JACQUES-LOUIS LIONS
E. MAGENES

Problèmes aux limites non homogènes. II

Annales de l'institut Fourier, tome 11 (1961), p. 137-178
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__137_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 137-178.

PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES (II)

par **J.L. Lions** (Nancy) **et E. Magenes** (Pavia).

INTRODUCTION

Cet article fait suite à l'article [16], mais nous avons divisé nos résultats de façon que ces deux articles puissent être lus indépendamment. D'autres articles suivront, conformément au programme indiqué dans l'introduction de [16].

Si $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A$ désigne un opérateur elliptique d'ordre $2m$ dans un ouvert Ω de R^n (dans des articles ultérieurs de cette série, nous étudierons les problèmes analogues relatifs à des opérateurs non elliptiques) on appelle problème aux limites non homogène la recherche de u, situé dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$, vérifiant (*) $Au = f$, f donné dans un autre espace fonctionnel $\mathcal{G}$, avec les conditions aux limites (**) $B_j u = \varphi_j$, $j = 0, \ldots, m-1$, les B_j étant des opérateurs différentiels (convenables) sur la frontière Γ de Ω; les φ_j doivent être pris dans des espaces fonctionnels convenables, $\mathcal{E}_j$.

Voici grosso modo la méthode suivie :

1) Si l'on prend $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = L^2(\Omega)$ (fonctions de carré sommable sur Ω) la méthode de prolongement des opérateurs non bornés (ou la méthode des projections) conduit naturellement à la résolution de problèmes du type (*), (**), avec $\varphi_j = 0$ (cas homogène), et u étant dans $\mathcal{F}_0$, dont les éléments vérifient en particulier la condition $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour tout $|p| \leqslant m$. On passe ensuite au cas non homogène à l'aide de

théorèmes de trace. Puis l'on peut trouver d'autres classes $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{C}\}$ à l'aide de théorèmes de régularité;

2) par transposition, on peut déduire de 1) de nouvelles classes $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_{1,j}\}$ où le problème (*), (**) est bien posé;

3) par utilisation de la théorie de l'interpolation, on en déduit des classes « intermédiaires » $\{\mathcal{F}_\theta, \mathcal{G}_\theta, \mathcal{C}_{\theta,j}\}$ où le problème (*), (**) est également bien posé.

Dans les étapes 1), 2) les espaces $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{j,1,j}$ font intervenir des dérivées fractionnaires; si donc, comme il est raisonnable, on veut considérer les problèmes (*), (**), avec des φ_j donnés dans des classes définies à l'aide des dérivations usuelles, il est utile (si l'on veut obtenir les meilleurs résultats possibles) de considérer l'étape 3), qui fournit (entre autres) des classes $\mathcal{C}_{\theta,j}$ définies par des propriétés portant sur les dérivées usuelles des φ_j (les classes $\mathcal{F}_\theta$ et $\mathcal{G}_\theta$ faisant alors intervenir des dérivations fractionnaires).

Ainsi, à tout résultat du type 1) correspond une théorie assez générale des problèmes non homogènes; on part ici des résultats de régularité dans les problèmes aux limites elliptiques faisant intervenir toutes les dérivées (alors que dans l'article (I) (cf. [16]) nous partions de résultats de régularité « partielle », par rapport à certaines variables privilégiées). L'étape 2) nécessite la mise au point de théorèmes de traces (N^{os} 2 à 5), les applications étant faites aux N^{os} 6 à 8; l'étape 3) occupe les N^{os} 9 à 11. Le N^{o} 12 considère d'autres problèmes aux limites et le N^{o} 13 donne une première application à des problèmes non elliptiques. [Cf. aussi [16 bis].]

L'article (III) de cette série paraîtra aux *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa.*

TABLE DES MATIÈRES

I. — PRÉLIMINAIRES

On désigne par Ω un ouvert de R^n, de point générique $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On supposera que Ω est borné, de frontière Γ une variété indéfiniment différentiable de dimension $n - 1$ (il suffirait pour toute la suite que Γ soit « assez » différentiable), Ω étant d'un seul côté de Γ.

On utilisera les espaces suivants (pour détails on pourra consulter : [24] et [4], [11], [15], [16], [18]). L'espace des fonctions de carré sommable sur Ω (pour $dx = dx_1 \ldots dx_n$) étant désigné par $L^2(\Omega)$, on désigne par $H^m(\Omega)$, m entier > 0, l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour $|p| \leqslant m$, les dérivées étant prises au sens des distributions sur l'ouvert Ω (cf. [21]). Muni de la norme

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|p| \leqslant m} ||D^p u||^2\Big)^{1/2}, \quad \text{où} \quad ||f|| = \Big(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2},$$

$H^m(\Omega)$ est *un espace de Hilbert.* Notons que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

On désigne par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ du sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω. On peut caractériser $H_0^m(\Omega)$ comme le sous-espace de $H^m(\Omega)$ formé des fonctions « nulles » sur Γ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m - 1$ [pour un énoncé précis, cf. Proposition 1. 2, (ii)].

A l'aide de systèmes de cartes locales, il n'y a pas de difficulté à définir de façon analogue les espaces $H^m(\Gamma)$ (cf. [19]); si par exemple Ω est l'ouvert $\{x_n > 0\}$, alors $\Gamma = \{x_n = 0\} \simeq R^{n-1}$ et $H^m(\Gamma) \simeq H^m(R^{n-1})$; on se ramène, dans le cas général, au cas précédent; lorsque Γ est bornée, il n'y a pas de difficulté. Comme Γ est « sans bord », l'espace $\mathcal{D}(\Gamma)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Γ est dense dans $H^m(\Gamma)$; donc $H_0^m(\Gamma) = H^m(\Gamma)$.

Toujours pour m entier > 0, on définit $H^{-m}(\Omega)$ [resp. $H^{-m}(\Gamma)$] comme le dual fort de $H_0^m(\Omega)$ [resp. de $H^m(\Gamma)$]; c'est un espace de distributions sur Ω (resp. Γ) (ces espaces ont été introduits dans [22]).

On a donc déjà défini $H^s(\Omega)$ et $H^s(\Gamma)$ pour *s entier* de signe quelconque. On aura besoin dans la suite de ces espaces pour *s réel* quelconque. On va en donner brièvement une définition utilisant l'interpolation des espaces de Hilbert [15 *bis*]. Si E et F sont deux espaces de Hilbert, $F \subset E$, F étant dense dans E, l'injection de F dans E étant continue, alors F est le domaine d'un opérateur auto-adjoint (non borné et non unique) strictement positif, soit B ($B = \Lambda^{1/2}$ dans les notations de [16]); on définit alors $F^{1-\theta}E^{\theta}$ comme le domaine de $B^{1-\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Donc

$$F^{1-\theta}E^{\theta} = D(B^{1-\theta}),$$

avec le produit scalaire $(B^{1-\theta}u, B^{1-\theta}v)_E$, ce qui fait de $F^{1-\theta}E^{\theta}$ un espace de Hilbert; pour $\theta = 0$ (resp. 1) on retrouve F (resp. E). Ces espaces ont la propriété d'interpolation que voici: *soit* $\{F_1, E_1\}$ *un deuxième couple d'espaces de Hilbert ayant des propriétés analogues à celles du couple* $\{F, E\}$. *Soit* M *un opérateur linéaire continu de* E *dans* E_1 (soit μ_1 sa norme) *et également de* F *dans* F_1 (soit μ_0 sa norme); *alors* M *est un opérateur linéaire continu de* $F^{1-\theta}E^{\theta}$ *dans* $F_1^{1-\theta}E_1^{\theta}$ (sa norme μ_θ étant alors $\leqslant \mu_0^{1-\theta}\mu_1^{\theta}$), *pour chaque* $\theta \in]0, 1[$. Cf. [15 *bis*], et aussi [2], [7], [10]; d'autres espaces (et dans un certain sens « tous ») ayant la propriété précédente, ont été déterminés dans [6].

On pose maintenant la

Définition 1. 1. — Pour m entier > 0 (et Ω ouvert borné de frontière Γ indéfiniment différentiable de dimension $n - 1$) on pose

$$(1.\ 1) \qquad H^{(1-\theta)m}(\Omega) = (H^m(\Omega))^{1-\theta}(H^0(\Omega))^{\theta},$$

ce qui définit $H^s(\Omega)$ pour s réel $\geqslant 0$ [1].

Cette définition a besoin d'être justifiée pour (au moins) deux raisons: *a*) pour $(1 - \theta)m = q$ *entier* $\in [0, m]$, il faut que (1. 1) redonne l'espace $H^q(\Omega)$ introduit précédemment; *b*) si $\Omega = R^n$ on définit naturellement $H^s(R^n)$, pour tout s réel,

[1] Une autre définition équivalente a été donnée par Aronszajn [2], [2 *bis*].

comme l'espace des distributions u tempérées [21] dont la transformée de Fourier $\hat{u}$ vérifie

$$(1.\ 2) \qquad (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(R^n);$$

alors, dans le cas $\Omega = R^n$, (1. 1) doit redonner la définition précédente avec $s = (1 - \theta)m$.

La justification est fournie par la

Proposition 1. 1. — *L'ouvert Ω étant borné de frontière Γ indéfiniment différentiable,* $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ *coïncide avec l'espace des restrictions à Ω des éléments de* $H^{(1-\theta)m}(R^n)$ [défini par (1. 2) avec $s = (1 - \theta)m$].

Démonstration. — 1) Dans le cas $\Omega = R^n$ on vérifie la coïncidence de la définition (1. 1) avec (1. 2), $s = (1 - \theta)m$, en remontant à la définition de $F^{1-\theta}E^{\theta}$. (Cf. [16], Proposition 9. 1).

2) Soit r l'opérateur (restriction) qui à une distribution u sur R^n fait correspondre sa restriction ru à Ω. Alors r est un opérateur linéaire continu de $H^0(R^n)$ dans $H^0(\Omega)$ et de $H^m(R^n)$ dans $H^m(\Omega)$ donc d'après le théorème d'interpolation (avec $M = r$), d'après 1), et d'après la définition 1. 1, r est un opérateur linéaire continu de $H^{(1-\theta)m}(R^n)$ dans $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$. Donc $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ est *toujours* (i.e. quel que soit Ω) contenu dans l'espace des restrictions à Ω des éléments de $H^{(1-\theta)m}(R^n)$.

3) Montrons maintenant l'inclusion inverse. Sous les hypothèses de la Proposition, il existe [3 *ter*] un opérateur linéaire P (prolongement) continu de $H^q(\Omega)$ dans $H^q(R^n)$, q entier $\in [0, m]$, tel que $Pu = u$ p.p. sur Ω pour $u \in H^q(\Omega)$. Appliquant le théorème d'interpolation à $M = P$, on voit que P est un opérateur linéaire continu de $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ dans $H^{(1-\theta)m}(R^n)$ d'où l'inclusion inverse.

Remarque 1. 1. — La démonstration précédente montre que la Proposition 1. 1 est vraie si Ω a la propriété de m-prolongement, *i. e.* : il existe un opérateur P ayant la propriété utilisée dans 3). Le résultat de la Proposition 1. 1 est inexact sans aucune hypothèse sur Ω : soit en effet Ω un ouvert de R^n, borné, tel que l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $H^0(\Omega)$ soit compacte, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $H^0(\Omega)$ n'étant pas compacte (de tels ouverts existent; Gagliardo, non publié). Or, de façon générale si l'injection de F dans E est compacte, il en est de même de l'injection de $F^{1-\theta}E^{\theta}$ dans E, pour $\theta < 1$. Donc l'injection de $(H^2(\Omega))^{1/2}(H^0(\Omega))^{1/2}$ dans $H^0(\Omega)$ est compacte, de sorte que cet espace est *strictement* contenu dans $H^1(\Omega)$.

On a donc, sous les hypothèses de la Proposition 1. 1, défini $H^s(\Omega)$ pour s réel > 0. On définit ensuite $H_0^s(\Omega)$ comme l'adhérence dans $H^s(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, et enfin $H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))'$, dual fort de $H_0^s(\Omega)$.

On montre alors la propriété générale que voici :

$$(1.\,3)\quad \begin{cases}(H^{\alpha}(\Omega))^{1-\theta}(H^{\beta}(\Omega))^{\theta} = H^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}(\Omega), & \text{pour } \alpha \text{ et } \beta \\ \quad \text{réels quelconques } (\geqslant 0 \text{ ou } < 0).\end{cases}$$

Même chose pour $H^s(\Gamma)$, s réel quelconque. Ceci permet d'énoncer le résultat suivant, fondamental pour la suite (ce résultat a été trouvé par un grand nombre d'auteurs (2); c'est un cas particulier d'un résultat de [23], lui-même cas particulier de [13]). Avant d'énoncer le résultat, rappelons encore que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$) est dense dans $H^m(\Omega)$. Alors

Proposition 1. 2. — *Soit m entier >0. Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, posons* $\gamma_j u = \dfrac{\partial^j}{\partial n^j} u$ (dérivée normale sur Γ d'ordre j, n désignant le vecteur unitaire normal à Γ et dirigé vers l'intérieur), *et* $\gamma u = \{\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\}$.

