

FRANÇOIS TRÈVES

Équations aux dérivées partielles inhomogènes à coefficients constants dépendant de paramètres

Annales de l'institut Fourier, tome 13, n° 1 (1963), p. 123-138

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_1_123_0

© Annales de l'institut Fourier, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES INHOMOGÈNES À COEFFICIENTS CONSTANTS DÉPENDANT DE PARAMÈTRES

par François TRÈVES (New York) (*)

On considère un opérateur différentiel $P(\lambda, D_x)$ sur \mathbf{R}^n dont les coefficients sont constants par rapport au point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbf{R}^n mais sont des fonctions (complexes) C^∞ du point λ d'une variété $C^\infty \Lambda^{(1)}$. Ceci signifie que

$$P(\lambda, D_x) = \sum_{|p| \leq m(\lambda)} a_p(\lambda) D_x^p,$$

où

$$p = (p_1, \dots, p_n), |p| = p_1 + \dots + p_n, D_x^p = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{p_1} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{p_n};$$

$m(\lambda)$ est un entier ≥ 0 qui dépend de λ . Lorsque nous disons que les coefficients de $P(\lambda, D_x)$ sont des fonctions $C^k (0 \leq k \leq +\infty)$ de λ , nous sous-entendons que $m(\lambda)$ est *localement borné* dans Λ .

L'hypothèse essentielle dans le présent travail est la suivante :

(A) *Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il y a au moins un coefficient $a_p(\lambda)$ qui n'est pas nul.*

Ce qui peut s'exprimer aussi ainsi : le polynôme complexe $P(\lambda, \xi)$ sur \mathbf{R}^n ne s'annule identiquement pour aucune valeur de λ . Insistons sur le fait que le degré de $P(\lambda, \xi)$ peut varier avec λ .

(*) L'auteur a bénéficié, pour ce travail, d'une bourse de la Sloan Foundation.

(1) Par *variété* nous sous-entendons toujours ici une variété *paracompacte* et *séparée*.

Le résultat principal de cet article est que, sous l'hypothèse (A), sans autres conditions, pour un second membre $f(x, \lambda) \in C_{x,\lambda}^\infty$ quelconque, il existe toujours au moins une solution $u(x, \lambda) \in C_{x,\lambda}^\infty$ de l'équation

$$(1) \quad P(\lambda, D_x)u(x, \lambda) = f(x, \lambda).$$

Le Théorème 2 constitue un énoncé précis et général de ce fait. C'est une conséquence, d'une part de l'existence de solutions élémentaires $E(x, \lambda)$ de $P(\lambda, D_x)$, C^∞ en λ à valeurs dans l'espace \mathcal{D}'_x des distributions sur \mathbf{R}^n , existence prouvée dans Trèves [2], d'autre part d'une certaine propriété de supports (Théorème 1). Cette dernière généralise le fait bien connu que si $P(D_x)$ est un polynôme différentiel et ν une distribution à support compact sur \mathbf{R}^n , le support de ν et celui de $P(D_x)\nu$ ont même enveloppe convexe.

Nous concluons par quelques théorèmes d'existence de solutions de l'équation (1) pour d'autres espaces que $C_{x,\lambda}^\infty$. Supposons par exemple que Λ soit une variété C^k ($0 \leq k \leq \infty$) et que les coefficients $a_p(\lambda)$ de $P(\lambda, D_x)$ soient des fonctions C^k de λ . Sous la condition (A), pour toute $f(x, \lambda) \in C_\lambda^k(C_x^\infty)$, il existe $u(x, \lambda) \in C_\lambda^k(C_x^\infty)$ telle qu'on ait (1) (Théorème 4).

Revenons au cas où Λ est une variété C^∞ et les $a_p(\lambda)$ des fonctions C^∞ de λ . Outre à (A), faisons l'hypothèse que lorsque λ varie, les $P(\lambda, D_x)$ sont *également forts*. Alors, quelle que soit $f \in C_\lambda^\infty((L_{loc}^2)_x)$, il existe une solution $u \in C_\lambda^\infty((L_{loc}^2)_x)$ de (1) (Théorème 3). Dans cette situation, l'hypothèse *également forts* est essentiellement nécessaire (cf. Trèves [3]).

Tous les résultats établis ici sont de nature locale : il suffit de les prouver au voisinage d'un point arbitraire de Λ . Une partition de l'unité donne alors le résultat global. Nous pouvons donc, dans les démonstrations, supposer (a) Λ dénombrable à l'infini, (b) $m(\lambda) \leq m$, entier fixe. Les énoncés, par contre, sont valables dans le cas général.

§ I. Un théorème de supports.

THÉORÈME 1. — Soit $P(\lambda, D_x)$ un opérateur différentiel sur \mathbf{R}^n dont les coefficients, constants en x , sont des fonctions C^∞ du point λ d'une variété C^∞ Λ . Supposons que $P(\lambda, D_x)$ ne s'annule identiquement pour aucun $\lambda \in \Lambda$.

Soit $\nu(x, \lambda)$ une distribution sur $\mathbf{R}^n \times \Lambda$ dont le support se projette sur \mathbf{R}^n suivant un compact. Soit $C \subset \mathbf{R}^n$ compact convexe, $F \subset \Lambda$ fermé. Alors :

$$\text{supp. } P(\lambda, D_x)\nu(x, \lambda) \subset C \times F \implies \text{supp. } \nu(x, \lambda) \subset C \times F \text{ (}^1\text{)}.$$

Preuve du Théorème 1 lorsque $n = 1$.

Dans le cas $n = 1$, nous écrirons

$$P(\lambda, D_x) = \sum_{j=0}^m a_j(\lambda) D_x^j, \quad D_x = d/dx, x \in \mathbf{R}^1.$$

Posons

$$(I-1) \quad \mu(x, \lambda) = P(\lambda, D_x)\nu(x, \lambda).$$

Nous voulons prouver que si μ a son support dans

$$H_t = \{(x, \lambda) \in \mathbf{R}^1 \times \Lambda \mid x \leq t\}, \quad t \text{ réel,}$$

la même chose est vraie de ν . En fait, par une translation en x , nous pouvons supposer $t = 0$. D'autre part, en appliquant aux deux membres de (I-1),

$$\overline{P}(\lambda, D_x) = \sum_{j=0}^m \overline{a_j(\lambda)} D_x^j,$$

nous pouvons supposer que les coefficients $a_j(\lambda)$ sont réels.

