ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

# Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité

*Annales de l'institut Fourier*, tome 9 (1959), p. 91-101

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__91_0>

# SUR LES POINTS D'EFFILEMENT D'UN ENSEMBLE
# APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA CAPACITÉ

**par Gustave CHOQUET, Paris.**

Nous montrerons dans le théorème 1, que tout ensemble est rare, en un sens que nous préciserons, au voisinage de l'ensemble des points où il est effilé.

Puis nous en déduirons que tout ensemble, après soustraction d'un petit ensemble convenable, a même capacité extérieure que sa fermeture; nous énoncerons ce résultat sous des formes plus ou moins restrictives suivant la nature de l'ensemble et nous montrerons la validité de ces énoncés pour une classe de fonctions d'ensemble assez vaste, mais qui ne contient cependant pas toutes les capacités alternées d'ordre infini.

Pour ne pas compliquer les énoncés, nous les formulerons d'abord dans un espace de Green E, toutes les notions étant alors relatives au noyau de Green G de E. Nous dirons ensuite à quels noyaux s'étendent les divers énoncés.

Donc, jusqu'à mention du contraire, E désignera un espace de Green.

## 1. Effilement et capacité associés à un noyau.

THÉORÈME 1 ([1]). — *Soit* X *une partie quelconque de* E, *Soit* $e(X)$ *l'ensemble des points* $x$ *de* E *tels que* X *soit effilé en* $x$. *Pour tout nombre* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* $\omega \subset E$ *tel que:*

$$e(X) \subset \omega \qquad et \qquad \mathrm{cap}^* (X \cap \omega) < \varepsilon.$$

([1]) M. BRELOT, à qui j'avais signalé cet énoncé, a trouvé un principe de démonstration différent, basé sur l'existence d'un potentiel qui, en tout point d'effilement, a sur X une quasi-limite infinie.

Corollaire (*bien connu*). — 1) *L'ensemble des points de* X *en lesquels* X *est effilé a une capacité extérieure nulle; autrement dit :*

$$\mathrm{cap}^*(X \cap e(X)) = 0.$$

2) $(\mathrm{cap}^* X = 0) \Longleftrightarrow$ (X *est effilé en chacun de ses points*).

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 1. Il a été énoncé pour la première fois par M. Brelot (voir bibliographie).

*Démonstration du théorème* 1. — Rappelons une propriété assez connue caractérisant les points d'effilement (énoncée sous une forme voisine par de la Vallée-Poussin) :

*Pour que* X *soit effilé en* $x$, *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage* V *de* $x$ *tel que le potentiel capacitaire* [2] *de* $X \cap V$ *soit* $< 1$ *en* $x$.

S'il existe un tel voisinage de $x$, tout sous-voisinage possède la même propriété; nous dirons qu'un tel voisinage isole $x$ de X.

Soit alors $(O_n)$ une base dénombrable d'ouverts de E. Pour tout $n$, soit $E_n$ l'ensemble des points de $O_n$ en lesquels le potentiel capacitaire de $(X \cap \omega_n)$ est $< 1$.

La caractérisation rappelée ci-dessus des points d'effilement montre que l'ensemble $\bigcup E_n$ est identique à l'ensemble $e(X)$ des points $x$ de E en lesquels X est effilé. C'est évidemment un $F_\sigma$; l'ensemble $\tilde{X} = \complement\, e(X)$ est un $G_\delta$ qu'on appelle *fermeture fine* de X (c'est la fermeture pour la topologie fine de E).

On a $\mathrm{cap}^* \tilde{X} = \mathrm{cap}^* X$; et plus généralement, pour tout ouvert $\omega$, on a $\mathrm{cap}^*(\tilde{X} \cap \omega) = \mathrm{cap}^*(X \cap \omega)$ [3].

