ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JULIEN KRAVTCHENKO

Additions à la «note sur les solutions approchées du problème des sillages»

Annales de l'institut Fourier, tome 4 (1952), p. 141-143

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__141_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ADDITIONS A LA « NOTE SUR LES SOLUTIONS APPROCHÉES DU PROBLÈME DES SILLAGES » (¹)

par Julien KRAVTCHENKO

---

§ 1. — Dans la note précitée, j'ai utilisé les formules résolutives du problème indéterminé, symétrique des sillages en fluide indéfini, données récemment par M. Rapoport. Je voudrais ici comparer rapidement les résultats de cet auteur à la solution classique de Lévi-Civita, que je commence par rappeler.

§ 2. — Soit Γ, le second quadrant $X \leqslant 0$, $Y \geqslant 0$ du cercle unitaire $|Z| = 1$ du plan de la variable complexe $Z = X + iY$. La correspondance :

$$\sqrt{\zeta} = -\frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$$

et son inverse :

$$Z = \sqrt{\zeta - 1} - \sqrt{\zeta} \tag{1}$$

(ou $\sqrt{\zeta}$ et $\sqrt{\zeta - 1}$ sont positifs pour Z réel et négatif) transforme Γ en le demi-plan $\eta > 0$ du plan $\zeta = \xi + i\eta$.

Soient alors $n + 1$ constantes réelles arbitraires :

$$\alpha_{2p+1} (p = 0, 1, \ldots, n);$$

posons :

$$\omega(Z) = \theta + i\tau = i \log \frac{i - Z}{i + Z} + \sum_{p=0}^{n} \alpha_{2p+1} Z^{2p+1}, \tag{2}$$

(¹) Cf. *Annales de l'Institut Fourier*, t. III, 1951, pp. 287-299. Dans la suite, les références à cet article seront notées K.

le logarithme se réduisant à zéro pour $Z = 0$. On a :

$$\tau(X + i0) = 0, \quad -1 \leqslant X \leqslant 0; \quad \theta(0 + iY) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant Y \leqslant 1.$$

Soient : C une constante réelle positive, $z(Z)$, la fonction holomorphe dans Γ, nulle pour $Z = i$, telle que

$$\frac{d\zeta(Z)}{dz(Z)} = Ce^{-i\omega(Z)}; \tag{3}$$

$z(Z)$ définit alors la moitié supérieure de l'écoulement avec sillage, symétrique par rapport à l'axe réel du plan z. C'est la solution de Levi-Civita.

§ 3. — Remplaçons alors, dans (2) et (3), Z par sa valeur (1) : il vient

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{C\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta - 1} + i} e^{i[\sqrt{\zeta}P(\zeta) - \sqrt{\zeta - 1}Q(\zeta)]} \tag{4}$$

ou P et Q sont des polynômes de degré n, à coefficients réels. On retrouve ainsi la forme de la solution donnée par M. Rapoport (Cf. K., p. 289).

§ 4. — Toutefois, la détermination des coefficients des polynômes P et Q de la formule (4) en fonction des α_{2p+1} de (2) exige des calculs relativement compliqués. Au contraire, M. Rapoport choisit arbitrairement l'un de ces polynômes, les coefficients de l'autre étant alors calculables au moyen de formules assez simples. C'est sur ce point, sans importance au point de vue théorique, mais qui semble capital au point de vue des applications numériques, que cet auteur paraît avoir apporté un élément nouveau.

§ 5. — Dès lors, la question se pose de savoir : quelle est la forme de la solution indéterminée la mieux adaptée au calcul approché des problèmes déterminés. C'est au spécialiste des calculs numériques à répondre. Mais, à première vue, il semblerait que la forme de M. Rapoport offre de réels avantages.

§ 6. — Observons que rien n'empêche de supposer $n = \infty$ dans (2) : il suffit, par exemple, que la série du second membre ait un rayon de convergence supérieur à 1. Il est, de même, possible d'étendre les formules (4) au cas où P et Q seraient des séries entières. On voit donc que la solution de Levi-Civita est théoriquement beaucoup plus maniable que celle de M. Rapoport, mais ce point est, évidemment, sans importance pour les applications numériques courantes.

§ 7. — Lors de la publication de K, j'ignorais une série de travaux en langue allemande, consacrés à la solution du problème symétrique, déterminé du sillage à partir des formules (2) et (3) de Levi-Civita. On en trouvera la liste dans la thèse, en cours de publication, de M. Richard Eppler [2], ainsi que plusieurs exemples de calcul des solutions déterminées d'un grand intérêt. Je remercie M. Eppler d'avoir, par ses communications obligeantes, comblé les lacunes de ma bibliographie.

§ 8. — Je rectifie deux erreurs matérielles de K : 1) page 293, 5e ligne, lire : a un rayon vecteur $|z - R|$ compris... etc. au lieu de : a un rayon de courbure compris... ; 2) page 298, lire :

$$P'(1) + \frac{1}{2} P(1) = 0{,}547$$

au lieu de 0,515.

(Parvenu aux Annales le 16 décembre 1952.)

Au cours de la correction des épreuves, M. A. H. Armstrong a bien voulu me signaler : 1) que la méthode de M. Rapoport, décrite dans K, ne diffère que par les notations de celle utilisée dès 1922 par M. Brodetsky dans un travail inséré aux *Proc. Roy. Soc.*, série A 102, pp. 542-553. M. Brodetsky ne discute pas toutefois la validité des solutions qu'il a formées ; 2) que la 10e ligne de K, p. 294 et la formule qui suit doit être remplacée par le texte suivant :
de $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ au moyen de :

$$P_1(\zeta) - \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta - \xi_1}}\, P(\zeta) + \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta - \xi_1}}\, Q(\zeta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right) \quad \text{pour } \zeta \to \infty.$$

[2] « Zur Theorie der unstetigen Strömungen », *Inaugural Dissertation*, Stuttgart, 1951.