Soit d'autre part $f(\lambda) \in C_0^\infty(\Lambda)$; (I-1) implique

$$f(\lambda)\mu(x, \lambda) = P(\lambda, D_x)[f(\lambda)\nu(x, \lambda)].$$

Il suffit de prouver que tout point $\lambda^0 \in \Lambda$ a un voisinage ouvert $V(\lambda^0)$ tel que le résultat soit vrai pour $f(\lambda)\nu(x, \lambda)$ au lieu de $\nu(x, \lambda)$ lorsque $\text{supp } f \subset V(\lambda^0)$. Car ensuite une partition de l'unité dans $C_0^\infty(\Lambda)$ donne le résultat général.

Prenons $V(\lambda^0)$ assez petit pour que le vecteur de \mathbf{R}^{m+1}

$$a(\lambda) = (a_0(\lambda), a_1(\lambda), \dots, a_m(\lambda))$$

reste dans une boule fermée de $\mathbf{R}^{m+1} - \{0\}$ et que l'on puisse trouver $\xi \in \mathbf{R}^1$ tel que

$$\left| P(\lambda, \xi) \right| = \left| \sum_{j=0}^m a_j(\lambda) \xi^j \right| \geq c > 0$$

(¹) Nous notons *supp.* T le support de la distribution T.

pour tout $\lambda \in V(\lambda^0)$. Ainsi choisi, $V(\lambda^0)$ sera désormais noté Ω .
Posons

$$\begin{aligned} \nu_1(x, \lambda) &= e^{-\xi x} f(\lambda) \nu(x, \lambda), \\ \mu_1(x, \lambda) &= e^{-\xi x} f(\lambda) \nu(x, \lambda). \end{aligned}$$

On a :

$$P(\lambda, D_x + \xi) \nu_1(x, \lambda) = \mu_1(x, \lambda).$$

Si nous écrivons

$$P(\lambda, D_x + \xi) = \sum_{j=0}^m b_j(\lambda) D_x^j,$$

nous constatons immédiatement que $|b_0(\lambda)| \geq c > 0$ pour tout $\lambda \in \Omega$. En posant $\mu_2(x, \lambda) = b_0^{-1}(\lambda) \mu_1(x, \lambda)$ et

$$Q(\lambda, D_x) = \sum_{j=0}^m b_j(\lambda) b_0^{-1}(\lambda) D_x^j,$$

nous obtenons

$$(I-2) \quad Q(\lambda, D_x) \nu_1(x, \lambda) = \mu_2(x, \lambda).$$

Soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ le point de \mathbf{R}^m . Considérons l'opérateur différentiel sur \mathbf{R}^1 dépendant de γ :

$$\mathcal{Q}_m(\gamma, D_x) = \sum_{j=1}^m \gamma_j D_x^j + 1.$$

Nous appellerons $\gamma(\lambda)$ l'application $\Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ définie par $\gamma_j(\lambda) = b_j(\lambda) b_0^{-1}(\lambda)$, $j = 1, \dots, m$; $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ est C^∞ . On a :

$$Q(\lambda, D_x) = \mathcal{Q}_m(\gamma(\lambda), D_x), \quad \lambda \in \Omega.$$

Définissons une application linéaire J des distributions à support compact sur $\mathbf{R}^1 \times \Omega$ dans celles à support compact sur $\mathbf{R}^1 \times \Omega \times \mathbf{R}^m$ par

$$\int (Ju)(x, \lambda, \gamma) \varphi(x, \lambda, \gamma) dx d\lambda d\gamma = \int u(x, \lambda) \varphi(x, \lambda, \gamma(\lambda)) dx d\lambda$$

où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1 \times \Omega \times \mathbf{R}^m)$. Prouvons d'abord que Ju est vraiment à support compact. Soit $\gamma(\Omega) \subset \mathbf{R}^m$ l'image de Ω par $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$. Nous savons que $\gamma(\Omega)$ est borné. Soit alors $F(\gamma) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, $F(\gamma) \equiv 1$ pour γ dans un voisinage de $\overline{\gamma(\Omega)}$. Prenons

$$\varphi(x, \lambda, \gamma) = (1 - F(\gamma)) \psi(x, \lambda, \gamma)$$

pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1 \times \Omega \times \mathbf{R}^m)$ arbitraire. On a évidemment $\int (Ju)(x, \lambda, \gamma) \varphi(x, \lambda, \gamma) dx d\lambda d\gamma = 0$, ce qui prouve que $\text{supp. } Ju \subset \text{supp. } u \times \gamma(\Omega)$.

Il est équivalent de dire que $\text{supp. } u \subset H_0$ ou que $\text{supp. } Ju \subset \tilde{H}_0 = \{(x, \lambda, \gamma) | x \leq 0\}$: $\text{supp. } u \subset H_0 \implies \text{supp. } Ju \subset \tilde{H}_0$ est trivial. Inversement, supposons que $\text{supp. } u \not\subset H_0$. Il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1 \times \Omega)$, $\text{supp. } \chi \subset \{(x, \lambda) | x > 0\}$ telle que

$$\int Ju(x, \lambda, \gamma) \chi(x, \lambda) 1(\gamma) dx d\lambda d\gamma = \int u(x, \lambda) \chi(x, \lambda) dx d\lambda \neq 0,$$

où $1(\gamma) \equiv 1$ pour tous $\gamma \in \mathbf{R}^m$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int (Ju)(x, \lambda, \gamma) \mathcal{Q}_m(\gamma, -D_x) \varphi(x, \lambda, \gamma) dx d\lambda d\gamma \\ = \int u(x, \lambda) Q(\lambda, -D_x) \varphi(x, \lambda, \gamma(\lambda)) dx d\lambda. \end{aligned}$$

