

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE  
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

*RANKINGS* NA DEA BASEADOS EM  
DMUs VIRTUAIS

APLICAÇÃO AO SETOR SEGURADOR

---

Ana Rita da Cunha Caldas

VERSÃO DEFINITIVA

Lisboa, março de 2022



INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E  
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

# *RANKINGS NA DEA BASEADOS EM DMUs VIRTUAIS*

APLICAÇÃO AO SETOR SEGURADOR

---

Ana Rita da Cunha Caldas

Projeto de dissertação submetido ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador, da área científica de Matemática.

## **Constituição do Júri:**

**Presidente: Professora Doutora Ana Maria Sotomayor**

**Arguente: Professora Doutora Ana Maria Duarte Silva Alves Paias**

**Vogal: Professor Doutor José Manuel Oliveira Pires**

Lisboa, março de 2022

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência do autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus pais, Fátima e Carlos, por sempre me terem apoiado nas minhas escolhas e no meu percurso.

*“The important thing is to not stop questioning.*

*Curiosity has its own reason for existing.”*

- Albert Einstein

## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientador, Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, por todo o apoio e acompanhamento que me deu no decorrer deste trabalho. Quero agradecer por toda a disponibilidade e dedicação que teve ao longo desta etapa e pela sugestão do tema deste trabalho. Agradeço também por ser uma pessoa incrível e um grande profissional que está sempre disposto a partilhar do seu conhecimento.

Em segundo lugar, quero agradecer aos meus pais por sempre acreditarem em mim e nas minhas capacidades, confiando sempre nas minhas escolhas e apoiando-me em todas elas para que não me falte nada.

Agradeço também às minhas amigas, Bárbara e Rita, por terem estado presentes neste percurso, por me entenderem, nos bons momentos e nos menos bons e me motivarem e apoiarem sempre.

Quero agradecer também ao meu namorado, Rúben, por sempre acreditar em mim e incentivar-me a seguir em frente com os meus sonhos, obrigada por todo o carinho e presença em todos os momentos.

Por último, quero agradecer a todas as pessoas que direta ou indiretamente estiveram presentes ao longo deste percurso.

Obrigada.

## Resumo

Os modelos clássicos da metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*) permitem, em geral, classificar várias DMUs (*Decision Making Units*) como eficientes, revelando-se incapazes de discriminar essas DMUs e, conseqüentemente, gerar um *ranking* completo para todas as DMUs, o que constitui uma limitação desta metodologia. Para ultrapassar tal limitação, várias classes de métodos e modelos para a obtenção de *rankings* na DEA têm sido desenvolvidos.

Nesta dissertação apresenta-se um estudo sobre uma dessas classes, designada de DMUs virtuais, que utiliza este tipo de DMUs para integrar as eficiências otimista e pessimista e, deste modo, gerar um *ranking* completo sobre as DMUs reais. Este estudo inclui a aplicação a um caso real, mais concretamente, à avaliação e estabelecimento de *rankings* de dezoito seguradoras do ramo não vida, que operavam em Portugal no ano de 2019.

**Palavras-chave:** Metodologia DEA; DMUs Virtuais; Eficiência; *Rankings*; Setor Segurador.

## Abstract

*The classic models of the DEA (Data Envelopment Analysis) methodology allow, in general, to classify several DMUs (Decision Making Units) as efficient, revealing themselves incapable of discriminating these DMUs and, consequently, generating a complete ranking for all DMUs, which constitutes a limitation of this methodology. To overcome this limitation, several classes of methods and models for obtaining rankings in DEA have been developed.*

*This dissertation presents a study of one of these classes, called virtual DMUs, which uses this type of DMU to integrate optimistic and pessimistic efficiencies and, thus, generate a complete ranking of real DMUs. This study includes the application to a real case, more specifically, to the assessment and establishment of rankings of eighteen non-life insurance companies, which operated in Portugal in the year 2019*

**Keywords:** *DEA Methodology; Virtual DMUs; Efficiency; Rankings; Insurance Sector.*



# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| Índice.....  | viii      |
| Índice de Tabelas .....  | x         |
| Índice de Figuras.....   | xi        |
| Lista de Abreviaturas.....                                       | xii       |
| <b>1. Introdução .....</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>2. Metodologia DEA .....</b>                                  | <b>3</b>  |
| 2.1. Introdução .....  | 3         |
| 2.2. Um pouco de história, evolução e aplicações da DEA .....    | 4         |
| 2.3. Modelos clássicos ou de eficiência otimista.....            | 6         |
| 2.4. Modelos de eficiência pessimista .....                      | 12        |
| 2.5. Vantagens e desvantagens dos modelos clássicos da DEA ..... | 15        |
| 2.6. Métodos de <i>rankings</i> na DEA .....                     | 16        |
| <b>3. <i>Rankings</i> baseados em DMUs virtuais.....</b>         | <b>18</b> |
| 3.1. Introdução.....   | 18        |
| 3.2. Modelos Wang e Luo (2006) .....                             | 18        |
| 3.3. Modelos DEA limitados .....                                 | 24        |
| 3.3.1 Modelos de Wang e Yang (2007).....                         | 26        |
| 3.3.2 Modelos de Wang, Yi e Wang (2008) .....                    | 28        |
| 3.3.3 Modelos de Azizi e Ajirlu (2010).....                      | 30        |
| 3.3.4 Modelos de Azizi (2011) .....                              | 30        |
| 3.3.5 Modelos de Chen (2014).....                                | 31        |
| 3.6. Ordenação de intervalos de eficiência.....                  | 36        |
| <b>4. Estudo de um caso prático.....</b>                         | <b>38</b> |
| 4.1. Introdução.....   | 38        |
| 4.2. Seleção de dados e modelos.....                             | 38        |

|   |           |
|---|-----------|
| 4.3. Resultados e respectiva análise..... | 41        |
| <b>5. Conclusões.....</b>                 | <b>48</b> |
| <b>Referências Bibliográficas.....</b>    | <b>50</b> |

## Índice de Tabelas

|  |    |
|--|----|
| Tabela 4.1 – Dados referentes aos <i>inputs</i> e aos <i>outputs</i> (valores em milhões de euros) ..... | 58 |
| Tabela 4.2 – Resultados obtidos pelos modelos selecionados.....  | 60 |
| Tabela 4.3 – <i>Rankings</i> obtidos pelos modelos selecionados.....                                     | 62 |

## Índice de Figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 4.1 – <i>Rankings</i> de eficiência obtidos através..... | 65 |
|---|----|

## Lista de Abreviaturas

ADMU - Anti-ideal DMU

ASF - Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões

BCC - *Banker, Charnes e Cooper*

CCR - *Charnes, Cooper e Rhodes*

CPLEX - *Optimization Programming Studio Academic Research 12.5*

CRS - *Constant Returns to Scale*

DEA - *Data Envelopment Analysis*

DMUs - *Decision Making Units*

HCA - *Hurwicz criterion approach*

IDEA - *Inverted Data Envelopment Analysis*

IDMU - Ideal DMU

MADM - Metodologia da Tomada de Decisão Multiatributo

MRA - *Minimax Regret Approach*

OPL - *Optimization Programming Language*

PLMO – Programação Linear Multiobjectivo

RC – *Relative Closeness*

VRS – *Variable Returns to Scale*

## 1. Introdução

A atividade seguradora constitui um importante setor na economia portuguesa. De acordo com Rocha (2014), este setor contribui para a concretização do progresso económico e social do país criando para a população meios adicionais de provisões e poupanças. Deste modo, torna-se fundamental a existência de métodos de avaliação de desempenho que permitam a realização de uma gestão eficiente para que as empresas deste mercado tenham a capacidade e os meios para se adaptarem constantemente ao meio envolvente, mantendo-se numa posição competitiva.

No setor segurador existem diversos métodos de avaliação de desempenho, sendo que cada um deles apresenta, para além de vantagens, algumas limitações e, necessita, por isso, de ser complementado. Um método bastante utilizado é a metodologia DEA, que se tem mostrado como uma ferramenta fundamental para a avaliação do desempenho organizacional.

A metodologia DEA consiste numa técnica matemática não paramétrica baseada na programação linear, destinada à avaliação da eficiência relativa de unidades de produção independentes, designadas por DMUs. As DMUs devem ser entidades que apresentem entre si um certo tipo de homogeneidade. De acordo com Cooper (2005), “Genericamente, uma DMU é uma entidade responsável por converter múltiplos recursos (*inputs*) em múltiplos resultados (*outputs*), cuja *performance* se deseja avaliar”.

Apesar das reconhecidas vantagens associadas à DEA, evidenciadas pela grande aplicabilidade da mesma, esta metodologia apresenta algumas limitações, nomeadamente no que respeita aos modelos clássicos. Uma limitação relevante assenta na falta de poder de discriminação entre as unidades eficientes, isto é, os modelos clássicos da DEA permitem diferenciar as DMUs eficientes das não eficientes, porém, não permitem discriminar as várias DMUs que geralmente identificam como eficientes, impossibilitando assim o estabelecimento de um *ranking* para todas as DMUs em avaliação.

Para combater essa falta de poder de discriminação, vários métodos e modelos têm sido propostos, como se pode avaliar pelos trabalhos sobre revisão de métodos de *rankings* na DEA apresentados por Alder, Friedman e Sinuany-Stern (2002) e, mais recentemente, por Aldamak e Zolfaghari (2017). Os primeiros agrupam os métodos existentes em seis categorias e os segundos acrescentam mais quatro novas categorias. Uma destas novas

categorias consiste na utilização de DMUs virtuais, uma ideal e outra anti-ideal, para integrar a eficiência otimista e a eficiência pessimista das DMUs reais e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking* sobre todas as DMUs reais.

A presente dissertação tem por objetivo apresentar um estudo sobre modelos e métodos de *rankings* baseados em DMUs virtuais no âmbito da DEA e encontra-se estruturada em cinco capítulos onde se inclui o presente capítulo de introdução.

No capítulo 2 é feita uma introdução à DEA onde se inclui uma breve referência à história e aplicações desta metodologia. São apresentados os modelos clássicos (otimistas) da DEA e os modelos pessimistas baseados nos modelos clássicos. É feita também uma referência às vantagens e desvantagens associadas aos modelos clássicos da DEA e aos métodos de *rankings* para resolver o problema do fraco poder de discriminação desses modelos, que, como já se referiu, constitui uma das desvantagens associadas aos mesmos.

No capítulo 3 é apresentado um estudo sobre métodos e modelos de *rankings* baseados em DMUs virtuais, uma, designada de DMU ideal, que utiliza a mínima quantidade de *inputs* para produzir a máxima quantidade de *outputs* e outra, designada de DMU anti-ideal que utiliza a máxima quantidade de *inputs* para produzir a mínima quantidade de *outputs*. Os modelos usados são baseados nos modelos otimistas e pessimistas apresentados no capítulo 2. Neste capítulo é ainda apresentado um método para ordenação dos intervalos de eficiência obtidos por alguns daqueles modelos com vista à obtenção de um *ranking* completo das DMUs.

No capítulo 4 é apresentado um estudo prático onde são aplicados alguns dos modelos e métodos apresentados nos capítulos 2 e 3 para avaliar a eficiência e estabelecer um *ranking* para dezoito seguradoras do ramo não vida que operavam em Portugal no ano de 2019. Os resultados obtidos e uma análise aos mesmos são também apresentados neste capítulo.

Finalmente, o capítulo 5, compreende as principais conclusões bem como as considerações finais provenientes da elaboração desta dissertação.

## 2. Metodologia DEA

### 2.1. Introdução

A metodologia DEA constitui uma importante ferramenta de avaliação do desempenho organizacional. Esta metodologia permite calcular a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogêneas, isto é, entidades que utilizam o mesmo tipo de recursos (*inputs*) para produzir o mesmo tipo de produtos (*outputs*), embora em quantidades diferentes. Essas entidades podem ser de mais diversa natureza e são por isso usualmente designadas de DMUs.

A metodologia DEA é uma técnica não paramétrica baseada na programação linear em que a eficiência é calculada através de rácios entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* ou vice-versa. Não necessita, por isso, de uma função de produção definida à priori, sendo apenas necessário o conhecimento dos *inputs* e *outputs* relativo ao conjunto de DMUs que se pretendem avaliar. Mediante o valor de eficiência obtido, a DEA permite distinguir as DMUs eficientes das não eficientes e estimar uma fronteira de eficiência definida pelas DMUs eficientes. Permite, ainda, identificar as DMUs eficientes que são referência para as não eficientes. Estas são algumas das características que permitem diferenciar positivamente a metodologia DEA de outras metodologias de avaliação de desempenho.

A eficiência obtida através dos modelos clássicos da DEA é uma eficiência otimista ou a melhor eficiência, uma vez que cada DMU escolhe um conjunto de pesos mais favoráveis ou mais benéficos que permitem maximizar a sua eficiência. As DMUs que estão na fronteira de eficiência determinada por estes modelos são designadas de eficientes ou eficientes otimistas, enquanto as que não estão são designadas de não eficientes ou não eficientes otimistas. Assume-se, assim, que as DMUs eficientes (otimistas) têm melhor *performance* do que as DMUs não eficientes (otimistas).

Os modelos clássicos da DEA podem também ser utilizados para obter a eficiência pessimista ou a pior eficiência, onde cada DMU escolhe o conjunto de pesos mais desfavoráveis ou menos benéficos que permitem minimizar a sua eficiência. A fronteira determinada por estes modelos é uma fronteira de ineficiência ou anti-eficiente em que as DMUs que estão nessa fronteira são designadas de ineficientes ou ineficientes pessimistas, enquanto as que não estão, são designadas de não ineficientes ou não ineficientes pessimistas. É também assumido que as DMUs ineficientes têm pior *performance* do que as não ineficientes.



Como se refere em Azizi (2014), a eficiência otimista e a eficiência pessimista são medidas extremas na *performance* de cada DMU, pelo que, qualquer avaliação que considere apenas uma delas resulta numa avaliação enviesada. No entanto, quando usadas conjuntamente, permitem uma avaliação global da *performance* de cada DMU e, também discriminar as DMUs que obtenham igual índice pelos modelos clássicos.