L'application $u \to \gamma u$ définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \to \gamma u$, *de* $H^m(\Omega)$ *dans* $\prod_{j=0}^{j=m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. *En outre*

(i) *l'application $u \to \gamma u$ est surjective;*

(ii) *le noyau de γ est* $H_0^m(\Omega)$ (3).

(2) Cf. [2 *bis*], [3 *quarto*], [11], [19 *bis*].

(3) Par interpolation on en déduit que γ est une application linéaire continue de $H^s(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{s-j-1/2}(\Gamma)$, pour $s \geqslant m$. Cette démonstration est correcte si l'on démontre le théorème d'interpolation à l'aide des méthodes de fonctions de variable complexe; c'est illusoire si l'on utilise la démonstration de [15 *bis*] qui repose sur un théorème de traces plus général.

Introduisons maintenant les opérateurs différentiels que nous utiliserons dans la suite. Pour u, $v \in H^m(\Omega)$ on pose

$$(1.\ 4)\qquad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m} \int_\Omega a_{pq}(x) D^q u \overline{D^p v}\, dx,$$

où l'on suppose que a_{pq} est indéfiniment différentiable dans $\overline{\Omega}$ (là aussi on pourrait raffiner !). On définit ainsi une forme sesquilinéaire continue sur $H^m(\Omega)$. Comme dans [16] nous supposerons que

$$(1.\ 5)\qquad |a(u, u)| \geqslant c\|u\|^2_{H^m(\Omega)}, \qquad c > 0, \qquad u \in H^m_0(\Omega)\ (^4)$$

La forme $a(u, v)$ définit l'opérateur différentiel

$$(1.\ 6)\qquad A = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x)\, D^q).$$

La forme adjointe $a^*(u, v)$ est définie par

$$(1.\ 7)\qquad a^*(u, v) = \overline{a(v, u)},$$

l'opérateur A^* correspondant étant

$$(1.\ 8)\qquad A^* = A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p(\overline{a_{qp}} D^q).$$

Nous utiliserons *les formules de Green* que voici : de façon générale, on pose :

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Alors, pour u, $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$,

$$(1.\ 9)\qquad (Au, v) = a(u, v) + \sum_{j=0}^{j=m-1} \int_\Gamma S_j u \overline{\gamma_j v}\, d\sigma,$$

$$(1.\ 10)\qquad (A^* u, v) = a^*(u, v) + \sum_{j=0}^{j=m-1} \int_\Gamma T_j u \overline{\gamma_j v}\, d\sigma,$$

où les S_j et T_j sont des opérateurs différentiels d'ordre $2m - j - 1$, à coefficients indéfiniment différentiables (et $d\sigma$ désignant l'élément d'aire sur Γ). Plus précisément ([3], [20 *bis*]) :

$$(1.\ 11)\qquad S_j = b_j \gamma_{2m-j-1} + \sum_{k=2}^{k=2m-j} S_j^k \gamma_{2m-j-k},$$

(4) Pour d'autres hypothèses, cf. plus bas, la Remarque 10. 5.

où b_j et $1/b_j$ sont dans $\mathcal{D}(\Gamma)$, les S_j^k étant des opérateurs tangentiels à Γ [15], d'ordre $\leqslant k-1$.

Même résultat pour T_j ([5]).

On peut maintenant énoncer le (cf. aussi [20 bis]) :

LEMME 1. 1. — *Soit* $\varphi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$, *avec* $\varphi_j \in H^{j+1/2}(\Gamma)$, *et* $\psi = \{\psi_0, \ldots, \psi_{m-1}\}$, *avec* $\psi_j \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$. *Il existe alors* $w = w(\varphi, \psi) \in H^{2m}(R^n)$, *tel que*

$$\gamma_j w = \psi_j, \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{1. 12}$$

$$S_j w = \varphi_j, \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{1. 13}$$

l'application $\{\varphi, \psi\} \to w$ *étant continue de*

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m-j-1/2}(\Gamma) \quad \textit{dans} \quad H^{2m}(R^n).$$

Résultat analogue en remplaçant S_j *par* T_j.

Démonstration. — 1) Supposons que w vérifie (1. 12), et prenons (1. 13) avec $j = m-1$; utilisant (1. 11), cette équation s'écrit

$$b_{m-1}\gamma_m w = \varphi_{m-1} - \sum_{k \geqslant 2} S_{m-1}^k \gamma_{m+1-k} w;$$

comme $\gamma_{m+1-k} w = \psi_{m+1-k} \in H^{m-1+k-1/2}(\Gamma)$, et comme S_{m-1}^k est tangentiel, d'ordre $\leqslant k-1$, $S_{m-1}^k \gamma_{m+1-k} w \in H^{m-1/2}(\Gamma)$, donc l'équation (1. 13), pour $j = m-1$, équivant à

$$\gamma_m w = \psi_m, \ \psi_m \text{ donné dans } H^{m-1/2}(\Gamma)$$

(car $1/b_{m-1}$ est dans $\mathcal{D}(\Gamma)$). On vérifie alors facilement par récurrence que (1. 12) (1. 13) équivaut à (1. 12) et

$$\gamma_{m+j} w = \psi_{m+j} \in H^{2m-(m+j)-1/2}(\Gamma), j = 0, \ldots, m-1. \tag{1. 14}$$

2) Posant $2m = \mu$, on est donc ramené à la construction de w dans $H^\mu(R^n)$ avec

$$\gamma_j w = f_j \in H^{\mu-j-1/2}(\Gamma), j = 0, 1, \ldots, \mu - 1, \tag{1. 15}$$

w dépendant continûment de f_j (la parité de μ n'intervient

([5]) On montre que (1. 5) entraîne l'ellipticité de $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ dans $\bar{\Omega}$ (et même la forte ellipticité de exp $(i\theta)$ $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ pour θ convenable) de sorte que les systèmes $\{\gamma, S_j\}$ et $\{\gamma, T_j\}$ sont normaux et des systèmes de Dirichlet, au sens de [3].

pas dans ce qui suit !). On utilise la Proposition 1. 2 : $w \rightarrow \gamma w$ est un isomorphisme de $H^\mu(\Omega)/H_0^\mu(\Omega)$ sur $\prod_{j=0}^{\mu-1} H^{\mu-j-1/2}(\Gamma)$; mais

$$H^\mu(\Omega) = H_0^\mu(\Omega) \oplus \mathcal{Z}^\mu(\Omega),$$

avec

$$u \in \mathcal{Z}^\mu(\Omega) \text{ si et seulement si } \sum_{|p| \leqslant \mu} (-1)^{|p|} D^{2p} u = 0.$$

Soit donc

(1. 16) $\qquad u = \gamma^{-1}(f), \qquad f = \{f_0, \ldots, f_{\mu-1}\}$;

si P est un opérateur linéaire continu de $H^\mu(\Omega)$ dans $H^\mu(R^n)$ tel que $Pu = u$ p.p. sur Ω (cf. Proposition 1. 1,3)), on peut prendre $w = Pu$; les équations (1. 15) sont alors vérifiées.

Remarque 1. 2. — On peut opérer un peu différemment dans le choix (1. 16) de u. Dans le cas où $\Omega = \{x_n > 0\}$, la démonstration de la Proposition 1. 2 fournit explicitement un élément u de $H^\mu(\Omega)$ dépendant linéairement et continûment de f, avec $\gamma u = f$. Par des cartes locales, on en déduit une construction de u, différente de (1. 16). Cette remarque est utile au N° 3.

2. OPÉRATEUR γ SUR $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$.

DÉFINITION 2. 1. — On désigne par $\mathcal{H}_A^0(\mathcal{H})$ (resp. $D_A^0(\Omega)$, resp. $Z_A^0(\Omega)$) l'espace des éléments u de $H^0(\Omega)$ tels que

$$Au \in H^{-m}(\Omega) \quad (\text{resp. } Au \in H^0(\Omega), \quad \text{resp. } Au = 0).$$

Pour $u, v \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$, on pose

$$(u, v)_{\mathcal{H}_A^0(\Omega)} = (u, v) + (Au, Av)_{H^{-m}(\Omega)};$$

pour $u, v \in D_A^0(\Omega)$, on pose

$$(u, v)_{D_A^0(\Omega)} = (u, v) + (Au, Av);$$

munis de ces produits scalaires les espaces $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ et $D_A^0(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.

Notons que $Z_A^0(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^0(\Omega)$.

LEMME 2. 1. — *Sous l'hypothèse* (1. 5) *l'espace* $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ *est somme directe topologique de et* $H_0^m(\Omega)$ *et de* $Z_A^0(\Omega)$:

(2. 1) $\qquad \mathcal{H}_A^0(\Omega) = H_0^m(\Omega) \otimes Z_A^0(\Omega).$

Démonstration. — En effet sous l'hypothèse (1. 5), A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$ (cf. [22]). Pour u donné dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ soit alors u_0 la solution dans $H_0^m(\Omega)$ de $Au_0 = Au$; la décomposition $u = u_0 + (u - u_0)$ fournit le résultat.

LEMME 2. 2. — *L'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$.

Démonstration. — En vertu du Lemme 2. 1, et $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans $H_0^m(\Omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $Z_A^0(\Omega)$. Or d'après [9], $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D_A^0(\Omega)$ d'où le résultat [6].

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 2. 1. — *On suppose que* Ω *est un ouvert borné de frontière* Γ *indéfiniment différentiable, d'un même coté de* Γ. *On suppose que* (1. 5) *a lieu. Dans ces conditions, l'application* $u \rightarrow \gamma u = \{\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\}$, *définie dans* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u \rightarrow \gamma u$, *de* $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ *dans* $\prod_{j=0}^{j=m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$.

Démonstration. — 1) Soit $\varphi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ donné dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$. Considérons (cf. Lemme 1. 1) $v(\varphi)$, élément de $H^{2m}(R^n)$, avec

$$(2.2) \quad \gamma_j v(\varphi) = 0, \qquad T_j v(\varphi) = \varphi_j, \qquad j = 0, \ldots, m-1,$$

$v(\varphi)$ dépendant continûment de φ.

[6] Dans le cas actuel la démonstration du résultat de [9] est spécialement simple. Considérons A comme opérateur non borné dans $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, de domaine $D_A^0(\Omega)$ et soit A_S la fermeture de $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ défini sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Il faut montrer que $A_S = A$; comme évidemment $A_S \subset A$, il suffit de montrer l'inclusion inverse, *i.e.* en passant aux adjoints : $A_S^* \subset A^*$. Soit donc u dans le domaine de A_S^*; si $A_S^* u = f$, on a $(u, A\varphi) = (f, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, d'où (*) $\mathcal{A}^* \tilde{u} = \tilde{f}$ (cf. page 148 pour $\mathcal{A}$ et pour $\tilde{f}$ et $\tilde{u}$); on peut toujours s'arranger pour que $\mathcal{A}^*$ soit elliptique au voisinage de $\overline{\Omega}$, donc (*) entraîne que $\tilde{u} \in H^{2m}(R^n)$, et comme $\tilde{u}$ est à support dans $\overline{\Omega}$, $u \in H_0^{2m}(\Omega)$ (appliquer la Proposition 1. 2). Comme on voit facilement que $H_0^{2m}(\Omega)$ est contenu dans le domaine de A^* (en fait c'est exactement ce domaine), on obtient l'inclusion désirée.

Soit par ailleurs $\mathcal{A} = \mathcal{A}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ défini par

$$(2.\ 3) \qquad \mathcal{A} = \sum_{|p|,|q|\leqslant m} (-1)^{|p|} D^p(\mathcal{A}_{pq}(x) D^q),$$

où les fonctions $\mathcal{A}_{pq}$ sont indéfiniment différentiables dans R^n, bornées ainsi que chacune de leurs dérivées, avec $\mathcal{A}_{pq} = a_{pq}$ sur Ω. On dit que $\mathcal{A}$ est un prolongement indéfiniment différentiable de A. Soit de même $\mathcal{A}^*$ un prolongement indéfiniment différentiable de A^*. Les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ ne sont plus nécessairement elliptiques dans tout l'espace, et $\mathcal{A}^*$ n'est pas nécessairement l'adjoint formel de $\mathcal{A}$.

Encore deux notations : si f est dans $H^0(\Omega)$, $\tilde{f}$ désigne le prolongement de f à R^n par 0 hors de Ω; si T est une distribution dans R^n, T_Ω désigne sa restriction à Ω.