Il suit alors de (I-2) que

$$\mathcal{Q}_m(\gamma, D_x) (Jv_1)(x, \lambda, \gamma) = (J\mu_2)(x, \lambda, \gamma).$$

Ceci prouve qu'il suffit de démontrer que si

$$\tilde{\mu}(x, \lambda, \gamma) = \mathcal{Q}_m(\gamma, D_x) \tilde{v}(x, \lambda, \gamma)$$

a son support dans $\tilde{H}_0 = \{(x, \lambda, \gamma) \in \mathbf{R}^1 \times \Omega \times \mathbf{R}^m | x \leq 0\}$, alors $\text{supp. } \tilde{v}(x, \lambda, \gamma) \subset \tilde{H}_0$. Nous raisonnerons par récurrence sur $m = 0, 1, \dots$; le résultat est trivial pour $m = 0$. Nous le supposons vrai pour $m - 1$.

D'après le Théorème 2.1 of Trèves [1], il existe une fonction $C^\infty \gamma \rightarrow E(x, \gamma)$ de l'ouvert

$$\mathcal{O} = \{\gamma \in \mathbf{R}^m | \gamma_m \neq 0\}$$

dans \mathcal{D}'_x telle que $\mathcal{Q}_m(\gamma, D_x) E(x, \gamma) = \delta_x$ pour tout $\gamma \in \mathcal{O}$. En outre $E(x, \gamma)$ a l'importante propriété suivante : si \mathcal{O}_1 est une boule ouverte non vide telle que $\overline{\mathcal{O}_1} \subset \mathcal{O}$, il existe un ouvert U du plan complexe, contenant les deux demi-droites ouvertes $\{\text{Re } x > 0, \text{Im } x = 0\}$, $\{\text{Re } x < 0, \text{Im } x = 0\}$, tel que $E(x, \gamma)$ puisse se prolonger en une fonction holomorphe de $x \in U$ et que $\gamma \rightarrow E(x, \gamma)$ soit une fonction C^∞ de $\gamma \in \mathcal{O}_1$ dans l'espace des fonctions holomorphes dans U . La raison essentielle de ces propriétés réside dans ce que, lorsque γ varie dans $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, les

opérateurs différentiels $\mathcal{Q}_m(\gamma, D_x)$ sont elliptiques et « uniformément » également forts.

Comme $\tilde{v}(x, \lambda, \gamma) = E(x, \gamma) * \tilde{\mu}(x, \lambda, \gamma)$, il résulte d'un argument classique (voir Schwartz [2]), que pour toute $\varphi(\lambda, \gamma) \in C_0^\infty(\Omega \times \mathcal{O})$,

$$\int \tilde{v}(x, \lambda, \gamma) \varphi(\lambda, \gamma) d\lambda d\gamma$$

est une fonction analytique de $x > 0$. Comme cette fonction est nulle pour $x > 0$ grand, elle est nulle pour tout $x > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\alpha(x) = 0$ pour $x > \varepsilon$, $\alpha(x) = 1$ pour $x < \varepsilon/2$. Posons

$$\rho(x, \lambda, \gamma) = [1 - \alpha(x)] \tilde{v}(x, \lambda, \gamma).$$

Dans l'ouvert $\{(x, \lambda, \gamma) | \gamma_m \neq 0\}$, $\rho(x, \lambda, \gamma) = 0$;

i.e. $\text{supp. } \rho \subset N = \{(x, \lambda, \gamma) | \gamma_m = 0\}$.

D'autre part,

$$\mathcal{Q}_m(\gamma, D_x) \rho(x, \lambda, \gamma) = [1 - \alpha(x)] \tilde{\mu}(x, \lambda, \gamma) + \sigma(x, \lambda, \gamma),$$

où

$$\sigma(x, \lambda, \gamma) = - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \alpha^{(k)}(x) \mathcal{Q}_m^{(k)}(\gamma, D_x) \rho(x, \lambda, \gamma);$$

$\mathcal{Q}_m^{(k)}(\gamma, \xi) = \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \mathcal{Q}_m(\gamma, \xi)$. Comme $[1 - \alpha(x)] \tilde{\mu}(x, \lambda, \gamma) \equiv 0$

nous avons :

$$(I-3) \quad \mathcal{Q}_m(\gamma, D_x) \rho = \sigma.$$

Mais $\text{supp. } \sigma \subset \tilde{H}_\varepsilon = \{(x, \lambda, \gamma) | x \leq \varepsilon\}$. Comme $\text{supp. } \rho \subset N$, on a aussi $\text{supp. } \sigma \subset N$. Toute distribution T sur $\mathbf{R}^1 \times \Omega \times \mathbf{R}^m$, à support compact $\subset N$, peut s'écrire :

$$T = \sum_{j=0}^N T_j(x, \lambda, \gamma') \delta^{(j)}(\gamma_m)$$

où $\gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$, les $T_j(x, \lambda, \gamma')$ étant des distributions à support compact dans $\mathbf{R}^1 \times \Omega \times \mathbf{R}^{m-1}$. Voir Schwartz, [1], 1^{re} éd., Th. XXXVII, Ch. III. On a donc

$$\rho = \sum_{j=0}^r \rho_j(x, \lambda, \gamma') \delta^{(j)}(\gamma_m), \quad \sigma = \sum_{k=0}^s \sigma_k(x, \lambda, \gamma') \delta^{(k)}(\gamma_m).$$

Un raisonnement simple montre que pour tout $k = 0, \dots, s$ $\text{supp. } \sigma_k(x, \lambda, \gamma') \subset \tilde{H}'_\varepsilon = \{(x, \lambda, \gamma') \in \mathbf{R}^1 \times \Omega \times \mathbf{R}^{m-1} | x \leq \varepsilon\}$. Tenons maintenant compte de (I-3) et de ce que

$$\mathcal{Q}_m(\gamma, D_x) = \gamma_m D_x^m + \mathcal{Q}_{m-1}(\gamma', D_x).$$

