

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE  
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



SUPER-EFICIÊNCIA BASEADA EM  
MODELOS NÃO RADIAIS DA DEA  
APLICAÇÃO AOS MUNICÍPIOS DA ÁREA  
METROPOLITANA DE LISBOA

---

Daniela Andreia dos Santos Jorge

Lisboa, outubro de 2021



INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E  
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

SUPER-EFICIÊNCIA BASEADA EM  
MODELOS NÃO RADIAIS DA DEA  
APLICAÇÃO AOS MUNICÍPIOS DA ÁREA  
METROPOLITANA DE LISBOA

---

Daniela Andreia dos Santos Jorge

Projeto de dissertação submetido ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Prof.<sup>a</sup> Doutora Ana Maria Sotomayor

Arguente: Prof.<sup>a</sup> Doutora Ana Paias

Vogal: Prof. Doutor José Manuel Oliveira Pires

Lisboa, outubro de 2021

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência do autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

## Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu querido avô que, mesmo longe, estará sempre no meu coração.

*“The important thing is not to stop questioning. Curiosity has its own reason for existence. One cannot help but be in awe when he contemplates the mysteries of eternity, of life, of the marvelous structure of reality. It is enough if one tries merely to comprehend a little of this mystery each day”.*

- Albert Einstein

## **Agradecimentos**

Esta dissertação é o culminar de um ano muito intenso porém, desafiante.

Começo por agradecer ao ISCAL pelo acolhimento ao longo destes dois anos. Agradeço especialmente ao meu orientador, Professor Doutor José Manuel Oliveira Pires, por toda a disponibilidade para responder às minhas dúvidas, todo o rigor, conhecimento e incentivo para que este trabalho chegasse tão breve quanto possível ao seu destino.

À minha mãe, avó e irmão por possibilitarem que eu continue a lutar pelos meus sonhos. A vossa força, carinho e apoio foram fundamentais. Fico tão feliz de poder partilhar convosco mais esta etapa da minha vida.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao Bubu, o meu gato. Sempre presente desde o início desta jornada, acompanhando de perto todos os momentos bons e menos bons.

O meu bem-haja a todos!

## Resumo

Na metodologia Data Envelopment Analysis (DEA) existem dois tipos de modelos, radiais e não radiais, para medir a eficiência relativa de um conjunto de Decision Making Units (DMUs). Esses modelos permitem obter um índice de eficiência para cada uma das DMUs em análise e, deste modo, distinguir as eficientes das não eficientes. Uma desvantagem associada a estes modelos é a de permitirem que várias DMUs sejam classificadas como eficientes não possibilitando discriminar essas DMUs e, conseqüentemente, obter um ranking sobre a performance das mesmas.

Para contornar essa desvantagem, vários métodos e modelos têm sido propostos. Um desses métodos é o método da super-eficiência. Esta dissertação tem por objetivo apresentar um estudo sobre modelos não radiais de super-eficiência para obtenção de um ranking completo das DMUS em avaliação. Este estudo inclui a aplicação desses modelos para a determinação de rankings sobre os dezoito municípios que integram a Área Metropolitana de Lisboa, referente ao ano de 2018.

**Palavras-chave:** DEA; DMUs; Eficiência; Super-eficiência; Performance; *Ranking*.

## ***Abstract***

*In the Data Envelopment Analysis (DEA) methodology there are two types of models, radial and non-radial, to measure the relative efficiency of a set of Decision Making Units (DMUs). These models allow us to obtain an efficiency index for each of the DMUs under analysis and, thus, distinguish efficient from inefficient ones. A disadvantage associated with these models is that they allow several DMUs to be classified as efficient, not making it possible to discriminate these DMUs and, consequently, obtain a ranking on their performance.*

*To overcome this disadvantage, several methods and models have been proposed. One such method is the super-efficiency method. This dissertation aims to present a study on non-radial super-efficiency models to obtain a complete ranking of the DMUS under evaluation. This study includes the application of these models to determine rankings on the eighteen municipalities that make up the Metropolitan Area of Lisbon, for the year 2018.*