Tout ceci posé, et u étant donné dans $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$, définissons X^v_φ par

$$(2.\ 4) \qquad X^v_\varphi = \langle \mathcal{A}\tilde{u}, \overline{v(\varphi)} \rangle - \langle Au, \overline{v(\varphi)_\Omega} \rangle;$$

l'expression (2. 4) a un sens, d'après les remarques suivantes :

1) Comme $\tilde{u}$ est dans $H^0(R^n)$, et grâce aux hypothèses faites sur les $\mathcal{A}_{pq}$, $\mathcal{A}$ étant un opérateur linéaire continu de $H^\alpha(R^n)$ dans $H^{\alpha-2m}(R^n)$ le premier crochet dans (2. 4) désigne la dualité entre $H^{-2m}(R^n)$ et $H^{2m}(R^n)$;

2) comme $\gamma_j v(\varphi) = 0$ pour $j = 0, \ldots, m-1$, et d'après la Proposition 1. 2, (*ii*), $v(\varphi)_\Omega$ est dans $H^m_0(\Omega)$, de sorte que le deuxième crochet dans (2. 4) désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H^m_0(\Omega)$.

Naturellement $v(\varphi)$ n'est pas unique dans $H^{2m}(R^n)$ à vérifier (2. 2); mais X^v_φ est indépendant du choix de $v(\varphi)$; soit en effet v et v_1 deux choix, vérifiant tous deux les relations (2. 2); alors $(v - v_1)_\Omega$ est dans $H^{2m}_0(\Omega)$, de sorte que

$$\langle Au, \overline{(v - v_1)_\Omega} \rangle = \langle u, \overline{A^*(v - v_1)_\Omega} \rangle$$
$$= \langle u, \overline{\mathcal{A}^*(v - v_1)} \rangle = \langle \mathcal{A}u, \overline{v - v_1} \rangle,$$

donc $X^v_\varphi = X^{v_1}_\varphi$, d'où notre assertion. On écrira : $X^v_\varphi = X_\varphi$.

Comme on a choisi $v(\varphi)$ dépendant continûment de φ, on vérifie facilement que la forme semi-linéaire $\varphi \to X_\varphi$ est continue sur $\prod_{j=0}^{j=m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$, donc de la forme

$$(2.\ 5) \qquad X_\varphi = \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle \sigma_j u, \bar{\varphi}_j \rangle, \qquad \sigma_j u \in H^{-j-1/2}(\Gamma),$$

les applications $u \to \sigma_j u$ étant continues de $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$ dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$.

2) Pour achever la démonstration du Théorème il reste seulement (compte tenu du Lemme 2. 2) à vérifier que, pour u dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\sigma_j u = \gamma_j u$.

Prenons φ_j dans $\mathcal{D}(\Gamma)$. On peut alors choisir $v(\varphi)$ dans $\mathcal{D}(R^n)$; posant $v(\varphi)_\Omega = v$, il vient

$$X_\varphi = (u, A^* v) - (Au, v),$$

où comme d'ordinaire, (f, g) désigne le produit scalaire dans $H^0(\Omega)$. Utilisant les formules de Green (1. 9) et (1. 10), on obtient, puisque $\gamma_j v = 0$, $j = 0, \ldots, m-1$;

$$X_\varphi = \sum_j \langle \gamma_j u, \overline{\varphi}_j \rangle,$$

donc $\langle \gamma_j u, \overline{\varphi}_j \rangle = \langle \sigma_j u, \overline{\varphi}_j \rangle$ pour tout φ_j dans $\mathcal{D}(\Gamma)$, donc $\sigma_j u = \gamma_j u$ ce qui achève la démonstration du théorème.

3. — L'OPÉRATEUR $\tilde{\gamma}_\rho$ SUR $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$.

On introduit une famille Γ_ρ de variétés de dimension $n - 1$, contenues dans Ω, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0 < 1$, ces variétés tendant vers Γ lorsque $\rho \to 0$. De façon précise nous ferons l'hypothèse suivante [7] :

(3. 1) Il existe une famille finie d'ouverts $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_\nu$, dans R^n, tels que $\Gamma_\rho, \Gamma \subset \bigcup \mathcal{O}_i$; pour chaque $\mathcal{O}_i$ on suppose qu'il existe un isomorphisme g_i de $\overline{\mathcal{O}}_i$ sur

$$\overline{Q} = [-1, +1]^n,$$

($\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ est le point générique de $\overline{Q}$), tel que

$$g_i(\Gamma \cap \mathcal{O}_i) = \overline{Q} \cap \{\xi_n = 0\},$$
$$g_i(\Gamma_\rho \cap \mathcal{O}_i) = \overline{Q} \cap \{\xi_n = \rho\};$$

on suppose que les composantes de g_i et g_i^{-1} sont $2m$ fois continûment différentiables dans $\overline{\mathcal{O}}_i$ et $\overline{Q}$. On fait l'hypothèse habituelle de compatibilité : g_i et g_j coïncident sur $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$.

[7] On suppose dans ce n° que Γ est seulement $2m$ fois continûment différentiable.

On posera $\quad g_i(x) = \{g_{i1}(x), \ldots, g_{in}(x)\}$.

A l'aide du système $\{\mathcal{O}_i, g_i\}$ on définit un isomorphisme θ_ρ de Γ_ρ sur Γ par

$$\theta_\rho x = g_i^{-1}(g_{i1}(x), \ldots, g_{i\,n-1}(x), 0) \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma_\rho \cap \mathcal{O}_i \tag{3. 2}$$

(donc $g_{in}(x) = \rho$).

Grâce à (3. 1), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\rho \text{ et } \theta_\rho^{-1} \text{ sont } 2m \text{ fois continûment différentiables} \\ \quad \text{de } \Gamma_\rho \text{ sur } \Gamma \text{ (et } \Gamma \text{ sur } \Gamma_\rho\text{), leurs dérivées d'ordre} \\ \quad \leqslant 2m \text{ étant bornées par des constantes indépen-} \\ \quad \text{dantes de } \rho. \end{array} \right. \tag{3. 3}$$

Soit Ω_ρ l'ouvert contenu dans Ω de frontières Γ_ρ (8). Pour u dans $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$, on sait (Friedrichs; cf. [18]) que u est localement dans H^m, donc

$$u \in H^m(\Omega_\rho);$$

on peut par conséquent définir

$$\gamma_{j,\rho} u = \frac{\partial^j}{\partial n_\rho^j} u, \qquad (n_\rho \text{ normale intérieure à } \Gamma_\rho)$$

élément de $H^{m-j-1/2}(\Gamma_\rho)$ en vertu de la Proposition 1. 2 (9).

Désignons par $\mathcal{D}^{2m}(\Gamma_\rho)$ l'espace des fonctions $2m$ fois continûment différentiables sur Γ_ρ. On a le

Lemme 3. 1. — *Pour φ dans $\mathcal{D}^{2m}(\Gamma_\rho)$ on définit $\theta_\rho^*\varphi$ par*

$$\theta_\rho^*\varphi(x) = \varphi(\theta_\rho^{-1}(x)); \tag{3. 4}$$

alors $\theta_\rho^*\varphi$ est dans $\mathcal{D}^{2m}(\Gamma)$ et l'application $\varphi \to \theta_\rho^*\varphi$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue $u \to \theta_\rho^* u$ de $H^\alpha(\Gamma_\rho)$ dans $H^\alpha(\Gamma)$, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$; θ_ρ^* est un isomorphisme, dont l'inverse est le prolongement de $(\theta_\rho^*)^{-1}$ défini par

$$(\theta_\rho^*)^{-1}\psi(x) = \psi(\theta_\rho x). \tag{3. 5}$$

En outre, ($\mathcal{L}(E; F)$ désignant l'espace des applications linéaires continues de E dans F) :

$$\|\theta_\rho^*\|_{\mathcal{L}(H^\alpha(\Gamma_\rho);\, H^\alpha(\Gamma))} \leqslant c_1, \tag{3. 6}$$
$$\|(\theta_\rho^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^\alpha(\Gamma);\, H^\alpha(\Gamma_\rho))} \leqslant c_2, \tag{3. 7}$$

les c_i étant des constantes indépendantes de ρ.

(8) Tout ceci vaut lorsque Γ est composé de plusieurs variétés distinctes.
(9) Qui est valable si Γ est seulement m fois continûment différentiable.

Démonstration. — 1) Il suffit de montrer le résultat pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2m$, le cas $0 < \alpha < 2m$ s'en déduisant ensuite par interpolation.

2) Pour $\alpha = 2m$, on note, en utilisant des cartes locales et (3. 3), que

$$\|\theta_\rho^* \varphi\|_{H^{2m}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|\varphi\|_{H^{2m}(\Gamma_\rho)}, \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathfrak{D}^{2m}(\Gamma_\rho),$$

c_1 étant indépendante de ρ. L'inégalité analogue étant valable pour $(\theta_\rho^*)^{-1}$, et ces inégalités étant immédiates dans le cas $\alpha = 0$, on en déduit le Lemme.

Grâce au Lemme précédent, on peut introduire, pour $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$,

$$\tilde{\gamma}_{j,\rho} u = \theta_\rho^* \gamma_{j,\rho} u; \tag{3. 8}$$

posons

$$\tilde{\gamma}_\rho u = \{\tilde{\gamma}_{0,\rho} u, \tilde{\gamma}_{1,\rho} u, \ldots, \tilde{\gamma}_{m-1,\rho} u\}; \tag{3. 9}$$

alors

$$\tilde{\gamma}_\rho \in \mathfrak{L}\left(\mathcal{H}_A^0(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)\right). \tag{3. 10}$$

On va maintenant démontrer le

Théorème 3. 1. — *L'hypothèse* (3. 1) *ayant lieu ainsi que* (1. 5), *quel que soit u dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_\rho u \to \gamma u$ dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$ *lorsque* $\rho \to 0$.

Démonstration. — 1) On va d'abord démontrer que $\tilde{\gamma}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de l'espace $\mathfrak{L}\left(\mathcal{H}_A^0(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)\right)$, lorsque $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$. Posant

$$a_\rho(u, v) = \sum_{p,q} \int_{\Omega_\rho} a_{pq}(x) D^q u D^p \bar{v}\, dx,$$

on a

$$\int_{\Omega_\rho} A u \bar{v}\, dx = a_\rho(u, v) + \sum_{j=0}^{j=m-1} \int_{\Gamma_\rho} S_{j,\rho} u \gamma_{j\rho} \bar{v}\, d\sigma, \tag{3. 11}$$

les fonctions u et v étant, par exemple, $2m$ fois continûment différentiables dans $\overline{\Omega}_\rho$, les $S_{j,\rho}$ ayant des propriétés analogues aux S_j introduits au N° 1. On introduit de même $T_{j,\rho}$.

Notons maintenant ceci : soit

$$\varphi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\} \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma_\rho);$$

on peut choisir $v_\rho(\varphi) \in H^{2m}(R^n)$ avec

$$\gamma_{j,\rho} v_\rho(\varphi) = 0, \qquad T_{j,\rho} v_\rho(\varphi) = \varphi_j, \qquad j = 0, \ldots, m-1, \tag{3.12}$$

de façon que

$$\|v_\rho(\varphi)\|_{H^{2m}(R^n)} \leqslant c_3 |||\varphi|||_\rho, \tag{3.13}$$

où

$$|||\varphi|||_\rho = \Big(\sum_j \|\varphi_j\|^2_{H^{j+1/2}(\Gamma_\rho)}\Big)^{1/2}.$$

En effet, d'après la démonstration du Lemme 1. 1, on se ramène à construire $w_\rho \in H^\mu(R^n)$ avec $\gamma_j w_\rho = f_j$, $j = 0, \ldots, \mu - 1$, pour f_j donnée dans $H^{\mu-j-1/2}(\Gamma_\rho)$, la norme de l'application $\{f_j\} \to w_\rho$ étant bornée par une constante indépendante de ρ. Pour cela on utilise la Remarque 1.2; à l'aide de cartes locales (qui dépendent de ρ, mais où les dérivées qui interviennent sont majorées par des constantes indépendantes de ρ), on se ramène au cas du demi-espace et le résultat suit.