On obtient :

$$(I-4) \quad \mathcal{Q}_{m-1}(\gamma', D_x)\rho_r = \sigma_r$$

$$(I-5) \quad \mathcal{Q}_{m-1}(\gamma', D_x)\rho_j = (j + 1)D_x^m \rho_{j+1} + \sigma_j$$

pour $j = r - 1, r - 2, \dots, 1, 0$. De (I-4) et de la récurrence en m on déduit que $\text{supp. } \rho_r \subset \tilde{H}'_\varepsilon$; de (I-5), par récurrence descendante sur $j \leq r - 1$, on déduit $\text{supp. } \rho_j \subset \tilde{H}'_\varepsilon$ pour tout $j = 0, \dots, r$. Il s'ensuit que $\text{supp. } \rho \subset \tilde{H}_\varepsilon$, donc que

$$\text{supp. } \tilde{\nu} \subset \text{supp. } \rho + \text{supp. } \alpha \subset \tilde{H}_\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci signifie que $\text{supp. } \tilde{\nu} \subset \tilde{H}_0$.

Preuve du théorème 1 lorsque n est arbitraire.

Nous pouvons écrire

$$P(\lambda, D_x) = \sum_{|p| \leq m} a_p(\lambda) D_x^p$$

où $p = (p_1, \dots, p_n)$, p_j : entiers ≥ 0 , $|p| = p_1 + \dots + p_n$, $D_x^p = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}$. Soit d le nombre de n -uplets p tels que $|p| \leq m$. En raisonnant comme dans le cas $n = 1$, nous pouvons supposer que les $a_p(\lambda)$ sont réels. Par hypothèse, $\lambda \rightarrow a(\lambda) = (a_p(\lambda))$ est une fonction C^∞ de Λ dans $\mathbf{R}^d - \{0\}$. Il suffit de démontrer le résultat pour $G(\lambda)\nu(x, \lambda)$ et $G(\lambda)\mu(x, \lambda)$ au lieu de $\nu(x, \lambda)$, $\mu(x, \lambda)$ respectivement lorsque $G(\lambda) \in C^\infty_\sigma(\Lambda)$, a son support dans un voisinage convenable Ω d'un point $\lambda^0 \in \Lambda$ (et est par ailleurs arbitraire). En faisant ensuite varier λ^0 et en utilisant une partition de l'unité dans $C^\infty_\sigma(\Lambda)$, on obtient le résultat global. Nous commencerons par imposer à Ω la condition que son image par $\lambda \rightarrow a(\lambda)$ soit contenue dans une boule ouverte \mathfrak{B} de $\mathbf{R}^d - \{0\}$ centrée en $a(\lambda^0)$.

Faisons une transformation de Fourier partielle par rapport à x_2, \dots, x_n . En posant $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$, $P(\lambda, D_x)$ devient

$$P(\lambda, D_1, \xi') = \sum_{k=0}^m A_k(a(\lambda), \xi') D_1^k, \quad D_1 = d/i dx_1.$$

Posons $N(\xi') = \{a = (a_p) \in \mathbf{R}^d \mid A_k(a, \xi') = 0, k = 0, \dots, m\}$.

Manifestement $N(\xi')$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^d . Appelons $\mathcal{N}(\xi)$ l'hyperplan de \mathbf{R}^d défini par

$$\sum_{k=0}^m A_k(a, \xi') \xi_1^k = 0.$$

Il existe évidemment $\xi^0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $\mathcal{N}(\xi^0)$ ne passe pas par le point $a(\lambda^0) \in \mathbf{R}^d - \{0\}$. Par continuité, nous pouvons donc choisir la boule \mathcal{B} et par conséquent Ω assez petits pour qu'il existe un ouvert non vide $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ tel que

$$\xi \in \mathcal{O} \implies \mathcal{N}(\xi) \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

En fixant arbitrairement ξ_1 de telle sorte que

$$\mathcal{O}' = \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \mid (\xi_1, \xi') \in \mathcal{O}\}$$

soit non vide, on voit que si $\xi = (\xi_1, \xi')$, $\xi' \in \mathcal{O}'$, $\mathcal{N}(\xi) \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Mais évidemment $N(\xi') \subset \mathcal{N}(\xi)$.

Nous parvenons ainsi à la conclusion suivante :

Pour $\lambda \in \Omega$ et $\xi \in \mathcal{O}'$, l'opérateur différentiel sur la droite $P(\lambda, D_1, \xi')$ a toujours au moins un coefficient non nul.

Soit alors $H_1(t) = \{(x, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \Omega \mid x_1 \leq t\}$. Supposons que $\text{supp. } P(\lambda, D_x) \nu(x, \lambda) \subset H_1(t)$. Si nous appelons $\hat{\nu}(x_1, \xi', \lambda)$ la transformée de Fourier partielle de $\nu(x, \lambda)$ par rapport à (x_2, \dots, x_n) , on aura

$$\begin{aligned} \text{supp. } P(\lambda, D_1, \xi') \hat{\nu}(x_1, \xi', \lambda) &\subset H_1(t) \\ &= \{(x_1, \xi', \lambda) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^{n-1} \times \Omega \mid x_1 \leq t\}. \end{aligned}$$

Appliquons le Théorème pour $n = 1$ à $P(\lambda, D_1, \xi')$, $\lambda \in \Omega$, $\xi' \in \mathcal{O}'$. Si nous appelons $\hat{\nu}'(x_1, \xi', \lambda)$ la restriction de $\hat{\nu}(x_1, \xi', \lambda)$ à $\mathbf{R}^1 \times \mathcal{O}' \times \Omega \subset \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^{n-1} \times \Omega$, nous concluons que

$$\text{supp. } \hat{\nu}'(x_1, \xi', \lambda) \subset \{(x_1, \xi', \lambda) \in \mathbf{R}^1 \times \mathcal{O}' \times \Omega \mid x_1 \leq t\}.$$

En d'autres termes, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ avec

$$\text{supp. } \varphi \subset \{x_1 \in \mathbf{R}^1 \mid x_1 < 0\}$$

et toute $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$F(\xi') = \int \hat{\nu}(x_1, \xi', \lambda) \varphi(x_1) \psi(\lambda) dx_1 d\lambda = 0$$

si $\xi' \in \mathcal{O}'$. Mais d'après le théorème de Paley-Wiener, $F(\xi')$

est une fonction analytique de ξ' dans tout \mathbf{R}^{n-1} , donc est identiquement nulle. Il en résulte aussitôt que

$$\text{supp. } \hat{v}(x_1, \xi', \lambda) \subset H_1(t)$$

et donc que $\text{supp. } v(x, \lambda) \subset H_1(t)$.