***Keywords:*** *DEA; DMUs; Efficiency; Super-efficiency; Performance; Ranking.*



# Índice

Índice .....	viii
Índice de Tabelas .....	x
Índice de Figuras .....	xi
Lista de Abreviaturas .....	xii
<b>1. Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelos Radiais e não Radiais de DEA .....</b>	<b>3</b>
2.1. Introdução .....	3
2.2. Preliminares .....	4
2.3. Modelos não radiais .....	11
2.3.1. Modelo aditivo .....	11
2.3.2. Modelo SBM .....	13
2.3.3. Modelos da Medida de Russell .....	17
<b>3. Modelos não Radiais de Super-eficiência .....</b>	<b>21</b>
3.1. Introdução .....	21
3.2. Preliminares .....	21
3.3. Modelos de super-eficiência SBM .....	26
3.4. Modelo de super-eficiência SBM alternativo .....	31
3.5. Modelo de super-eficiência aditivo .....	34
<b>4. Aplicação a uma situação real .....</b>	<b>37</b>
4.1. Introdução .....	37
4.2. Seleção dos dados e modelos .....	38
4.3. Resultados e respetiva análise .....	39
<b>5. Conclusões .....</b>	<b>49</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>51</b>

<b>APÊNDICES</b> .....	<b>54</b>
<b>APÊNDICE A</b> - SE-Aditivo( $\alpha$ ) para retornos constantes.....	54
<b>APÊNDICE B</b> - SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos constantes.....	54
<b>APÊNDICE C</b> - SE-Aditivo( $\alpha$ ) para retornos variáveis.....	55
<b>APÊNDICE D</b> - SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos variáveis.....	55

## Índice de Tabelas

Tabela 4.1 – Dados relativos aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> .....	39
Tabela 4.2 – Resultados obtidos pelos modelos SBM, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos constantes de escala .....	40
Tabela 4.3 – Rankings obtidos pelos modelos SBM, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos constantes de escala .....	42
Tabela 4.4 – Resultados obtidos pelos modelos SBM, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos variáveis de escala.....	43
Tabela 4.5 – Rankings obtidos pelos modelos SBM, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos variáveis de escala.....	44
Tabela 4.6 – Resultados obtidos pelos modelos SE-SBM( $\mathbf{R}$ ), SE-Aditivo( $\beta$ )( $\mathbf{R}$ ), SE-SBM( $\bar{\mathbf{R}}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{\mathbf{R}}$ ) para retornos constantes de escala .....	45
Tabela 4.7 – Rankings obtidos pelos modelos SE-SBM( $\mathbf{R}$ ) SE-Aditivo( $\beta$ )( $\mathbf{R}$ ), SE-SBM( $\bar{\mathbf{R}}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{\mathbf{R}}$ ) para retornos constantes de escala .....	46
Tabela 4.8 – Resultados obtidos pelos modelos SE-SBM( $\mathbf{R}$ ), SE-Aditivo( $\beta$ )( $\mathbf{R}$ ), SE-SBM( $\bar{\mathbf{R}}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{\mathbf{R}}$ ) para retornos variáveis de escala .....	46
Tabela 4.9 – Rankings obtidos pelos modelos SE-SBM( $\mathbf{R}$ ) SE-Aditivo( $\beta$ )( $\mathbf{R}$ ), SE-SBM( $\bar{\mathbf{R}}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{\mathbf{R}}$ ) para retornos variáveis de escala.....	47

