(*Thèse*, *Fac. Sciences*, Paris, 1963.)