O presente capítulo tem por objetivo apresentar os modelos clássicos otimistas e pessimistas, sobre os quais são desenvolvidos os métodos e modelos a apresentar no capítulo 3. Assim, na seção 2.2, apresenta-se um pouco de história da DEA bem como algumas aplicações desta metodologia. Na seção 2.3, são apresentados os modelos clássicos otimistas enquanto na seção 2.4 são apresentados os modelos clássicos pessimistas da DEA. Na seção 2.5, apresentam-se as principais vantagens e desvantagens dos modelos clássicos otimistas. Finalmente, na seção 2.6, é feita uma referência aos métodos de *rankings* propostos na literatura da DEA.

## **2.2. Um pouco de história, evolução e aplicações da DEA**

A metodologia DEA surgiu formalmente com o trabalho de Charnes, Cooper e Rhodes (1978), no âmbito da tese de doutoramento realizada por Edward Rhodes e orientada por W. W. Cooper. Esse trabalho baseou-se nas ideias de um outro trabalho, pioneiro à época, proposto por Farrell (1957) sobre a medida da eficiência produtiva, onde se propõe medir a eficiência de entidades similares sem recorrer ao uso de funções de produção definidas *a priori*. Durante duas décadas, o trabalho de Farrell foi pouco reconhecido, tendo sido considerado apenas por alguns autores, nomeadamente, Boles (1966), Shephard (1970) e Afriat (1972), como se refere em Coelli, Rao, O'Donnell e Battese (2005).

De acordo com Cooper, Seiford e Zhu (2011), o objetivo da tese de Edward Rhodes consistia em avaliar programas de acompanhamento, apoiados pelo governo, para estudantes com dificuldades económicas em escolas públicas dos Estados Unidos. A principal motivação da tese constou em procurar comparar o desempenho entre os alunos das escolas inseridas nesses programas e os alunos de escolas não inseridas nesses programas. Rhodes tentou avaliar esses programas através de abordagens estatísticas, mas os resultados obtidos revelaram-se insatisfatórios e até absurdos. Para responder à incapacidade destas abordagens, Rhodes chamou a atenção de Cooper para as ideias expostas no trabalho de Farrell (1957), com base nas quais surge o primeiro modelo de programação linear proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) que originou a metodologia DEA.

Desde que surgiu, a metodologia DEA tem tido um enorme e rápido crescimento quer no desenvolvimento de novos métodos e modelos destinados a contornar as limitações de métodos e modelos anteriores quer em aplicações ao mundo real. De acordo com Liu, Lu, Lu e Lin (2013b), a maior parte do trabalho publicado na literatura da DEA até essa data coloca ênfase nas metodologias, como se mostra nos trabalhos apresentados por: Seiford e Thrall (1990), onde se faz uma revisão sobre a fase inicial do desenvolvimento da DEA; Seiford (1996) onde se traça a evolução da DEA para o período de 1978-1995; Cooper, Seiford e Tone (2007) onde se faz uma avaliação de alguns modelos e medidas da DEA; Cook e Seiford (2009) onde se apresenta uma pesquisa sobre os primeiros 30 anos de desenvolvimento da DEA; Liu, Lu, Lu e Lin (2013a) onde se apresenta uma pesquisa baseada em citações e se descrevem os principais caminhos de desenvolvimento da metodologia DEA.

No trabalho apresentado por Liu, Lu, Lu e Lin (2013a) refere-se ainda que, desde o primeiro artigo publicado por Charnes, *et al.* (1978) até agosto de 2010, foram publicados 4936 artigos sobre a DEA segundo dados retirados da base de dados *ISI Web of Science* (WOS). Desses 4936 artigos, 36,5% (1802) são puramente metodológicos (não incluem dados empíricos do mundo real) e 63,5% (3134) incorporam aplicações (incluem dados empíricos do mundo real), isto é, cerca de um terço são puramente metodológicos enquanto cerca de dois terços incorporam aplicações.

Um número mais recente sobre publicações na DEA é dado em Emouznejad e Yang (2018), onde se apresenta um trabalho de pesquisa e análise dos primeiros 40 anos de literatura DEA relativa ao período de 1978 a 2016. Nesse trabalho é referido que durante este período foram publicados 10300 artigos relativos à DEA e que nos últimos três anos deste período foram publicados cerca de 1000 artigos por ano. Em termos gerais e relacionado com o número de publicações, os autores classificam o estado de desenvolvimento da DEA em três fases: a primeira, entre 1978 e 1994, onde o crescimento do número de artigos publicados é relativamente lento; a segunda, entre 1995 e 2003, onde esse crescimento é relativamente estável com uma média de cerca de 134 artigos por ano; a terceira, entre 2004 e 2016, onde esse crescimento é “exponencial” com uma média de 680 artigos por ano e com uma tendência de cerca de 1000 artigos por ano no final daquele período.

De acordo com Liu, Lu, Lu e Lin (2013b), a metodologia DEA iniciou-se como um método teórico, mas encontrou o seu caminho num amplo espectro de aplicações. Durante os

primeiros 20 anos de existência, isto é, até 1999, os artigos puramente metodológicos dominaram o número de publicações na DEA, contudo, a partir dessa data o número acumulado de artigos incorporando aplicações tem superado cada vez mais o número acumulado de artigos puramente metodológicos. O crescimento no domínio das aplicações da DEA tem sido tal que se torna difícil a alguém da comunidade acadêmica da DEA acompanhar esse crescimento. Como se refere em Cooper, Seiford e Zhu (2011), a DEA tem sido utilizada para avaliar a *performance* de muitos diferentes tipos de entidades, envolvidas em diversas atividades, em vários contextos e em diferentes países.

Em Liu, Lu e Lin (2013b) apresenta-se uma lista que inclui as 24 áreas de maior aplicação da DEA de acordo com o número de artigos incorporando aplicações (20 ou mais), publicados desde 1978 até 2010. O top-5 dessa lista é constituído pelas áreas da banca, cuidados de saúde, agricultura, transportes e educação, que constituem 41% de todas as aplicações relativas ao período em análise. Para o top-10 da lista, os autores apresentam também o número de publicações relativas ao período de 2005 a 2009 onde se constata que as áreas da energia e meio ambiente e das finanças são as que apresentam maior percentagem de aplicações. De referir que a área dos seguros, que será utilizada neste trabalho, ocupa a posição 11 dessa lista.

Emrouznejad e Yang (2018) referem que as áreas da agricultura, banca, cadeias de abastecimento, transportes e políticas públicas constituem o top-5 das áreas de maior aplicação da DEA durante os anos de 2015 e 2016, com base no número de artigos publicados.

Quanto à razão pela qual algumas áreas têm adquirido mais popularidade do que outras, Liu, Lu e Lin (2013b) sugerem três possíveis causas. A primeira, e a maior, é a necessidade da avaliação da *performance*, onde determinadas áreas de aplicação têm uma forte necessidade de verificar o efeito das suas políticas. A segunda é a acessibilidade a dados que os investigadores necessitam para provar os seus modelos, havendo áreas onde essa acessibilidade é maior do que em outras. A terceira é a existência de revistas em determinadas áreas que facilitam a publicação de aplicações da DEA nessas mesmas áreas.

### **2.3. Modelos clássicos ou de eficiência otimista**

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) propuseram o primeiro modelo para calcular a eficiência relativa de um conjunto de DMUs, designado de modelo CCR (Charnes, Cooper e Rhodes), que originou formalmente a metodologia DEA. Este modelo pode ser orientado para *inputs*,

sendo a eficiência atingida através da redução dos *inputs* mantendo os *outputs*, ou, orientado para *outputs*, sendo a eficiência atingida através da expansão dos *outputs* mantendo os *inputs*.

Para descrever matematicamente o modelo CCR, assim como os restantes modelos que serão apresentados neste trabalho, assume-se que existem  $n$  DMUs homogêneas para avaliar e que cada DMU utiliza  $m$  *inputs* para produzir  $s$  *outputs*. Mais especificamente, cada DMU <sub>$j$</sub>  ( $j = 1, \dots, n$ ) utiliza a quantidade  $X_{ij}$  do *input*  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) para produzir a quantidade  $Y_{rj}$  do *output*  $r$  ( $r = 1, \dots, s$ ). Assume-se, ainda, que  $X_{ij} \geq 0$ ,  $Y_{rj} \geq 0$ , ( $i = 1, \dots, m$ ;  $r = 1, \dots, s$ ;  $j = 1, \dots, n$ ), e que para cada DMU existe, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos. Para além dos dados descritos anteriormente, considerem-se as variáveis de decisão, não negativas,  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $u_r$  ( $r = 1, \dots, s$ ) que representam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente.

No modelo CCR orientado para *inputs* pretende-se minimizar os *inputs* mantendo constantes os *outputs*. A forma fracionária deste modelo, que permite obter a eficiência relativa da DMU <sub>$k$</sub>  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ), é dada pelo seguinte modelo de programação linear fracionária:

$$\max \theta_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (2.1a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.1b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.1d)$$

Neste modelo,  $\varepsilon$  é um valor infinitesimal não Arquimediano, isto é, um valor menor do que qualquer valor real positivo, que garante a positividade dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*. De notar que, como se refere em Cook e Seiford (2009), no modelo original de 1978, os autores restringem as variáveis  $v_i$  e  $u_r$  a serem não negativas, isto é,  $\varepsilon = 0$ . A

imposição da positividade, isto é,  $\varepsilon > 0$ , foi introduzida num trabalho que se seguiu, apresentado pelos mesmos autores, Charnes, Cooper e Rhodes (1981).

O valor da eficiência da DMU<sub>k</sub>,  $\theta_k^*$ , fornecido por este modelo, é obtido através da maximização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* da DMU<sub>k</sub>, sujeito à condição de que um quociente similar é não superior a 1 para cada uma das DMUs em avaliação. Então, a DMU<sub>k</sub> escolhe o conjunto de pesos que lhe é mais benéfico, pelo que a eficiência é calculada de um ponto de vista otimista e o seu valor é sempre menor ou igual a 1. A eficiência obtida é, então, a eficiência otimista ou a melhor eficiência.

O modelo (2.1) admite um número infinito de soluções ótimas, uma vez que, se  $(u^*, v^*)$  é solução ótima então  $(\alpha u^*, \alpha v^*)$  é também solução ótima, para todo  $\alpha > 0$ , como se refere, por exemplo, em Cooper, Seiford e Zhu (2011). Usando a transformação de Charnes e Cooper (1962) para problemas de programação linear fracionária, é possível selecionar uma dessas soluções e, deste modo, obter um modelo de programação linear equivalente. Assim, igualando a 1 o denominador da função objetivo (2.1a), obtém-se o seguinte modelo de programação linear:

$$\max \theta_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (2.2a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (2.2b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.2e)$$

O modelo (2.2) é designado por modelo CCR orientado para *inputs*, na forma dos multiplicadores. A solução ótima deste modelo fornece os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, que permitem obter o valor da eficiência para a DMU<sub>k</sub>,  $\theta_k^*$ . Então este modelo permite, para cada DMU<sub>k</sub> ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ), calcular o índice de eficiência assim como o contributo de cada *input* e de cada *output* para o cálculo desse índice.

Se o índice de eficiência de uma DMU<sub>k</sub> é igual a 1, isto é, se  $\theta_k^* = 1$ , a DMU<sub>k</sub> diz-se eficiente ou eficiente otimista; caso contrário, diz-se não eficiente ou não eficiente otimista e será tanto mais não eficiente quanto menor for o valor de  $\theta_k^*$ .

Na versão orientada para *outputs* do modelo CCR, pretende-se maximizar os *outputs* mantendo os *inputs*. A forma fracionária deste modelo para calcular a eficiência da DMU<sub>k</sub> ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ), é dada pelo seguinte modelo:

$$\min \rho_k = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (2.3a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.3d)$$

Neste modelo, o valor ótimo,  $\rho_k^*$ , é obtido através da maximização do quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* da DMU<sub>k</sub>, sujeito à condição de que um quociente similar é não inferior a 1 para cada uma das DMUs em avaliação. Note-se que neste caso o valor de  $\rho_k^*$  é sempre maior ou igual a 1.

À semelhança do que foi feito para a versão orientada para *inputs*, o modelo (2.3) pode, através da transformação proposta por Charnes e Cooper (1962), ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$\min \rho_k = \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (2.4a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r = 1 \quad (2.4b)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.4e)$$

O modelo anterior é designado por modelo CCR orientado para *outputs* na forma dos multiplicadores. Atendendo a que nesta versão, se tem  $\rho_k^* \geq 1$ . O índice de eficiência, ou eficiência otimista, é dado por  $1/\rho_k^*$ , de modo a ter-se um valor pertencente ao intervalo ]0,1], isto é, de modo a garantir que a eficiência otimista é medida na escala de 0 a 1. Se existe um conjunto de pesos positivos tal que  $\rho_k^* = 1$ , então a DMU<sub>k</sub> diz-se eficiente ou eficiente otimista; caso contrário, diz-se não eficiente ou não eficiente otimista e será tanto mais não eficiente quanto maior for o valor de  $\rho_k^*$  ou, equivalentemente, quanto menor for o valor de  $1/\rho_k^*$ .

O modelo CCR apresentado anteriormente considera retornos constantes de escala, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*. Banker, Charnes e Cooper (1984) apresentaram uma extensão desse modelo, designado por modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper), que considera retornos variáveis de escala, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação maior ou menor do que o proporcional nos *outputs*. Na forma fracionária, o modelo BCC orientado para *inputs* é dado pelo seguinte modelo de programação linear fracionária:

$$\max \theta_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r + u^k}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (2.5a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r + u^k}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.5b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.5c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.5d)$$

Aplicando a transformação de Charnes e Cooper (1962) ao modelo anterior obtém-se o modelo BCC orientado para *inputs* na forma dos multiplicadores, dado pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\max \theta_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r + u^k \quad (2.6a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (2.6b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i + u^k \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.6c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.6e)$$

Note-se que quer a forma fracionária quer a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *inputs*, obtém-se da correspondente forma do modelo CCR orientado para *inputs* por inclusão de uma variável que indica o tipo de retorno de escala. O valor desta variável na solução ótima,  $u^{k*}$ , indica o tipo de retorno de escala em que a DMU<sub>k</sub> opera. Assim, se  $u^{k*} > 0$ , a DMU<sub>k</sub> opera sob retorno crescente de escala; se  $u^{k*} < 0$ , a DMU<sub>k</sub> opera sob retorno decrescente de escala; por fim, se  $u^{k*} = 0$ , a DMU<sub>k</sub> opera sob retorno constante de escala.