## Índice de Figuras

Figura 2.1 – Representação do conjunto de possibilidades de produção e da fronteira associados ao modelo CCR.....	7
Figura 2.2 – Representação do conjunto de possibilidades de produção e da fronteira associados ao modelo BCC.....	7
Figura 3.1 – Modelo SE-BCC impossível .....	24
Figura 4.1 – Gráfico dos Rankings obtidos através dos modelos SE-SBM, SE-Aditivo ( $\alpha$ ), SE-Aditivo ( $\beta$ ), modelos SE-SBM(R) SE-Aditivo( $\beta$ )(R), SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ), para retornos constantes de escala.....	47
Figura 4.2 – Gráfico dos Rankings obtidos através dos modelos SE-SBM, SE-Aditivo ( $\alpha$ ), SE-Aditivo ( $\beta$ ), modelos SE-SBM(R) SE-Aditivo( $\beta$ )(R), SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ), para retornos variáveis de escala .....	48

## **Lista de Abreviaturas**

BCC – Banker, Charnes e Cooper

CCR – Charnes, Cooper e Rhodes

CRS – Constant Returns to Scale

DEA – Data Envelopment Analysis

DMU – Decisions Making Units

NUTS – Nomenclatura das Unidades Territoriais para Fins Estatísticos

SBM – Slack Based Measure

OPL – Optimization Programming Language

VRS – Variable Returns to Scale

## 1. Introdução

A metodologia DEA constitui uma importante ferramenta de avaliação do desempenho organizacional. Trata-se de uma técnica não paramétrica baseada na programação matemática, mais especificamente na programação linear, que permite medir a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogêneas que produzem múltiplos produtos (*outputs*) usando múltiplos recursos (*inputs*). Essas entidades podem ser do mais diverso tipo (empresarial, social ou governamental), sendo por isso usualmente designadas de DMUs.

Esta metodologia permite obter um índice de eficiência relativa para cada uma das DMUs em avaliação e, deste modo, distinguir as DMUs eficientes das não eficientes. Permite, também, determinar as DMUs de referência (*benchmarks*) para cada DMU ineficiente. A fronteira de eficiência, definida pelas DMUs eficientes, é determinada a partir dos dados (*inputs* e *outputs*) observados, não necessitando de uma função de produção definida *a priori*, o que constitui uma característica importante desta metodologia. Outra característica, igualmente importante, reside no facto de os *inputs* e *outputs* poderem ser da mais diversa natureza e não terem de ser de natureza financeira como acontece noutras metodologias de avaliação do desempenho organizacional.

A DEA iniciou-se formalmente com o trabalho de Cooper, Charnes e Rhodes (1978) no qual foi apresentado o primeiro modelo para medir a eficiência relativa de um conjunto de DMUs, designado por modelo CCR. Esse modelo considera retornos constantes de escala e foi mais tarde generalizado para retornos variáveis de escala por Banker, Charnes e Cooper (1984) e designado por modelo BCC. Estes dois modelos, normalmente designados de modelos clássicos ou tradicionais da DEA, pertencem à classe dos modelos radiais, que constitui uma de duas importantes classes de modelos na DEA. A outra, é a classe dos modelos não radiais. Nos modelos radiais, a eficiência é obtida através da redução proporcional dos *inputs* ou do acréscimo proporcional dos *outputs*, ignorando as ineficiências devidas ao excesso de *inputs* e ao défice de *outputs*. Nos modelos não radiais, a eficiência é obtida diretamente através dos desvios relativos ao excesso de *inputs* e ao défice de *outputs*.

O uso de modelos radiais e não radiais conduz em geral à existência de várias DMUs classificadas como eficientes, nomeadamente quando o número de DMUs em avaliação é relativamente reduzido quando comparado com o número de *inputs* e *outputs*. Para contornar a desvantagem associada ao fraco poder de diferenciação destes modelos, vários métodos e modelos para obtenção de rankings de DMUs têm sido propostos na literatura, como se pode

verificar nos trabalhos apresentados por Adler, Friedman e Sinuany-Stern (2002) e por Aldamak e Zolfaghari (2017) sobre revisão dos métodos de rankings. Um desses métodos é o método da super-eficiência que consiste em excluir a DMU em avaliação do conjunto de referência e, deste modo, obter informação que permite diferenciar as DMUs classificadas como eficientes. Este método foi inicialmente proposto por Andersen e Petersen (1993) com base nos modelos radiais e mais tarde desenvolvido por Tone (2002) para os modelos radiais.

