ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

R. DE POSSEL

La notion physique d'énergie vis-à-vis des définitions du travail et de la force

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 185-195
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__185_0>

LA NOTION PHYSIQUE D'ÉNERGIE VIS-A-VIS DES DÉFINITIONS DU TRAVAIL ET DE LA FORCE

par René de POSSEL (Alger).

---

1. — En dehors des deux aspects usuels de la Mécanique théorique, où les systèmes sont présentés comme ensembles de points isolés et comme milieux continus, il en est un troisième qui les comprend tous deux comme cas particuliers, et qui peut même schématiser plus simplement certains systèmes réels. C'est l'aspect qui a été développé par M. Brelot puis par moi-même dans une série d'articles (voir bibliographie à la fin de l'article). Rappelons qu'il consiste à représenter les diverses grandeurs mécaniques par des fonctions additives d'ensemble ou *mesures* à valeurs numériques ou vectorielles, et par des intégrales de Stieltjès prises par rapport à ces mesures, soit au sens de Riemann, soit au sens de Lebesgue, selon le caractère plus ou moins élémentaire qu'on désire donner à l'exposé.

Entre autres avantages, cette méthode permet d'obtenir une définition simple du travail qui s'applique dans tous les cas, et qui, d'autre part, s'impose sans laisser de choix si on ne veut pas perdre de vue toute interprétation physique.

2. — Rappelons quelques-unes des définitions données dans les articles cités (voir en particulier de Possel [9]) (1). Étant donné un corps matériel en mouvement C, la masse $m(c)$ est une mesure définie dans C, chaque force répartie (2) $\mathcal{F}$ est définie par son vecteur principal $\vec{S}(c)$, qui existe pour tout corps matériel c mesurable

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie à la fin de l'article.

(2) Dans le cas d'une mesure vectorielle représentant une force, M. Brelot emploie l'expression « action dynamique ou dyname » (voir [4]). Pour une mesure vectorielle quelconque il utilise le terme « *résultante* » là où nous disons « *vecteur principal* »

par rapport à la masse. Nous admettons d'abord que le moment en O de la force $\mathcal{F}$ a pour expression

$$\vec{G}_O(c) = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS}$$

où M parcourt le corps partiel c. Ce moment se transforme évidemment suivant la loi

$$(1) \qquad \vec{G}_{O'}(c) = \vec{G}_O(c) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}(c).$$

Pour un corps c supposé petit, prenons le moment en un de ses points et supposons $\vec{S}(c)$ de l'ordre du volume de c: le moment est alors du 4^e ordre au moins par rapport aux longueurs. Si donc pour une force répartie donnée ce moment était d'un ordre inférieur, la force ne serait pas susceptible d'une telle représentation. Nous examinerons plus loin cette extension.

Supposons le corps C en mouvement sous l'action des forces absolues de vecteurs principaux $\vec{S}_k(c)$. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit, dans un repère galiléen, pour tout corps partiel c:

$$(2) \qquad \sum_k \vec{S}_k(c) = \int_c \vec{\Gamma} dm.$$

3. — **Définition du travail et de la puissance.** — Supposons chaque point matériel M du corps C animé d'une vitesse $\vec{V}$ virtuelle ou réelle. La puissance de la force répartie $\mathcal{F}$, de vecteur principal $\vec{S}(c)$, sera par définition, pour le corps partiel c (M. Brelot [4] p. 19 et R. de Possel [9] p. 19)

$$(3) \qquad \mathfrak{L}(c) = \int_c \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS}.$$

Le travail de la force dans un intervalle (t_1, t_2) est $\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L} dt$ (M. Brelot [4] p. 19).

Montrons comment la définition s'applique aux divers cas classiques pour donner les définitions antérieurement admises. Si, par exemple, on suppose que $\mathcal{F}$ se réduit à un vecteur-force unique $\vec{F}$ appliqué en un point matériel P qui change à chaque instant, l'intégrale ci-dessus se réduit bien à $\vec{V}_P \cdot \vec{F}$.