Similarmente, a forma fracionária e a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *outputs* obtêm-se das correspondentes formas do modelo CCR orientado para *outputs* por inclusão de uma variável do mesmo tipo. Designando essa variável por  $v^k$ , tem-se que:  $v^{k*} > 0$  indica que a DMU<sub>k</sub> opera sob retorno decrescente de escala;  $v^{k*} < 0$  indica que a DMU<sub>k</sub> opera sob retorno crescente de escala; por fim,  $v^{k*} = 0$  indica que a DMU<sub>k</sub> opera sob retorno constante de escala.

Os modelos clássicos da DEA permitem também identificar as DMUs de referência para que uma DMU ineficiente se torne eficiente, através do valor, na solução ótima, das variáveis do dual do modelo dos multiplicadores, conhecido como forma do envelope desses modelos (ver, por exemplo, Cooper, Seiford e Tone (2007))



## 2.4. Modelos de eficiência pessimista

Como se viu na secção anterior, os modelos clássicos da DEA permitem obter a eficiência relativa de um conjunto de DMUs, usando um ponto de vista otimista, isto é, escolhendo o conjunto de pesos, associados aos *inputs* e aos *outputs*, que é mais benéfico para cada DMU. A eficiência obtida é então designada de eficiência otimista ou de melhor eficiência. A eficiência pode também ser obtida usando um ponto de vista pessimista, isto é, escolhendo o conjunto de pesos que lhe é menos benéfico. Neste caso a eficiência obtida é designada de eficiência pessimista ou de pior eficiência. Nesta secção, apresentam-se os modelos de eficiência pessimista baseados nos modelos clássicos apresentados na secção anterior.

A ideia de avaliar DMUs usando um ponto de vista pessimista é devida a Yamada, Matsui e Sugiyama (1994) e foi por eles designada de DEA invertida (IDEA - Inverted *Data Envelopment Analysis*), como se refere, por exemplo em Aldamak e Zolfaghari (2017). A IDEA consiste em inverter o modelo CCR, que na forma fracionária corresponde a trocar o numerador pelo denominador. Na versão orientada para *inputs*, a eficiência pessimista é então obtida através da maximização do quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* sujeito à condição de um quociente similar, para cada uma das DMUs, é sempre menor ou igual a 1. A eficiência pessimista obtida por este modelo é então medida na escala de 0 a 1 como acontece com a eficiência otimista.

A eficiência é uma medida relativa pelo que pode ser calculada em diferentes escalas. No modelo CCR orientado para *inputs* a eficiência otimista é obtida, por maximização, na escala de 0 a 1. Se a eficiência é obtida, por minimização, na escala de maior ou igual a 1, a eficiência diz-se pessimista (Wang, Chin e Yang, 2007).

Para calcular a eficiência pessimista ou a pior eficiência de uma DMU<sub>k</sub>, na escala de maior ou igual a 1, Parkan e Wang (2000) propuseram o seguinte modelo baseado na forma fracionária do modelo CCR (otimista) orientado para *inputs* e que é equivalente ao modelo proposto por Yamada, Matsui e Sugiyama (1994):

$$\min \quad \varphi_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (2.7a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.7b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.7d)$$

O modelo anterior será, no que se segue, designado por forma fracionária do modelo CCR pessimista orientado para *inputs*. Neste modelo, a eficiência da DMU<sub>k</sub> é obtida através da minimização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* dessa DMU, sujeito à condição de que um quociente similar é não inferior a 1, para cada uma das DMUs em avaliação. O valor ótimo do modelo anterior pertence ao intervalo  $[1, +\infty[$ , isto é, a eficiência é então medida numa escala de maior ou igual a 1.

Através da transformação proposta por Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear, que constitui a forma dos multiplicadores do modelo CCR pessimista orientado para *inputs*.

$$\min \varphi_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (2.8a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (2.8b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.8c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.8d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.8e)$$

Se existe um conjunto de pesos positivos,  $u_r^*$  e  $v_i^*$ , tais que  $\varphi_k^* = 1$ , a DMU<sub>k</sub> diz-se ineficiente ou ineficiente pessimista; caso contrário, diz-se não ineficiente ou não ineficiente pessimista. Obviamente que ser não ineficiente pessimista não é necessariamente sinónimo de ser eficiente otimista.

A versão orientada para *outputs* do modelo CCR pessimista pode ser obtida a partir da correspondente versão do modelo CCR otimista, similarmente ao que foi feito para a obtenção da versão orientada para *inputs*. Assim, partindo da forma fracionária do modelo CCR orientado para *outputs*, obtém-se o seguinte modelo de eficiência pessimista, designado por forma fracionária do modelo CCR pessimista orientado para *outputs*:

$$\max \quad \phi_k = \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (2.9a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.9c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.9d)$$

Neste caso, a eficiência da  $DMU_k$  é obtida através da maximização do quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* dessa  $DMU_k$  sujeito à condição de que um quociente similar é não superior a 1 para cada uma das  $DMUs$  em avaliação.

Usando novamente a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear, designado por forma dos multiplicadores do modelo CCR pessimista orientado para *outputs*:

$$\max \quad \phi_k = \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (2.10a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r = 1 \quad (2.10b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.10c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.10e)$$

Tendo em conta que através do modelo anterior se tem  $\phi_k^* \leq 1$ , o índice de eficiência é neste caso dado por  $1/\phi_k^*$ , de forma a garantir que o mesmo pertence ao intervalo  $[1, +\infty[$  e, conseqüentemente, a eficiência pessimista é medida numa escala de maior ou igual a 1. Se  $\phi_k^* = 1$  com os correspondentes pesos positivos, diz-se que a DMU<sub>k</sub> é ineficiente ou ineficiente pessimista; caso contrário diz-se que é não ineficiente ou não ineficiente pessimista e será tanto mais não ineficiente quanto maior for o valor de  $\phi_k^*$  ou, equivalentemente, quanto menor for o valor de  $1/\phi_k^*$ .

A forma dos multiplicadores e a forma fracionária do modelo BBC pessimista, quer na orientação para *inputs* quer na orientação para *outputs*, são obtidas das correspondentes formas do modelo CCR pessimista com a mesma orientação, à semelhança do que foi feito para obtenção do modelo BCC otimista.

Shen, Zhang, Liu e Yang (2016) afirmam que, do ponto de vista pessimista é mais fiável usar o modelo CCR ao invés do modelo BCC, independentemente de se usar o modelo CCR ou BCC para estimar a fronteira de eficiência, uma vez que, a fronteira de anti-eficiência estimada pelo modelo BCC pessimista é convexa enquanto a verdadeira fronteira é côncava e, tal facto, pode fazer com que DMUs com valores extremos de *inputs* estejam próximas da fronteira de anti-eficiência independentemente de estarem próximas, ou não, da verdadeira fronteira. Talvez, por isso, muito pouco trabalho tem sido apresentado na literatura da DEA envolvendo o modelo BCC pessimista.

## 2.5. Vantagens e desvantagens dos modelos clássicos da DEA

Os modelos clássicos da DEA apresentam diversas vantagens e desvantagens. Como vantagens há a referir as seguintes:

- Fácil interpretação dos modelos;
- Permitem realizar uma avaliação relativa usando apenas os *inputs* e *outputs* das DMUs em avaliação, não necessitando da definição de uma função de produção a priori;
- Permitem utilizar vários *inputs* e vários *outputs* que podem ser expressos em várias medidas, não exigindo que os mesmos sejam de natureza financeira;
- Permitem calcular um índice de eficiência para cada uma das DMUs em avaliação e distinguir as eficientes das não eficientes;

- Para as DMUs não eficientes, permitem determinar quais as eficientes que são referência para que estas se tornem eficientes, fornecendo indicadores para melhorar as DMUs ineficientes;
- São flexíveis na determinação dos pesos, permitindo que cada DMU selecione os pesos que lhe são mais benéficos, o que se revela importante na identificação das DMUs ineficientes; e
- São versáteis na sua aplicação, uma vez que pode ser aplicada aos mais diversos tipos de organização e em diversas fases/periódos temporais, permitindo assim uma análise contínua e progressiva.

Como desvantagens há a referir as seguintes:

- O fraco poder de discriminação devido à existência de um número elevado de DMUs classificadas como eficientes provocado pela flexibilidade na determinação dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, nomeadamente quando o número de DMUs não é suficientemente grande em comparação ao número total de *inputs* e *outputs*;
- Distribuição irrealista dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que ocorre quando a eficiência de algumas DMUs é atingida à custa de valores muito elevados para os pesos associados aos *outputs* e/ou valores muito baixos para os pesos associados aos *inputs*; e
- Cada DMU é tratada como uma caixa negra, isto é, ignorando a sua estrutura interna, não permitindo, no caso das DMUs ineficientes, identificar as origens da ineficiência.

De modo a contornar as desvantagens referidas anteriormente, quanto à utilização dos modelos clássicos da DEA, uma quantidade considerável de trabalho tem sido desenvolvida e apresentada, nomeadamente sobre o fraco poder de discriminação, que impossibilita o estabelecimento de um *ranking* completo sobre todas as DMUs. Na seção seguinte é feita uma referência aos vários métodos de *rankings* que têm sido apresentados na literatura da DEA.

## 2.6. Métodos de *rankings* na DEA

Como se referiu na seção anterior, uma grande limitação dos modelos clássicos da DEA é a do fraco poder de discriminação desses modelos, mais precisamente na incapacidade de discriminar as várias DMUs eficientes que em geral identificam, impossibilitando a geração

de um *ranking* completo sobre todas as DMUs. A fim de contornar essa limitação, vários métodos e modelos têm sido propostos na literatura da especialidade, como se pode avaliar pelos trabalhos sobre revisão de métodos de *rankings* na DEA apresentados por Alder, Friedman e Sinuany-Stern (2002) e, mais recentemente, por Aldamak e Zolfaghari (2017).

Alder, Friedman e Sinuany-Stern (2002) agruparam os vários métodos de *rankings* na DEA desenvolvidos na literatura no período de 1986 a 2000 em seis áreas. A primeira, refere-se à abordagem conhecida como eficiência cruzada, proposta por Sexton, Silkman e Hogan (1986), na qual cada DMU é avaliada por si própria e pelos seus pares. A segunda, é conhecida como super-eficiência, na qual a DMU em avaliação é excluída do conjunto de referência, esta foi introduzida por Andersen e Petersen (1993). A terceira, é conhecida por abordagem *benchmark* pela qual as DMUs são ordenadas de acordo com a sua importância relativa para as DMUs ineficientes. A quarta, refere-se a técnicas de estatística multivariada, utilizadas depois de aplicar um modelo DEA, e foi sugerida por Friedaman e Sinuany-Ster (1997). A quinta, refere-se ao *ranking* de DMUs ineficientes. A sexta, combina a decisão multicritério com a metodologia DEA.

Aldamak e Zolfaghari (2017), com base nas abordagens publicadas até 2015, organizaram os métodos de *rankings* na DEA em dez categorias. As primeiras seis categorias correspondem às seis áreas consideradas em Alder, Friedman e Sinuany-Stern (2002) e referidas anteriormente. A sétima, designada de fronteira invertida, utiliza a eficiência otimista e a eficiência pessimista para obter um *ranking* completo de todas as DMUs. A oitava, refere-se à categoria das DMUs virtuais, em que o *ranking* é obtido usando este tipo de DMUs para integrar as eficiências otimista e pessimista. A nona, é a da interferência do decisor, na qual o valor da eficiência pode variar de acordo com a natureza do problema e as preferências do decisor. A décima e última categoria, usa conceitos *Fuzzy* para obter um *ranking* completo das DMUs.

Das dez categorias sobre métodos e modelos de *rankings* na DEA referidas anteriormente, existem duas que usam conjuntamente a eficiência otimista e pessimista. Este trabalho tem por objetivo principal apresentar um estudo sobre uma dessas categorias, a das DMUs virtuais. Esse estudo é apresentado, de seguida, no capítulo 3, onde são apresentados os principais métodos e modelos baseados em DMUs virtuais, que será complementado com a aplicação de alguns desses métodos e modelos a uma situação real, que será apresentada no capítulo 4.

### 3. *Rankings* baseados em DMUs virtuais

#### 3.1. Introdução

Como se referiu anteriormente na seção 2.6, uma das categorias, relativamente recente, de métodos para gerar *rankings* na DEA é designada de DMUs virtuais e assenta na utilização desse tipo de DMUs para integrar as eficiências otimista e pessimista. Wang e Luo (2006) foram os primeiros a introduzir este tipo de DMUs ao proporem duas DMUs virtuais, uma ideal e outra anti-ideal, para calcular a melhor e a pior eficiência dessas DMUs e das DMUs reais. Os autores combinam estas duas medidas através de um índice de proximidade relativa de uma DMU real à DMU ideal para obter a *performance* global de cada DMU real e estabelecer um *ranking* para estas DMUs.

Uma abordagem diferente da proposta por Wang e Luo (2006) consiste na utilização de uma ou das duas DMUs virtuais para obter um intervalo de eficiência que integra a melhor e a pior eficiências. Wang e Yang (2007) foram os primeiros a usar esta abordagem, que também foi usada mais tarde nos trabalhos desenvolvidos por Wang, Yi e Wang (2008), por Azizi e Ajirlu (2010), por Azizi (2011) e por Chen (2014). Para obter um *ranking* de todas as DMUs reais, esta abordagem requer a utilização de um método para ordenação de intervalos de números reais. Wang e Yang (2007) apresentam um método conhecido como critério de Hurwicz, justificando a sua escolha pelo facto de as comparações e *rankings* baseados na melhor e na pior eficiências serem dois casos especiais desse critério.

Neste capítulo apresenta-se um estudo sobre esta nova classe de métodos para geração de *rankings* de DMUs. Assim, na seção 3.2, apresenta-se a abordagem proposta por Wang e Luo (2006) para obtenção de *rankings* de DMUs. Na seção 3.3 apresentam-se os modelos, conhecidos por modelos DEA limitados, que permitem obter um intervalo de eficiência que integra a melhor e a pior eficiências, recorrendo às DMUs virtuais, apresentados por Wang e Yang (2007), Wang, Yi e Wang (2008), Azizi e Ajirlu (2010) e por Chen (2014). Por fim, na seção 3.4, apresenta-se o critério de Hurwicz para ordenação de intervalos de números e obtenção de um *ranking* das DMUs, proposto em Wang e Yang (2007), e que será usado no estudo prático a apresentar no capítulo 4.

