Annales de l'institut Fourier

Alexander Grothendieck

Erratum au mémoire : produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires

Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), p. 117-120

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__117_0>

ERRATUM AU MÉMOIRE : PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

par **A. GROTHENDIECK**

M. J. Dieudonné vient d'attirer mon attention sur une démonstration incorrecte de ce mémoire (Memoirs of the American Mathematical Society, Number 16, 1955). Il s'agit du lemme 13, 2° (chapitre I, paragraphe 4, n° 3, page 131) : avec les notations de la démonstration de ce lemme, il ne sera pas vrai en général que φ'' est injective, et pour cela la conclusion de la dernière phrase de la démonstration, affirmant que w applique E_{A^0} dans G_B, est injustifiée. Ci-dessous, je vais esquisser un contre-exemple, prouvant que la conclusion du lemme 13, 2° est en effet fausse. Tout ce qu'on peut dire, comme conséquence immédiate de la première partie du lemme par exemple, c'est que toute application intégrale d'un espace localement convexe E dans un autre G provient d'une application intégrale d'un espace $\widehat{E_V}$ dans G (V étant un voisinage convexe cerclé convenable de O dans E) ; ou encore peut, en tant qu'application de E dans G″, s'obtenir en factorisant en $E \to E_1 \to G_1 \to G''$, où toutes les applications linéaires sont continues, celle du milieu étant intégrale, et les espaces E_1 et G_1 étant des espaces de Banach (si on veut, des espaces L^∞ et L^1 respectivement). Mais comme nous verrons, on ne peut dans cet énoncé se dispenser de faire intervenir le bidual G″. Signalons cependant que le rôle de ce lemme 13 (et en particulier de sa deuxième partie fausse) était de pure commodité, pour nous épargner une fois pour toutes plusieurs passages fastidieux aux biduals. *Aucun* énoncé ultérieur dans la démonstration duquel nous avons fait appel à ce lemme n'a besoin de rectification. Ces énoncés sont le théorème 9, le lemme 14 (qui implique le th. 10) et son corollaire; enfin nous référons aussi au lemme 13, 2° dans la démonstration du théorème 6 du chapitre II, paragraphe 2. Pour le théorème 9, on note que sa troisième partie est contenue par exemple dans le théorème 10, 1°; pour les deux premières, on note d'abord que, une fois qu'elles sont prouvées dans le cas des espaces de BANACH, la version correcte du lemme 13 nous prouvera que v transforme un voisinage convenable de 0 dans E en une partie faiblement relativement compacte de l'espace localement convexe F'' (« faible » signifiant ici la topologie faible associée à la topologie « naturelle » de F'', i.e. celle de la convergence équicontinue sur F'), et que v transforme les parties faiblement compactes de E en des parties relativement compactes de F'' (toujours muni de sa topologie « naturelle »). Comme F est quasi-complet, donc ses parties convexes cerclées et fermées sont fermées aussi dans F'' (tant pour sa topologie naturelle, que pour la topologie faible associée) il s'ensuit que pour une partie de F, il revient au même d'être faiblement relativement compacte (resp. relativement compacte) dans F, ou dans F'', d'où aussitôt la conclusion voulue. — Dans la démonstration du lemme 14, 1°, on peut encore factoriser comme indiqué plus haut u en $E \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{j} F_1 \xrightarrow{k} F''$; mais v transformant toute partie bornée de F en une partie de G ayant la propriété Φ, et à fortiori faiblement compacte, v'' transformera les parties équicontinues de F'' en des parties de G (et non seulement G''), ayant encore la propriété Φ; comme on peut supposer que k transforme la boule unité de F_1 en une partie équicontinue, il s'ensuit que $v''k$ transforme la boule unité de F_1 en une partie de G ayant la propriété Φ. Remplaçant E par E_1, F par F_1, v par $v''k$, on est bien ramené au cas où les espaces E, F sont des espaces de Banach. — Quant au corollaire 1 du lemme 14, il résulte aussi tout de suite de la conjonction du th. 9, 1° et du lemme 14, 1°. Enfin, dans la première partie de la démonstration du théorème 6 du chapitre 2, nous ne nous référons qu'en apparence à la deuxième partie du lemme 13, car l'espace dans lequel on applique E étant un dual, c'est la première partie du lemme 13 qui intervient réellement ici.

Je profiterai aussi de l'occasion pour signaler que je me réfère plusieurs fois, notamment au chapitre II, paragraphe 1, à un article « La théorie de FREDHOLM » (à paraître dans Summa Mathematicae Brasiliensis; cette référence est notée [11] dans mon mémoire), pour certaines propriétés fines des valeurs propres des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert. M'étant aperçu ensuite que ces résultats étaient connus déjà, [essentiellement contenus dans : H. WEYL, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 35, 408-401 (1949)] j'ai renoncé à les faire figurer dans l'article en question, contrairement à mon intention première, de sorte que les références que j'y avais faites deviennent inadéquates.