A presente dissertação destina-se a apresentar um estudo, no âmbito da DEA, sobre o método de super-eficiência baseado em modelos não radiais com vista à obtenção de um ranking completo, em termos de performance, sobre um conjunto de DMUs cuja eficiência relativa se deseja avaliar.

Para além do presente capítulo de introdução, esta dissertação inclui mais quatro capítulos. O capítulo 2, onde é apresentado um estudo sobre modelos não radiais e, sempre que se justifique, é feita uma comparação com os modelos radiais. O capítulo 3, onde são apresentados os modelos não radiais de super-eficiência baseados nos modelos não radiais apresentados no capítulo anterior. Neste capítulo, é ainda feita referência às diferenças entre estes modelos e os modelos de super-eficiência baseados nos modelos radiais. O capítulo 4, onde é apresentado um estudo prático que consiste na aplicação de alguns dos modelos apresentados nos capítulos 2 e 3 a uma situação real, mais especificamente à avaliação e determinação de rankings dos dezoito municípios que integram a região da Área Metropolitana de Lisboa. Assim, neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos bem como a respetiva análise. Por fim, o capítulo 5, onde são apresentadas as principais conclusões sobre o trabalho realizado nesta dissertação.

## 2. Modelos não radiais na DEA

### 2.1 Introdução

A principal ideia da metodologia DEA consiste em determinar uma fronteira de eficiência (empírica) definida pelas DMUs que refletem a melhor prática e, de seguida, comparar as DMUs que não estão nessa fronteira com as que estão para obter um índice de eficiência. Nos modelos tradicionais da DEA, esse índice reflete a redução proporcional e comum dos *inputs* fixando os *outputs*, ou a expansão proporcional e comum dos *outputs* fixando os *inputs*, necessária para que uma DMU ineficiente se torne eficiente. Estes modelos são usualmente designados de modelos radiais.

Uma desvantagem associada aos modelos radiais deve-se ao facto de o índice de eficiência que fornecem não incorporar as ineficiências devidas aos desvios ou folgas correspondentes aos excessos de *inputs* ou aos défices de *outputs*. Este facto pode levar a que DMUs sejam consideradas eficientes quando na realidade não o são. A fim de contornar essa desvantagem, vários modelos têm sido propostos na literatura da DEA. Esses modelos, designados de modelos não radiais, abandonam a hipótese de alterações proporcionais e comuns a todos os *inputs* ou *outputs*, e consideram diretamente as folgas relativas aos excessos de *inputs* e aos défices de *outputs* no cálculo da eficiência.

Os modelos radiais e não radiais constituem as principais classes de modelos na metodologia DEA. De referir que, enquanto os modelos radiais são usualmente orientados para *inputs* ou para *outputs*, os modelos não radiais podem ser orientados ou não orientados. Contudo, como se verá mais à frente, os modelos não radiais não orientados são os que se revelam mais interessantes.

Este capítulo tem por objetivo apresentar os modelos não radiais mais usados, a partir dos quais são obtidos os modelos não radiais de super-eficiência a apresentar no próximo capítulo. Contudo, por forma a compreender melhor as diferenças relativamente aos modelos radiais, importa antes apresentar estes últimos modelos. Assim, na secção 2.2, apresenta-se uma breve revisão sobre os modelos radiais mais conhecidos, isto é, os modelos CCR e BCC. Na secção 2.3, apresentam-se igualmente os modelos não radiais mais conhecidos, nomeadamente o modelo aditivo, o modelo SBM (*Slack Based Measure*) baseado nas folgas e o modelo sobre a medida de eficiência de Russell não orientada melhorada, que como se verá, é equivalente ao modelo SBM.