Par changement affine des variables x_1, \dots, x_n , lesquels n'affectent visiblement pas les hypothèses sur les coefficients de $P(\lambda, D_x)$, on conclut que quel que soit le demi-espace H de \mathbf{R}^n , $\text{supp. } P(\lambda, D_x)v(x, \lambda) \subset H \times F \implies \text{supp. } v(x, \lambda) \subset H \times F$.
C.Q.F.D.

§ II. Quelques théorèmes d'existence.

THÉORÈME 2. — Soit un opérateur différentiel $P(\lambda, D_x)$ sur \mathbf{R}^n dont les coefficients, constants en x , sont des fonctions C^∞ de $\lambda \in \Lambda$ et ne s'annulent simultanément pour aucune valeur de λ .

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \Lambda$ dont toutes les coupes parallèles à \mathbf{R}^n sont convexes. Alors, quelle que soit la fonction $f(x, \lambda) \in C^\infty(\Omega)$, il existe $u(x, \lambda) \in C^\infty(\Omega)$ telle que

$$P(\lambda, D_x)u(x, \lambda) = f(x, \lambda).$$

Que les coupes de Ω parallèles à \mathbf{R}^n soient convexes signifie que pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\Omega(\lambda) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x, \lambda) \in \Omega\}$$

est convexe (éventuellement vide).

Preuve du Théorème 2.

On munit $C^\infty(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de toutes leurs dérivées sur les sous-ensembles compacts de Ω . L'espace ainsi obtenu est un Fréchet, noté $\mathcal{E}(\Omega)$. Son dual est l'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$ des distributions à support compact sur Ω . Selon une propriété bien connue des espaces de Fréchet, pour prouver que $P(\lambda, D_x)\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$, il faut et il suffit de prouver que la transposée de l'application $\varphi \rightarrow P(\lambda, D_x)\varphi$ de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans lui-même, est une application biunivoque, à image faiblement fermée, de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans lui-même. Cette transposée est

$$v \rightarrow P(\lambda, -D_x)v, \quad v \in \mathcal{E}'(\Omega).$$

La biunivocité de $P(\lambda, -D_x)$ résulte trivialement du Théorème 1 appliqué à $P(\lambda, -D_x)$. Pour prouver que

$$P(\lambda, -D_x)\mathcal{E}'(\Omega)$$

est faiblement fermé dans $\mathcal{E}'(\Omega)$, il suffit de prouver que quel que soit le compact $\mathfrak{K} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$

$$P(\lambda, -D_x)\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathfrak{K} \quad \text{est fermé dans } \mathfrak{K}.$$

Soit $\mu_i = P(\lambda, -D_x)v_i$ un filtre dans $P(\lambda, -D_x)\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathfrak{K}$ convergeant vers μ dans \mathfrak{K} . Nous appliquons alors le Théorème 1 de Trèves [2]: il existe une fonction C^∞ de λ à valeurs dans \mathcal{D}'_x , $F(x, \lambda)$, telle que, pour chaque λ , $P(\lambda, -D_x)F(x, \lambda) = \delta_x$. Ainsi

$$v_i(x, \lambda) = F(x, \lambda)_{(x)}^* \mu_i(x, \lambda).$$

Il en résulte que les v_i convergent vers une distribution ν sur $\mathbf{R}^n \times \Lambda$; on a évidemment $\mu = P(\lambda, -D_x)\nu$. Reste à montrer que $\text{supp. } \nu$ est compact et $\subset \Omega$.

Comme \mathfrak{K} est un compact de $\mathcal{E}'(\Omega)$, il existe un sous-ensemble compact H de Ω tel que $\text{supp. } \mu_i \subset H$ pour tout i . Posons

$$H(\lambda) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x, \lambda) \in H\}.$$

Bien entendu, $H(\lambda) \subset \Omega(\lambda)$. Mais il y a plus. Soit λ^0 un point arbitraire de Λ ; supposons que $\Omega(\lambda^0) \neq \emptyset$. Il existe alors un voisinage $U(\lambda^0)$ de λ^0 tel que la fermeture K de $\bigcup_{\lambda \in U(\lambda^0)} H(\lambda)$ soit contenue dans l'intérieur Ω' de $\bigcap_{\lambda \in U(\lambda^0)} \Omega(\lambda)$. Soit alors $g(\lambda) \in C_0^\infty(\Lambda)$, $F = \text{supp. } g(\lambda) \subset U(\lambda^0)$, $g(\lambda) \equiv 1$ sur un voisinage de λ^0 . On a, pour tout i ,

$$\text{supp. } g(\lambda)\mu_i(x, \lambda) \subset K \times F.$$

Mais Ω' est un ouvert convexe. Donc l'enveloppe convexe \hat{K} de K est contenu dans \mathbf{R}^n , et donc $\hat{K} \times F \subset \Omega$. En vertu du Théorème 1, nous devons avoir, pour tout i ,

$$\text{supp. } g(\lambda)v_i(x, \lambda) \subset \hat{K} \times F,$$

et donc aussi $\text{supp. } g(\lambda)\nu(x, \lambda) \subset \hat{K} \times F \subset \Omega$. (II-1)

Soit d'autre part A la projection sur Λ de $H \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n \times \Lambda$.