Dans le cas d'un solide, on a $\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$, ce qui donne en utilisant une propriété de l'intégrale de Stieltjès,

$$\mathfrak{T}(c) = \vec{V}_A \cdot \vec{S}(c) + \vec{\omega} \int_c \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dS} = \vec{V}_A \cdot \vec{S}(c) + \vec{\omega} \cdot \vec{G}_A(c).$$

Dans le cas d'un milieu continu C, si on considère la force intérieure de contact, et si $\vec{S}(c_i)$ est le vecteur principal de cette force s'exerçant sur la surface de l'élément c_i, on retrouve bien pour $\mathfrak{T}(C)$ la limite de $\sum \vec{V}_i \cdot \vec{S}(c_i)$ donnée comme définition par H. Béghin [1].

4. — Si la mécanique doit constituer un schéma susceptible de représenter certains phénomènes réels, on ne peut évidemment pas donner aux quantités qui y figurent des définitions arbitraires. En particulier, la définition donnée ci-dessus pour le travail s'impose comme nous allons le voir.

Dans toute application physique de la dynamique, chaque force répartie distincte des forces d'inertie est toujours associée à un phénomène ou à un ensemble de phénomènes physiques susceptible de modifier le mouvement du corps considéré C, donc de lui fournir de l'énergie cinétique ou de lui en prendre, l'énergie cinétique totale du corps étant égale à $\int_C \frac{1}{2} \vec{V}^2 dm$.

S'il y a, par exemple, apport d'énergie cinétique au corps C, le phénomène physique inclut la disparition d'une égale quantité d'énergie sous une forme différente, par exemple énergie cinétique d'un autre corps, énergie potentielle de l'attraction universelle, chaleur, etc.

Supposons d'abord une force répartie $\mathcal{F}$ qui agit seule sur le corps C. Son travail pendant un intervalle de temps représente l'énergie fournie par le phénomène physique associé à $\mathcal{F}$ et transformée en énergie cinétique, conformément au sens physique du mot travail. La puissance de $\mathcal{F}$ est donc, pour tout corps partiel c,

$$\mathfrak{T}(c) = \frac{d}{dt} \int_c \frac{1}{2} \vec{V}^2 dm = \int_c \vec{V} \cdot \vec{\Gamma} dm.$$

D'après l'équation fondamentale (2), on obtient bien l'expression

$$\mathfrak{T}(c) = \int_c \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS}. \tag{3}$$

Si plusieurs forces réparties, associées à des phénomènes physiques différents, agissent simultanément, nous devons admettre le principe de l'indépendance des effets des forces, qui peut s'exprimer en disant que chacune d'elles fournit au corps la même puissance que si elle agissait seule sur lui, le corps étant animé à cet instant des mêmes vitesses. Il faut donc prendre pour valeur de la puissance de chacune des forces la même expression (3).

Considérons maintenant un mouvement dit *virtuel* dans lequel, à l'instant considéré, le corps a des vitesses $\vec{W}(M)$ quelconques, ne respectant éventuellement ni les liaisons imposées, ni l'impénétrabilité des différentes parties du corps (voir ci-dessous § 9). Pour évaluer la puissance d'une force répartie $\mathcal{F}$ lors d'un tel mouvement virtuel, on peut admettre qu'un expérimentateur assez habile parviendrait, en mettant en jeu des phénomènes physiques appropriés à réaliser un mouvement réel ne respectant plus au besoin aucune des liaisons initialement imposées, et dont les vitesses à l'instant initial seraient précisément $\vec{W}(M)$. Ce mouvement aurait lieu sous l'action simultanée de $\mathcal{F}$ et des nouvelles forces introduites par l'expérimentateur.

Nous prendrons donc comme définition de la puissance de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{L}(c) = \int_c \vec{W} \cdot \vec{dS}.$$

5. — Examinons le cas, plus général, où le moment en O de la force répartie $\mathcal{F}$ n'est plus, comme nous l'avons supposé, égal à

$$\int_c \overrightarrow{OM} \wedge \vec{dS}$$

[6, 8, 9]. Ceci correspond au cas envisagé par H. Béghin [1] où le moment de la force pour un petit corps c pris en un point de ce corps est du 3^e ordre par rapport aux longueurs.