Ceci étant posé, on peut écrire d'après (2. 5) (et en posant $u_{\Omega_\rho} = u_\rho$)

$$\langle A\tilde{u}_\rho, \overline{v_\rho(\varphi)}\rangle - \langle Au_\rho, \overline{v(\varphi)}_{\Omega_\rho}\rangle = \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle \gamma_{j,\rho} u, \varphi_j\rangle; \tag{3.14}$$

le premier crochet dans (3. 14) désigne la dualité entre $H^{-2m}(R^n)$ et $H^{2m}(R^n)$; comme $\tilde{u}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de $H^0(R^n)$ $A\tilde{u}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de $H^{-2m}(R^n)$; d'après (3. 13) ce premier crochet est donc majoré par $c_4 |||\varphi|||_\rho$, c_4 indépendante de ρ; le deuxième crochet dans (3. 14) désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega_\rho)$ (et la norme Au_ρ dans $H^{-m}(\Omega_\rho)$ est bornée par une constante indépendante de ρ, puisque $Au \in H^{-m}(\Omega)$) et $H_0^m(\Omega_\rho)$; d'après (3. 13), ce deuxième crochet est majoré par $c_5 |||\varphi|||_\rho$, c_5 étant une constante indépendante de ρ. On déduit donc de (3. 14) que

$$\sum_j \|\gamma_{j,\rho} u\|^2_{H^{-j-1/2}(\Gamma_\rho)} \leqslant c_6, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0. \tag{3.15}$$

Mais $$\tilde{\gamma}_{j,\rho} = \theta_\rho^* \gamma_{j,\rho},$$

d'où notre assertion en vertu de (3. 6).

2) Le Théorème est alors conséquence de 1) et de la remarque suivante (jointe à la densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$) :

(3. 16) $\left\{\text{si } u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ \tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u \text{ dans l'espace des fonctions } 2m \text{ fois continûment différentiables dans } \Gamma \text{ (pour la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de chacune de leurs dérivées).}\right.$

4. — OPÉRATEUR S SUR $D_A^0(\Omega)$.

Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, on pose

(4. 1) $$Su = \{S_0 u, S_1 u, \ldots, S_{m-1} u\},$$

où les S_j sont définis comme dans (1. 8).

THÉORÈME 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *l'application* $u \to Su$ *définie dans* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u \to Su$, *de* $D_A^0(\Omega)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$.

Démonstration. — Le principe de la démonstration est analogue à celui de la démonstration du théorème 2. 1. Soit $\psi = \{\psi_0, \ldots, \psi_{m-1}\}$, avec $\psi_j \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$. Considérons (cf. Lemme 1. 1) $w(\psi) \in H^{2m}(R^n)$ avec

(4. 2) $$\gamma_j w(\psi) = \psi_j, \qquad T_j w(\psi) = 0, \qquad j = 0, \ldots, m-1,$$

et $w(\psi)$ dépendant continûment de ψ.

Pour u dans $D_A^0(\Omega)$ on pose

(4. 3) $$Y_\psi^w = \langle \mathcal{A}\tilde{u}, \overline{w(\psi)} \rangle - \langle Au, \overline{w(\psi)_\Omega} \rangle,$$

le premier crochet désignant la dualité entre $H^{-2m}(R^n)$ et $H^{2m}(R^n)$, et le deuxième le produit scalaire dans $H^0(\Omega)$.

Vérifions maintenant que Y_ψ^w est indépendant du choix de $w(\psi) = w$ avec (4. 2); soient en effet w et w_1 deux éléments de

$H^{2m}(R^n)$ vérifiant (4. 2); alors $(w - w_1)_\Omega$ est dans $H_0^{2m}(\Omega)$, donc

$$\langle \mathcal{A}\tilde{u}, \overline{w - w_1}\rangle = \langle \tilde{u}, \overline{(\mathcal{A})^*(w - w_1)}\rangle = \langle u, \overline{A^*(w - w_1)_\Omega}\rangle$$
$$= \langle Au, \overline{(w - w_1)_\Omega}\rangle\,(^{10}),$$

d'où $Y_\psi^w = Y_\psi^{w_1}$, et notre assertion. On écrit désormais $Y_\psi^w = Y_\psi$.

La forme semi-linéaire $\psi \to Y_\psi$ est continue sur

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$$

donc

$$Y_\psi = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \tau_j u, \overline{\psi_j}\rangle, \qquad \tau_j u \in H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma),$$

l'application $u \to \tau_j u$ étant continue de $D_A^0(\Omega)$ dans $H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$.

Comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D_A^0(\Omega)$, il reste seulement à démontrer que, pour u dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\tau_j u = S_j u$, ce qui se voit par utilisation des formules de Green.

Remarque 4. 1. — . — On reprend ici, en la précisant, une remarque de [15].

Désignons par $D_A^m(\Omega)$ l'espace des $u \in H^m(\Omega)$, tels que $Au \in H^0(\Omega)$. Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{D_A^m(\Omega)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (Au, Av),$$

c'est un espace de Hilbert.

Pour $\varphi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\} \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, soit $v(\varphi) \in H^m(\Omega)$, avec $\gamma_j v(\varphi) = \varphi_j$, $j = 0, \ldots, m-1$, et $v(\varphi)$ dépendant continûment de φ. Pour u donné dans $D_A^m(\Omega)$, posons

$$Z_\varphi^v = (Au, v(\varphi)) - a(u, v(\varphi));$$

on vérifie que Z_φ^v est indépendant du choix de $v(\varphi) = v$ (car si v et v_1 sont deux choix possibles alors $v - v_1 \in H_0^m(\Omega)$).

On écrira $Z_\varphi^v = Z_\varphi$. On note que la forme $\varphi \to Z_\varphi$ est continue sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, donc

$$(Au, v(\varphi)) - a(u, v(\varphi)) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \nu_j u, \overline{\varphi}_j\rangle, \quad \nu_j u \in H^{-m+j+1/2}(\Gamma).$$

(10) $(\mathcal{A})^*$, adjoint de $\mathcal{A}$, ne coïncide pas nécessairement avec $\mathcal{A}^*$; on peut aussi choisir $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A})^*$.

Pour u dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, on vérifie que $\nu_j u = S_j u$. Sous réserve de la vérification du

LEMME 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *l'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $D_A^m(\Omega)$,

on a alors le

THÉORÈME 4. 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *l'application* $u \to Su$ *définie dans* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue* (*encore notée* $u \to Su$) *de* $D_A^m(\Omega)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma)$.

Démonstration du Lemme 4. 1. — Soit u dans $D_A^m(\Omega)$; comme A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$, il existe w unique dans $H_0^m(\Omega)$ avec $Aw = Au$; alors w est dans $D_A^m(\Omega)$ et $\|w\|_{D_A^m(\Omega)} \leqslant c_1 \|Au\|_{H^0(\Omega)}$; soit $v = u - w$; on a : $\gamma v = \gamma u$, $Av = 0$ et comme $v \to \{Av, \gamma v\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega)$ sur

$H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, on a $\|v\|_{H^m(\Omega)} \leqslant c_2 \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_j u\|_{H^{m-j-1/2}(\Gamma)}$.

Considérons alors $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi_{n,j} \in \mathcal{D}(\Gamma)$, avec $\varphi_n \to Au$ dans $H^0(\Omega)$ et $\psi_{n,j} \to \gamma_j u$ dans $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. Soit w_n (resp. v_n) solution de $Aw_n = \varphi_n$ avec $w_n \in H_0^m(\Omega)$ (resp. $Av_n = 0$, $\gamma_j v_n = \psi_{j,n}$). D'après les majorations précédentes, $w_n \to w$ et $v_n \to v$ dans $D_A^m(\Omega)$ donc $v_n + w_n \to v$ dans $D_A^m(\Omega)$. Mais d'après la régularité de la solution du problème de Dirichlet [18 *bis*], w_n et v_n sont dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, d'où le lemme.

COROLLAIRE 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 4. 2, *si u est dans* $D_A^m(\Omega)$ *et v dans* $H^m(\Omega)$, *on a :*

$$(Au, v) - a(u, v) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle,$$
$$S_j u \in H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma), \qquad \gamma_j v \in H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Remarque 4. 2. — De (1. 9) et (1. 10) on déduit, pour u, v dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$:

$$(4.4)\quad (u, A^* v) - (Au, v) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j v} \rangle - \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle.$$

Cette formule est valable, entre autres, dans les conditions suivantes :

THÉORÈME 4. 3. — *Hypothèses du théorème* 2. 1. *Si l'une des hypothèses suivantes a lieu :*

(i) $u \in \mathcal{H}^0_A(\Omega)$, $\quad v \in H^{2m}(\Omega) \cap H^m_0(\Omega)$;

(ii) $u \in D^0_A(\Omega)$, $\quad v \in H^{2m}(\Omega)$;

alors (4. 4) *est vraie. Dans le cas* (*i*) *la formule s'écrit :*

$$(u, A^*v) - \langle Au, \bar{v} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j v} \rangle. \tag{4. 5}$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les diverses expressions écrites ont un sens. Le résultat suit par prolongement par continuité. Dans le cas (*i*), $\langle Au, \bar{v} \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H^m_0(\Omega)$. Puis $\gamma_j u$ est dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$ (Théorème 2. 1) et $T_j v \in H^{j+1/2}(\Gamma)$ de sorte que $\langle \gamma_j u, \overline{T_j v} \rangle$ a un sens.

Dans le cas (*ii*), $\langle \gamma_j u, \overline{T_j v} \rangle$ a la même signification, et $S_j u \in H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ (Théorème 4. 1) et $\gamma_j v \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$, de sorte que $\langle S_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle$ a un sens, d'où le théorème.

5. — OPÉRATEUR $\tilde{S}_\rho$ SUR $D^0_A(\Omega)$.

On se place dans le cadre du n° 3.

Soit u donné dans $D^0_A(\Omega)$; alors d'après le théorème de régularité locale de Friedrichs, u est dans $H^{2m}(\Omega_\rho)$, $\rho > 0$. Par conséquent, (et avec les notations du n° 3) :

$$S_{j,\rho} u_\rho \in H^{j+1/2}(F). \tag{5. 1}$$

On introduit ensuite

$$\tilde{S}_{j,\rho} u = \theta^*_\rho S_{j,\rho} u_\rho ; \tag{5. 2}$$

on définit ainsi un opérateur linéaire continu de $D^0_A(\Omega)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$. Si l'on pose

$$\tilde{S}_\rho = \{S_{0,\rho}, S_{1,\rho}, \ldots, S_{m-1,\rho}\}, \tag{5. 3}$$

alors

$$\tilde{S}_\rho \in \mathcal{L}\left(D^0_A(\Omega)\,;\ \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)\right). \tag{5. 4}$$

THÉORÈME 5. 1. — *Hypothèses du théorème* 3. 1. *Alors, pour u dans* $D^0_A(\Omega)$, $\tilde{S}_\rho u \to Su$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ *lorsque* $\rho \to 0$.

La démonstration, parallèle à celle du théorème 3. 1, n'est pas détaillée ici.

6. — RAPPELS SUR LES PROBLÈMES DE VISIK-SOBOLEV

Pour ce n° on pourra également consulter [26], [14], [11], [18].

De façon générale soit V un sous-espace vectoriel fermé de $H^m(\Omega)$ avec

$$H^m_0(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega). \tag{6. 1}$$

On supposera que

$$|a(v, v)| \geqslant c\|v\|^2_{H^m(\Omega)}, \quad c > 0, \quad \text{pour tout} \quad v \in V. \tag{6. 2}$$

On désigne par N(V) (resp. N*(V)) l'espace des $u \in V$ tels que $Au \in H^0(\Omega)$, (resp. $A^*u \in H^0(\Omega)$), avec

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V. \tag{6. 3}$$

(resp.

$$(A^*u, v) = a^*(u, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V). \tag{6. 4}$$

Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{N(V)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (Au, Av)$$

(resp. $(u, v)_{N^*(V)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (A^*u, A^*v)$), c'est un espace de Hilbert.

Sous l'hypothèse (6. 2), A (resp. A*) est un isomorphisme de N(V) (resp. N*(V)) sur $H^0(\Omega)$ (cf. par ex. [11], [18]).

Par transposition on en déduit ceci :

sous l'hypothèse (6. 2), *si* $v \to L(v)$ *est une forme semi linéaire* *continue sur* $N^*(V)$, *il existe un élément* u *de* $H^0(\Omega)$ *et un seul tel que*

$$(6.5) \qquad (u, A^*v) = L(v) \text{ pour tout } v \in N^*(V),$$

l'application $L \to u$ *étant continue, au sens suivant:*

$$\|u\|_{H^0(\Omega)} \leqslant c_1 |||L|||, \qquad \text{où} \qquad |||L||| = \sup. |L(v)|/\|v\|_{N^*(V)} \text{ (11)}.$$

7. — APPLICATION AU PROBLÈME DE DIRICHLET

On va appliquer les remarques du n° 6 avec $V = H_0^m(\Omega)$, et sous les hypothèses du théorème 2.1. Alors

$$N(V) = N^*(V) = H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega).$$

En effet d'après [18 *bis*], on sait que dans ces conditions

$$N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega) \qquad (\text{et également } N(V) \subset H^{2m}(\Omega))$$

inclusion algébrique et topologique.