#### 3.2. Modelos Wang e Luo (2006)

Wang e Luo (2006) consideram duas DMUs virtuais para medir as eficiências otimista e pessimista de cada DMU: uma, que usa a menor quantidade de *inputs* para produzir a maior

quantidade de *outputs*, designada de DMU ideal e denotada por IDMU (Ideal DMU); outra, que usa a maior quantidade de *inputs* para produzir a menor quantidade de *outputs*, designada de DMU anti-ideal e denotada por ADMU (Anti-ideal DMU). Note-se que, como referem os autores, uma IDMU pode, na prática, não existir enquanto uma ADMU pode existir na prática, porque o desperdício de recursos é sempre possível no conjunto de possibilidades de produção.

De acordo com a definição de IDMU, designe-se por  $X_i^{\min}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $y_r^{\max}$  ( $r = 1, \dots, s$ ) os *inputs* e *outputs* de uma IDMU, respetivamente, onde  $x_i^{\min}$  é o mínimo do *input*  $i$  e  $y_r^{\max}$  é o máximo do *output*  $r$ , determinados por:

$$x_i^{\min} = \min_j \{x_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1a)$$

$$y_r^{\max} = \max_j \{y_{rj}\}, \quad r = 1, \dots, s \quad (3.1b)$$

De modo idêntico, e de acordo com a definição de ADMU, designe-se por  $x_i^{\max}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $y_r^{\min}$  ( $r = 1, \dots, s$ ) os *inputs* e *outputs* de uma ADMU, respetivamente, onde  $x_i^{\max}$  é o máximo do *input*  $i$  e  $y_r^{\min}$  é o mínimo do *output*  $r$ , determinados por:

$$x_i^{\max} = \max_j \{x_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2a)$$

$$y_r^{\min} = \min_j \{y_{rj}\}, \quad r = 1, \dots, s \quad (3.2b)$$

A melhor eficiência da IDMU pode ser obtida através do seguinte modelo de programação fracionária:

$$\max \theta_{IDMU} = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{\max} u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{\min} v_i} \quad (3.3a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3c)$$



$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3d)$$

Usando a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$\max \quad \theta_{IDMU} = \sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_r \quad (3.4a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_i^{min} v_i = 1 \quad (3.4b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.4e)$$

Designe-se por  $\theta_{IDMU}^*$  o valor da solução ótima do modelo anterior. A melhor eficiência relativa da DMU<sub>k</sub>, sob a condição de que a melhor eficiência da IDMU permanece inalterável, é obtida pelo seguinte modelo:

$$\max \quad \theta_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^k u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{min} v_i} \quad (3.5a)$$

$$s. a. \quad \theta_{IDMU}^* = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{min} v_i} \quad (3.5b)$$

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5e)$$

Usando novamente a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$\max \quad \theta_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (3.6a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (3.6b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_r^{\max} u_r - \sum_{i=1}^m (\theta_{IDMU}^* X_i^{\min}) v_i = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6c)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6d)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6e)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.6f)$$

A pior eficiência da ADMU é obtida através do seguinte modelo de programação fracionária:

$$\min \quad \varphi_{ADMU} = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{\min} u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{\max} v_i} \quad (3.7a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7d)$$

Usando a transformação de Charnes e Cooper (1962), obtém-se o seguinte modelo de programação linear

$$\min \quad \varphi_{ADMU} = \sum_{r=1}^s Y_r^{\min} u_r \quad (3.8a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_i^{\max} v_i = 1 \quad (3.8b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.8c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.8e)$$

Designe-se por  $\varphi_{ADMU}^*$  o valor da solução ótima do modelo anterior, isto é, a pior eficiência da ADMU. A pior eficiência relativa da DMU<sub>k</sub> sob a condição de que a pior eficiência da ADMU permanece inalterável é dada pelo seguinte modelo:

$$\min \quad \varphi_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^k u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{\min} v_i} \quad (3.9a)$$

$$s. a. \quad \varphi_{ADMU}^* = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{\min} u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{\max} v_i} \quad (3.9b)$$

$$\varphi_j = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9e)$$

A linearização do modelo anterior, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), permite obter o seguinte modelo de programação linear:

$$\min \quad \varphi_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (3.10a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (3.10b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_r^{\min} u_r - \sum_{i=1}^m (\theta_{ADMU}^* X_i^{\max}) v_i = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10c)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10d)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10e)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.10f)$$

Designando por  $\theta_k^*$  e por  $\varphi_k^*$  os valores ótimos dos modelos (3.6) e (3.10), respetivamente, que determinam os valores da melhor e da pior eficiências relativas da DMU<sub>k</sub>, os autores definiram eficiência e ineficiência de uma DMU<sub>k</sub>. Assim, uma DMU<sub>k</sub> diz-se eficiente se  $\theta_k^* = 1$ , caso contrário, diz-se não eficiente. De modo análogo, uma DMU<sub>k</sub> diz-se ineficiente se  $\varphi_k^* = 1$ , caso contrário diz-se não ineficiente.

Wang e Luo (2006) apresentaram assim modelos para calcular a melhor eficiência da IDMU e a pior eficiência da ADMU, e, de seguida, utilizaram estes valores de eficiência para calcular, respetivamente, a melhor e a pior eficiência de cada uma das  $n$  DMUs reais em avaliação. Como já se referiu, quando usados separadamente, estes dois tipos de medida da eficiência podem conduzir a conclusões completamente diferentes. Por forma a combinar a eficiência otimista e a eficiência pessimista, e obter um *ranking* global de todas as DMUs, Wang e Luo (2006) introduziram o conceito de proximidade relativa usado na abordagem TOPSIS, uma conhecida metodologia da tomada de decisão multiatributo (MADM).

Sejam  $\theta_{IDMU}^*$  e  $\theta_k^*$  a melhor eficiência relativa de IDMU e DMU<sub>k</sub> obtida pelos modelos (3.4) e (3.6), respetivamente, e sejam  $\varphi_{ADMU}^*$  e  $\varphi_k^*$  a pior eficiência relativa de ADMU e DMU<sub>k</sub>, obtida pelos modelos (3.8) e (3.10), respetivamente. O índice de proximidade relativa da DMU<sub>k</sub> à IDMU, normalmente denotado por  $RC_k$ , é definido por

$$RC_k = \frac{\varphi_k^* - \varphi_{ADMU}^*}{(\varphi_k^* - \varphi_{ADMU}^*) + (\theta_{IDMU}^* - \theta_k^*)} \quad (3.11)$$

É evidente que uma maior diferença entre  $\varphi_k^*$  e  $\varphi_{ADMU}^*$  e uma menor diferença entre  $\theta_{IDMU}^*$  e  $\theta_k^*$  significa uma melhor eficiência da DMU<sub>k</sub>. Por outras palavras, quanto maior for a distância de uma DMU<sub>k</sub> à ADMU e quanto menor for a distância dessa DMU<sub>k</sub> à IDMU,

mais eficiente será a DMU<sub>k</sub>. Consequentemente, a DMU<sub>k</sub> com maior valor de  $RC_k$  é a que tem melhor *performance*.

Uma vez que o índice RC (*Relative Closeness*) integra os valores da melhor e da pior eficiência relativa de cada DMU, então tal índice fornece uma avaliação global para cada DMU permitindo gerar facilmente um *ranking* para todas as  $n$  reais DMUs. Note-se que o índice RC não é uma medida de eficiência, mas apenas um valor que permite estabelecer um *ranking* completo entre as DMUs.

### 3.3. Modelos DEA limitados

Uma outra abordagem, diferente da proposta por Wang e Luo (2006), consiste em usar as DMUs virtuais para determinar um intervalo de eficiência integrando as eficiências otimista e pessimista e, posteriormente, utilizar um método de ordenação de intervalos de números para obter um *ranking* completo das DMUs.

Sendo  $\theta_k^*$  e  $\varphi_k^*$  os valores das eficiências otimista e pessimista dados pelos modelos (2.2) e (2.8), respetivamente, tem-se que  $\theta_k^* \leq 1$  e  $\varphi_k^* \geq 1$ . Teoricamente, como se refere, por exemplo, em Azizi e Ajirlu (2010), as eficiências otimista e pessimista de uma  $DMU_k$  permite determinar um intervalo de eficiência para essa  $DMU_k$ . Para tal, a eficiência pessimista deve ser ajustada para um valor não superior à eficiência otimista ou, alternativamente, a eficiência otimista deve ser ajustada para um valor não inferior á eficiência pessimista. No primeiro caso, tem-se o intervalo  $[\alpha\varphi_j^*, \theta_j^*]$  onde  $\alpha$ , tal que  $0 < \alpha \leq 1$ , é o parâmetro de ajustamento. No segundo caso, tem-se o intervalo  $[\varphi_j^*, \beta\theta_j^*]$  onde  $\beta$ , tal que  $\beta \geq 1$ , é igualmente o parâmetro de ajustamento. Deste modo, a eficiência de cada uma das DMUs pode ser medida no intervalo  $[\alpha, 1]$  ou  $[1, \beta]$ . Esta ideia pode ser refletida por um par de modelos que relativamente ao intervalo  $[\alpha, 1]$  é dado por

$$\max / \min \quad \delta_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (3.12a)$$

$$s. a. \quad \alpha \leq \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.12b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12d)$$

que, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), pode ser convertido no seguinte par de modelos de programação linear

$$max / min \quad \delta_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (3.13a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_i v_i = 1 \quad (3.13b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \alpha \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13c)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13d)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13e)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13f)$$

Relativamente ao intervalo  $[1, \beta]$ , esse par de modelos é dado por

$$max / min \quad \mu_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (3.14a)$$

$$s. a. \quad 1 \leq \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq \beta \quad j = 1, \dots, n \quad (3.14b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14d)$$

que pode igualmente ser convertido no seguinte par de modelos de programação linear

$$\max / \min \quad \mu_k = \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (3.15a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_i v_i = 1 \quad (3.15b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.15c)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \beta \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.15d)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15e)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.15f)$$

Estes modelos são usualmente designados de modelos DEA limitados porque impõem limites inferior e superior nas restrições de eficiência. Chen (2014) refere o par de modelos relativos ao intervalo  $[\alpha, 1]$  como modelos DEA limitados do tipo I e o par de modelos relativos ao intervalo  $[1, \beta]$  como modelos DEA limitados do tipo II. Note-se que ambos os tipos medem a eficiência otimista e pessimista sujeita às mesmas restrições.

Para usar os modelos DEA limitados acabados de apresentar importa antes determinar o valor de  $\alpha$ , no caso dos modelos do tipo I, ou o valor de  $\beta$ , no caso dos modelos do tipo II. Uma maneira de determinar esses valores é usando as DMUs virtuais definidas anteriormente na secção 3.2. De seguida, apresentam-se os principais trabalhos que utilizam DMUs virtuais para obter os valores de  $\alpha$  e de  $\beta$  a usar nos modelos DEA limitados, apresentados anteriormente, para de seguida obter um intervalo de eficiência para cada DMU.

### 3.3.1 Modelos de Wang e Yang (2007)

A fim de utilizar conjuntamente as eficiências otimista e pessimista, Wang e Yang (2007) utilizaram a ADMU, definida na secção anterior, e usaram a sua melhor *performance* como valor de  $\alpha$  a utilizar no par de modelos DEA limitados do tipo I para obter um intervalo de eficiência que integra a pior e a melhor eficiência das DMUS reais. Os *inputs* e *outputs* da ADMU são determinados através de (3.2).

A melhor eficiência, ou a eficiência otimista, da ADMU é dada pelo seguinte modelo:

$$\max \theta_{ADMU} = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{min} u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{max} v_i} \quad (3.16a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.16b)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.16c)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.16d)$$

Usando a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$\max \theta_{ADMU} = \sum_{r=1}^s Y_r^{min} u_r \quad (3.17a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_i^{max} v_i = 1 \quad (3.17b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.17c)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17d)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.17e)$$

É claro que  $\theta_{ADMU}^* \leq \min_{j=1, \dots, n} \{\theta_j^*\}$ , isto é, a eficiência otimista da ADMU é menor ou igual que a eficiência otimista de qualquer uma das  $n$  DMUs reais. Deste modo, a eficiência de cada uma das DMUs pode ser medida no intervalo  $[\theta_{ADMU}^*, 1]$  ou no intervalo  $[\alpha, 1]$  fazendo  $\alpha = \theta_{ADMU}^*$ . Depois de obtido o valor de  $\theta_{ADMU}^*$ , Wang e Yang (2007) usam o par de modelos DEA limitados do tipo I para medir a *performance* global de cada DMU  $k$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ).

Sejam  $\delta_k^{U*}$  e  $\delta_k^{L*}$  o máximo e o mínimo, respectivamente, da função objetivo desse par de modelos DEA limitados. Estes valores permitem definir um intervalo para a eficiência da



DMU<sub>k</sub>, dado por  $[\delta_k^{L*}, \delta_k^{U*}]$ , onde o limite superior do intervalo indica a melhor eficiência e o limite inferior mede a pior eficiência para a DMU<sub>k</sub>.

Relativamente ao intervalo de eficiência  $[\delta_k^{L*}, \delta_k^{U*}]$ , os autores classificam a DMU<sub>k</sub> como se segue: se  $\delta_k^{U*} = 1$ , a DMU<sub>k</sub> diz-se eficiente; se  $\delta_k^{L*} = \theta_{ADMU}^*$ , DMU<sub>k</sub> a diz-se ineficiente; se a DMU<sub>k</sub> não é eficiente nem ineficiente, diz-se não especificada.

As DMUs eficientes determinam a fronteira eficiente de produção, enquanto as DMUs ineficientes determinam a fronteira ineficiente de produção. As DMUs não especificadas estão envelopadas por ambas as fronteiras, eficiente e ineficiente. Note-se que algumas DMUs podem ser simultaneamente eficientes e ineficientes. Tais DMUs têm um intervalo de eficiência mais amplo dado pelo intervalo  $[\theta_{ADMU}^*, 1]$ .