La force $\mathcal{F}$ est un *torseur réparti* défini par son vecteur principal $\vec{S}(c)$ et par son moment $\vec{G}_O(c)$ assujetti simplement à se transformer suivant la loi

$$\vec{G}_{O'}(c) = G_O(c) = \overline{O'O} \wedge \vec{S}(c).$$

Nous nommons *moment pur* de la force $\mathcal{F}$ la mesure vectorielle

$$\vec{\sigma}(c) = \vec{G}_O(c) - \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \vec{dS} \tag{7}$$

qui est indépendante de O comme on le vérifie immédiatement.

Si $\vec{\sigma}(c)$ est toujours nul, le torseur est dit *pur*.

On peut admettre, comme nous l'avons fait [6, 7, 8, 9], que la force d'inertie est toujours un torseur pur. L'équation fondamentale (2) devra être complétée par l'égalité $\sum_k \vec{\sigma}_k(c) = 0$, où les $\vec{\sigma}_k$ sont les moments purs des diverses forces absolues. Mais on peut aussi supposer que la force d'inertie a elle aussi un moment pur non nul $\vec{\mu}(c)$; ce serait le cas pour un milieu doué de *spin* (voir O. Costa de Beauregard [5]). On aurait alors

$$\vec{\mu}(c) + \sum_K \vec{\sigma}_K(c) = 0.$$

Quoi qu'il en soit, l'expression du travail donnée par H. Béghin revient dans ce cas à prendre pour la puissance la limite de la somme

$$\sum_i \vec{W}_{M_i} \cdot \vec{S}(c_i) + \vec{\omega}_i \cdot \vec{G}_{M_i}(c_i),$$

C étant subdivisé en petits corps c_i, M_i désignant un point de c_i, et $\vec{\omega}_i$ étant le tourbillon en ce point. Cette limite s'écrit, d'après (7),

$$(8) \quad \int_C \vec{W} \cdot \vec{dS} + \int_C \vec{\omega}\left(\vec{dG}_0 - \overrightarrow{OM} \wedge \vec{dS}\right) = \int_C \vec{W} \cdot \vec{dS} + \vec{\omega} \cdot \vec{d\sigma},$$

avec $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}\, \vec{W}$.

Comme le montre H. Béghin, cette expression conduit bien au théorème des travaux virtuels sous sa forme générale. Mais représente-t-elle toujours la puissance de la force au sens physique du mot ? L'exemple qui suit est destiné à montrer que, pour répondre à cette question, il faudrait d'abord préciser d'avantage l'interprétation physique de la notion de force, en particulier dans le cas où la force n'est pas un torseur pur.

6. — Pour mettre en évidence les difficultés que présente alors la définition de la puissance, revenons sur un cas particulier que nous avons déjà étudié ailleurs ([6] et [8]).

C'est le cas où on considère une force répartie $\mathcal{F}$ pouvant être non pure, de vecteur principal $\vec{S}(c)$, comme schématisant une force pure Φ dont le vecteur principal $\vec{T}(c)$ subit de fortes variations d'un point à un autre dans des corps partiels très petits, et peut être remplacé par une moyenne $\vec{S}(c)$ quand c n'est pas trop petit et a une forme assez simple; de plus le moment en O de Φ est supposé égal à celui de $\mathcal{F}$.

Ces moments ont pour valeur commune

$$\vec{G}_0(c) = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dT},$$

et le *moment pur* de $\mathcal{F}$ est

$$\vec{\omega}(c) = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dT} - \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS} = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d\tau},$$

en posant $\vec{\tau}(c) = \vec{T}(c) - \vec{S}(c)$.