Soit alors f donné dans $H^{-m}(\Omega)$ et g_j dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$, pour $j = 0, \ldots, m-1$. Pour $v \in N^*(V)$, posons

$$(7.1) \qquad L(v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle;$$

ceci a un sens : le premier crochet désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$ (car $V = H_0^m(\Omega)$ et donc $N^*(V) \subset H_0^m(M)$); comme $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ $T_j v$ est dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$, de sorte que $\langle g_j, \overline{T_j v} \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ et $H^{(j+1/2)}(\Gamma)$. Par conséquent (7. 1) définit une forme semi-linéaire continue sur $N^*(V)$.

Par conséquent, d'après (6. 5), il existe un élément u de $H^0(\Omega)$ unique, vérifiant

$$(7.2) \qquad \begin{cases} (u, A^*v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle, \\ \quad \text{pour tout } v \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega). \end{cases}$$

On en déduit (en prenant v dans $\mathcal{D}(\Omega)$) :

$$(7.3) \qquad Au = f,$$

donc $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$.

(11) Sous des hypothèses convenables, on peut transformer (6. 5) en une équation où n'interviennent que des distributions sur R^n (cf. [11], [14], [18]). Mais ceci n'est pas indispensable pour la suite.

L'équation (7. 2) peut maintenant s'écrire :

$$(u, \mathrm{A}^*v) - \langle \mathrm{A}u, \bar{v} \rangle = \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{\mathrm{T}_j v} \rangle.$$

D'après (4. 5) on en déduit :

$$\gamma_i u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1 \tag{7. 4}$$

et l'on peut énoncer le

THÉORÈME 7. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *il existe* u *dans* $\mathcal{H}^0_{\mathrm{A}}(\Omega)$ *unique, vérifiant* (7. 3) *et* (7. 4).

Ou encore :

L'opérateur $\{\mathrm{A}, \gamma\}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}^0_{\mathrm{A}}(\Omega)$ *sur l'espace* $\mathrm{H}^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{H}^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ [12].

D'après le théorème 3. 1 les conditions aux limites (7. 4) ont lieu au sens suivant (sous les hypothèses du théorème 3. 1) :

$$\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to g_i \quad \text{dans} \quad \mathrm{H}^{-(j+1/2)}(\Gamma) \quad \text{lorsque} \quad \rho \to 0. \tag{7. 5}$$

Le problème (7. 3) (7. 4) est un problème de Dirichlet non homogène.

Remarque 7. 1. — Il résulte du théorème 7. 1 que l'on peut apporter le complément suivant au théorème 2. 1 : *l'application* γ *de* $\mathcal{H}^0_{\mathrm{A}}(\Omega)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{H}^{-(j+1/2)}(\Omega)$ *est surjective.*

Ceci montre que dans le théorème 2. 1 l'espace $\prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{H}^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ est le meilleur (*i.e.* le plus petit) possible.

Notons encore que le noyau de γ dans $\mathcal{H}^0_{\mathrm{A}}(\Omega)$ est $\mathrm{H}^m_0(\Omega)$. En effet soit u dans $\mathcal{H}^0_{\mathrm{A}}(\Omega)$ avec $\gamma u = 0$. Soit u^* la solution dans $\mathrm{H}^m_0(\Omega)$ de $\mathrm{A}u^* = \mathrm{A}u$. Alors $u - u^*$ est dans $\mathcal{H}^0_{\mathrm{A}}(\Omega)$, et vérifie $\mathrm{A}(u - u^*) = 0$ et $\gamma(u - u^*) = 0$, donc d'après le théorème 7. 1, $u - u^* = 0$, d'où le résultat.

Remarque 7. 2. — Soit u une distribution sur Ω vérifiant

$$\mathrm{A}u \in \mathrm{H}^{-m}(\Omega), \tag{7. 6}$$

(7. 7) $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u$ est borné dans $\mathrm{H}^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ lorsque $\rho \to 0$, pour $j = 0, \ldots, m-1$.

[12] On peut vérifier directement que u vérifiant (7. 3) et (7. 4) dépend continûment de f et g_j, ou bien appliquer le théorème de Banach sur les isomorphismes.

(Cette condition a un sens, car d'après le théorème de régularité locale, la seule condition (7. 6) implique que $u \in H^m(\Omega_\rho)$ pour tout $\rho > 0$.)

On va montrer que (7. 7) *et* (7. 7) *entraînent* (sous les hypothèses des théorèmes 2. 1 et 3. 1) *que*

(7. 8) $$u \in H^0(\Omega) \quad ((\text{et donc } u \in \mathcal{H}^0_A(\Omega)).$$

En effet (7. 7) entraîne:

$\gamma_{j,\rho} u_\rho = f_{j,\rho}$ est borné en norme dans $H^{-(j+1/2)}(\Gamma_\rho)$ par une constante indépendante de ρ.

Par conséquent u_ρ (restriction de u à Ω_ρ) est la solution du problème de Dirichlet (au sens du théorème 7. 1):

$$A u_\rho = (Au)_{\Omega_\rho}, \qquad \gamma_{j,\rho} u_\rho = f_{j,\rho}.$$

On en déduit:

$$\|u_\rho\|_{H^0(\Omega_\rho)} \leqslant c_1(\|Au\|_{H^0(\Omega)} + \Sigma \|f_{j,\rho}\|_{H^{-(j+1/2)}(\Gamma_\rho)}) \leqslant c_2.$$

où c_1 est indépendante de ρ. Pour cela, il suffit de vérifier que c_1 est indépendante de ρ. Or tout reposant sur le théorème de régularité de Nirenberg ($N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$) et la transposition, il suffit de vérifier ceci:

soit $f \in H^0(\Omega_\rho)$ et v la solution dans $H^m_0(\Omega_\rho)$ de $Av = f$. Alors, v est dans $H^{2m}(\Omega_\rho)$ et

$$\|v\|_{H^{2m}(\Omega_\rho)} \leqslant c_3 \|f\|_{H^0(\Omega_\rho)},$$

c_3 étant indépendante de ρ; ceci résulte de la démonstration du théorème de Nirenberg et des hypothèses du théorème 3. 1.

Comme $\|u\|_{H^0(\Omega_\rho)}$ est borné et fonction croissante de ρ, u est dans $H^0(\Omega)$, d'où notre assertion.

Remarque 7. 3. — Pour arriver au théorème 7. 1 on a pris la forme semi-linéaire particulière (7. 1). Étudions le cas le plus général. On montre (cf. [14], [11], [18]) que la forme semi-linéaire continue la plus générale sur $N^*(V) = H^{2m}(\Omega) \cap H^m_0(\Omega)$ est de la forme suivante:

(7. 9) $$L(v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \langle g, \overline{Pv} \rangle,$$

où $f \in H^{-m}(\Omega)$ (le premier crochet désignant la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H^m_0(\Omega)$), et où $g \in H^{-2m}_{\bar{\Omega}}(R^n)$, P désignant un opérateur linéaire continu de $H^{2m}(\Omega)$ dans $H^{2m}(R^n)$ tel que $Pv = v$ *p.p.*

sur Ω; alors $\langle g, \overline{P\varphi}\rangle$ désigne le produit scalaire entre $H^{-2m}(R^n)$ et $H^{2m}(R^n)$, et le résultat est indépendant du choix de P.

Alors, il existe u dans $H^0(\Omega)$ unique, avec

$$(7.\ 10) \qquad (u, A^*\varphi) = \langle f, \bar{\varphi}\rangle + \langle g, \overline{P\varphi}\rangle,$$

pour tout $\varphi \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

Interprétons le problème ainsi résolu; soit g_Ω la restriction de g à Ω : $g_\Omega \in H^{-2m}(\Omega)$; on déduit de (7. 10) :

$$(7.\ 11) \qquad Au = f + g_\Omega.$$

Considérons maintenant sur $H_0^{2m}(\Omega)$ le produit scalaire $(A^*u, A^*\varphi)$; grâce au fait que $\|A^*u\| \geqslant c_4\|u\|_{H^{2m}(\Omega)}$ pour $u \in H_0^{2m}(\Omega)$, on définit ainsi un produit scalaire équivalent à $(u, \varphi)_{H^{2m}(\Omega)}$. Par conséquent il existe u_0 unique dans $H_0^{2m}(\Omega)$ vérifiant $(A^*u_0, A^*\varphi) = \langle g_\Omega, \bar{\varphi}\rangle$ pour tout $\varphi \in H_0^{2m}(\Omega)$, i. e.

$$(7.\ 12) \qquad AA^*u_0 = g_\Omega.$$

Alors $\tilde{u}_0$ désignant le prolongement de u_0 à R^n par 0 hors de Ω ($\tilde{u}_0 \in H^{2m}(R^n)$), on voit que

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0 \in H^{-2m}(R^n) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0)_\Omega = g_\Omega.$$

Si donc l'on introduit

$$(7.\ 13) \qquad h = g - \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0,$$

on a là une distribution de $H^{-2m}(R^n)$, à support dans Ω, et telle que $h_\Omega = 0$, *donc à support dans* Γ. Or on montre [9 *bis*] que toute distribution de $H^{-2m}(R^n)$ à support dans Γ peut s'écrire :

$$(7.\ 14) \qquad \langle h, \bar{\varphi}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j\varphi}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j^*, \overline{\gamma_j\varphi}\rangle, \quad \varphi \in H^{2m}(R^n),$$

où

$$(7.\ 15) \qquad g_j \in H^{-(j+1/2)}(\Gamma), \qquad g_j^* \in H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma).$$

Finalement (7. 10) est équivalent à

$$(7.\ 16) \qquad (u, A^*\varphi) = \langle f, \bar{\varphi}\rangle + \langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{P\varphi}\rangle + \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{T_j\varphi}\rangle,$$

pour $\varphi \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

Mais

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{\mathrm{P}v}\rangle = \langle \mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{(\mathcal{A})^*\mathrm{P}v}\rangle \text{ (13)}.$$

le deuxième crochet désignant le produit scalaire dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{R}^n)$. Puis, u_0 étant dans $\mathrm{H}_0^{2m}(\Omega)$, $\mathrm{A}^*\tilde{u}_0 = (\mathrm{A}^*u_0)^{\sim}$ et par conséquent $\langle \mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{(\mathcal{A})^*\mathrm{P}v}\rangle = (\mathrm{A}^*u_0, \mathrm{A}^*v)$, et donc (7. 16) équivaut à

$$(7.\ 17)\quad (u - \mathrm{A}^*u_0, \mathrm{A}^*v) = \langle f, \bar{v}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\mathrm{T}_j v}\rangle,$$
$$v \in \mathrm{H}^{2m}(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^m(\Omega).$$

Conclusion. — *On est ramené à l'équation* (7. 2) *avec* u *remplacé par* $u - \mathrm{A}^*u_0$.

8. — APPLICATION AU PROBLÈME DE NEUMANN

On applique les remarques du n° 6 avec $\mathrm{V} = \mathrm{H}^m(\Omega)$. On fait l'hypothèse

$$(8.\ 1)\quad |a(v, v)| \geqslant c\|v\|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)},\ c > 0,\quad \text{pour tout}\quad v \in \mathrm{H}^m(\Omega) \text{ (14)}.$$

Alors (cf. [18 *bis*]) $\mathrm{N}^*(\mathrm{V}) \subset \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$ (et $\mathrm{N}(\mathrm{V}) \subset \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$), inclusion algébrique et topologique.

Nous prenons dans (6. 5) $\mathrm{L}(v)$ donnée par

$$(8.\ 2)\qquad \mathrm{L}(v) = (f, v) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j v}\rangle,\quad v \in \mathrm{N}^*(\mathrm{V}),$$

où f est donnée dans $\mathrm{H}^0(\Omega)$ et g_j dans $\mathrm{H}^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$.

Grâce au fait que $\mathrm{N}^*(\mathrm{V}) \subset \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$ on définit ainsi une forme semi-linéaire continue sur $\mathrm{N}^*(\mathrm{V})$. Par conséquent, il existe u unique dans $\mathrm{H}^0(\Omega)$ vérifiant

$$(8.\ 3)\quad (u, \mathrm{A}^*v) = (f, v) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j v}\rangle \quad \text{pour tout}\quad v \in \mathrm{N}^*(\mathrm{V}).$$

On en déduit que

$$(8.\ 4)\qquad\qquad \mathrm{A}u = f,$$

donc $u \in \mathrm{D}_\mathrm{A}^0(\Omega)$. Alors (8. 3) s'écrit

$$(u, \mathrm{A}^*v) - (\mathrm{A}u, v) = -\sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j v}\rangle.$$

(13) Cf. (10).
(14) Pour d'autres hypothèses, cf. Remarque 11. 3

D'après (4. 4) (valable; cf. théorème 4. 3), et notant que $T_j v = 0$ puisque $v \in N^*(V)$, on voit que

$$S_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1. \tag{8.5}$$

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 8. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1 *et avec* (8. 1), *il existe u dans* $D^0_A(\Omega)$ *unique, avec* (8. 4) *et* (8. 5) (15).