Soit $\Phi_n$ le potentiel capacitaire de $X \cap O_n$; il existe [4] un ouvert $\omega_n \subset E$ contenant les points de $X \cap O_n$ en lesquels $\Phi_n < 1$, tel que $\mathrm{cap}\, \omega_n < \varepsilon/2^n$ et tel que la restriction de $\Phi_n$ à $\complement\, \omega_n$ soit continue.

Posons :

$$(1) \quad Y = X \cap \complement\left(\bigcup \omega_n\right), \quad \text{ce qui entraîne} \quad \overline{Y} \cap \left(\bigcup \omega_n\right) = \emptyset.$$

(2) On appelle potentiel capacitaire de A le plus petit des potentiels qui valent 1 quasi-partout sur A.

(3) En effet $(X \cap \omega) \subset (\tilde{X} \cap \omega) \subset$ (ens. des points où le potentiel capacitaire de $X \cap \omega$ vaut 1).

(4) Utiliser par exemple le théorème 1 de la note Choquet I.

Pour tout $x \in Y$ et pour tout $n$, on a $\Phi_n(x) = 1$; comme $\Phi_n$ est continu hors de $\omega_n$, on a donc aussi $\Phi_n(x) = 1$ pour tout $x \in \overline{Y}$; autrement dit on a :

$$\overline{Y} \cap e(X) = \emptyset. \tag{2}$$

Posons $\omega = \complement \overline{Y}$; la relation (2) donne $e(X) \subset \omega$. La relation (1) donne :

$$X \cap \omega \subset \bigcup \omega_n \qquad \text{d'où} \qquad \text{cap}^* (X \cap \omega) \leqslant \text{cap}\left(\bigcup \omega_n\right) < \varepsilon.$$

THÉORÈME 2. — *Soit* $X \subset E$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partition de* X *en deux ensembles* $X_1$, $X_2$ *tels que :*

1) $\text{cap}\, \overline{X_1} \leqslant \text{cap}^* X$.
2) $\text{cap}^* X_2 < \varepsilon$

*Lorsque* $\text{cap}^* X < \infty$, *on peut imposer en outre à* $X_1$ *d'être borné.*

*Démonstration.* — D'après le théorème 1, il existe un ouvert $\omega$ contenant $e(X)$ et tel que $\text{cap}^* (X \cap \omega) < \varepsilon$. Posons :

$$X_2 = X \cap \omega \qquad \text{et} \qquad X_1 = X \cap \complement X_2 = X \cap \complement \omega.$$

On a donc

$$\overline{X_1} \subset \complement \omega, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{X_1} \subset \tilde{X}.$$

Donc $\text{cap}\, \overline{X_1} \leqslant \text{cap}^* \tilde{X}_1 = \text{cap}^* X.$

Enfin, par hypothèse, $\text{cap}^* X_2 = \text{cap}\, (X \cap \omega) < \varepsilon$.

Lorsque $\text{cap}^* X < \infty$, X est réunion d'un ensemble borné et d'un ensemble de capacité extérieure $< \varepsilon$; la dernière partie du théorème résulte donc aisément de la première.

*Extension à d'autres noyaux.* — Les théorèmes 1 et 2 s'étendent sans modification aux noyaux N satisfaisant à toutes les conditions suivantes :

Soit E un espace localement compact à base dénombrable.

1) N est un noyau sur E, semi-continu inférieurement, $\geqslant 0$, continu hors de la diagonale $\Delta$ de $E \times E$ et valant $+\infty$ sur $\Delta$.

2) N est symétrique et satisfait au principe du maximum ordinaire (ce qui entraîne qu'il est régulier, de type positif, et satisfait au principe de l'équilibre.

3) N satisfait au principe de domination (donc aussi au principe du balayage) et au principe de positivité des masses ([5]).

4) N tend vers 0 à l'infini en ce sens que, pour tout compact $K \subset E$, $\sup_{x \in K} N\varepsilon_x(a)$ tend vers 0 quand $a$ tend vers le point à l'infini de E.

5) E n'est effilé en aucun de ses points.