Voici enfin le contre-exemple promis au début. Soit M un espace de Banach, F un sous-espace vectoriel fortement ferme de M′ dont la boule unité soit faiblement dense dans celle de M′, enfin u une application linéaire d'un espace de BANACH E dans F, intégrale en tant qu'application dans M′ mais non en tant qu'application dans F. (On va prouver plus bas qu'on peut trouver une telle situation, même avec E réflexif.) Soit G l'espace F muni de la topologie $\tau(F, M)$ induite par $\tau(M', M)$, donc le dual de G est M, les parties bornées de G sont celles qui sont bornées dans M′ i. e. bornées dans F au sens de la norme, donc la topologie forte du dual de G est la topologie normée de M. Comme u définit une forme bilinéaire intégrale sur $E \times M$, u est une application intégrale de E dans G. Cependant, u n'est pas une application intégrale de E dans un espace G_B (B étant une partie bornée convexe cerclée convenable de G) car (G et F ayant les mêmes parties bornées) u serait aussi intégrale en tant qu'application de E dans F, ce qui est contraire à l'hypothèse. — Il reste à prouver qu'on peut trouver M, F, E, u comme indiqués. Nous admettrons pour ceci le fait élémentaire suivant (non publié) : Soit Q un espace de BANACH, P un sous-espace de BANACH, alors les conditions suivantes (prises d'ailleurs parmi une vingtaine de conditions équivalentes du même genre) sont équivalentes : *a*. P'' est facteur direct dans Q'' (ou encore : P^0 est facteur direct dans Q') ; *b*. Pour tout espace de BANACH E (qu'on peut supposer aussi restreint à être réflexif et séparable par exemple), toute application intégrale de E dans Q telle que $u(E) \subset P$, est une application intégrale de E dans P. Ceci admis, prenons $M = l^1$, et prenons pour F un sous-espace vectoriel fortement ferme de

$M' \subset l^\infty$ contenant c_0 (de sorte que sa boule unité sera bien faiblement dense dans celle de M'). Il faut montrer seulement qu'on peut choisir F de telle façon que F'' ne soit pas facteur direct dans le bidual de l^∞. Posant $R = l^\infty / c_0$, il suffit de prendre l'image réciproque dans l^∞ d'un sous-espace de R dont le bidual n'est pas facteur direct dans le bidual de R. Or R est isomorphe à un espace C(K) des fonctions continues sur un espace compact infini K (K est le complémentaire, dans le compactifié de Stone-Čech de l'ensemble N des entiers naturels, de ce même ensemble N). Comme bien connu, tout espace de Banach séparable est isomorphe à un sous-espace d'un tel C(K), qui contient en particulier, par exemple, un espace de Hilbert de dimension infinie. Ce dernier est identique à son bidual, et comme il est bien connu n'est pas isomorphe à un facteur direct d'un espace C(K); il répond donc à la question.

Je profite de l'occasion pour signaler une affirmation erronée de l'article : « Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K) », *Can. Journal of Math.*, vol. 5, pp. 129-173 (1953). Il s'agit du lemme 4 de la page 144, affirmant que l'espace $\varepsilon^{(m)}$ des fonctions m fois continûment différentiables sur un ouvert ou un cube compact de R^n, muni de sa topologie naturelle, est isomorphe à un facteur direct de l'espace des fonctions continues sur un espace localement compact convenable. La démonstration est manifestement erronée, les g_p construites ne satisfaisant pas aux conditions voulues; il en est encore de même de la démonstration donnée en note de bas de page, car (avec les notations de cette note) il n'est pas vrai que $\varepsilon^{(m)}(K, \varepsilon^{(m)}(K_0))$ s'identifie à $\varepsilon^{(m)}(K \times K_0)$. En fait, j'ai démontré que pour un cube K de dimension $\geqslant 2$, $\varepsilon^{(m)}(K)$ ni même son bidual ne peut être isomorphe à un facteur direct de l'espace de fonctions continues sur un compact convenable. (Pas de démonstration ici.) De ce fait, la prop. 7 de l'article cité reste non démontrée. Le résultat faux du lemme 5 est mentionné à diverses reprises dans des travaux ultérieurs, comme mon mémoire aux « Memoirs » cité dans le titre, et est donné en exercice dans mon cours d'Espaces Vectoriels Topologiques (São Paulo, 1953-1954), où il ne figure pas dans les Errata. Cependant en aucun endroit il ne figure dans la démonstration d'une proposition autre que celle signalée plus haut.