### 3.3.2 Modelos de Wang, Yi e Wang (2008)

Wang, Yi e Wang (2008) usam a eficiência pessimista ou a pior eficiência da IDMU, definida na seção 3.2, para obter o valor do parâmetro  $\beta$  a ser usado no par de modelos DEA limitados do tipo II e, conseqüentemente, obter um intervalo de eficiência para cada DMU, o qual integra a pior e a melhor eficiência. Considerando os *inputs* e *outputs* da IDMU determinados por (3.1), a sua eficiência pessimista, denotada por  $\varphi_{IDMU}^*$ , é obtida através do seguinte modelo:

$$\min \varphi_{IDMU} = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk}^{max} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik}^{min} v_i} \quad (3.18a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.18b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.18d)$$

Este modelo pode ser transformado no seguinte modelo de programação linear:

$$\min \quad \varphi_{IDMU} = \sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_r \quad (3.19a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_i^{min} v_i = 1 \quad (3.19b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m X_{ij} v_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.19c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.19d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.19e)$$

Neste caso, é também claro que  $\varphi_{IDMU}^* \geq \max_{j=1, \dots, n} \{\varphi_j^*\}$ , isto é, a eficiência pessimista da IDMU é maior ou igual à eficiência pessimista de qualquer uma das  $n$  DMUs. Deste modo, a eficiência de cada uma das DMUs pode ser medida no intervalo  $[1, \varphi_{ADMU}^*]$  ou no intervalo  $[1, \beta]$ , fazendo  $\beta = \varphi_{IDMU}^*$ . Depois de obtido o valor de  $\varphi_{IDMU}^*$ , Wang, Yi e Wang (2008) usam o par de modelos DEA limitados do tipo II para medir a *performance* global de cada  $DMU_k$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ).

Sejam agora  $\mu_k^{U*}$  e  $\mu_k^{L*}$  o máximo e o mínimo, respetivamente, da função objetivo desse par de modelos DEA limitados. Também, neste caso, o intervalo para a eficiência da  $DMU_k$  é dado por  $[\mu_k^{L*}, \mu_k^{U*}]$ , onde o limite superior do intervalo indica a melhor eficiência e o limite inferior mede a pior eficiência para a  $DMU_k$ .

Relativamente ao intervalo de eficiência  $[\mu_k^{L*}, \mu_k^{U*}]$ , tem-se: se  $\mu_k^{L*} = 1$ , a  $DMU_k$  diz-se ineficiente; se  $\mu_k^{U*} = \varphi_{IDMU}^*$ , a  $DMU_k$  diz-se eficiente; se a  $DMU_k$  não é eficiente nem ineficiente, diz-se não especificada.

Claramente que, também neste caso, a fronteira de eficiência e a fronteira de ineficiência são determinadas pelas DMUs eficientes e ineficientes, respetivamente, enquanto as DMUs não especificadas estão envelopadas entre as duas fronteiras. Relativamente às DMUs que podem ser simultaneamente eficientes e ineficientes, estas têm também um intervalo de eficiência mais amplo, dado pelo intervalo  $[1, \varphi_{IDMU}^*]$

### 3.3.3 Modelos de Azizi e Ajirlu (2010)

Com base nas definições de ADMU e IDMU apresentadas na seção 3.2, Azizi e Ajirlu (2010) usam a eficiência otimista da ADMU e a eficiência pessimista da IDMU para obter o valor do parâmetro de ajustamento  $\alpha$ . A eficiência otimista da ADMU,  $\theta_{ADMU}^*$ , é obtida como em Wang e Yang (2007) através do modelo (3.17) apresentado na subseção 3.3.1. A eficiência pessimista da IDMU, denotada por  $\varphi_{IDMU}^*$ , é obtida como em Wang, Yi e Wang (2008) através do modelo (3.19) apresentado na subseção 3.3.2.

O parâmetro de ajustamento  $\alpha$  para cada intervalo  $[\alpha\varphi_j^*, \theta_j^*]$  ( $j=1, \dots, n$ ) é tal que  $\alpha\varphi_j^* \leq \theta_j^*$  ( $j=1, \dots, n$ ), isto é,

$$\alpha \leq \min_{j=1, \dots, n} \{\theta_j^* / \varphi_j^*\}.$$

Por outro lado, atendendo a que

$$\theta_{ADMU}^* \leq \min_{j=1, \dots, n} \{\theta_j^*\} \quad \text{e} \quad \varphi_{IDMU}^* \geq \max_{j=1, \dots, n} \{\varphi_j^*\}$$

tem-se

$$\min_{j=1, \dots, n} \{\theta_j^* / \varphi_j^*\} \geq \frac{\min_{j=1, \dots, n} \{\theta_j^*\}}{\max_{j=1, \dots, n} \{\varphi_j^*\}} \geq \frac{\theta_{ADMU}^*}{\varphi_{IDMU}^*}$$

Então o valor do parâmetro  $\alpha$  fica determinado fazendo  $\alpha = \theta_{ADMU}^* / \varphi_{IDMU}^*$ .

Usando aquele valor de  $\alpha$  no par de modelos DEA limitados do tipo I, Azizi e Ajirlu (2010) obtêm o intervalo de eficiência  $[\delta_k^{L*}, \delta_k^{U*}]$  para a DMU<sub>k</sub>. Relativamente a este intervalo, os autores também classificam a DMU<sub>k</sub> de eficiente, ineficiente ou não especificada, nos mesmos termos em que é feito em Wang e Yang (2007). Isto é, se  $\delta_k^{U*} = 1$ , a DMU<sub>k</sub> diz-se eficiente; se  $\delta_k^{L*} = \alpha$ , a DMU<sub>k</sub> diz-se ineficiente; se a DMU<sub>k</sub> não é eficiente nem ineficiente, então diz-se não especificada.

### 3.3.4 Modelos de Azizi (2011)

Azizi (2011) usa o par de modelos DEA limitados do tipo I para obter um intervalo de eficiência para cada uma das DMUs utilizando a IDMU, mais especificamente, fazendo  $\alpha = \theta_{\min}^* / \varphi_{IDMU}^*$ , onde  $\varphi_{IDMU}^*$  é a eficiência pessimista da IDMU, como se referiu

anteriormente, e  $\theta_{\min}^* = \min_{j=1, \dots, n} \{\theta_j^*\}$ . A abordagem de Azizi (2011) difere da de Azizi e Ajirlu (2010) apenas no cálculo do valor de  $\alpha$ , em que é utilizado  $\theta_{\min}^*$  em vez de  $\theta_{ADMU}^*$ . Então o valor do parâmetro de ajustamento  $\alpha$  não é determinado exclusivamente por recurso a uma ou duas DMUs virtuais, como acontece com as abordagens de Wang e Yang (2007) e de Azizi e Ajirlu (2010).

### 3.3.5. Modelos de Chen (2014)

Como se viu anteriormente, os modelos limitados propostos por Wang Yang (2007) e por Azizi e Ajirlu (2010) são do tipo I em que  $\alpha = \theta_{ADMU}^*$  e  $\alpha = \theta_{ADMU}^* / \varphi_{IDMU}^*$ , respetivamente. Chen (2014) mostra que o intervalo de eficiência  $[\delta_k^{L*}, \delta_k^{U*}]$  obtido por aqueles autores, usando o par de modelos DEA limitados do tipo I e aqueles valores de  $\alpha$ , pode não estar de acordo com o intervalo  $[\alpha\varphi_j^*, \theta_j^*]$  determinado pelos modelos de eficiência otimista e de eficiência pessimista, apresentados no capítulo 2.

Deste modo, o autor conclui que uma DMU<sub>k</sub> sobre a fronteira de eficiência determinada pelo modelo de eficiência otimista (2.2), isto é, em que  $\theta_k^* = 1$ , pode obter  $\delta_k^{U*} < 1$  através dos modelos DEA limitados do tipo I. Identicamente, uma DMU<sub>k</sub> sobre a fronteira de ineficiência determinada pelo modelo de eficiência pessimista (2.8), isto é, em que  $\varphi_k^* = 1$ , pode obter  $\delta_k^{L*} > \alpha$ . Deste modo as fronteiras de eficiência e ineficiência determinadas pelos modelos de eficiência otimista e pessimista, respetivamente, são distorcidas pelos modelos DEA limitados, originando que mais DMUs sejam classificadas como não especificadas.

O autor conclui ainda que o fator chave de inatingibilidade de eficiência reside na especificação dos parâmetros de ajustamento, pelo que propõem uma nova forma para a determinação desses parâmetros.

Para tal o autor começa por propor o seguinte modelo que mostra ser equivalente ao modelo de eficiência otimista (2.1) apresentado na seção 2.3.

$$\max \theta_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (3.20a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m X_i^{min} v_{ik}} \geq 1 \quad (3.20b)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.20c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.20e)$$

De seguida, o autor propõe o seguinte modelo para calcular a eficiência da ADMU

$$\min \bar{\theta}_{ADMU} = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk}^{min} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik}^{max} v_i} \quad (3.21a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m X_i^{min} v_{ik}} \geq 1 \quad (3.21b)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.21c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.21d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.21e)$$

O autor mostra que

$$\bar{\theta}_{ADMU}^* \leq \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_{rk}^*}{\sum_{i=1}^m X_{jk} v_{ik}^*}$$

onde  $\bar{\theta}_{ADMU}^*$  é o valor da solução ótima do modelo (3.21) e  $\{u_{rk}^*, v_{ik}^*\}$  é a solução ótima do modelo de eficiência otimista (2.1).

Simetricamente, Chen (2014) considera o seguinte modelo de eficiência pessimista, que mostra ser equivalente ao seguinte modelo (2.7) apresentado na seção 2.4.

$$\min \quad \varphi_k = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (3.22a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{\min} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m X_i^{\max} v_{ik}} \leq 1 \quad (3.22b)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.22c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.22d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.22d)$$

Seguidamente, o seguinte modelo é construído para medir a eficiência da IDMU

$$\max \quad \bar{\varphi}_{IDMU} = \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk}^{\max} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik}^{\min} v_i} \quad (3.23a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{\min} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m X_i^{\max} v_{ik}} \leq 1 \quad (3.23b)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.23c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.23c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.23d)$$

Também, neste caso, o autor mostra que

$$\bar{\varphi}_{IDMU}^* \geq \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_{rk}^*}{\sum_{i=1}^m X_{jk} v_{ik}^*}$$

onde  $\bar{\varphi}_{IDMU}^*$  é o valor da solução ótima do modelo (3.23) e  $\{u_{rk}^*, v_{ik}^*\}$  é a solução ótima do modelo de eficiência pessimista (2.7).

Chen (2014) estabelece também uma relação entre  $\bar{\theta}_{ADMU}^*$  e  $\bar{\varphi}_{IDMU}^*$ . Para tal transforma os modelos (3.21) e (3.23) nos seguintes modelos equivalentes (3.24) e (3.25), respetivamente:

$$\min \bar{\theta}_{ADMU} = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{min} u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{max} v_i} \quad (3.24a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m X_i^{min} v_{ik}} = 1 \quad (3.24b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.24c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.24d)$$

$$\max \bar{\varphi}_{IDMU} = \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_r}{\sum_{i=1}^m X_i^{min} v_i} \quad (3.25a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s Y_r^{min} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m X_i^{max} v_{ik}} = 1 \quad (3.25b)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.25c)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.25d)$$

Note-se que o modelo (3.24) tem como objetivo minimizar a eficiência da ADMU sujeita à condição de que a eficiência da IDMU é fixada em 1, enquanto o modelo (3.25) tem como objetivo maximizar a eficiência da IDMU sujeita à condição de que a eficiência da ADMU é fixada em 1. Comparando estes dois modelos, Chen (2014) estabelece que

$$\bar{\theta}_{ADMU}^* = \frac{1}{\bar{\varphi}_{IDMU}^*}.$$

Os modelos (3.24) e (3.25) podem ser linearizados. Assim, usando a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo (3.24) pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$\min \bar{\theta}_{ADMU} = \sum_{r=1}^s Y_{rk}^{min} u_r \quad (3.26a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_i^{max} v_i = 1 \quad (3.26b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_{rk} - \sum_{i=1}^m X_i^{min} v_{ik} = 0 \quad (3.26c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.26d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.26e)$$

Identicamente, a linearização do modelo (3.25) é dada pelo seguinte modelo:

$$\max \bar{\varphi}_{IDMU} = \sum_{r=1}^s Y_r^{max} u_r \quad (3.27a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m X_i^{min} v_i = 1 \quad (3.27b)$$

$$\sum_{r=1}^s Y_r^{min} u_{rk} - \sum_{i=1}^m X_i^{max} v_{ik} = 0 \quad (3.27c)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.27d)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.27e)$$

Os modelos (3.26) e (3.27) facilitam o cálculo das eficiências  $\bar{\theta}_{ADMU}^*$  e  $\bar{\varphi}_{IDMU}^*$  uma vez que possuem apenas duas restrições em comparação com as  $n+1$  restrições dos modelos (3.17) e (3.19) usados por Wang e Yang (2007) e Azizi e Ajirlu (2010).

Deste modo, Chen (2014) define os parâmetros de ajustamento para os modelos DEA limitados do tipo I e do tipo II. Assim, para os modelos do tipo I, o parâmetro  $\alpha$  é definido



por  $\alpha \leq \theta_{ADMU}^*$  (ou  $\alpha \leq 1/\varphi_{IDMU}^*$ ) enquanto para os modelos do tipo II, o parâmetro  $\beta$  é definido por  $\beta \geq \varphi_{IDMU}^*$  (ou  $\beta \geq 1/\theta_{ADMU}^*$ ).

Chen (2014) mostra que sendo  $\alpha \leq \theta_{ADMU}^*$  (ou  $\alpha \leq 1/\varphi_{IDMU}^*$ ) e sendo  $\theta_k^*$  e  $\varphi_k^*$ , respetivamente, as eficiências otimista e pessimista da  $DMU_k$  determinadas pelos modelos (2.1) e (2.7), então  $[\alpha\varphi_k^*, \theta_k^*]$  é o intervalo de eficiência  $[\delta_k^{L*}, \delta_k^{U*}]$  determinado pelo modelo DEA limitado do tipo I (3.12). Deste modo, as fronteiras de eficiência e de ineficiência determinada pelos modelos (2.1) e (2.7), respetivamente, permanecem inalteráveis usando o par de modelos (3.12). Assim, uma  $DMU_k$  classificada como eficiente pelo modelo otimista (2.1) é também classificada como eficiente pelo modelo (3.12) com função objetivo de máximo e uma  $DMU_k$  classificada como ineficiente pelo modelo pessimista (2.7) é também classificada como ineficiente pelo modelo (3.12) com função objetivo de mínimo. Para as DMUs não especificadas pelo par de modelos (3.12), verifica-se que tais DMUs não são, nem eficientes pelo modelo otimista (2.1), nem ineficientes pelo modelo de eficiência pessimista (2.7).