Le fait que les théorèmes 1 et 2 s'étendent à ces noyaux est immédiat dès qu'on a vérifié que la théorie classique du potentiel s'étend à ces noyaux.

## 2. Fonctions d'ensemble stabilisables.

Le théorème 2 suggère d'étudier les capacités pour lesquelles il est vrai. Nous verrons qu'il ne s'étend pas à toutes les capacités alternées d'ordre infini.

Par contre nous montrerons que les capacités stabilisables, et même plus généralement les fonctions d'ensemble stabilisables (au sens de la définition qui suit) possèdent des propriétés intéressantes qui précisent le théorème 2.

Définition. — *Soit* E *un espace topologique.*

*Soit $f$ une application* croissante de $\mathfrak{P}(E)$ *dans* $[0, +\infty]$.

1) *Nous dirons que $f$ est* stabilisable *si, pour tout* $X \subset E$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partition de* X *en deux ensembles* $X_1$ *et* $X_2$ *tels que*

$$f(\overline{X_1}) \leqslant f(X) \qquad \text{et} \qquad f(X_2) < \varepsilon.$$

2) *Nous dirons qu'une partie* X *de* E *est* stable *pour $f$ si* $f(X) = f(\overline{X})$.

Le théorème 2 exprime que la capacité extérieure de Green est stabilisable; il en est de même des capacités associées aux noyaux N signalés ci-dessus.

*Capacités alternées d'ordre infini et non stabilisables.*

Un exemple va nous montrer que la propriété d'être stabilisable n'appartient pas à certaines capacités alternées d'ordre infini.

([5]) C'est-à-dire que si $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ et $N\mu \geqslant N\nu$ partout, on a aussi $\mu(E) \geqslant \nu(E)$.

Dans le plan $E = R^2$, soit D la droite $y = 0$. Pour tout compact $K \subset R^2$, on désigne par $pr_D . K$ la projection de K sur D. Puis on pose :

$$f(K) = \text{mesure de Lebesgue de } (K \cap D) + \text{mesure de Lebesgue de } (pr_D . K).$$

Évidemment $f$ est une capacité alternée d'ordre infini; on peut même ajouter qu'elle est associée au schéma probabiliste suivant, particulièrement régulier :

Soient E et F deux espaces identiques à $R^2$; dans $E \times F$ on pose :

$$A = \text{diagonale} \bigcup \big(\text{ensemble des points } ((x, y), (x, 1))\big).$$

Dans F, soit $\mu$ la somme des mesures de Lebesgue associées aux droites $y = 0$ et $y = 1$.

Il est immédiat que $f$ est la capacité dans E associée à ce schéma (Choquet II, p. 209).

Notons sa régularité : La fibre $A \cap (m \times F)$ est une fonction continue du point $m$ (où $m \in E$).

Or, malgré la régularité de $f$, elle n'est pas stabilisable; en effet, posons dans $E = R^2$ :

$$X = ([0, 1]) \times ([0, 1]).$$

Pour toute partition de X en $X_1$ et $X_2$, on a :

$$f(\overline{X_1}) \geqslant 2(1 - f^*(X_2)).$$

Donc si $f^*(X_2) < \varepsilon$, on a $f(\overline{X_1}) \geqslant 2 - 2\varepsilon$, alors que $f^*(X_1) \leqslant 1$.

THÉORÈME 3. — *Soit* E *un espace topologique et soit* $f$ *une application croissante et stabilisable de* $\mathfrak{P}(E)$ *dans* $[0, +\infty]$.

*On suppose* $f$ *dénombrablement sous-additive (c'est-à-dire* $f\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \Sigma f(A_n)$).

