

ROBERT GERBER

**Sur la réduction à un principe variationnel
des équations du mouvement d'un fluide
visqueux incompressible**

Annales de l'institut Fourier, tome 1 (1949), p. 157-162

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__157_0

© Annales de l'institut Fourier, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA REDUCTION A UN PRINCIPE VARIATIONNEL
DES EQUATIONS DU MOUVEMENT
D'UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE**

par **R. GERBER** (Grenoble).

1. On sait qu'il n'est pas possible par la considération du champ des vitesses à un instant, d'opérer dans le cas général la réduction à un principe variationnel des équations du mouvement non lent d'un fluide visqueux incompressible⁽¹⁾.

Il semble intéressant de voir si un tel principe ne pourrait pas être obtenu en envisageant non plus le fluide à une époque, mais en suivant une certaine masse \mathcal{M} dans son mouvement.

Ayant défini un ensemble \mathcal{E} de mouvements virtuels de \mathcal{M} entre deux instants t_0 et t_1 , on tentera de construire une fonction \mathcal{L} , définie sur \mathcal{E} , et telle que $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$ soit stationnaire pour tout élément de \mathcal{E} qui vérifie les équations indéfinies du mouvement.

On montrera qu'on aboutit également dans cette voie à un résultat négatif pour le cas général, du moins si on se limite à une certaine classe de fonctions \mathcal{L} .

De plus la méthode suivie nous conduira à exprimer avec les variables de Lagrange les équations de Navier pour un fluide visqueux incompressible et on indiquera une méthode rapide pour obtenir ces équations.

2. Soit un mouvement réel d'une masse \mathcal{M} du fluide entre les époques t_0 et t_1 , correspondant à certaines conditions initiales et aux limites et sous l'action de forces extérieures dépendant d'un potentiel. Notons \mathcal{D}_t le domaine occupé à l'instant t , Σ_t sa frontière (on pourra supprimer l'indice t); \mathcal{D}_0 et Σ_0 pour \mathcal{D}_{t_0} et Σ_{t_0} . En particulier Σ pourra

(1) Voir H. VILLAT. *Leçons sur les fluides visqueux*, p. 103.

être la paroi d'un vase déformable ou non, de volume constant enfermant le fluide. Supposons le mouvement de Σ donné. On considèrera l'ensemble des mouvements virtuels de \mathcal{M} entre t_0 et t_1 : 1° compatibles avec la condition d'incompressibilité; 2° qui sont continus et pour lesquels si Σ est une paroi limitant le fluide il y a adhérence à cette paroi; 3° tels que les positions et les vitesses des éléments fluides pour t_0 et t_1 sont les mêmes que dans le mouvement réel.

D'une façon précise, l'espace étant rapporté à des axes rectangulaires $Ox_1x_2x_3$, \mathcal{E} sera constitué par les fonctions vectorielles continues :

$$(1) \quad \text{OM} = f(\mathbf{P}, t) (\mathbf{P}(a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{D}_0 + \Sigma_0; \\ \mathbf{M}(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D} + \Sigma; t \in [t_0, t_1])$$

satisfaisant à :

$$a) \quad \Delta \equiv \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = 1$$

(2) b) f se réduit à une fonction donnée de \mathbf{P} et de t pour :

$$\mathbf{P} \in \Sigma_0.$$

c) f et $\frac{\partial f}{\partial t}$ se réduisent à des fonctions données de \mathbf{P} pour $t = t_0$ et $t = t_1$.

On notera $\mathbf{V}(u_1, u_2, u_3)$ le vecteur $\frac{\partial f}{\partial t}$. Les x_i sont les variables d'Euler et les a_i les variables de Lagrange.

3. Par analogie avec le principe d'Hamilton on fera figurer dans \mathcal{L} l'expression $\mathcal{C} + \mathcal{U}$ où :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_0} \rho V^2 d\tau_0$$

(ρ , densité, est une constante).

$$\mathcal{U} = \int_{\mathcal{D}_0} \rho U d\tau_0$$

(U , fonction donnée de \mathbf{M} , potentiel des forces extérieures).