Similarmente, o autor mostra que que sendo  $\beta \geq \varphi_{IDMU}^*$  (ou  $\beta \geq 1/\theta_{ADMU}^*$ ) e sendo  $\theta_k^*$  e  $\varphi_k^*$ , respetivamente, as eficiências otimista e pessimista da  $DMU_k$  determinadas pelos modelos (2.1) e (2.7), então  $[\varphi_k^*, \beta\theta_k^*]$  é o intervalo de eficiência  $[\mu_k^{L*}, \mu_k^{U*}]$  determinado pelos modelos DEA limitados do tipo II (3.14). Também neste caso, conclusões idênticas às que foram referidas no parágrafo anterior para os modelos DEA limitados do tipo I podem ser estabelecidas quanto às fronteiras de eficiência e de ineficiência assim como quanto à classificação das DMUs.

A terminar esta subseção, refira-se que relativamente aos modelos apresentados apenas foi apresentada a linearização de alguns deles, mais especificamente dos modelos que vão ser utilizados no estudo prático a apresentar no capítulo seguinte. No entanto, de modo idêntico, isto é, usando a transformação de Charnes e Cooper (1962), pode obter-se a linearização dos restantes.

### 3.6. Ordenação de intervalos de eficiência

Na avaliação através de um intervalo de eficiência para cada DMU, torna-se necessário uma abordagem que permita ordenar esses intervalos e, conseqüentemente, gerar um *ranking*

sobre todas as DMUs. Poucas abordagens têm sido desenvolvidas para ordenar intervalos de números reais. No contexto da DEA, para além da simples abordagem usando o ponto médio do intervalo, são conhecidos o critério de Hurwicz proposto por Wang e Yang (2007), o índice A proposto por Azizi (2011) e a abordagem de arrependimento minimax, conhecida na literatura por MRA (*Minimax Regret Approach*) usada por Azizi e Wang (2013) e proposta por Wang, Greatbanks e Yang (2005). Como se refere, por exemplo, em Azizi (2011), todas estas abordagens apresentam lacunas. Por exemplo, a simples ordenação de intervalos através do seu ponto médio pode levar à existência de intervalos com idênticos pontos médios mas diferentes amplitudes, o que dificulta a ordenação desses intervalos.

Neste trabalho vai utilizar-se a abordagem do critério de Hurwicz apresentada por Wang e Yang (2007) e denotada por HCA (*Hurwicz criterion approach*). Os autores justificam a escolha desta abordagem pelo facto de as comparações e *rankings* baseados na melhor e na pior eficiências serem dois casos especiais de HCA. Esta abordagem é descrita de forma breve como se segue.

Seja  $A_j = [a_j^L, a_j^R] = \langle m(A_j), w(A_j) \rangle$  ( $j = 1, \dots, n$ ) o intervalo de eficiência da DMU<sub>j</sub> ( $j = 1, \dots, n$ ), onde  $m(A_j) = \frac{1}{2}(a_j^R + a_j^L)$  e  $w(A_j) = \frac{1}{2}(a_j^R - a_j^L)$  são os pontos médios do intervalo e da sua amplitude, respetivamente, e seja  $\alpha$  o nível de otimismo do decisor ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). O valor do índice de Hurwicz de  $A_j$  é definido por

$$\begin{aligned} H(A_j) &= \alpha \max(A_j) + (1 - \alpha) \min(A_j) \\ &= \alpha a_j^R + (1 - \alpha) a_j^L \\ &= \frac{1}{2}(a_j^R + a_j^L) - \frac{1}{2}(a_j^R - a_j^L) + \alpha \left( 2 \times \frac{1}{2}(a_j^R - a_j^L) \right) \\ &= m(A_j) + (2\alpha - 1)w(A_j) \end{aligned}$$

O parâmetro  $\alpha$  pode ser entendido como a atitude do decisor face ao risco. Assim, para  $\alpha > 0,5$  considera-se que o decisor é otimista e procura o risco; para  $\alpha = 0,5$  considera-se que o decisor é neutro face ao risco; se  $\alpha < 0,5$  considera-se que o decisor é pessimista e avesso ao risco. O intervalo de eficiência será tanto melhor, quanto maior for o valor do índice de Hurwicz (Wang e Yang, 2007).

## 4. Estudo de um caso prático

### 4.1. Introdução

A atividade seguradora constitui um importante setor na economia portuguesa. De acordo com a nota informativa da ASF (Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões) publicada em março de 2020, a produção global de seguro direto relativa à atividade em Portugal no ano de 2019 situou-se em cerca de 12,2 mil milhões de euros e o ramo não vida apresentou, nesse ano, um crescimento de 8% relativamente ao mesmo período de 2018. De acordo com Rocha (2014), este setor contribui para a concretização do progresso económico e social do país mantendo a continuidade dos processos de produção, defendendo e protegendo a integridade da propriedade pública, privada, as cooperativas e as pessoas, criando para a população meios adicionais de provisões e poupanças.

No capítulo 3 apresentou-se um estudo sobre métodos e modelos de *rankings* baseados em DMUs virtuais, com base nos modelos clássicos de eficiência otimista e pessimista da metodologia DEA apresentados no capítulo 2. Este capítulo destina-se a aplicar alguns desses métodos e modelos a uma situação real, mais concretamente à avaliação e estabelecimento de *rankings* de dezoito seguradoras que operavam em Portugal no ano de 2019.

Deste modo, na secção 4.2, identificam-se os *inputs* e *outputs* selecionados, o modo como foram obtidos e os respetivos valores. Nesta secção, são referidos ainda os modelos selecionados para uso neste caso prático. Na secção 4.3, são apresentados os resultados obtidos e é feita uma análise aos mesmos.

### 4.2. Seleção de dados e modelos

Os dados utilizados neste estudo são respeitantes a dezoito seguradoras do ramo não vida que operavam em Portugal no ano de 2019. De acordo com a ASF, no ano de 2019 operavam em Portugal vinte e seis empresas de seguros com o seu negócio assente no ramo não vida, no entanto, algumas seguradoras foram excluídas do estudo por apresentarem valores demasiado elevados para serem comparados, outras por apresentarem valores negativos para determinados *outputs* e algumas seguradoras não foram inseridas no estudo por apresentarem valores demasiado baixos e deste modo pouco relevantes para o mesmo. Os dados utilizados foram retirados das demonstrações financeiras dos relatórios e contas do ano de 2019 das respetivas seguradoras, que se encontram *online* no *site* de cada empresa de seguros.

A seleção dos *inputs* e *outputs* apresenta uma importância fundamental para o presente estudo prático, visto que, os resultados da avaliação e, conseqüentemente dos *rankings*, dependem dessa seleção. Assim, foram selecionados os seguintes *inputs*:

- *Input 1* - prêmios adquiridos líquidos de resseguro;
- *Input 2* - custos com sinistros líquidos de resseguro;
- *Input 3* - custos e gastos de exploração líquidos.

Os prêmios adquiridos líquidos de resseguro refletem o valor efetivamente pago pelos segurados às seguradoras, normalmente, consiste num valor que pode ser pago mensalmente, semestralmente ou anualmente, dependendo do tipo de acordo e do tipo de seguro que tenha sido requerido. Os custos com sinistros líquidos de resseguro representam os custos que a seguradora tem de suportar quando um seguro é ativado, por exemplo, num seguro automóvel, caso efetivamente exista algum acidente, a seguradora terá de suportar os custos associados ao arranjo do veículo em questão. Relativamente aos custos e gastos de exploração, são todos os custos que uma seguradora tem de suportar para desempenhar a sua função, ou seja, são todos os custos inerentes às necessidades operacionais da mesma, nomeadamente custos de eletricidade, de equipamento, salários, etc.

Quanto aos *outputs*, foram selecionados os seguintes:

- *Output 1* - total do capital próprio;
- *Output 2* - resultado líquido do exercício.

O capital próprio constitui o valor líquido do património de uma empresa e consiste no cálculo da diferença entre os ativos e os passivos da mesma. Relativamente ao resultado líquido do exercício, este resulta do cálculo da diferença entre os proveitos e os custos referentes a um determinado período, neste caso, ao ano de 2019. O resultado líquido do exercício corresponde ao lucro que a seguradora obteve nesse período.

Os dados relativos aos *inputs* e aos *outputs* de cada seguradora são apresentados na tabela 4.1. Assim, da esquerda para a direita, nas primeiras duas colunas da tabela identificam-se as seguradoras (DMUs) utilizadas para o estudo, nas três colunas seguintes apresentam-se os valores relativos aos *inputs* e nas duas últimas apresentam-se os valores relativos aos *outputs*.

Tabela 4.1 – Dados referentes aos *inputs* e aos *outputs* (valores em milhões de euros).

|    | <b>DMUs<br/>(Seguradoras)</b> | <i>Input 1</i> | <i>Input 2</i> | <i>Input 3</i> | <i>Output 1</i> | <i>Output 2</i> |
|----|-------------------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| 01 | Abarca                        | 3303126        | 709649         | 2152419        | 8806717         | 1129733         |
| 02 | ACP Mobilidade                | 1445627        | 952860         | 308973         | 3921677         | 207208          |
| 03 | Aegon ST                      | 45200053       | 11970930       | 26034616       | 21804618        | 4950490         |
| 04 | Ageas Portugal                | 184593776      | 131335138      | 68379166       | 154444915       | 12485075        |
| 05 | Arko Seguros                  | 152090877      | 69584304       | 58699160       | 35008286        | 208145          |
| 06 | Caravela                      | 56303543       | 38578580       | 14648618       | 32387100        | 4219965         |
| 07 | Cosec                         | 22772427       | 13774050       | 4730454        | 49394426        | 7049435         |
| 08 | Crédito Agrícola              | 102178973      | 64559714       | 36894539       | 49510234        | 5159464         |
| 09 | Fidelidade Assistência        | 52778586       | 44476175       | 945241         | 44234768        | 4140847         |
| 10 | GNB                           | 64208498       | 46391585       | 9481838        | 33050249        | 6515104         |
| 11 | Lusitânia                     | 181615181      | 148644385      | 52939758       | 81141895        | 494527          |
| 12 | Mapfre                        | 66540737       | 44168793       | 20452420       | 92538549        | 5514502         |
| 13 | Multicare                     | 315531584      | 258275154      | 46908903       | 92907299        | 10016512        |
| 14 | Mútua de Seguros              | 7191176        | 5769848        | 1027539        | 14206778        | 980953          |
| 15 | OK! Teleseguros               | 46846496       | 39008439       | 9506825        | 26983237        | 810106          |
| 16 | Popular Seguros               | 3683908        | 3071311        | 878056         | 10611107        | 1246953         |
| 17 | RNA Seguros                   | 21377490       | 17476765       | 1025865        | 8622702         | 2169541         |
| 18 | Victoria                      | 39238854       | 30848991       | 8292718        | 43125229        | 851143          |
|    | IDMU                          | 1445627        | 709649         | 308973         | 154444915       | 12485075        |
|    | ADMU                          | 315531584      | 258275154      | 68379166       | 3921677         | 207208          |

**Fonte:** Elaboração própria

Os modelos utilizados para a realização deste estudo prático foram, primeiramente como modelos base, os modelos CCR otimista e CCR pessimista, orientados para *inputs*, apresentados no capítulo 2. De seguida, utilizaram-se os modelos baseados em DMUs virtuais, mais especificamente, os modelos de Wang e Luo (2006) e os modelos DEA limitados propostos por Wang e Yang (2007), Azizi e Ajirlu (2010) e Chen (2014), apresentados no capítulo 3. Nesses modelos foi considerado  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

### 4.3. Resultados e respetiva análise

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos através da aplicação dos modelos selecionados, referidos no final da secção anterior. Para a obtenção desses resultados utilizou-se o módulo de programação linear assim como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*) do *software* CPLEX *Optimization Programming Studio Academic Research 12.5*.

Os resultados são apresentados na tabela 4.2. Nessa tabela, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas, identificam-se as seguradoras (DMUs), nas terceira e quarta colunas, apresentam-se os resultados obtidos pelas versões otimista e pessimista, respetivamente, do modelo CCR orientado para *inputs*; nas quinta, sexta e sétima colunas, apresentam-se os resultados obtidos pela abordagem de Wang e Luo (2006); nas seis colunas seguintes apresentam-se os intervalos de eficiência obtidos pelos modelos de Wang e Yang (2007), Azizi e Ajrlu (2010) e Chen (2014), assim como os valores por aplicação do critério de Hurwicz (HCA), apresentado por Wang e Yang (2007), para ordenação daqueles intervalos.

Da observação da tabela 4.2, verifica-se que, por aplicação do modelo CCR (otimista) orientado para *inputs*, existem cinco seguradoras com índice de eficiência igual a 1, ou seja, existem cinco seguradoras classificadas como eficientes, sendo estas, a seguradora 01 (ABARCA), a 02 (ACP Mobilidade), a 07 (Cosec), a 09 (Fidelidade Assistência), e a 16 (Popular Seguros). Estas seguradoras não podem ser discriminadas por aquele modelo, não sendo possível estabelecer um *ranking* entre as mesmas. Para as restantes seguradoras, obtiveram-se índices de eficiência inferiores a 1, pelo que as mesmas são classificadas como não eficientes. Neste caso, o modelo permite discriminar estas seguradoras uma vez que os índices obtidos são todos diferentes entre si.

Relativamente aos resultados obtidos pelo modelo CCR pessimista orientado para *inputs*, verifica-se que, existem três seguradoras com índice de eficiência igual a 1, sendo, por isso, classificadas como ineficientes, que são a seguradora 05 (Arco Seguros), 11 (Lusitania Seguros) e 13 (Multicare). As restantes 15 seguradoras são classificadas como não ineficientes. Este modelo não permite discriminar estas três seguradoras ineficientes, permitindo, no entanto, discriminar as restantes, dado que os índices obtidos são todos diferentes entre si.