Ou encore :

L'opérateur $\{A, S\}$ *définit un isomorphisme de* $D^0_A(\Omega)$ *sur l'espace* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ (16).

Notons que, sous les hypothèses du théorème 3. 1 :

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{S}_{j,\rho} u \to g_j \quad \text{dans} \quad H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma), \quad \text{lorsque} \quad \rho \to 0, \\ \qquad\qquad j = 0, \ldots, m-1. \end{array}\right. \tag{8.6}$$

On a des remarques analogues aux remarques 7. 1, 7. 2, 7. 3; énonçons-les brièvement :

Remarque 8. 1. — L'application S de $D^0_A(\Omega)$ dans

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$$

est *surjective*, de noyau $N(H^m(\Omega))$.

Remarque 8. 2. — Soit u une distribution sur Ω telle que

$$Au \in H^0(\Omega), \tag{8.7}$$

$$\tilde{S}_{j,\rho} u \quad \text{est borné dans} \quad H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma) \tag{8.8}$$

lorsque $\rho \to 0, \quad j = 0, \ldots, m-1.$

Dans ces conditions, on a

$$u \in H^0(\Omega) \quad (\text{donc } u \in D^0_A(\Omega)). \tag{8.9}$$

Remarque 8. 3. — Si $v \to L(v)$ est une forme semi-linéaire continue sur $N^*(V)$, elle peut se prolonger à $H^{2m}(\Omega)$ (d'après le théorème de Hahn Banach) et donc

$$L(v) = \langle g, \overline{Pv} \rangle, \tag{8.10}$$

g et Pv étant comme dans (7. 10), $v \in H^{2m}(\Omega)$.

(15) Il s'agit du problème de Neumann non homogène *attaché à* $a(u, v)$.
(16) Remarque analogue à celle de la note de bas de page (12).

Alors il existe u dans $H^0(\Omega)$, unique, avec

(8. 11) $(u, A^*v) = \langle g, \overline{Pv}\rangle$, pour tout $v \in N^*(V)$.

Donc

(8. 12) $$Av = g_\Omega$$

On introduit encore $u_0 \in H_0^{2m}(\Omega)$, avec $AA^*u_0 = g_\Omega$, et

(8. 13) $$h = g - \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0.$$

On peut écrire h comme dans (7. 14), (7. 15) et (8. 11) peut alors s'écrire (en tenant compte du fait que $T_j v = 0$ pour $v \in N^*(V)$) :

$$(u,\ A^*v) = \langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0,\ \overline{Pv}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j^*,\ \overline{\gamma_j v}\rangle.$$

On est donc ramené à (8. 3) avec g_j remplacé par $-\, g_j^*$ et u par $u - Au^*{}_0$.

Remarque 8. 4. — Il résulte de (8. 1) qu'il existe u dans $H^m(\Omega)$ unique, vérifiant

(8. 14) $a(u, v) = \mathcal{L}(v)$, pour tout $v \in H^m(\Omega)$

où $v \to \mathcal{L}(v)$ est une forme semi-linéaire continue sur $H^m(\Omega)$.

Prenons

(8. 15) $$\mathcal{L}(v) = (f, v) - \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j v}\rangle,$$

où

(8. 16) $f \in H^0(\Omega)$ et $g_j \in H^{-m+j+1/2}(\Gamma)$

(de sorte que $v \to \mathcal{L}(v)$ est bien continue sur $H^m(\Omega)$). On a alors (8. 4) et (8.5), de sorte qu'en combinant avec le théorème 4. 2, il vient

THÉORÈME 8. 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1 *et avec* (8. 1), *l'opérateur* $\{A, S\}$ *est un isomorphisme de* $D_A^m(\Omega)$ (cf. Remarque 4. 1) *sur* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-m+j+1/2}(\Gamma)$.

9. UN RÉSULTAT D'INTERPOLATION

Soient $\{F, E\}$, $\{F_1, E_1\}$ deux couples d'espaces hilbertiens, comme au n° 1.

THÉORÈME 9. 1. — *Soient* M_ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, M, *des opérateurs linéaires continus de* E *dans* E_1 *et* F *dans* F_1, *tels que, lorsque* $\rho \to 0$,

(9. 1) $M_\rho e \to Me$ dans E_1 fort, pour tout $e \in E$,
(9. 2) $M_\rho f \to Mf$ dans F_1 fort, pour tout $f \in F$.

Dans ces conditions, pour $0 < \theta < 1$,

(9. 3) $M_\rho g \to Mg$ dans $F_1^{1-\theta}E_1^\theta$ fort, pour tout $g \in F^{1-\theta}E^\theta$.

Démonstration. — Soit g dans $F^{1-\theta}E^\theta$; alors, d'après [15 *ter*] il existe une fonction $u_g(t) = u(t)$, dépendant linéairement de g, telle que

(9. 4) $$\int_0^\infty (||t^\alpha u(t)||_F^2 + ||t^\alpha u'(t)||_E^2)dt \leqslant c_1||g||^2_{F^{1-\theta}E^\theta} \text{ [17]},$$

où $1/2 + \alpha = \theta$, avec

(9. 5) $$u(0) = g.$$

On introduit

(9. 6) $$v_\rho(t) = M_\rho(u(t)), \qquad v(t) = M(u(t));$$

alors

$$v_\rho(0) = M_\rho g, \qquad v(0) = Mg,$$

et d'après [15 *ter*] on aura (9. 3) si

(9. 7) $t^\alpha v_\rho \to t^\alpha v'$ dans l'espace $L^2(0, \infty; F)$ [18],

et

(9. 8) $t^\alpha v'_\rho \to t^\alpha v'$ dans $L^2(0, \infty; E)$,

[17] La fonction u définit une distribution sur $]0, \infty[$ (noté $(0, \infty)$ dans [16]), à valeurs dans F [22 *bis*], donc dans E et u' désigne la dérivée de u en t au sens distributions sur $]0, \infty[$ à valeurs dans E (cf. aussi [16]).

[18] $L^2(0, \infty; X)$, X espace de Bannach, désigne l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur $]0, \infty[$ à valeurs dans X.

Mais les opérateurs M_ρ demeurant dans des ensembles bornés de $\mathcal{L}(F; F_1)$ et $\mathcal{L}(E; E_1)$, on a

$$||t^\alpha v_\rho(t)||_{F_1} \leqslant c_2 ||t^\alpha u(t)||_F, \quad ||t v'_\rho(t)||_{E_1} \leqslant c_3 ||t^\alpha u'(t)||_E;$$

par ailleurs, d'après (9. 2) et (9. 1), $v_\rho(t) \to v(t)$ dans F_1 fort, et $v'_\rho(t) \to v'(t)$ dans E_1 fort. D'où (9. 7) et (9. 8) d'après le théorème de Lebesgue.

10. — APPLICATIONS DE L'INTERPOLATION : PROBLÈME DE DIRICHLET

Introduisons quelques nouveaux espaces.

Définition 10. 1. — On désigne par $\mathcal{H}^\alpha_A(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u \in H^\alpha(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, telles que

$$Au \in H^{-m}(\Omega).$$

Muni du produit scalaire

$$(10.\ 1) \quad (u, v)_{\mathcal{H}^\alpha_A(\Omega)} = (u, v)_{H^\alpha(\Omega)} + (Au, Av)_{H^{-1}(\Omega)},$$

c'est un espace de Hilbert.

Notons que $\mathcal{H}^m_A(\Omega) = H^m(\Omega)$, avec des structures hilbertiennes équivalentes (mais non identiques).

Définition 10. 2. — On pose

$$(10.\ 2) \qquad h_A^{(1-\theta)m}(\Omega) = (\mathcal{H}^m_A(\Omega))^{1-\theta}(\mathcal{H}^0_A(\Omega))^\theta.$$

Proposition 10. 1. — *Sous les hypothèses de la proposition* 10. 1, *on a* $h^\alpha_A(\Omega) \subset \mathcal{H}^\alpha_A(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, *algébriquement et topologiquement* [19].

Démonstration. — Considérons l'application identité : $u \to u$, qui est linéaire continue de $\mathcal{H}^m_A(\Omega) \to H^m(\Omega)$ et de $\mathcal{H}^0_A(\Omega) \to H^0(\Omega)$; alors par application du théorème d'interpolation, elle est linéaire continue de $h_A^{(1-\theta)m}(\Omega)$ dans

$$(H^m(\Omega))^{1-\theta}(H^0(\Omega))^\theta = H^{(1-\theta)m}(\Omega)$$

[19] Une étude plus précise de $h^\alpha_A(\Omega)$ sera faite dans un des articles ultérieurs de cette série.

(Définition 1. 1). Donc $u \to u$ est linéaire continue de $h_A^\alpha(\Omega)$ dans $H^\alpha(\Omega)$.

On considère ensuite l'application linéaire $u \to Au$, continue de $\mathcal{H}_A^m(\Omega)$ et $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ dans $H^{-m}(\Omega)$, donc de $h_A^\alpha(\Omega)$ dans $H^{-m}(\Omega)$ d'où le résultat.

Comme $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega) = \mathcal{H}_A^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, et comme, d'après le théorème 7. 1, $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$ on en déduit [20] :

THÉORÈME 10. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *pour* $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, *l'opérateur* $\{A, \gamma\}$ *est un isomorphisme de* $h_A^\alpha(\Omega)$ *sur* $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$.

De même, pour u dans $\mathcal{H}_A^m(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u$ dans $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ sous les hypothèses du théorème 3. 1 (immédiat), et pour $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u$ dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$ fort, tout ceci lorsque $\rho \to 0$ (théorème 3. 1); utilisant alors le théorème 9. 1, il vient :

THÉORÈME 10. 2. — *Sous les hypothèses des théorèmes* 2. 1 *et* 3. 1, *pour u donné dans* $h_A^\alpha(\Omega)$, *on a*

$$\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u \quad \textit{dans} \quad H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma) \quad \textit{fort}, \quad j=0,\dots,m-1, \tag{10.3}$$

lorsque $\rho \to 0$.

Par conséquent, pour f donné dans $H^{-m}(\Omega)$ et g_j donné dans $H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, il existe u unique dans $H^\alpha(\Omega)$, avec

$$Au = f, \tag{10. 4}$$

$$\gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1, \tag{10. 5}$$

et (10. 5) s'interprétant par (10. 3).

Remarque 10. 1. — Prenons dans les théorèmes 10. 1 et 10. 2, $\alpha = m - 1/2$. Alors $g_j \in H^{m-j-1}(\Gamma)$ et la solution u est dans $H^{m-1/2}(\Omega)$. Ceci améliore le résultat de [5] (relatif à $m = 1$; cf. aussi [18'] où l'ouvert Ω est plus général) et de [17] ($m > 1$) où la solution est seulement trouvée dans $H^{m-1}(\Omega)$. Les méthodes sont complètement différentes; on verra dans un

[20] Notons que si M est un isomorphisme de E sur E_1 et de F sur F_1, c'est également un isomorphisme de $F^{1-\theta}E^\theta$ sur $F_1^{1-\theta}E_1^\theta$ (interpoler M et M^{-1}).

article ultérieur de cette série comment obtenir le théorème 10.1 par la méthode de [17] (cf. aussi Remarque 10.3 ci-après).

Il serait peut-être intéressant de compléter le théorème 10.1 en prenant le deuxième membre f dans un espace *plus grand* que $H^{-m}(\Omega)$; il faut en effet noter que dans le cas particulier $\Omega = \{x_n > 0\}$ le théorème 10. 2 de [16] est meilleur que le théorème 10. 1 actuel. (On doit dans [16] distinguer les variables « tangentielles » de la variable « normale »).

Remarque 10. 2. — Soit u distribution sur Ω vérifiant

$$\text{(10. 6)} \qquad Au \in H^{-m}(\Omega)$$

et

$$\text{(10. 7)} \qquad \tilde{\gamma}_{j,\rho} u \text{ borné dans } H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma),\ j = 0, ..., m-1,\ \rho \to 0.$$

Dans ces conditions :

$$\text{(10. 8)} \qquad u \in H^{\alpha}(\Omega).$$

Même démonstration qu'à la Remarque 7. 2.

Cette remarque est utile dans l'étude des espaces de Hardy (dans le cas L^2; on étudiera cela plus tard, à propos du cas L^p, $1 < p < \infty$).