Moyennant des hypothèses générales de régularité, nous avons montré que dans ce cas les dilatations interviennent dans l'expression de la puissance de Φ. Celle-ci est égale à l'expression (8) augmentée du terme

$$\text{(9)} \qquad Q(c) = \int_c \sum_i \sum_j g_{ij} d\mu^{ij}$$

avec

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \frac{\partial w^j}{\partial x^i}\right), \qquad \mu^{ij}(c) = \frac{1}{2} \int_c x^i d\tau^j + x^j d\tau^i,$$

les w^i étant les coordonnées de la vitesse et les τ^i celles de $\vec{\tau}$. On reconnaît en (9) l'expression de la puissance d'une tension dans un milieu continu.

Il peut arriver, en se plaçant à ce point de vue, que la force $\mathcal{F}$ ait un vecteur principal et un moment identiquement nuls sans que sa puissance soit nulle. Donnons-en un exemple simple.

Supposons Φ constituée par un très grand nombre de petits couples dont chacun est formé de deux vecteurs-force opposés de longueur f_k parallèles au plan x^1Ox^2 faisant avec Ox^2 des angles α et $\alpha + \pi$ et appliqués aux extrémités d'un segment B_kA_k parallèle à Ox^1 et de longueur δ_k. De plus la répartition est telle que

$$\sum \delta_k f_k = \lambda$$

pour un volume unité (λ fixe). On a alors

$$\vec{S}(c) = 0, \qquad \mu^{11}(c) = \sum_{A_k,\, B_k \in c} \delta_k f_k \cos\alpha, \qquad \mu^{12}(c) = \sum_{A_k,\, B_k \in c} \delta_k f_k \sin\alpha,$$

tous les autres $\mu^{ij}(c)$ sont nuls.

En désignant le volume par $v(c)$, on a

$$\mu^{11}(c) = \lambda \cos\alpha \cdot v(c), \qquad \mu^{12}(c) = \frac{1}{2}\lambda \sin\alpha \cdot v(c),$$

$$Q(c) = \lambda \cos\alpha \int_c g_{11} dv + \lambda \sin\alpha \int_c g_{12} dv.$$

Cette expression fait bien intervenir les dilatations.

En particulier, supposons $\alpha = 0$: tous les couples ont un moment nul, la force $\mathcal{F}$ a un vecteur principal et un moment nuls, mais la puissance de la force Φ, toujours schématisée par $\mathcal{F}$ du point de vue où l'on s'est placé, n'est pas nulle en général, puisque égale à

$$Q(c) = \lambda \int_c \frac{\partial w^1}{\partial x^1} dv.$$

7. — Définition de la force à partir de l'énergie.

Nous avons vu plus haut comment la nécessité de respecter l'interprétation physique du travail conduit à une définition simple de celui-ci. Un procédé analogue permet de définir la force à partir de l'énergie comme l'avait tenté Hertz au siècle dernier. Les avantages d'une telle définition sont nombreux. Citons-en trois :

a) Des trois notions de force, masse et énergie, seule la dernière a résisté aux assauts des mécaniques nouvelles.

b) Le calcul des forces électrostatiques et électromagnétiques s'effectue d'ordinaire par l'intermédiaire d'une énergie.

c) Dans les problèmes de mécanique les plus classiques, tels que ceux qui sont actuellement donnés aux divers examens et concours, c'est généralement l'énergie acquise par le système pour certains mouvements qui figure dans les données, et non les forces. Ces dernières restent même souvent inconnues, la réalisation de certaines liaisons n'étant pas précisée.

Nous avons déjà indiqué ailleurs une telle définition de la force ([9], p. 28 et 29). Nous nous proposons d'y ajouter ici quelque précision.

Chacun des phénomènes physiques donnant lieu à une *force* *répartie* (*absolue* au sens de Painlevé), est envisagé comme une *source d'énergie* susceptible de fournir au système de l'énergie cinétique, ou de lui en prendre. Le mouvement du système donne lieu à des échanges entre ces sources et son énergie cinétique. Le repère est, bien entendu, supposé galiléen.