Bien entendu Λ est compact et le support de ν se projette sur Λ dans A . Par une partition de l'unité dans $C_0^\infty(\Lambda)$ et en utilisant (II-1), on conclut bien que $\text{supp. } \nu(x, \lambda)$ est compact et $\subset \Omega$.

REMARQUE II-1. — Lorsqu'on dispose de renseignements supplémentaires sur les opérateurs différentiels $P(\lambda, D_x)$, on pourra, dans certains cas, affaiblir les conditions sur l'ouvert Ω . Bornons-nous à donner un exemple extrême: supposons que, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $P(\lambda, D_x)$ soit *elliptique* et que lorsque λ varie, les $P(\lambda, D_x)$ ont le même degré. Alors il est facile de voir que l'on peut prendre pour Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n \times \Lambda$.

REMARQUE II-2. — La déduction du Théorème 2 à partir du Théorème 1 suit pas à pas (avec les modifications imposées par la présence du paramètre λ) la méthode de Malgrange [1].

REMARQUE II-3. — Il suit du Théorème 2 que, sous les mêmes hypothèses, $P(\lambda, -D_x) \mathcal{E}'_{x,\lambda}(\Omega)$ est *fermé* dans $\mathcal{E}'_{x,\lambda}(\Omega)$.

Nous allons maintenant considérer le cas où Ω est un « cylindre » $\Omega_0 \times \Lambda$ avec Ω_0 : ouvert de \mathbb{R}^n .

Notons, comme d'habitude, $L^2_{loc}(\Omega_0)$ l'espace des (classes) de fonctions (complexes), définies et localement de carré sommable dans Ω_0 . Nous munissons $L^2_{loc}(\Omega_0)$ des semi-normes

$$f \rightarrow \left(\int_K |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

où K parcourt l'ensemble des compacts de Ω_0 . Le dual de $L^2_{loc}(\Omega_0)$ est l'espace $L^2_c(\Omega_0)$ des fonctions $\in L^2(\Omega_0)$ à support compact $\subset \Omega_0$. Nous munirons $L^2_c(\Omega_0)$ de la topologie de dual fort de $L^2_{loc}(\Omega_0)$. Noter que $L^2_{loc}(\Omega_0)$ est un Fréchet réflexif et que $\mathcal{E}(\Omega_0)$ est plongé continûment et dense dans $L^2_{loc}(\Omega_0)$. Il s'ensuit que $L^2_c(\Omega_0)$ est plongé continûment dans $\mathcal{E}'(\Omega_0)$ (espace des distributions à support compact dans Ω_0).

Nous noterons $\mathcal{E}_\lambda(L^2_{loc}(\Omega_0))$ l'espace des fonctions C^∞ de $\lambda \in \Lambda$ à valeurs dans $L^2_{loc}(\Omega_0)$ muni de sa topologie C^∞ naturelle. Bien entendu, $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Omega_0 \times \Lambda)$ est plongé continûment et dense dans $\mathcal{E}_\lambda(L^2_{loc}(\Omega_0))$. Le dual de ce dernier espace fonctionnel sera noté $\mathcal{E}'_\lambda(L^2_c(\Omega_0))$ et muni de la topologie de dual fort:

il est plongé continûment dans $\mathcal{E}'_{x,\lambda}(\Omega_0 \times \Lambda)$. Ceci dit, nous allons prouver le résultat suivant en nous inspirant des raisonnements de Malgrange [1].

THÉORÈME 3. — *Mêmes hypothèses sur $P(\lambda, D_x)$ que pour le Théorème 2. On suppose en outre que lorsque λ varie dans Λ , les opérateurs $P(\lambda, D_x)$ sont également forts.*

Alors, si Ω_0 est convexe,

$$P(\lambda, D_x)\mathcal{E}_\lambda(L^2_{\text{loc}}(\Omega_0)) \supset \mathcal{E}_\lambda(L^2_{\text{loc}}(\Omega_0)).$$

Soit $\mathcal{G} = \{f(x, \lambda) \in \mathcal{E}_\lambda(L^2_{\text{loc}}(\Omega_0)) \mid P(\lambda, D_x)f(x, \lambda) \in \mathcal{E}_\lambda(L^2_{\text{loc}}(\Omega_0))\}$. On munit \mathcal{G} de la topologie la plus faible rendant continues les applications $f \rightarrow f$ et $f \rightarrow P(\lambda, D_x)f$ de \mathcal{G} dans $\mathcal{E}_\lambda(L^2_{\text{loc}}(\Omega_0))$; \mathcal{G} est alors un espace de Fréchet. Comme $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Omega_0 \times \Lambda)$ est plongé continûment et dense dans \mathcal{G} , le dual \mathcal{G}' de \mathcal{G} peut être identifié à un sous-espace de $\mathcal{E}'_{x,\lambda}(\Omega_0 \times \Lambda)$, précisément celui formé par les distributions T qui peuvent s'écrire

$$(II-2) \quad T = S_1 + P(\lambda, -D_x)S_2$$

avec $S_1, S_2 \in \mathcal{E}'_\lambda(L^2_c(\Omega_0))$. Nous voulons montrer que

$$P(\lambda, D_x)\mathcal{G} = \mathcal{E}_\lambda(L^2_{\text{loc}}(\Omega_0)).$$

Il suffit de prouver que l'application $T \rightarrow P(\lambda, -D_x)T$ de $\mathcal{E}'_\lambda(L^2_c(\Omega_0))$ dans \mathcal{G}' est biunivoque et que son image est fermée. La biunivocité est triviale puisque $P(\lambda, -D_x)$ opérant sur $\mathcal{E}'_\lambda(\Omega \times \Lambda)$ est biunivoque.