*Alors, pour tout* $X \subset E$ *et pour tout* $\varepsilon < 0$, *il existe une partition de* X *en deux ensembles* $X_1$ *et* $X_2$ *tels que*

$$X_1 \textit{ soit stable} \qquad \text{et} \qquad f(X_2) < \varepsilon$$

*Démonstration.* — Posons $Z_1 = X$ et supposons défini $Z_n$. Comme $f$ est stable, il existe $D_n \subset Z_n$ tel que, si l'on pose $Z_{n+1} = Z_n \cap \complement D_n$, on ait :

$$f(D_n) < \varepsilon/2^n \qquad \text{et} \qquad f(\overline{Z}_{n+1}) \leqslant f(Z_n).$$

La suite $(Z_p)$ est décroissante; posons $Z = \bigcap Z_p$.

On a $Z_n = Z \cup \left(\bigcup_n^\infty D_p\right)$ d'où :

(1) $$f(Z_n) \leqslant f(Z) + \varepsilon/2^{n-1}.$$

D'autre part $\overline{Z} \subset \overline{Z}_{n+1}$ d'où :

(2) $$f(\overline{Z}) \leqslant f(\overline{Z}_{n+1}) \leqslant f(Z_n).$$

On tire de (1) et (2) :

$$\lim f(Z_n) \leqslant f(Z) \leqslant f(\overline{Z}) \leqslant \lim f(Z_n).$$

Donc Z est stable.

Les ensembles $X_1 = Z$ et $X_2 = \bigcup_p D_p$ constituent la partition cherchée de X.

*Remarque.* — On peut évidemment toujours supposer dans l'énoncé que $X_1$ est fermé relativement à X, donc $X_2$ ouvert relativement à X.

Corollaire. — *On fait les mêmes hypothèses sur* E *et* $f$. *Pour tout* $X \subset E$ *et pour tout* $\varepsilon < 0$, *il existe une partition de* X *en ensembles* $X_\infty$ *et* $X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *tels que*

1) *Les* $X_n$ *sont stables et* $\Sigma f(X_n) \leqslant f(X) + \varepsilon$.

2) $f(X_\infty) = 0$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 3. Les théorèmes 4 et 5 nous montreront qu'on peut dans certains cas imposer la condition supplémentaire $X_\infty = \emptyset$. Nous allons montrer par deux exemples que, même lorsque $f$ est la capacité classique, on ne peut pas dans cet énoncé, imposer pour tout X, à la fois que $X_\infty = \emptyset$ et que les $X_n$ soient stables.

*Principe de la construction.* — Soit $X \subset E$ tel que

*a*) X n'est pas de 1re catégorie en lui-même, c'est-à-dire n'est pas réunion dénombrable de sous-ensembles non-denses dans X.

*b*) Toute partie stable Y de X est non dense dans X.

Un tel X n'est évidemment pas réunion dénombrable de sous-ensembles stables.

Nous allons donner des exemples de tels ensembles X dans $E = R^3$, pour la capacité newtonienne.

1) *Exemple d'un* X *de capacité nulle.* — Il suffit de prendre pour X un $G_\delta$ partout dense dans $R^3$ et de capacité extérieure nulle.

2) *Exemple d'un* X *de capacité finie non nulle.* — Dans $R^3$, soit $(D_n)$ une suite de disques circulaires fermés de centres $(o_n)$, de rayons $(r_n)$, tels que l'ensemble des $o_n$ soit partout dense dans $R^3$ et tels que pour tout $n$, si $d_n$ désigne la distance de $o_n$ à $(D_1 \cup D_2 \ldots \cup D_{n-1})$, on ait $r_n \leqslant d_n/10^n$. On pose $D = \bigcup D_n$, puis $X = \tilde{D}$, fermeture fine de D.

Le fait que X convient tient à ce que

1) X est un $G_\delta$ partout dense dans $R^3$.

2) Pour tout ouvert $\omega$, les capacités de $D \cap \omega$ et $\tilde{D} \cap \omega$ sont égales.

3) L'ensemble D est assez rare dans $R^3$.