Admettons que l'une de ces sources, pour un mouvement quelconque du système (virtuel ou réel), fournisse à chacun de ses corps partiels c une *puissance* qui soit fonction du champ des vitesses $\vec{W}$, soit $\mathfrak{L}(c, \vec{W})$, bien que cette puissance ne soit souvent connue que pour certains mouvements particuliers. Si la *force répartie* correspondante existe, et a pour vecteur principal $\vec{S}(c)$, on doit avoir

$$\mathfrak{L}(c, \vec{W}) = \int_c \vec{W} \cdot \vec{dS}. \tag{10}$$

$\mathfrak{L}$ est dans ce cas une *mesure* par rapport à c, et une *fonctionnelle linéaire* par rapport à $\vec{W}$.

Admettons à priori, sans supposer l'existence de la force, que $\mathfrak{L}$ soit, pour $\vec{W}$ fixe, une mesure définie pour tout borélien c, et, pour c fixe, une fonctionnelle linéaire continue de $\vec{W}$ (c'est-à-dire telle que

$$|\vec{W}| < M$$

entraîne $|\mathfrak{L}(c, \vec{W})| < AM$, A étant une constante ne dépendant que de c. *L'existence d'une mesure vectorielle $\vec{S}(c)$ telle que l'égalité* (10) *ait lieu résulte alors du théorème de F. Riesz sur la représentation d'une fonction linéaire continue par une intégrale de Stieltjès.*

Le théorème de F. Riesz est classique sous la forme scalaire, mais il s'étend sans peine à la forme vectorielle qui se rencontre ici, ne serait-ce qu'en passant aux coordonnées.

8. — **Énoncés énergétiques de la loi fondamentale de la dynamique.**

Le repère étant galiléen, et $\vec{W}$ étant un champ de vitesses virtuelles quelconque, considérons toutes les sources d'énergie qui agissent sur le système ; soient $\mathfrak{L}_i(c, \vec{W})$ leur puissance, $\vec{\Gamma}$ l'accélération réelle de chaque point. *La loi fondamentale de la dynamique s'écrit alors* ([9] p. 29) *sous la forme du principe de d'Alembert :*

$$\sum \mathfrak{L}_i(c, \vec{W}) = \int_c \vec{W} \cdot \vec{\Gamma} dm. \tag{11}$$

Nous allons en donner trois autres énoncés équivalents :

a) *Considérons un mouvement virtuel* $\mathcal{M}$ *dans lequel, à l'instant considéré, les positions et les accélérations conservent leur valeur réelle, les vitesses étant égales à* $\vec{W}$. La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique, ou *puissance cinétique*, est, dans ce mouvement,

$$\Pi(c, \vec{W}) = \frac{d}{dt}\int_c \frac{1}{2}\vec{V}^2 dm = \int_c \vec{W} \cdot \vec{\Gamma} dm. \tag{12}$$

L'égalité (11) s'écrit

$$\sum_i \mathcal{L}_i(c, \vec{W}) = \Pi(c, \vec{W}), \tag{13}$$

et exprime que, dans le mouvement $\mathcal{M}$, *la somme des puissances des sources est égale à la puissance cinétique*.

Dans le cas particulier du mouvement réel, on retombe sur le théorème de l'énergie cinétique.

b) La loi fondamentale s'énonce encore en disant que *la conservation de l'énergie doit avoir lieu, non seulement pour le mouvement réel, mais encore pour tout mouvement* $\mathcal{M}$ *défini ci-dessus en a*).

c) Considérons la configuration du système à l'instant t dans son mouvement réel.

Supposons que l'on communique aux divers points du système des vitesses arbitraires $\vec{W}$, et qu'on l'abandonne à lui-même, les sources d'énergie restant identiques (ce qui peut s'exprimer en disant que les forces n'ont pas changé). La loi fondamentale s'énonce alors ainsi :

1) *Dans le mouvement* $\mathcal{N}$ *que prend le système, les accélérations initiales ne dépendent pas des vitesses* $\vec{W}$.

2) *Il y a conservation de l'énergie.*

En effet, les accélérations sont alors les mêmes que dans le mouvement réel, et la conservation de l'énergie au cours du mouvement $\mathcal{N}$ s'exprime par l'égalité (13). On en déduit les égalités (12) et (11).

9. — Extension de la définition d'un corps en mouvement.