Tabela 4.2 – Resultados obtidos pelos modelos selecionados

| DMUs<br>(Seguradoras)     | CCR<br>otimista | CCR<br>pessimista | Wang e Luo (2006) |          |        | Wang e Yang (2007)               |        | Azizi e Ajirlu (2010)            |          | Chen (2014)                      |        |
|---------------------------|-----------------|-------------------|-------------------|----------|--------|----------------------------------|--------|----------------------------------|----------|----------------------------------|--------|
|                           |                 |                   | CCR/IDMU          | CCR/ADMU | RC     | $[\delta_k^{L*}, \delta_k^{U*}]$ | HCA    | $[\delta_k^{L*}, \delta_k^{U*}]$ | HCA      | $[\delta_k^{L*}, \delta_k^{U*}]$ | HCA    |
| 01 Abarca                 | 1               | 6,8604            | 1                 | 28,7118  | 0,3664 | [0,0260; 1]                      | 0,5130 | [0,000058; 1]                    | 0,500029 | [0,0003; 1]                      | 0,5001 |
| 02 ACP Mobilidade         | 1               | 9,6815            | 1                 | 9,7435   | 0,1637 | [0,0440; 1]                      | 0,5220 | [0,000097; 1]                    | 0,500049 | [0,0004; 1]                      | 0,5002 |
| 03 AEGON ST               | 0,3316          | 1,4043            | 0,2199            | 5,4979   | 0,0978 | [0,0045; 0,3310]                 | 0,1678 | [0,000010; 0,3316]               | 0,165783 | [0,0000; 0,3316]                 | 0,1658 |
| 04 Ageas Portugal         | 0,3099          | 2,7149            | 0,2555            | 2,9680   | 0,0550 | [0,0114; 0,3099]                 | 0,1607 | [0,000025; 0,3099]               | 0,154974 | [0,0001; 0,3099]                 | 0,1550 |
| 05 Arko Seguros           | 0,0882          | 1                 | 0,0886            | 1        | 0,0187 | [0,0045; 0,0882]                 | 0,0464 | [0,000010, 0,0882]               | 0,044092 | [0,0000; 0,0882]                 | 0,0441 |
| 06 Caravela               | 0,2317          | 2,0851            | 0,2223            | 2,4148   | 0,0451 | [0,0081; 0,2295]                 | 0,1188 | [0,000018; 0,2297]               | 0,114880 | [0,0001; 0,2297]                 | 0,1149 |
| 07 Coscec                 | 1               | 8,4593            | 1                 | 10,6300  | 0,1761 | [0,0385; 1]                      | 0,5192 | [0,000085; 1]                    | 0,500043 | [0,0004; 1]                      | 0,5002 |
| 08 Crédito Agrícola       | 0,1749          | 1,7266            | 0,1670            | 2,0411   | 0,0382 | [0,0067; 0,1749]                 | 0,0908 | [0,000015; 0,1749]               | 0,087480 | [0,0001; 0,1749]                 | 0,0875 |
| 09 Fidelidade Assistência | 1               | 2,6550            | 0,3576            | 2,6669   | 0,0498 | [0,0119; 1]                      | 0,5059 | [0,000026; 1]                    | 0,500013 | [0,0001; 1]                      | 0,5001 |
| 10 GNB                    | 0,4291          | 1,8559            | 0,2462            | 2,3955   | 0,0448 | [0,0084; 0,4245]                 | 0,2165 | [0,000019; 0,4291]               | 0,214580 | [0,0001; 0,4291]                 | 0,2146 |
| 11 Lusitânia              | 0,1566          | 1                 | 0,1257            | 1,0000   | 0,0187 | [0,0045; 0,1566]                 | 0,0806 | [0,000010; 0,1566]               | 0,078309 | [0,0000; 0,1566]                 | 0,0783 |
| 12 Mapfre                 | 0,4988          | 4,9803            | 0,4582            | 5,0285   | 0,0906 | [0,0225; 0,4988]                 | 0,2607 | [0,000050; 0,4988]               | 0,249449 | [0,0002; 0,4988]                 | 0,2495 |
| 13 Multicare              | 0,1438          | 1                 | 0,1106            | 1        | 0,0187 | [0,0045; 0,1438]                 | 0,0742 | [0,000010; 0,1438]               | 0,071882 | [0,0000; 0,1438]                 | 0,0719 |
| 14 Mútua de Seguros       | 0,9745          | 6,1025            | 0,7098            | 6,1765   | 0,1096 | [0,0278; 0,9745]                 | 0,5011 | [0,000061; 0,9745]               | 0,487282 | [0,0003; 0,9745]                 | 0,4874 |
| 15 OK! Teleseguros        | 0,2207          | 1,5044            | 0,1735            | 1,5210   | 0,0286 | [0,0064; 0,2207]                 | 0,1136 | [0,000014; 0,2207]               | 0,110374 | [0,0001; 0,2207]                 | 0,1104 |
| 16 Popular Seguros        | 1               | 9,0370            | 0,9743            | 9,7331   | 0,1635 | [0,0380; 1]                      | 0,5190 | [0,000084; 1]                    | 0,500042 | [0,0004; 1]                      | 0,5002 |
| 17 RNA Seguros            | 0,8819          | 1,3707            | 0,2159            | 1,8607   | 0,0350 | [0,0062; 0,8611]                 | 0,4337 | [0,000014; 0,8819]               | 0,440958 | [0,0001; 0,8819]                 | 0,4410 |
| 18 Victoria               | 0,4086          | 2,7500            | 0,3355            | 2,8038   | 0,0522 | [0,0133; 0,4086]                 | 0,2109 | [0,000029; 0,4086]               | 0,204305 | [0,0001; 0,4086]                 | 0,2044 |
| IDMU                      |                 |                   | 50,57786          |          |        |                                  |        |                                  |          |                                  |        |
| ADMU                      |                 |                   |                   | 0,0364   |        |                                  |        |                                  |          |                                  |        |

Fonte: Elaboração própria

Analisando os resultados obtidos pela abordagem de Wang e Luo (2006), apresentados nas colunas cinco, seis e sete da tabela 4.2, verifica-se que o modelo CCR baseado na IDMU permite identificar três seguradoras como eficientes que não consegue discriminar, enquanto o modelo CCR baseado na ADMU identifica duas seguradoras como ineficientes que também não consegue discriminar. Então, os resultados obtidos por cada um destes modelos, não permitem discriminar todas as seguradoras e, conseqüentemente, obter um *ranking* completo para as mesmas. No entanto, combinando os índices de eficiência fornecidos pelos dois modelos através do índice de proximidade relativa de cada DMU à IDMU ( $RC$ ), os valores deste índice são diferentes para todas as seguradoras, permitindo, assim, a sua discriminação.

Para a obtenção dos resultados relativos aos intervalos de eficiência baseados nos modelos DEA limitados, apresentados nas colunas oito, dez e doze da tabela 4.2, começou-se por calcular o valor de  $\alpha$  a utilizar nesses modelos, conforme descrito no capítulo 3. Assim, obteve-se  $\alpha = \theta_{ADMU}^* = 0,004548$  para os modelos propostos por Wang e Yang (2007),  $\alpha = \theta_{ADMU}^* / \phi_{IDMU}^* = 0,000010$  para os modelos propostos por Azizi e Ajirlu (2010) e  $\alpha = \bar{\theta}_{ADMU}^* = 0,000046$  para os modelos propostos por Chen (2014). Para ordenação desses intervalos de eficiência foi utilizada a abordagem do critério de Hurwicz (HCA) apresentada por Wang e Yang (2007) considerando  $\alpha = 0,5$ . Este valor correspondente a uma atitude neutra do decisor face ao risco, conforme foi referido na seção 3.4. Os resultados obtidos por este critério para cada um daqueles três modelos, apresentados nas colunas nove, onze e treze, mostram que qualquer um deles permite discriminar todas as DMUs, uma vez que os valores obtidos são todos diferentes entre si.

Então, a partir dos valores HCA é possível, através de qualquer dos três modelos, estabelecer um *ranking* completo para todas as seguradoras. Esses *rankings* são apresentados nas últimas três colunas da tabela 4.3 onde nas duas primeiras colunas são identificadas as seguradoras e nas três seguintes são apresentados os *rankings* obtidos pelos modelos CCR otimista e CCR pessimista e pela abordagem de Wang e Luo (2006). Nessa tabela, o valor 1 refere-se à seguradora com melhor *performance* enquanto o valor 18 se refere à seguradora com pior *performance*.

Da observação da tabela 4.3, verifica-se que, à exceção dos modelos CCR otimista e CCR pessimista, todas as outras abordagens permitiram obter um *ranking* completo para todas as seguradoras. Verifica-se também que os *rankings* obtidos pelos modelos DEA limitados, apresentados nas três últimas colunas são iguais. Comparando estes *rankings* com os obtidos



pela abordagem de Wang e Luo (2006) verifica-se que as diferenças entre os mesmos apresentam alguma variação.

Tabela 4.3 – *Rankings* obtidos pelos modelos selecionados

| Seguradoras               | CCR otimista | CCR pessimista | Wang e Luo (2006) | Wang e Yang (2007) | Azizi e Ajirlu (2010) | Chen (2014) |
|---------------------------|--------------|----------------|-------------------|--------------------|-----------------------|-------------|
| 01 Abarca                 | 1            | 4              | 1                 | 4                  | 4                     | 4           |
| 02 ACP Mobilidade         | 1            | 1              | 3                 | 1                  | 1                     | 1           |
| 03 AEGON ST               | 11           | 14             | 6                 | 11                 | 11                    | 11          |
| 04 Ageas Seguros          | 12           | 8              | 8                 | 12                 | 12                    | 12          |
| 05 Arko Seguros           | 18           | 16             | 18                | 18                 | 18                    | 18          |
| 06 Caravela               | 13           | 9              | 11                | 13                 | 13                    | 13          |
| 07 Cosec                  | 1            | 3              | 2                 | 2                  | 2                     | 2           |
| 08 Crédito Agrícola       | 15           | 12             | 13                | 15                 | 15                    | 15          |
| 09 Fidelidade Assistência | 1            | 10             | 10                | 5                  | 5                     | 5           |
| 10 GNB                    | 9            | 11             | 12                | 9                  | 9                     | 9           |
| 11 Lusitânia              | 16           | 16             | 16                | 16                 | 16                    | 16          |
| 12 Mapfre                 | 8            | 6              | 7                 | 8                  | 8                     | 8           |
| 13 Multicare              | 17           | 16             | 17                | 17                 | 17                    | 17          |
| 14 Mútua de Seguros       | 6            | 5              | 5                 | 6                  | 6                     | 6           |
| 15 OK! Teleseguros        | 14           | 13             | 15                | 14                 | 14                    | 14          |
| 16 Popular Seguros        | 1            | 2              | 4                 | 3                  | 3                     | 3           |
| 17 RNA Seguros            | 7            | 15             | 14                | 7                  | 7                     | 7           |
| 18 Victoria               | 10           | 7              | 9                 | 10                 | 10                    | 10          |

**Fonte:** Elaboração própria

Existem quatro seguradoras em que essa diferença é nula, que são as seguradoras:

- 05 (Arko Seguros), com *ranking* 18;
- 07 (Cosec), com *ranking* 2;
- 11 (Lusitânia), com *ranking* 16;
- 13 (Multicare) com *ranking* 17.

Existem cinco seguradoras em que a diferença é um, que são as seguradoras:

- 12 (Mapfre), com *ranking* 7 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 8 nos modelos DEA limitados;
- 14 (Mútua de Seguros) com *ranking* 5 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 6 nos modelos DEA limitados;
- 15 (OK! Teleseguros) com *ranking* 15 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 14 nos modelos DEA limitados;
- 16 (Popular Seguros) com *ranking* 4 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 3 n nos modelos DEA limitados;
- 18 (Victoria) com *ranking* 9 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 10 nos modelos DEA limitados.

Existem três seguradoras em que a diferença é dois, que são as seguradoras:

- 02 (ACP Mobilidade) com *ranking* 3 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 1 nos modelos DEA limitados;
- 06 (Caravela) com *ranking* 11 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 13 nos modelos DEA limitados;
- 08 (Crédito Agrícola) com *ranking* 13 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 15 nos modelos DEA limitados.

Existem duas seguradoras em que a diferença é três, que são as seguradoras:

- 01 (Abarca) com *ranking* 1 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 4 nos modelos DEA limitados;
- 10 (GNB) com *ranking* 12 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 9 nos modelos DEA limitados.

Existe uma seguradora em que a diferença é quatro, que é a seguradora:

- 04 (Ageas Seguros) com *ranking* 8 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 12 nos modelos DEA limitados.

Existem duas seguradoras em que a diferença é cinco, que são as seguradoras:

- 03 (AEGON ST) com *ranking* 6 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 11 nos modelos DEA limitados;
- 09 (Fidelidade Assistência) com *ranking* 10 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 5 nos modelos DEA limitados.

Existe uma seguradora em que a diferença é sete, que é a seguradora:

- o 17 (RNA Seguros) com *ranking* 14 no modelo de Wang e Luo (2006) e *ranking* 7 nos modelos DEA limitados.

Desta análise resulta que, para metade das seguradoras, a diferença entre os *rankings* é, no máximo, igual a 1 e que, para dois terços dessas seguradoras, essa diferença é, no máximo, igual a 2.

As diferenças entre os *rankings* apresentadas na tabela 4.3 podem ser mais facilmente observadas através do gráfico apresentado na figura 4.1.