## 2.2 Preliminares

Os modelos radiais mais usuais são o modelo CCR, proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), e o modelo BCC, proposto por Banker, Cooper e Charnes (1984). O primeiro, com o qual se iniciou formalmente a metodologia DEA, assume a hipótese de retornos constantes de escala, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs* e é, por isso, também conhecido por modelo CRS (*Constant Returns to Scale*). O segundo, que constitui uma extensão do primeiro, assume a hipótese de retornos variáveis de escala, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação maior ou menor do que o proporcional nos *outputs* pelo que é também conhecido por modelo VRS (*Variable Returns to Scale*).

Nestes modelos, a fronteira de eficiência pode ser atingida através da redução dos *inputs* fixando os *outputs* e, nesse caso, os modelos dizem-se orientados para *inputs*, ou, através da expansão dos *outputs* fixando os *inputs* e, nesse caso, os modelos dizem-se orientados para *outputs*.

Para descrever matematicamente os modelos de eficiência radial, considere-se que existem  $n$  DMUs homogêneas e independentes que se pretendem avaliar e que cada DMU utiliza  $m$  *inputs* para produzir  $s$  *outputs*. Mais especificamente, cada DMU <sub>$j$</sub>  ( $j=1,\dots,n$ ) utiliza a quantidade  $x_{ij}$  do *input*  $i$  ( $i=1,\dots,m$ ) para produzir a quantidade  $y_{rj}$  do *output*  $r$  ( $r=1,\dots,s$ ). Assume-se, ainda, que  $x_{ij} \geq 0$ ,  $y_{rj} \geq 0$ , ( $i=1,\dots,m$ ;  $r=1,\dots,s$ ;  $j=1,\dots,n$ ), e que para cada DMU existe, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos.

Os modelos radiais orientados para *inputs* têm por objetivo minimizar os *inputs* sem que seja reduzido qualquer dos *outputs*. A versão orientada para *inputs* do modelo CCR que permite obter o índice de eficiência da DMU <sub>$k$</sub>  ( $k \in \{1,\dots,n\}$ ) é dada pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\theta_k^* = \min \theta_k \tag{2.1a}$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \theta_k \quad i = 1, \dots, m \tag{2.1b}$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \tag{2.1c}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \tag{2.1d}$$

$$\theta_k \in \mathbb{R} \tag{2.1e}$$

O modelo (2.1) é conhecido por forma do envelope do modelo CCR orientado para *inputs*. O valor ótimo deste modelo,  $\theta_k^*$ , fornece o índice de eficiência da DMU<sub>k</sub> que, como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007), é um valor tal que  $0 < \theta_k^* \leq 1$ . Se  $\theta_k^* = 1$ , diz-se que a DMU<sub>k</sub> está sobre a fronteira de eficiência; caso contrário, diz-se que a DMU<sub>k</sub> é ineficiente. Este valor reflete, no caso da DMU<sub>k</sub> ser ineficiente, a taxa máxima de redução proporcional e comum em todos os *inputs* dessa DMU<sub>k</sub>, para que a mesma se torne eficiente. As restrições (2.1b) garantem que essa redução não ultrapassa a fronteira definida pelas DMUs eficientes, enquanto as restrições (2.1c) garantem que tal redução não implica uma redução do nível dos *outputs* da DMU<sub>k</sub>, isto é, da DMU em avaliação. As restrições (2.1d) e (2.1e) indicam a natureza das variáveis.