On sait le rôle joué dans le cas des mouvements lents par la fonction de dissipation ψ définie en variables d'Euler par :

$$(3) \quad \psi(\mathbf{V}) = \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

L'intégrale $\mu \int_{\mathcal{D}} 2\psi d\tau$ (où μ est le coefficient de viscosité) représente la chaleur dissipée par unité de temps et à l'instant t par effet de viscosité. On introduira dans \mathcal{L} la quantité :

$$(4) \quad Q(t) = \int_{t_0}^t dt \mu \int_{\mathcal{D}} 2\psi d\tau$$

qui représente la chaleur ainsi dissipée dans la masse \mathcal{M} entre t_0 et t_1 et qui est homogène à l'expression $\mathcal{C} + \mathcal{U}$.

Enfin les fonctions $x_i(a_1, a_2, a_3, t)$ étant liées par (2, a) on fera figurer dans \mathcal{L} l'expression Δ au moyen d'un multiplicateur λ , fonction indéterminée des x_i .

On prendra donc \mathcal{L} sous la forme :

$$(5) \quad \mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathcal{C} + \mathcal{U} + \alpha Q + \int_{\mathcal{D}_0} \lambda \Delta d\tau_0 \right) dt$$

(α facteur numérique) ou

$$(6) \quad \mathcal{L} = \int_{\mathcal{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho U + \lambda \Delta + 2\alpha \mu \int_{t_0}^t \psi dt \right).$$

4. La fonction ψ définie par (3) en variables d'Euler est supposée exprimée dans cette formule (6) avec les variables de Lagrange. Pour faire ce changement de variables on remarque que g étant une fonction des x_i ou des a_i qui sont liés par (1) on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{D(g, x_2, x_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{D(g, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} \quad \left(\text{en vertu de } \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = 1 \right)$$

et les expressions obtenues par permutations circulaires pour

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x_3}.$$

Alors :

$$(7) \quad \Psi^r = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \frac{1}{2} (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)$$

avec :

$$(8) \quad A_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{D\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, x_2, x_3\right)}{D(a_1, a_2, a_3)}$$

$$B_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{D\left(x_1, x_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}\right)}{D(a_1, a_2, a_3)} + \frac{D\left(x_1, \frac{\partial x_3}{\partial t}, x_3\right)}{D(a_1, a_2, a_3)}$$

et les expressions analogues obtenues par permutations pour A_2, A_3, B_2, B_3 .

Les formules (7) et (8) montrent que Ψ se présente en variables de Lagrange comme une fonction des $\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ et des $\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j}$. Il s'introduira donc dans le calcul de la variation des expressions :

$$X_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right)}, \quad Y_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j} \right)}.$$

Explicitons le calcul de Y_1 ; on a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial a_1} \right)} = 2A_1 \frac{D(x_2, x_3)}{D(a_2, a_3)} + B_2 \frac{D(x_1, x_2)}{D(a_2, a_3)} - B_3 \frac{D(x_1, x_3)}{D(a_2, a_3)}$$

et les deux égalités déduites de celle-ci par permutations circulaires sur les a_i dans les deux membres.

On trouve alors :

$$\begin{aligned} Y_1 &= 2 \frac{D(A_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} + \frac{D(B_2, x_1, x_2)}{D(a_1, a_2, a_3)} - \frac{D(B_3, x_1, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} \\ &= 2 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} \end{aligned}$$

ou compte tenu de (8) et de $\sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ traduisant l'incompressibilité :

$$(10) \quad Y_1 = \Delta u_1$$

(étant le Laplacien par rapport aux x_i).