Remarque 10. 3. — Nous ne nous sommes pas intéressés aux hypothèses minima de régularité des coefficients de A sous lesquelles le théorème 10. 1 relatif au cas α est vrai. Dans cette direction la méthode d'interpolation n'est pas favorable : pour obtenir le résultat pour $\alpha \in]0, m[$ il faut utiliser le résultat pour $\alpha = 0$ et $\alpha = m$, donc les hypothèses relatives au cas $\alpha = 0$, plus restrictives que celles relatives au cas $\alpha = m$; c'est dans cette direction notamment que la démonstration directe (sans interpolation) du théorème 10. 1 sera utile.

Remarque 10. 4. — On sait que $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^s(\Omega)$ sur $H^{s-2m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{s-j-1/2}(\Gamma)$ pour s entier $\geqslant m$ — et, par interpolation, pour *s réel* $\geqslant m$. C'est la Proposition 3, p. 87 de [19]. (Où il n'est pas fait usage de l'interpolation.) Le Théorème 10. 1 étend, dans un certain sens, ce résultat au cas $0 < s < m$ [21].

[21] On trouvera également dans [19] quelques indications (p. 84) sur le cas $0 < s < m$, $\Omega = \{x_n > 0\}$, A à coefficients constants, $\Lambda = 0$.

Remarque 10. 5. — Nos résultats sont vrais sous les hypothèses suivantes :

(i) $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \mathrm{A} \text{ est un opérateur différentiel à coefficients dans } \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \text{ d'ordre } \leqslant 2m, \text{ tel que les systèmes } \{\gamma_j, \mathrm{S}_j\} \text{ et } \{\gamma_j, \mathrm{T}_j\} \text{ soient de Dirichlet;} \end{array}\right.$

(ii) A est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$ sur $\mathrm{H}^0(\Omega)$;

(iii) A est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^m(\Omega)$ sur $\mathrm{H}^{-m}(\Omega)$.

Nous avons supposé que

(10. 9) $\quad |a(v, v)| \geqslant c_1 \|v\|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)}, \quad c_1 > 0, \quad$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^m(\Omega)$,

ce qui entraîne (i), (ii), (iii). Du point de vue « algébrique », si l'opérateur A est *fortement elliptique*, alors, d'après [8], (10. 9) a lieu pour $a(v, v) + \lambda\|v\|^2$, $\lambda > 0$ assez grand.

Nous allons brièvement donner des conditions algébriques plus générales que l'ellipticité forte, et sous lesquelles (i), (ii) et (iii) sont encore vérifiées (en remplaçant éventuellement A par $\mathrm{A} + \lambda$).

Supposons la dimension $n > 2$ (sinon il faut ajouter des hypothèses du type « properly elliptic », cf. par ex. [20], [20 *bis*]), et supposons $\mathrm{A}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ *elliptique*, i.e.

(10. 10) $\quad \sum_{|p|, |q|=m} a_{pq}(x)\xi^{p+q} \neq 0 \quad$ pour $\quad \xi \in \mathrm{R}^n, \quad \xi \neq 0$.

Si (10. 10) a lieu, on sait [20] que l'opérateur A de $\mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^0(\Omega)$ est surjectif si A^* est biunivoque sur $\mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$ et que ([1 *ter*], n° 12) si A est biunivoque sur $\mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$, il en est de même pour A^*. Par conséquent la condition (ii) sera réalisée pour A et A^* si

(10. 11) $\qquad$ A est biunivoque sur $\mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$.

Supposons maintenant que (ii) ait lieu pour A^*; par transposition il en résulte l'existence et l'unicité de u dans $\mathrm{H}^0(\Omega)$, vérifiant

(10. 12) $\quad \langle u, \overline{\mathrm{A}^* v}\rangle = \langle f, \bar{v}\rangle$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$,

pour f donné dans $\mathrm{H}^{-m}(\Omega)$ et u dépendant continûment de f. Mais (10. 10) ayant lieu, il résulte de (10. 12), d'après [1 *bis*], que u est dans $\mathrm{H}^m(\Omega)$. Alors $\mathrm{A}u = f$ et $\langle u, \overline{\mathrm{A}^* v}\rangle = \langle \mathrm{A}u, \bar{v}\rangle$, *i.e.* par (4. 5) $\sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \mathrm{T}_j v \rangle = 0$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$; l'application $v \to \{\mathrm{T}_j v\}$ de $\mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{H}^{j+1/2}(\Gamma)$ étant surjective, il en résulte que $\gamma_j u = 0$, $j = 0, \ldots, m-1$, donc

$$u \in \mathrm{H}_0^m(\Omega). \tag{10. 13}$$

D'après le Théorème du graphe fermé, l'application : $f \to u$ est alors continue de $\mathrm{H}^{-m}(\Omega)$ dans $\mathrm{H}_0^m(\Omega)$ et (iii) a lieu. En résumé : *sous les hypothèses* (10. 10) *et* (10. 11) *les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *ont lieu.*

Supposons que A soit faiblement défini positif [1 *ter*], *i.e.*

$$\mathrm{R}e \sum_{|p|, |q| = m} a_{pq}(x) \xi^{pq} \geqslant 0, \quad \xi \in \mathrm{R}^n, \quad x \in \Omega. \tag{10. 14}$$

Alors, d'après le Théorème 12. 8 de [1 *ter*], $\mathrm{A} + \lambda$ et $\mathrm{A}^* + \lambda$ sont biunivoques sur $\mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega)$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, λ_0 assez grand (la démonstration de [1 *ter*] donne une évaluation de λ_0). On peut donc finalement énoncer le

Théorème 10. 3. — *Sous les hypothèses* (10. 10) *et* (10. 14), *la dimension n étant* > 2, *l'opérateur* $\{\mathrm{A} + \lambda, \gamma\}$ *est un isomorphisme de* $h^\alpha_{\mathrm{A}+\lambda}(\Omega)$ *sur* $\mathrm{H}^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{H}^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, $0 < \alpha < m$, λ *positif assez grand.*

Ajoutons qu'en utilisant [4 *bis*], [1 *ter*] et [1 *bis*] on voit de façon analogue que (ii) entraîne (iii) dans les espaces $\mathrm{H}^{m,p}(\Omega)$ de Sobolev construits à partir de $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $p \neq 2$.

11. — APPLICATIONS DE L'INTERPOLATION : PROBLÈME DE NEUMANN

Définition 11. 1. — On désigne par $\mathrm{D}_\mathrm{A}^\alpha(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$, l'espace des (classes de) fonctions $u \in \mathrm{H}^\alpha(\Omega)$ telles que

$$\mathrm{A}u \in \mathrm{H}^0(\Omega).$$

Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathrm{D}_\mathrm{A}^\alpha(\Omega)} = (u, v)_{\mathrm{H}^\alpha(\Omega)} + (\mathrm{A}u, \mathrm{A}v), \tag{11. 1}$$

c'est un espace de Hilbert.

Notons que $D_A^{2m}(\Omega)$ coïncide avec $H^{2m}(\Omega)$, avec des structures hilbertiennes équivalentes (mais non identiques).

DÉFINITION 11. 2. — On pose

$$d_A^{2(1-\theta)m}(\Omega) = (D_A^{2m}(\Omega))^{1-\theta}(D_A^0(M))^\theta. \tag{11. 2}$$

PROPOSITION 11. 1. — *On a l'inclusion algébrique et topologique* $d_A^\alpha(\Omega) \subset D_A^\alpha(\Omega)$ [22].

La démonstration est identique à celle de la Proposition 10. 1.

Comme l'opérateur $\{A, S\}$ est un isomorphisme de $D_A^{2m}(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$ et, par le théorème 8. 1, de $D_A^0(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$, il vient

THÉORÈME 11. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 8. 1, $\{A, S\}$ *est un isomorphisme de* $d_A^\alpha(\Omega)$ *sur* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma)$, *pour* $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$.

En outre

THÉORÈME 11. 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 8. 1 *et du théorème* 3. 1, *pour u donné dans* $d_A^\alpha(\Omega)$, $\tilde{S}_{j,\rho} u \to S_j u$ *dans* $H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma)$ *lorsque* $\rho \to 0$, $j = 0, \ldots, m-1$.

Remarque 11. 1. — Soit u une distribution sur Ω, telle que

$$Au \in H^0(\Omega), \tag{11. 3}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{j,\rho} u \text{ soit borné dans } H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma), \text{ lorsque } \rho \to 0, \\ \quad j = 0, \ldots, m-1. \end{array} \right. \tag{11. 4}$$

Dans ces conditions

$$u \in H^\alpha(\Omega). \tag{11. 5}$$

Remarque 11. 2. — En utilisant le Théorème 8. 2, on obtient par la méthode précédente le résultat suivant : $\{A, S\}$ est un isomorphisme de

$$(D_A^m(\Omega))^{1-\theta}(D_A^0(\Omega))^\theta \quad \text{sur} \quad H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{(1-\theta)m-2\theta m+j+1/2}(\Gamma).$$

[22] Une étude plus précise de $d_A^\alpha(\Omega)$ sera faite dans un article ultérieur.

Comparant au thèorème 11. 1, avec $\alpha = (1 - \theta)m$, on en déduit

$$(\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{m}(\Omega))^{1-\theta}(\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{0}(\Omega))^{\theta} = d_{\mathrm{A}}^{(1-\theta)m}(\Omega), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

En particulier ($\theta = 0$) : $d_{\mathrm{A}}^{m}(\Omega) = \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{m}(\Omega)$.

Remarque 11. 3. — Remarque analogue à la Remarque 10. 5. Tout est valable si

(j) $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \text{ est à coefficients indéfiniment différen-} \\ \text{tiables dans } \overline{\Omega}, \text{ d'ordre } 2m, \text{ les systèmes } \{\gamma_j, \mathrm{S}_j\} \\ \text{et } \{\gamma_j, \mathrm{T}_j\} \text{ étant de Dirichlet;} \end{array}\right.$

(jj) $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} \text{ est un isomorphisme de } \mathrm{N}(\mathrm{H}^{m}(\Omega)) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega) \text{ sur} \\ \mathrm{H}^{0}(\Omega). \end{array}\right.$

Les conditions algébriques sont ici plus compliquées ([1], [1 *bis*], [20 *bis*]).

Il y a une légère différence entre les cas « Dirichlet » et « Neuman », l'hypothèse (iii) de la Remarque 10. 5 n'ayant pas d'analogue ici. On peut en fait observer ceci : *a*) on a vu à la Remarque 10. 5 que (iii) est essentiellement conséquence de (ii) ; *b*) dans le cas Dirichlet on « interpole » entre le « transposé de (ii) » et (iii), tandis que dans le cas Neumann, on « interpole » entre le « transposé de (jj) » et (jj) ; mais dans le cas Dirichlet on pourrait aussi « interpoler » entre le « transposé de (ii) » et (ii) lui-même. On obtient ainsi un résultat un peu moins bon pour le deuxième membre; on bénéficie dans le cas Dirichlet du fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V, le dual de V étant alors un espace de distributions sur Ω.

12. — EXEMPLE DES PROBLÈMES DE DÉRIVÉE OBLIQUE

On remplace maintenant la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ définie au N° 1, par la suivante :

$$(12.1) \quad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m} \int_{\Omega} a_{pq}(x)\, \mathrm{D}^{q}u\overline{\mathrm{D}^{p}v}\, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \Lambda_j u, \overline{\gamma_j v}\rangle,$$

où Λ_j est un opérateur différentiel d'ordre $2m - j - 1$, $m - 1$

fois transversal à Γ (cf. par ex. [15]), à coefficients indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega}$. Alors

$$(12.\ 2) \qquad \Lambda_j \in \mathcal{L}(H^m(\Omega);\ H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma)),$$

de sorte que (12. 1) définit une forme sesquilinéaire continue sur $H^m(\Omega)$ On suppose que

$$(12.\ 3) \qquad |a(v, v)| \geqslant c\|v\|^2_{H^m(\Omega)}, \qquad c > 0, \qquad v \in H^m(\Omega);$$

pour l'étude de relations de coercivité de ce type, cf. [1].

Avec les notations du N° 6, et $V = H^m(\Omega)$, on a encore [4], [18] : $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ (et aussi $N(V) \subset H^{2m}(\Omega)$).