Quando  $\theta_k^* = 1$ , isto é, quando a DMU<sub>k</sub> pertence à fronteira de eficiência, esta pode ser fortemente eficiente ou fracamente eficiente. Assim, se  $\theta_k^* = 1$  e todas variáveis de desvio nas restrições (2.1b) e (2.1c) são iguais a zero na solução ótima, a DMU<sub>k</sub> é considerada fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto- Koopmans. Por outro lado, se  $\theta_k^* = 1$  e existem variáveis de desvios, nessas restrições, diferentes de zero na solução ótima, então a DMU<sub>k</sub> diz-se fracamente eficiente ou eficiente segundo Farrell, sendo obviamente ineficiente segundo Pareto-Koopmans. É evidente que quando  $\theta_k^* < 1$ , a DMU<sub>k</sub> diz-se ineficiente, quer segundo Farrell quer segundo Pareto-Koopmans. De referir que uma DMU fortemente eficiente pode ser extremo-eficiente ou não extremo-eficiente consoante corresponde a um ponto extremo ou vértice da fronteira de eficiência, ou não (Charnes, Cooper e Trall, 1991).

A solução ótima do modelo (2.1) permite ainda obter informação importante, fornecida pelos valores de  $\lambda_j^*$ . Estes valores permitem identificar o conjunto das DMUs que são referência (*benchmarks*) para que uma determinada DMU<sub>k</sub> que seja ineficiente se torne eficiente. Tal conjunto, usualmente denotado por  $R_k$  e designado por conjunto de referência da DMU<sub>k</sub>, é constituído pelos índices correspondentes aos valores positivos de  $\lambda_j^*$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ), isto é,

$$R_k = \{j : \lambda_j^* > 0\} \quad j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

Este conjunto pode ser constituído por um ou mais elementos. Neste último caso, os valores de  $\lambda_j^*$  permitem ainda determinar a importância relativa das correspondentes DMUs para que uma DMU<sub>k</sub> ineficiente se torne em eficiente. Assim, quanto maior for o valor de  $\lambda_j^*$ , maior

será a importância da correspondente  $DMU_j$  para que uma  $DMU_k$  se torne eficiente. É claro que se uma  $DMU_k$  é eficiente, então é referência de si própria, isto é,  $R_k = \{k\}$ .

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) propuseram ainda duas outras formas deste modelo: a forma dos multiplicadores e a forma fracionária. A forma dos multiplicadores pode ser obtida através do dual da forma do envelope ou da linearização da forma fracionária usando a transformação de Charnes e Cooper (1962). A solução ótima da forma dos multiplicadores, dada pelos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, permite obter informação quanto ao contributo de cada *input* e *output* para a obtenção do índice de eficiência.

Associado ao modelo CCR existe um conjunto de possibilidades de produção, isto é, um conjunto  $P = \{(x, y) : y \text{ é produzido por } x\}$ . Denotando-se esse conjunto por  $P_{CCR}$ , tem-se

$$P_{CCR} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \lambda_j, \mathbf{y} \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \lambda_j, \lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (2.3)$$

onde  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  representa uma atividade, isto é, um par de vetores de *inputs*  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  e *outputs*  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$  admissíveis, e onde  $\mathbf{x}_j = [x_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{mj}]^T$  e  $\mathbf{y}_j = [y_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{sj}]^T$  representam os vetores de *inputs* e *outputs*, respetivamente, da  $DMU_j$  (ver, por exemplo, Tone, 2016).

O modelo BCC que, como já se referiu, assume a hipótese de retornos variáveis de escala, substitui o axioma da proporcionalidade pelo axioma da convexidade. A forma do envelope da versão orientada para *inputs* deste modelo é obtida da correspondente forma e versão do modelo CCR, isto é, do modelo (2.1), por inclusão da restrição

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (2.4)$$

que, conjuntamente com as desigualdades  $\lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n)$ , impõem a condição de convexidade. A inclusão desta restrição corresponde à introdução de uma variável na forma dos multiplicadores e na forma fracionária do modelo CCR orientado para *inputs*, que indica o tipo de retorno de escala em que a  $DMU_k$  opera, obtendo-se assim a forma dos multiplicadores e a forma fracionária do modelo BCC orientado para *inputs*.