*Partitions dénombrables stables.* — En vue des théorèmes 4 et 5, nous allons démontrer trois lemmes :

LEMME 1. — *Soit* X *un espace topologique normal et soit* $f$ *une application croissante de* $\mathfrak{P}(X)$ *dans* $\overline{R}$.

*Soient* $A_1$ *et* $A_2$ *deux fermés disjoints de* X; *il existe alors deux ouverts* disjoints $\omega_1$ *et* $\omega_2 \subset X$ *tels que :*

1) $A \subset \omega_1$ et $A_2 \subset \omega_2$.

2) $\overline{\omega}_1 \cup \omega_2 = \omega_1 \cup \overline{\omega}_2 = X$.

3) $\omega_1$ et $\omega_2$ *sont stables pour* $f$.

*Démonstration.* — Comme X est normal, il existe une application continue $\varphi$ de X dans $[0, 1]$, qui vaut 0 sur $A_1$ et 1 sur sur $A_2$.

Posons $X_1(\lambda) = \varphi^{-1}([0, \lambda])$; la fonction $\psi(\lambda) = f(X_1(\lambda))$ est une fonction croissante de $\lambda$; donc elle possède au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité; il en est de même pour la capacité de $\varphi^{-1}([\lambda, 1])$.

Donc il existe $\lambda_0 \in ]0, 1[$ tel que :

$$f(\varphi^{-1}([0, \lambda_0[)) = f(\varphi^{-1}([0, \lambda_0]))$$

et

$$f(\varphi^{-1}(]\lambda_0, 1])) = f(\varphi^{-1}([\lambda_0, 1])).$$

Les ouverts cherchés sont

$$\omega_1 = (\mathring{X}_1(\lambda_0)) \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \complement\, \overline{\omega}_1.$$

Ils ont même frontière.

LEMME 2. — *Soit* E *un espace topologique normal dans lequel tout ouvert est une réunion dénombrable de fermés.*

*Pour tout couple de fermés* $A_1$, $A_2 \subset E$, *il existe deux ouverts disjoints* $\omega_1$, $\omega_2$, *contenant respectivement* $A_1 \cap \complement A_2$ *et* $A_2 \cap \complement A_1$.

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate du fait que dans E, tout ouvert est normal. L'espace $\complement(A_1 \cap A_2)$ est donc normal et on peut y séparer les ensembles $A_1 \cap \complement A_2$ et $A_2 \cap \complement A_1$ relativement fermés par deux ensembles $\omega_1$, $\omega_2$ disjoints et relativement ouverts, donc aussi ouverts.

COROLLAIRE. — *Avec les mêmes hypothèses sur* E, *soit* $\Omega$ *un ouvert de* E *et soit* $B \subset \Omega$.

*Il existe un ouvert* $\omega$ *tel que :*

$$B \subset \omega \subset \Omega \qquad \text{et} \qquad \overline{\omega} \cap \Omega^* = \overline{B} \cap \Omega^*$$

(*où* $\Omega^*$ *désigne la frontière de* $\Omega$).

Il suffit de poser dans le lemme précédent :

$$A_1 = \overline{B} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \complement\,\Omega, \qquad \text{puis de prendre} \qquad \omega = \omega_1.$$

LEMME 3. — *Soit* E *un espace topologique normal dans lequel tout ouvert est une réunion dénombrable de fermés.*

*Soit* $f$ *une application croissante de* $\mathfrak{P}(E)$ *dans* $[0, +\infty]$, *stabilisable, dénombrablement sous-additive et telle que :*

(1) *si* $A \subset B$ *et si* $f(A) = f(B)$, *on a* $f(A \cup C) = f(B \cup C)$ *pour tout* C [6].

*Soit* $\Omega$ *un ouvert de* E *(pour tout* $Y \subset \Omega$, *on posera* $\hat{Y} = \overline{Y} \cap \Omega$) ; *et soit* $X \subset \Omega$, *tel que* $X = \hat{X}$.