Par conséquent, pour f donné dans $H^0(\Omega)$, et g_j dans $H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$, il existe $u \in H^0(\Omega)$ unique avec

$$(12.\ 4) \qquad (u, A^*v) = (f, v) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j v}\rangle, \quad v \in N^*(V).$$

On en déduit

$$(12.\ 5) \qquad Au = f,$$

donc $u \in D^0_A(\Omega)$, et (12. 4) s'écrit

$$(u, A^*v) - (Au, v) = -\sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j v}\rangle,$$

d'où avec (4. 4) :

$$(12.\ 6) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j v}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u - g_j, \overline{\gamma_j v}\rangle, \quad v \in N^*(V).$$

Traduisons maintenant le fait que v est dans $N^*(V)$, *i.e.* que $(A^*v, w) = a^*(v, w)$ pour tout w dans $H^m(\Omega)$; utilisant le corollaire 4. 1, on obtient la condition équivalente

$$(12.\ 7) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} \langle T_j v, \overline{\gamma_j w}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j v, \overline{\Lambda_j w}\rangle, \quad w \in H^m(\Omega).$$

Notons maintenant que d'après le Théorème 2. 1, Λ_j est un opérateur linéaire continu de $D^0_A(\Omega)$ (et même $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$) dans $H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$; on peut donc déduire de (12. 7) par prolongement par continuité que

$$(12.\ 8) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} \langle T_j v, \overline{\gamma_j u}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j v, \overline{\Lambda_j u}\rangle, \quad v \in N^*(V).$$

De (12. 6) et (12 .8) on déduit

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle \Lambda_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u - g_j, \overline{\gamma_j v} \rangle,$$

pour tout v dans $N^*(V)$; mais $N^*(V)$ étant dense dans $H^m(\Omega)$ ([23]), il en résulte

$$(12.9) \qquad S_j u - \Lambda_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

C'est un problème de dérivées obliques régulier [15]. Posant

$$(12.10) \quad (S - \Lambda)u = \{(S_0 - \Lambda_0)u, \ldots, (S_{m-1} - \Lambda_{m-1})u\},$$

on a

Théorème 12. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1 *et* (12. 3), *l'opérateur* $\{A, S - \Lambda\}$ *est un isomorphisme de* $D_A^0(\Omega)$ *sur* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$.

Par interpolation on en déduit :

Théorème 12. 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1 *et* (12. 3), *l'opérateur* $\{A, S - \Lambda\}$ *est un isomorphisme de* $d_A^\alpha(\Omega)$ *sur* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$.

13. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES

Avec les notations du N° 6, supposons que

$$(13.1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} a(v, v) + \xi_0 \int_\Omega |v(x)|^2 dx \geqslant c\|v\|^2_{H^m(\Omega)}, \ c < 0, \ v \in V, \\ \quad \text{pour } \xi_0 \text{ convenable.} \end{cases}$$

Alors, si $p = \xi + i\eta$, $A + p$ (resp. $A^* + p$) est un isomorphisme de $N(V)$ (resp. $N^*(V)$) sur $H^0(\Omega)$ pour $\xi \geqslant \xi_0$, et

$$(13.2) \quad \|(A + p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^0(\Omega);\, N(V))} \leqslant \operatorname{pol}(|p|) \ ([24]), \quad \xi \geqslant \xi_0$$

(majoration analogue pour $(A^* + p)^{-1}$).

Par transposition on en déduit ceci : si $v \to L(v)$ est une

([23]) Si $|a(v, v)| \geqslant c\|v\|^2_{H^m(\Omega)}$, $N(V)$ (et $N^*(V)$) est dense dans V.

([24]) Pol $(|p|)$ désigne un polynôme en $|p|$ (ici de degré 1).

forme semi linéaire continue sur $N^*(V)$, il existe $u(p) = u$ unique dans $H^0(\Omega)$ avec

$$(13.3) \quad (u, (A^* + \bar{p})v) = L(v) \quad \text{pour tout} \quad v \in N^*(V),$$

et

$$(13.4) \qquad \|u\| \leqslant \text{pol}(|p|)\,|||L|||,$$

où $|||L||| = \sup . |L(V)|\, \|v\|_{N^*(V)}$.

Appliquons ces remarques au cas $V = H_0^m(\Omega)$ (problème de Dirichlet). Comme au N° 7 nous prenons

$$(13.5) \qquad L(v) = \langle f, \bar{v}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v}\rangle,$$

f donné dans $H^{-m}(\Omega)$, g_j donné dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$; il en résulte (cf. N° 7) :

$$(13.6) \quad \begin{cases} \{A + p, \gamma\} \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{H}_A^0\}(\Omega) \text{ sur} \\ H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma) \text{ pour } \xi \geqslant \xi_0, \text{ d'inverse} \\ \text{majoré par un polynôme en } |p|. \end{cases}$$

Par ailleurs, $\{A + p, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega) = \mathcal{H}_A^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, d'inverse majoré par un polynôme en p.

Utilisant le Théorème d'interpolation et la majoration des normes $(\mu_\theta \leqslant \mu_0^{1-\theta}\mu_1^\theta)$, on en déduit :

pour $\xi \geqslant \xi_0$, $\{A + p, \gamma\}$ est un isomorphisme de $h_A^\alpha(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, pour $0 \leqslant 0 \leqslant m$, d'inverse majoré par un polynôme en $|p|$.

On en déduit, par la méthode de la transformation de Laplace (cf. par ex. [12]. Chap XI) :

THÉORÈME 13. 1. — *Sous les hypothèses du Théorème* 2. 1, *l'opérateur* $\left\{A + \frac{\partial}{\partial t}, \gamma\right\}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(h_A^\alpha(\Omega))$ *sur* $\mathcal{D}'_+(H^{-m}(\Omega)) \times \prod_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}'_+(H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma))$([25]).

([25]) $\mathcal{D}'_+(X)$, X espace de Banach, désigne l'espace des distributions en t à valeurs dans X et à support limité à gauche. Cf. [22 *bis*].

Autrement dit : si f est une distribution en t à valeurs dans $H^{-m}(\Omega)$ à support limité à gauche et si g_j est une distribution en t à valeurs dans $H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, de support limité à gauche, il existe une distribution u et une seule à valeurs dans $h^{\alpha}_{A}(\Omega)$, de support limité à gauche, telle que

$$Au + \frac{\partial}{\partial t} u = f,$$

avec $\gamma_j u = g_j, \qquad j = 0, \ldots, m-1$ (26).

Remarque 13. 1. — Sous les hypothèses du théorème 3. 1, on aura

$$\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_+(H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)) \quad \text{lorsque} \quad \rho \to 0.$$

Remarque 13. 2. — On peut naturellement développer des considérations analogues pour le cas du problème de Neumann, des problèmes de dérivées obliques, etc...

Remarque 13. 3. — On peut étudier de même des opérateurs $A + \partial^2/\partial t^2$, $A + i\partial/\partial t$, etc. Cf. [12].

Remarque 13. 4. — La méthode précédente permet également d'étudier les problèmes de perturbation singulière, à partir des résultats de [25].

La généralisation de la théorie au cas où $A = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est coefficients dépendant de t (cf. [12]) sera faite dans un article ultérieur. (Cf. déjà [16 *bis*]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon. The coerciveness problem for integro differential forms, *Journal d'Analyse Math. Israel.* Vol. 6 (1958), pp. 183-223.

[1 *bis*] S. Agmon. The L_p approach to the Dirichlet problem I, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa.* III, 13 (1959) pp. 405-448.

[1 *ter*] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg. Estimates near the boundary, *Comm. Pure Applied Math.* Vol. XII (1959), pp.623-727.

[2] N. Aronszajn. Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems, *Conférence de Berkeley*, 1960, à paraître.

(26) Il s'agit en fait de $(I \otimes \gamma_j)u$, où $I \otimes \gamma_j$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} h(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$ (produit tensoriel de l'application I = identité dans $\mathcal{D}'_+$, et de γ_j). Cf. [22 *bis*].

[2 *bis*] N. ARONSZAJN. Boundary value of functions with finite Dirichlet integral, *Tech. Report.* n. 14, *Univ. of Kansss*, (1955), pp. 77-94.

[3] N. ARONSZAJN et A. N. MILGRAM. Differential operators on Riemaniam manifolds, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, Vol. 2 (1952), pp. 1-61.

[3 *bis*] N. ARONSZAJN et K. T. SMITH. A paraître.

[3 *ter*] BABITCH. Le problème du prolongement à la frontière, *Ouspechi Mat. Nauk*, t. 8 (1953), pp. 111-113.

[3 *quarto*] BABITCH-SLOBODETSKY. *Doklady Akad. Nauk.* t. 106 (1956), pp. 604-608.

[4] F. E. BROWDER. Modern methods in the theory of partial differential equations. A paraître aux *Eergebnisse der Math.*, Springer.

[4 *bis*] F. E. BROWDER. Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems. *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.* 45 (1959), pp. 365-372.

[5] G. CIMMINO. Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet, *Rend. Circo. Mat. Palermo*, 61 (1937), pp. 177-224.

[6] C. FOIAS et J. L. LIONS. Sur certains théorèmes d'interpolation. A paraître aux *Acta Szeged.*

[7] E. GAGLIARDO. Interpolation d'espaces de Banach et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris*, (I), (II), (III), Vol. 248 (1959), pp. 1912-1914; 3388-3390; 3517-3518.

[8] L. GÅRDING. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differentiel equations, *Math. Scand.* 1, (1953), pp. 55-72.

[9] L. HÖRMANDER. Définitions of maximal differential operators, *Arkiv for Math.*, t. 3 (1958), p. 510-504.

[9 *bis*] L. HÖRMANDER et J. L. LIONS. Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet, *Math. Scand.* 4 (1956), pp. 259-270.

[10] S. G. KREIN. Un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs, *Doklady Akad. Nauk*, t. 130 (1959), pp. 1162-1165.

[11] J. L. LIONS. Lectures on elliptic differentiel equations, *Tata Institute of Fundamental Research.* Bombay, 1957.

[12] J. L. LIONS. Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, *Grundlehren der mathem. Wissenschaften*, t. 111. Springer. A paraître.

[13] J. L. LIONS. Un théorème de traces; applications, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. 249 (1959), pp. 2259-2261.

[14] J. L. LIONS. Conditions aux limites de Visik Soboleff et problèmes mixtes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 244 (1957), pp. 1126-1128.

[15] J. L. LIONS. Sur les problèmes aux limites du types dérivée oblique, *Annals of Math.*, 64 (1956), pp. 208-239.

[15 *bis*] J. L. LIONS. Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumanie.* 50 (1958), pp. 419-432.

[15 *ter*] J. L. LIONS. Théorèmes de trace et d'interpolation. (I), *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa.* Vol. XIII (1959), pp. 389-403.

[16] J. L. LIONS et E. MAGENES: Problemi al contorno non omogenei. (I), *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, Vol. XIV (1960), pp. 269-308.

[16 *bis*] J. L. Lions et E. Magenes. Remarque sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques. *C. R. Acad. Sc.* Paris, 1960.

[17] E. Magenes. Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili, *Ann. Mat. Pura ed Appl.* IV, 48, (1959) pp. 257-279.

[18] E. Magenes et G. Stampacchia. I. problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, III, 12 (1958), pp. 247-357.

[18′] J. Nečas. Sur les solutions des équations elliptiques aux dérivées partielles du second ordre avec intégrale de Dirichlet non bornée, *Journal Tchecoslovque de Math.* t. 10 (85) (1960), pp. 283-298.

[18 *bis*] L. Nirenberg. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Applied Math.*, 8 (1955), pp. 648-674.

[19] J. Peetre. Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels, *Lund Université*, 1959.

[19 *bis*] G. Prodi. Tracce di funzioni con derivata di ordine l..., *Rend. Sem. Mat. Padova*, 28 (1958), pp. 402-452.

[20] M. Schechter. Solution of the Dirichlet problem for systems not necessarily strongly elliptic, *Comm. Pure Applied. Math.*, 12 (1959), pp. 241-247.

[20 *bis*] M. Schechter. General boundary value problems for elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Applied Math.* XV (1959), pp. 457-486.

[21] L. Schwartz. *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, t. I, 1950 (2e édition, 1957); t. II, 1951.

[22] L. Schwartz. Les travaux de Gårding sur le problème de Dirichlet, *Séminaire Bourbaki*, mai 1952.

[22 *bis*] L. Schwartz. Théorie des distributions à valeurs vectorielles (I), (II), *Annales Inst. Fourier*, t. VII (1957), pp. 1-139; t. VIII (1958), pp. 1-209

[23] L. N. Slobodetskii. Évaluations dans L^p des solutions de systèmes elliptiques, *Doklady Akad. Nauk.* t. 123 (1958), pp. 616-619.

[24] S. L. Sobolev. *Applications de l'analyse fonctionnelle à la Physique Mathématique*, Leningrad, 1950.

[25] I. M. Visik et L. A. Lusternik. Solution de certains problèmes de perturbation (I), *Ouspechi Mat. Nauk*, t. 15 (93) (1960), pp. 3-80.

[26] I. M. Visik et S. L. Sobolev. Nouvelle formulation générale des problèmes aux limites, *Doklady Akad. Nauk*, t. 111 (1956), pp. 521-523.