La fermeture Φ de $P(\lambda, -D_x)\mathcal{E}'_\lambda(L^2_c(\Omega_0))$ dans \mathcal{G}' est contenue dans la fermeture de $P(\lambda, -D_x)\mathcal{E}'_\lambda(L^2_c(\Omega_0))$ dans $\mathcal{E}'_{x,\lambda}(\Omega_0 \times \Lambda)$, donc dans $P(\lambda, -D_x)\mathcal{E}'_{x,\lambda}(\Omega_0 \times \Lambda)$ d'après la Remarque II-3. Nous concluons que pour tout $T \in \Phi$, il existe $S \in \mathcal{E}'_{x,\lambda}(\Omega_0 \times \Lambda)$ tel que $T = P(\lambda, -D_x)S$. En utilisant (II-2) nous voyons que

$$P(\lambda, -D_x)(S - S_2) = S_1.$$

Mais d'après le Théorème 1 de Trèves [2], il existe une fonction C^∞ de $\lambda \in \Lambda$ dans $\mathcal{D}'_x(\mathbb{R}^n)$, $F(x, \lambda)$, qui jouit des propriétés suivantes :

- i) pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $P(\lambda, -D_x)F(x, \lambda) = \delta_x$;
- ii) $\lambda \rightarrow F(x, \lambda)_{(x)}$ est une application C^∞ de Λ dans l'espace $\mathcal{L}(L^2_c(\mathbb{R}^n); L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$ des opérateurs bornés de $L^2_c(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Puisque $S_1 \in \mathcal{E}'_\lambda(L_c^2(\Omega_0)) \subset \mathcal{E}'_\lambda(L_c^2(\mathbf{R}^n))$, il est facile de voir que $F(x, \lambda)_{(x)}^* S_1(x, \lambda) \in \mathcal{E}'_\lambda(L_{loc}^2(\mathbf{R}^n))$. Comme

$$S_2 \in \mathcal{E}'_\lambda(L_c^2(\Omega_0)) \subset \mathcal{E}'_\lambda(L_{loc}^2(\mathbf{R}^n)),$$

on en déduit

$$S = S_2 + F_{(x)}^* S_1 \in \mathcal{E}'_\lambda(L_{loc}^2(\mathbf{R}^n)).$$

Mais $\mathcal{E}'_{x, \lambda}(\Omega_0 \times \Lambda) \cap \mathcal{E}'_\lambda(L_{loc}^2(\mathbf{R}^n)) = \mathcal{E}'_\lambda(L_c^2(\Omega_0))$.

REMARQUE II-4. — La conclusion du Théorème 3 exige essentiellement que les $P(\lambda, D_x)$ soient également forts : ceci résulte aisément du Théorème 1 de Trèves [3].

Revenons au cas général, où les $P(\lambda, D_x)$ ne sont pas nécessairement également forts, l'hypothèse (A) restant toutefois valable. Introduisons les espaces $H_{loc}^s(\Omega_0)$, $H_c^s(\Omega_0)$, s réel quelconque. Concernant ces espaces, voir par exemple Malgrange [2], où ils sont respectivement notés $\mathcal{L}^s(\Omega_0)$, $\mathcal{K}^s(\Omega_0)$.

Nous noterons $\mathcal{E}_\lambda(\mathcal{D}_x^F(\Omega_0))$ l'espace des fonctions C^∞ de λ dans $\mathcal{D}'_x(\Omega_0)$, $f(x, \lambda)$, qui ont la propriété suivante :

(F) *Pour tout opérateur différentiel D_λ sur Λ et tout ouvert relativement compact $U \subset \Lambda$, il existe s réel tel que $D_\lambda f(x, \lambda)$ soit une fonction continue de $\lambda \in U$ à valeurs dans $H_{loc}^s(\Omega_0)$.*

On peut alors prouver que si Ω_0 est convexe,

$$P(\lambda, D_x)\mathcal{E}_\lambda(\mathcal{D}_x^F(\Omega_0)) = \mathcal{E}_\lambda(\mathcal{D}_x^F(\Omega_0)).$$

Nous nous bornerons à donner quelques indications succinctes sur la preuve.

Étant donnée une fonction réelle croissante $\omega(k)$ définie sur les entiers ≥ 0 , notons $\mathcal{E}_\lambda(\omega; H_{loc}^s(\Omega_0))$ le sous-espace de $\mathcal{E}_\lambda(\mathcal{D}_x^F(\Omega_0))$ constitué des fonctions $f(x, \lambda)$ qui ont la propriété suivante : pour tout entier $k \geq 0$ et tout opérateur différentiel D_λ sur Λ d'ordre $\leq k$, $D_\lambda f(x, \lambda)$ est une fonction continue de $\lambda \in \Lambda$ à valeurs dans $H_{loc}^{s-\omega(k)}(\Omega_0)$. Lorsque ω et s varient de toutes les façons possibles (s peut même rester fixe), la réunion des espaces $\mathcal{E}_\lambda(\omega; H_{loc}^s(\Omega_0))$ forme un espace vectoriel qui ne coïncide en général pas avec $\mathcal{E}_\lambda(\mathcal{D}_x^F(\Omega_0))$, mais qui coïncide *localement* (dans Λ) avec cet espace : étant donnée $f(x, \lambda) \in \mathcal{E}_\lambda(\mathcal{D}_x^F(\Omega_0))$ arbitraire, pour chaque ouvert relativement compact $U \subset \Lambda$, il existe ω et s , et une fonction

$$\tilde{f}(x, \lambda) \in \mathcal{E}_\lambda(\omega; H_{loc}^s(\Omega_0))$$

telle que $f = \tilde{f}$ sur U . Comme nous pouvons toujours localiser la situation et recoller ensuite les morceaux par une partition de l'unité dans Λ , il suffira donc de prouver ceci :

Étant donnée ω , il existe ω_1 telle que

$$P(\lambda, D_x)\mathcal{E}_\lambda(\omega_1; H_{loc}^s(\Omega_0)) \supset \mathcal{E}_\lambda(\omega; H_{loc}^s(\Omega_0)).$$

Pour établir ceci on raisonne comme dans la preuve du Théorème 3, en faisant usage du dual de $\mathcal{E}_\lambda(\omega; H_{loc}^s(\Omega))$ (1). Nous n'entrerons pas dans les détails : il est facile de caractériser ce dual en se basant sur le fait que $H_c^{-s}(\Omega_0)$ est le dual de $H_{loc}^s(\Omega_0)$.