*Pour tout voisinage ouvert* V *de* $\Omega^*$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\omega_1, \omega_2 \subset X$, *relativement ouverts dans* X *et tels que :*

1) $f(\omega_1) = f(\hat{\omega}_1) = f(\overline{\omega}_1)$.

2) $f(\omega_2) = f(\hat{\omega}_2) < \varepsilon$ *et* $\hat{\omega}_2 \subset V$.

3) $X \subset \hat{\omega}_1 \cup \omega_2$ *et* $X \subset \omega_1 \cup \hat{\omega}_2$.

*Démonstration.* — D'après le théorème 3, il existe une partition de X en $Y_1$, $Y_2$ tels que $Y_1$ soit stable et $f(Y_2) < \varepsilon$.

(6) Cette condition est satisfaite pour toute capacité alternée d'ordre 2, donc en particulier pour les capacités associées aux noyaux N signalés après l'énoncé du théorème 2.

Posons $Z_1 = Y_1 \cup (X \cap \complement V)$ et $Z_2 = Y_2 \cap V$; c'est une nouvelle partition de X.

Comme $X \cap \complement V$ est fermé, on a $\overline{Z_1} = \overline{Y_1} \cup (X \cap \complement V)$. Or $Y_1 \subset \overline{Y_1}$ et $f(Y_1) = f(\overline{Y_1})$; donc d'après la relation (1) de l'énoncé, on a aussi $f(Z_1) = f(\overline{Z}_1)$.

Donc $Z_1$ est stable et $f(Z_2) < \varepsilon$, avec de plus $Z_2 \subset V$. D'après la remarque au théorème 3, nous pouvons supposer que $\widehat{Y}_1 = Y_1$, d'où aussi $\widehat{Z}_1 = Z_1$.

D'après le corollaire du lemme 2, appliqué à $B = Z_1$, il existe un ouvert $\omega$ tel que $Z_1 \subset \omega \subset \Omega$ et

$$(2) \qquad \overline{\omega} \cap \Omega^* = \overline{Z_1} \cap \Omega^*.$$

Posons, dans le lemme 1, $A_1 = Z_1$ et $A_2 = X \cap \complement \omega$. D'après ce lemme, il existe dans X, $\omega_1$ et $\omega_2$ disjoints et relativement ouverts dans X, avec

1) $A_1 \subset \omega_1$ et $A_2 \subset \omega_2$.
2) $\overline{\omega}_1 \cup \omega_2 = \omega_1 \cup \overline{\omega}_2 = X$.
3) $f(\hat{\omega}_1) = f(\omega_1)$ et $f(\hat{\omega}_2) = f(\omega_2)$.

*a*) On a $Z_1 \subset \omega_1 \subset \omega$, donc $\overline{Z_1} \cap \Omega^* \subset \overline{\omega}_1 \cap \Omega^* \subset \overline{\omega} \cap \Omega^*$. D'après (2), ceci entraîne l'égalité de ces trois quantités.

Donc $\overline{\omega}_1 = \hat{\omega}_1 \cup (\overline{\omega}_1 \cap \Omega^*) = \hat{\omega}_1 \cup (\overline{Z}_1 \cap \Omega^*)$.

Or $$\overline{Z}_1 = Z_1 \cup (\overline{Z}_1 \cap \Omega^*).$$

En outre $f(Z_1) = f(\overline{Z}_1)$; d'après la relation (1) (appliquée à $Z_1$, $\overline{Z}_1$ et $\hat{\omega}_1$) on a donc $f(\hat{\omega}_1) = f(\overline{\omega}_1)$; comme $f(\hat{\omega}_1) = f(\omega_1)$, on a donc finalement

$$f(\omega_1) = f(\hat{\omega}_1) = f(\overline{\omega}_1).$$

*b*) On a $\hat{\omega}_2 \cap Z_1 = \hat{\omega}_2 \cap A_1 = \emptyset$ d'où $\omega_2 \subset \hat{\omega}_2 \subset Z_2 \subset V$ d'où aussi $f(\omega_2) = f(\hat{\omega}_2) < \varepsilon$ et $X_2 = \widehat{X}_2 \subset V$.