On aurait dit de même :

$$(11) \quad Y_i = \Delta u_i.$$

Le calcul des X_i ne présente pas de difficulté mais conduit à des expressions assez longues. Par exemple sans expliciter les jacobiens :

$$(12) \quad X_1 = 2 \frac{D(A_2, u_2)}{D(x_1, x_2)} + 2 \frac{D(A_3, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_1, u_3)}{D(x_1, x_2)} \\ + \frac{D(B_1, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_2, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_3, u_1)}{D(x_1, x_2)}.$$

5. Passons au calcul de la variation $\delta \mathcal{L}$ due à une variation

$\delta f(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$. Cette variation δf vérifie les conditions aux limites :

$$(13) \quad \delta f \equiv 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \delta f \equiv 0 \text{ pour } t = t_0 \text{ et } t = t_1; \delta f \equiv 0 \text{ pour } P \in \Sigma_0.$$

\mathcal{L} étant donnée par (5) on a :

$$(14) \quad \delta \mathcal{L} = \int_{\mathcal{Q}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \left\{ \rho \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) + \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \delta x_i \right. \\ \left. + 2\alpha\mu \int_{t_0}^{t_1} \sum_j \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right)} \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j} \right)} \delta \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j} \right) \right) dt \right\}$$

ou après des intégrations par parties et compte tenu des relations (13) :

$$(15) \quad \delta \mathcal{L} = \int_{\mathcal{Q}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \left\{ \left(-\rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + 2\alpha\mu Y_i \right) \delta x_i \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} 2\alpha\mu \left(-\frac{\partial Y_i}{\partial t} + X_i \right) \delta x_i dt \right\}.$$

En se reportant à l'expression (11) de Y_i en variables d'Euler on constate que la première parenthèse, quand on y fait $\lambda = -p$, $\alpha = \frac{1}{2}$ représente la composante suivant Ox_i du premier membre de l'équation indéfinie du mouvement d'un fluide visqueux incompressible :

$$-\rho\gamma + \text{grad}(\rho U - p) + \mu \Delta V = 0.$$

Ainsi pour un élément de \mathcal{E} vérifiant l'équation indéfinie du mouvement $\delta \mathcal{L}$ se réduit à :

$$(16) \quad \delta \mathcal{L} = \int_{\mathcal{Q}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \mu \left(-\frac{\partial Y_i}{\partial t} + X_i \right) \delta x_i dt$$

où les variations δx_i s'annulent pour $P \in \Sigma_0$ et pour $t = t_0$ ou $t = t_1$ et sont liées entre elles par :

$$(17) \quad \frac{\partial D(x_1, x_2, x_3)}{\partial (a_1, a_2, a_3)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta x_i \equiv 0.$$

Compte tenu de cette relation (17) et des expressions (11) et (12) des X_i et Y_i , on peut voir que cette forme (16) de $\delta \mathcal{L}$ ne doit pas être nulle dans le cas général.

Ainsi on vérifiera sur l'exemple suivant que $\delta \mathcal{L}$ ne s'annule pas :

mouvement réel plan non permanent à trajectoires rectilignes donné par :

$$(18) \quad u_1 = e^{x_2 + t}, \quad u_2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = a_1 + e^{a_2 + t} - e^{a_2}, \quad x_2 = a_2$$

(les équations indéfinies du mouvement sont satisfaites si $\mu = \rho$, et avec $p - \rho U = \text{constante}$).

Supposons: \mathcal{D}_0 défini par: $0 \leq a_1 \leq 1$; $0 \leq a_2 \leq 1$; $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$.

Prenons pour variation $\delta f(\delta x_1, \delta x_2)$:

$$(19) \quad \delta x_1 = t(1-t) \frac{D(x_1, \Phi^2)}{D(a_1, a_2)};$$

$$\delta x_2 = -t(1-t) \frac{D(\Phi^2, x_2)}{D(a_1, a_2)} \quad \text{avec} \quad \Phi = a_1 a_2 (1-a_1)(1-a_2)$$

qui satisfait à (13) et (17).

Dans l'intégrale (16) ne figure, compte tenu de la forme des u_i , que le terme $-\frac{\partial Y_1}{\partial t} \delta x_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial t} \cdot \delta x_1$ et on s'assure que cette intégrale est non nulle.

Enfin, il pourra se faire que pour certains mouvements particuliers $\delta \mathcal{L}$ s'annule; par exemple si les X_i et $\frac{\partial Y_1}{\partial t}$ sont identiquement nuls, ce qui serait le cas pour un mouvement à la Poiseuille :

$$u_1 \equiv u_1(x_2, x_3) \quad u_2 \equiv u_3 \equiv 0.$$