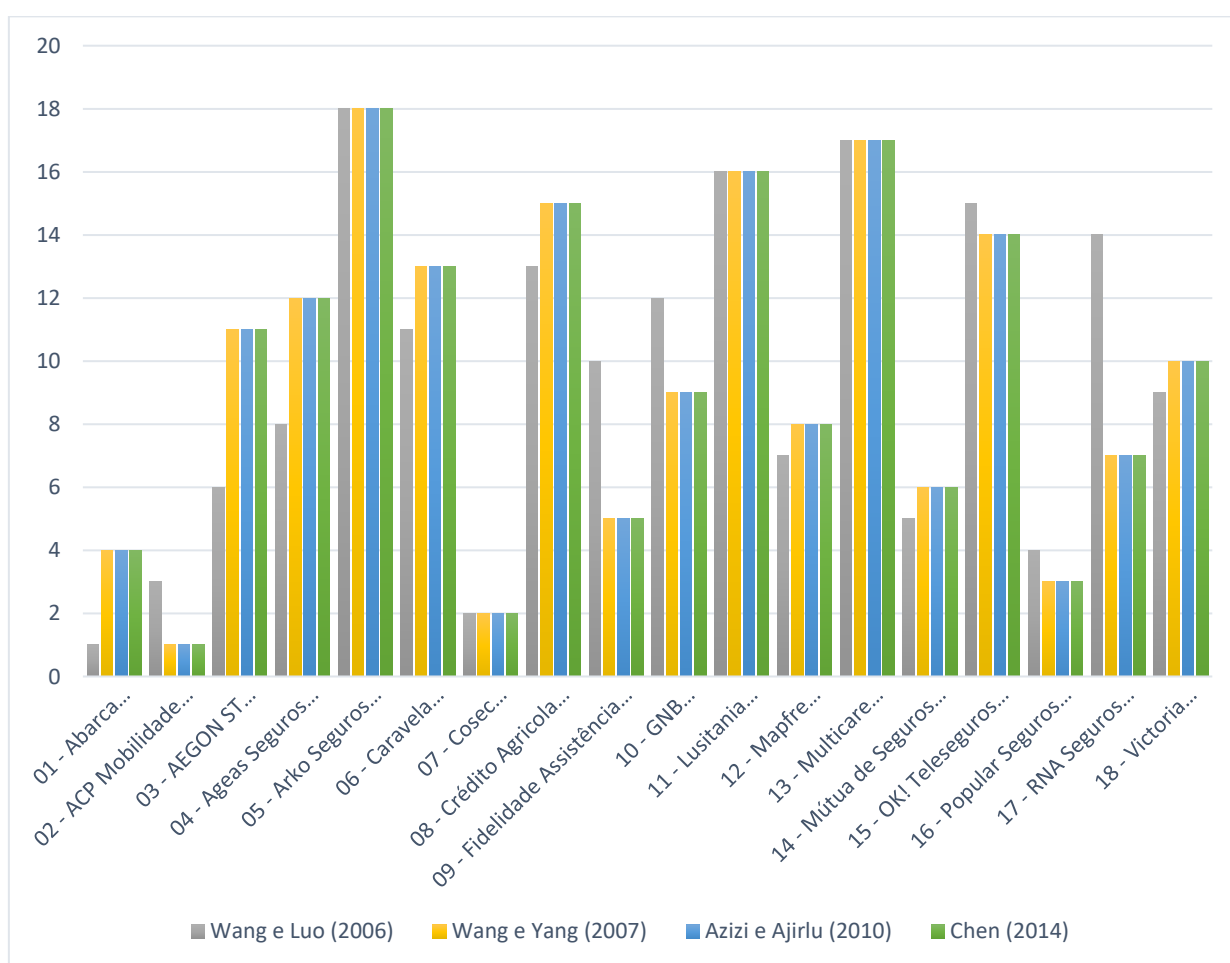


Figura 4.1 – Gráfico de *Rankings* de eficiência obtidos através dos modelos aplicados

Fonte: Elaboração própria

Da observação do gráfico da figura 4.1, verifica-se que, para as seguradoras em que existe variação entre os *rankings* obtidos pela abordagem de Wang e Luo (2006) e pela abordagem dos modelos DEA limitados, não existe uma que é melhor do que a outra. De facto, a abordagem

de Wang e Luo produz melhor *ranking* para as seguradoras 01 (Abarca), 03 (AEGON ST), 04 (Ageas Seguros), 06 (Caravela), 08 (Crédito Agrícola), 12 (Mapfre), 14 (Mútua de Seguros) e 18 (Victoria). Em contrapartida, a abordagem baseada nos modelos DEA limitados produz melhor *ranking* para as seguradoras 02 (ACP Mobilidade), 09 (Fidelidade Assistência), 10 (GNB), 15 (OK! Teleseguros), 16 (Popular Seguros) e 17 (RNA Seguros).

Ainda da observação do gráfico da figura 4.1, e também da tabela 4.3, constata-se que o top-3 das seguradoras com melhor *performance* é constituído pelas seguradoras 01 (Abarca), 07 (Cosec) e 02 (ACP Mobilidade) usando a abordagem de Wang e Luo (2006) e pelas seguradoras 02 (ACP Mobilidade), 07 (Cosec) e 16 (Popular Seguros) usando os modelos DEA limitados de Wang e Yang (2007), de Azizi e Ajirlu (2010) e de Chen (2014). Por outro lado, o top-3 das seguradoras com pior *performance* é constituído pelas seguradoras 05 (Arko Seguros), 13 (Multicare) e 11 (Lusitânia) quer através dos modelos de Wang e Luo (2006) quer através dos modelos DEA limitados.

## 5. Conclusões

Num mundo cada vez mais competitivo, as organizações sentem uma obrigação crescente de se avaliarem e adaptarem às alterações do ramo em que estão inseridas. Surge, desta forma, a necessidade de avaliação do desempenho organizacional para a realização de uma gestão eficiente. Ao longo dos anos, os gestores têm utilizado diversas metodologias de avaliação de desempenho organizacional, sendo a metodologia DEA considerada uma das mais relevantes para avaliar a eficiência relativa das organizações.

Os modelos clássicos da DEA calculam a eficiência relativa de um ponto de vista otimista e, em geral, classificam várias DMUs como eficientes, não sendo capazes de discriminar essas DMUs. Esta incapacidade constitui uma limitação desses modelos, pois muitas vezes os gestores estão mais interessados em estabelecer um *ranking* sobre a *performance* das DMUs do que em saber o valor da sua eficiência relativa. Como se viu, a eficiência pode também ser calculada de um ponto de vista pessimista e a integração destes dois tipos de eficiência pode ser usada para estabelecer os referidos *rankings*.

No sentido de ultrapassar a referida limitação, várias classes ou categorias de métodos e modelos para obtenção de *rankings* na DEA têm sido apresentadas. Uma dessas classes, relativamente recente, é a das DMUs virtuais, que utiliza DMUs virtuais, uma ideal e outra anti-ideal, para integrar as eficiências otimista e pessimista e, conseqüentemente, obter um *ranking* para todas as DMUs reais.

A classe das DMUs virtuais, foi introduzida por Wang e Luo (2006), que propuseram duas DMUs virtuais, uma ideal e outra anti-ideal, para calcular a melhor e a pior eficiências dessas DMUs e das DMUs reais e combinam essas eficiências através de um índice de proximidade relativa de uma DMU real à DMU ideal para obter a *performance* global de cada DMU real e estabelecer um *ranking* para estas DMUs. Uma outra abordagem foi proposta por Wang e Yang (2007) e seguida por Wang, Yi e Wang (2008), Azizi e Ajirlu (2010), Azizi (2011) e Chen (2014) e consiste na utilização de uma ou, das duas DMUs virtuais, para obter um intervalo de eficiência integrando a melhor e a pior eficiências, usando um par de modelos, conhecidos como modelos DEA limitados. Esta abordagem requer o uso de método para ordenação desses intervalos de modo a poder obter-se um *ranking* sobre todas as DMUs reais. Wang e Yang (2007) apresentam o critério de Hurwicz, justificando a sua escolha pelo facto de as comparações e *rankings* baseados na melhor e na pior eficiências serem dois casos especiais desse critério.

De modo a avaliar os modelos e abordagens apresentadas neste estudo, nomeadamente as suas diferenças, realizou-se uma aplicação daqueles modelos ao setor segurador, mais especificamente, à avaliação e obtenção de *rankings* para dezoito seguradoras do ramo não vida que operavam em Portugal no ano de 2019.

Numa primeira fase deste estudo prático, utilizaram-se os modelos CCR otimista e CCR pessimista, orientados para *inputs*. O modelo CCR otimista orientado para *inputs*, identificou cinco seguradoras classificadas como eficientes, enquanto o modelo CCR pessimista orientado para *inputs*, classificou três seguradoras como ineficientes. Então existe um número de seguradoras que estes modelos não conseguem discriminar quando usados isoladamente.

Numa segunda fase, foi usada a abordagem proposta por Wang e Luo (2006) e a abordagem baseada nos modelos DEA limitados propostos por Wang e Yang (2007), Azizi e Ajirlu (2010) e Chen (2014). Os resultados obtidos por estas abordagens permitiram discriminar todas as seguradoras e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking* completo sobre as mesmas. Esses resultados mostram ainda, que, apesar de obterem intervalos de eficiência diferentes, os *rankings* obtidos pelos três modelos DEA limitados são os mesmos, contudo, diferentes dos obtidos pela abordagem de Wang e Luo (2006) para a maioria das seguradoras. Apenas quatro seguradoras apresentam o mesmo *ranking* nas duas abordagens.

## Referências Bibliográficas

- ABARCA – Companhia de Seguros, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: ABARCA.
- ACP Mobilidade – Sociedade de Seguros de Assistência, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: ACP Mobilidade.
- Adler N, L Friedman and Z Sinuany-Stern (2002). Review of *Ranking* Methods in the Data Envelopment Analysis Context. *EJOR* 140(2), 249-265.
- Aegon Santander Portugal. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Aegon ST.
- Ageas Seguros Portugal. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Ageas.
- Aldamak, A., Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency *ranking* methods in data envelopment analysis. *Measurement*, 106, 161-172.
- Andersen P and NC Petersen (1993). A Procedure for *Ranking* Efficient Units in Data Envelopment Analysis. *Management Science* 39(10). 1261-1264.
- Arko – Companhia de Seguros, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Arko.
- Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões. (2020). Evolução da Atividade Seguradora e da Atividade dos Fundos de Pensões. [Web Site]. Disponível em <https://www.asf.com.pt/NR/exeres/67550CDB-4AAF-4459-81D8-A02F99103998.htm>.
- Azizi, H., & Ajrlu, S. (2010). Measurement of overall *performances* of decision-making units using ideal and anti-ideal decision-making units. *Computers & Industrial Engineering* 59, 411–418.
- Azizi, H. (2011). The interval efficiency based on the optimistic and pessimistic points of view. *Applied Mathematical Modelling* 35, 2384-2393.
- Azizi, H. & Wang, Y., M. (2013). Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision-making units. *Measurement*, 46, 1325-1332.
- Azizi, H. (2014). DEA efficiency analysis: A DEA approach with double frontiers. *International Journal of Systems Science*, 45(11), 2289–2300.
- Banker, R. D., Charnes, A. & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078- 1092.

- CA Seguros – Crédito Agrícola. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: CA Seguros.
- Caravela Seguros. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Caravela.
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functional. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 181-186.
- Charnes, A., Cooper, W. W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- Charnes A, WW Cooper and EL Rhodes (1981). Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of DEA to Program Follow Through. *Management Science* 27(6), 668-697.
- Chen, J. (2014), Overall *performance* evaluation: new bounded DEA models against unreachability of efficiency, *Journal of the Operational Research Society*, 65:7,1120- 1132, DOI:10.1057/jors.2013.57.
- Coelli, T., Rao, D. S., O'Donnell, C. e Battese, G. (2005) An introduction to efficiency and productivity analysis. *Springer, New York*.
- Cooper, W. W. (2005). Origins, Uses of, and Relations Between Goal Programming and Data Envelopment Analysis. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 13, 3-11.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Tone, K. (2007). Data Envelopment Analysis: A comprehensive Text With Models, Applications, References and DEA - Solver Software. Interfaces. *Springer Science*, 31(3), 116-118.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Zhu, J. (2011). *Handbook on Data Envelopment Analysis* (2<sup>a</sup> ed.). New York: Springer.
- Cosec – Companhia de Seguro de Créditos, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Cosec.
- Emrouznejad, A., Parker, B. R. & Tavares, G. (2008). Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA. *Socio-Economic Planning Sciences*, 42(3), 151-157.
- Emrouznejad, A., & Yang, G. (2018). A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978-2016. *Socio-Economic Planning Sciences*, 61, 4-8.
- Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120(3), 253-290.



- Fidelidade Assistência – Companhia de Seguros, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Fidelidade Assistência.
- Friedman L and Z Sinuany-Stern (1997). Scaling Units Via the Canonical Correlation Analysis in the DEA Context. *EJOR* 100(3), 629-637.
- Liu, J. S., Lu, W., Lu, Y. Y., & Lin, B. J. (2013a). Data envelopment analysis 1978-2010: a citation-based literature survey. *Omega - The International Journal of Management Science*, 41, 3-15.
- Liu, J. S., Lu, W., Lu, Y. Y., & Lin, B. J. (2013b). A survey of DEA applications. *Omega*, 41, 893-902.
- GNB Seguros. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: GNB.
- Lusitânia – Companhia de Seguros, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Lusitânia.
- Mapfre – Seguros Gerais, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Mapfre.
- Multicare – Seguros de Saúde, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Multicare.
- Mútua de seguros. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Mútua de seguros.
- OK Teleseguros. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: OK Teleseguros.
- Parkan, C.; Wang, Y. M. (2000). Worst Efficiency Analysis Based on Inefficient Production Frontier, Working Paper, Department of Management Sciences, *City University of Hong Kong*.
- Popular Seguros – Companhia de Seguros, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Popular Seguros.
- Reynolds, P. (2013). Hotel companies and corporate environmentalism. *Tourism and Management Studies*, 9(1), 7-12.
- Rocha, C. E. A. A. (2014). *Contribuição do Setor Segurador para a Internacionalização das Empresas Portuguesas: Estudo de Caso da Somelos Tecidos, S.A.* (Estudo de Caso, Instituto Superior de Contabilidade e Administração do Porto, Porto, Portugal. Disponível em <http://hdl.handle.net/10400.22/5055>.
- RNA Seguros, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: RNA.

- Sexton TR, RH Silkman and AJ Hogan (1986). Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions. in *Silkman RH (eds.) Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis Jossey-Bass*, 73-105.
- Shen, W. F., Zhang, D. Q., Liu, W. B. & Yang, G.L. (2016). Increasing discrimination of DEA evaluation by utilizing distances to anti-efficient frontiers. *Computers & Operations Research*, 75, 163-173.
- Thanassoulis, E. (2001). *Introduction to the theory and application of Data Envelopment Analysis*. Massachusettes, USA: Kluwer Academic Publishers.
- Victória Seguros, S.A. (2019). *Relatório e Contas*. Lisboa: Victória Seguros.
- Wang, Y. M., & Luo, Y. (2006). DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. *Applied Mathematics and Computation* 173, 902–915.
- Wang, Y. M., & Yang, J. B. (2007). Measuring the *performances* of decision-making units using interval efficiencies. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 198, 253 – 267.
- Wang, Y.; Chin, K.; Yang, J. (2007). Measuring the *performances* of decision-making units geometric average efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 58, 929- 937.
- Wang, N. S., Yi, R. H., & Wang, W. (2008). Evaluating the *performances* of decision- making units based on interval efficiencies. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 216, 328 – 343.
- Yamada, Y., Matsui, T. & Sugiyama, M. (1994). New analysis of efficiency based on DEA. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 37(2), 158-167.