*Remarque*. — Le lemme 3 est inutilement précis pour la démonstration du théorème 4, mais il permet d'améliorer l'énoncé de ce théorème lorsque $f$ est la capacité associée au noyau de Green d'un espace de Green E.

THÉORÈME 4. — *Faisons sur* E *et* $f$ *les mêmes hypothèses que dans le lemme* 3.

*Soit* X *une partie* localement fermée *de* E. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partition dénombrable* $(X_n)$ *de* X *telle que:*

1) *Pour tout* $n$, $X_n$ *est localement fermé et stable pour* $f$.

2) $\Sigma f(X_n) \leqslant f(X) + \varepsilon$.

3) *Pour tout compact* K *de* X *disjoint de* $X^*$, *il n'y a qu'une sous-famille finie des* $X_n$ *qui rencontre* K.

*Démonstration.* — Soit $X^*$ la frontière de X; posons $\Omega = \complement X^*$. Comme X est localement fermé, on a $X \subset \Omega$ et $X = \widehat{X}$ (avec les notations du lemme 3).

Comme $\Omega$ est réunion dénombrable de fermés, il existe une suite décroissante $(V_n)$ de voisinages ouverts de $\Omega^*$ dont l'intersection ne rencontre pas $\Omega$.

Posons $Y_1 = X$ et supposons défini $Y_n \subset X$ tel que $Y_n = \widehat{Y}_n$. D'après le lemme 3, il existe $X_n \subset Y_n$, relativement ouvert dans $Y_n$, tel que, si l'on pose $Y_{n+1} = Y_n \cap \complement X_n$, on ait:

$$f(X_n) = f(\overline{X}_n) \quad \text{et} \quad Y_{n+1} \subset V_{n+1} \quad \text{avec} \quad f(Y_{n+1}) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Les $X_n$ constituent une partition de X vérifiant les propriétés 1) et 2). Pour que la propriété 3) soit satisfaite, il suffit de supposer les $V_n$ tels que $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$, ce qui est toujours possible.

*Remarque.* — Lorsque E est un espace de Green et $f$ la capacité de Green correspondante, on peut imposer en outre que, pour tout $n$, l'intérieur de $X_n$ (relativement à X) soit stable et partout dense dans $X_n$.

*Application aux ensembles quelconques.*

Théorème 5. — *Mêmes hypothèses sur* E *et* $f$.
*Soit* X *une partie quelconque de* E *telle que*

$$f(X) = \inf_{X \subset \omega} f(\omega) \qquad (\textit{ou } \omega \textit{ désigne un ouvert}).$$

*Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partition dénombrable* $(X_n)$ *de* X *telle que*

$$\Sigma f(\overline{X}_n) < f(X) + \varepsilon.$$

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que X est contenu dans un ouvert X' tel que $f(X') < f(X) + \varepsilon$ et d'appliquer le théorème 4 à X', qui est localement fermé.

CAS PARTICULIER. — *Pour tout* X *tel que* $f(X) = 0$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un recouvrement de* X *par une suite* $(A_n)$ *de fermés tels que* $\Sigma f(A_n) < \varepsilon$.

Lorsque E est réunion dénombrable de compacts, on peut remplacer dans cet énoncé le mot « fermés » par « compacts ». L'exemple 1 montre qu'on ne peut pas imposer toujours à ces compacts d'avoir une capacité nulle.

## BIBLIOGRAPHIE

M. BRELOT. — Sur les ensembles effilés, *Bull. Sc. Math.*, t. 68, 1944, p. 12-36.

H. CARTAN. — Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. *Ann. Univ. Grenoble, Math. Phys.*, t. 22, 1946, p. 221-280.

G. CHOQUET I. — Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *C. R.* t. 244, 1957, p. 1606-1609.

II. — Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, t. V, 1953, p. 131-292.