Adoptant dans ce qui précède le point de vue de M. Brelot, nous avons admis que le corps C_t à l'instant t est en correspondance biunivoque avec un ensemble fixe K par une fonction $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(P, t)$, P parcourant K, qui définit le mouvement. Les ensembles considérés sont supposés boréliens et bornés.

La correspondance biunivoque ne permet pas de schématiser simplement certains systèmes, comme par exemple le suivant : une surface matérielle déformable dont deux portions S et S′ viennent se toucher à partir d'un certain instant, alars que deux forces réparties sont appliquées respectivement à ces portions. Il faut admettre la coïncidence mathématique de S et S′ si l'on veut éviter des complications.

Il nous a paru préférable de supposer que *la fonction* $f(\mathrm{P}, t)$ *peut prendre la même valeur en plusieurs points de* K *à un même instant* t (voir [8] p. 14).

Il suffit de remplacer toute mesure ou intégrale définie sur C_t par une mesure ou une intégrale définie sur K ; en particulier la *masse* sera une mesure μ définie sur K pour les boréliens.

Un *corps partiel* c à l'instant t sera défini par une partie k de K borélienne, et par la fonction $\vec{f}(\mathrm{P}, t)$ restreinte à k.

Le vecteur principal d'une force répartie à l'instant t sera une mesure vectorielle $\vec{\mathrm{S}}_t(c)$ définie sur K. Un champ de vitesses $\vec{\mathrm{W}}$ sera donné sur K. La puissance de la force pour le champ de vitesse sera

$$\mathfrak{L}(k) = \int_k \vec{\mathrm{W}} \cdot \overrightarrow{d\mathrm{S}_t}.$$

Toutes les mesures rencontrées, numériques ou vectorielles, seront définies pour les parties boréliennes de K. Les ensembles-images correspondants donnés par la fonction $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{f}(\mathrm{M}, t)$ seraient alors des ensembles *analytiques* quelconques si la fonction $\vec{f}$ était simplement assujettie à être continue.

10. — Enfin, on est amené à considérer des systèmes dans lesquels des points matériels apparaissent et disparaissent à chaque instant : par exemple le mouvement permanent d'un fluide, limité à un volume fixe de l'espace qu'il traverse, ou encore une fusée qui émet des gaz.

En ce cas, les considérations précédentes ne s'appliquent qu'en prenant pour corps C une partie seulement de l'ensemble des points matériels qui appartiennent au système à un instant t_0, partie choisie de telle façon qu'elle continue à lui appartenir durant un intervalle de temps (t_1, t_2) contenant t_0. Il faut admettre que le système peut être décrit en entier au moyen de tels voisinages spatio-temporels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Béghin, *Sur la notion de travail dans la mécanique du continu* (Ann. de l'Institut Fourier, t. 2, 1950, p. 173-184.).

[2] M. Brelot, Annales de l'Université de Grenoble (Section Sciences-Médecine), t. XIX, 1943, *Sur les principes mathématiques de la mécanique classique.*

[3] M. Brelot, *Sur quelques points de mécanique rationnelle.* Id. t. XX, 1944.

[4] M. Brelot, *Les principes mathématiques de la mécanique classique,* 1 vol., Arthaud, Grenoble-Paris, 1945.

[5] O. Costa de Beauregard, *La relativité restreinte,* 1 vol., Masson, 1948.

[6] R. de Possel, *Sur la définition d'un torseur réparti et sur l'évaluation de sa puissance.* C. R. Ac. Sc. Paris, t. 222 (1946), p. 1470.

[7] R. de Possel, *Sur les applications des torseurs répartis à la dynamique des corps à une dimension rectifiables et des milieux continus,* C. R. Ac. Sc. Paris (t. 223; 1946), p. 127.

[8] R. de Possel, *Sur l'indétermination de la puissance d'un torseur réparti.* Annales de l'Université de Grenoble, section Sc. Math. et Phys., t. XXI, 1945, p. 109-115.

[9] R. de Possel, *Sur les principes mathématiques de la mécanique classique.* Gazeta de matematica, n° 28, 1946, Lisbonne.

(Parvenu aux Annales en février 1951.)