Mais dans la situation présente, nous ne disposons pas d'une solution élémentaire $F(x, \lambda)$ de $P(\lambda, -D_x)$ qui ait des propriétés aussi fortes que dans le cas où les $P(\lambda, D_x)$ sont également forts. Cependant, si on se réfère à la démonstration du Théorème 1 de Trèves [2], on voit que l'on peut néanmoins faire en sorte que $F(x, \lambda)$ ait la propriété suivante :

Il existe un entier $N \geq 0$ tel que, quel que soit l'entier $k \geq 0$ et l'opérateur différentiel D_λ sur Λ d'ordre $\leq k$, pour tout réel σ , l'opérateur de convolution $D_\lambda F(x, \lambda)^*$ est une fonction continue de λ à valeur dans l'espace $\mathcal{L}(H_c^\sigma; H_{loc}^{\sigma-kN})$ des opérateurs bornés de H_c^σ dans $H_{loc}^{\sigma-kN}$. En utilisant ce fait, on peut facilement construire ω_1 à partir de ω et de N .

Passons maintenant à une situation quelque peu différente.

THÉORÈME 4. — Soit Λ une variété C^k ($0 \leq k < +\infty$), $P(\lambda, D_x)$ un opérateur différentiel sur \mathbf{R}^n dont les coefficients, constants en x , sont des fonctions C^k de $\lambda \in \Lambda$ et ne s'annulent simultanément pour aucune valeur de λ .

Soit Ω_0 un ouvert convexe de \mathbf{R}^n . Quelle que soit la fonction $f(x, \lambda) \in C_\lambda^k(C_x^\infty(\Omega_0))$, il existe $u(x, \lambda) \in C_\lambda^k(C_x^\infty(\Omega_0))$ telle que

$$P(\lambda, D_x)u(x, \lambda) = f(x, \lambda).$$

Pour simplifier, nous omettrons la mention (Ω_0) . En vertu de Schwartz [3], Proposition 12 (p. 113), on a

$$C_\lambda^k(C_x^\infty) = C_x^\infty \widehat{\otimes} C_\lambda^k.$$

(1) Muni de sa topologie naturelle.

Mais C_x^∞ est un espace nucléaire (voir Grothendieck [1], Ch. II), donc $C_x^\infty \widehat{\otimes} C_\lambda^k = C_x^\infty \widehat{\otimes}_\pi C_\lambda^k$. Nous supposons, pour les besoins de la preuve, que Λ est dénombrable à l'infini. Dans ce cas, C_λ^k est un Fréchet, tout comme C_x^∞ . Nous pouvons donc appliquer le théorème fondamental du produit tensoriel π de deux Fréchets (Grothendieck [1], Ch. I, § 2, Théorème 1) : toute fonction $\varphi(x, \lambda) \in C_x^\infty \widehat{\otimes}_\pi C_\lambda^k$ peut s'écrire

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) \psi_j(\lambda),$$

où $\{\varphi_j(x)\}$ est une suite convergeant vers 0 dans C_x^∞ et $\sum_j \psi_j(\lambda)$ converge dans C_λ^k .

Considérons maintenant l'opérateur « général » d'ordre m

$$\mathfrak{F}(A, D_x) = \sum_{|p| \leq m} A_p D_x, \quad A_p \in \mathbf{C}.$$

Nous définissons $A = (A_p) \in \mathbf{C}^d$ (pour d , voir p. 7) et $\lambda \rightarrow A(\lambda) = (A_p(\lambda))$ est une application C^k de Λ dans $\mathbf{C}^d - \{0\}$. En vertu du Théorème 2, nous savons que

$$\mathfrak{F}(A, D_x) C_{x, A}^\infty = C_{x, A}^\infty,$$

A étant ici la variable dans $\mathbf{C}^d - \{0\}$. Mais $C_{x, A}^\infty$ est un espace de Fréchet et d'après l'égalité ci-dessus, $\mathfrak{F}(A, D_x)$ est un homomorphisme de $C_{x, A}^\infty$ sur lui-même. Par conséquent, toute suite convergente se relève en une suite convergente. En particulier, il existe une suite $\{u_j(x, A)\}$ ($j = 1, 2, \dots$), convergeant vers 0 dans $C_{x, A}^\infty$, telle que

$$\mathfrak{F}(A, D_x) u_j(x, A) = \varphi_j(x)$$

pour chaque j . Posons $\gamma_j(x, \lambda) = u_j(x, A(\lambda))$. Il est facile de vérifier que $\{\gamma_j(x, \lambda)\}$ est une suite qui converge vers 0 dans $C_\lambda^k(C_x^\infty)$. Il s'ensuit aussitôt que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(x, \lambda) \psi_j(\lambda)$$

converge dans $C_\lambda^k \widehat{\otimes}_\pi C_\lambda^k = C_\lambda^k(C_x^\infty)$; soit $\chi(x, \lambda)$ sa somme. On a évidemment $P(\lambda, D_x) \chi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)$.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Mémoires Amer. Math. Soc.*, N° 16 (1955).
 - [1] B. MALGRANGE, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 6 (1955-1956), p. 271.
 - [2] B. MALGRANGE, Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques. *Bull. Soc. Math. France*, 85, (1957), p. 283.
 - [1] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, Paris.
 - [2] L. SCHWARTZ, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Année 1954-1955, *I.H.P.*, Paris.
 - [3] L. SCHWARTZ, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. *Journ. Anal.*, Jérusalem (1954-1955), IV, p. 88.
 - [1] F. TRÈVES, Opérateurs différentiels hypoelliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, 9, (1959), p. 1.
 - [2] F. TRÈVES, Fundamental solutions of linear partial differential equations with constant coefficients depending on parameters, *Amer. J. of Math.* (1963).
 - [3] F. TRÈVES, Un théorème sur les équations aux dérivées partielles dépendant de paramètres, *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), p. 473.
-