O conjunto de possibilidades de produção associado ao modelo BCC, denotado por  $P_{BCC}$ , é então dado por

$$P_{BCC} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \lambda_j, \mathbf{y} \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (2.5)$$

Para uma melhor compreensão das diferenças entre estes conjuntos, apresentam-se nas figuras 3.1 e 3.2 as representações de conjuntos de possibilidade de produção assim como as fronteiras de produção (eficiência) associados aos modelos CCR e BCC, respetivamente, para o caso de um *input* e um *output*.

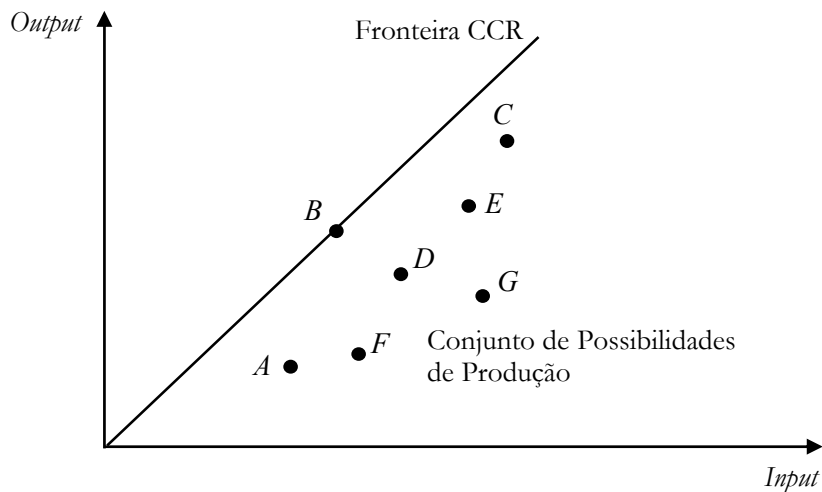


Figura 3.2 - Representação do conjunto de possibilidades de produção e da da fronteira associados ao modelo CCR

**Fonte:** Adaptado de Cooper *et al.* (2007)

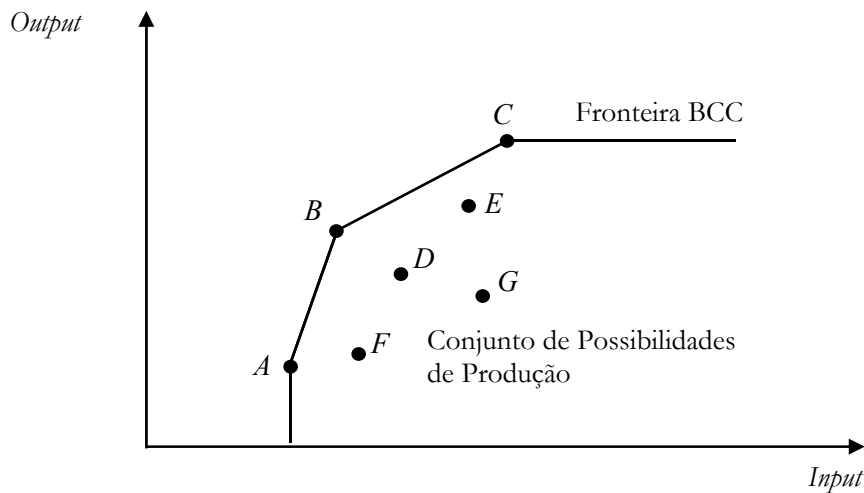


Figura 3.2 - Representação do conjunto de possibilidades de produção e da da fronteira associados ao modelo BCC

**Fonte:** Adaptado de Cooper *et al.* (2007)

O valor ótimo fornecido pelo modelo (2.1) permite obter a eficiência de Farrel mas não permite obter a eficiência de Pareto- Koopmans, uma vez que não incorpora ineficiências relativas aos desvios associados aos *inputs* e/ou aos *outputs*. De acordo com Cooper, Seiford e Tone (2007), a existência, ou não, desses desvios é verificada através de um procedimento de duas fases, em que na primeira fase é obtido o valor  $\theta_k^*$  usando o modelo (2.1) e na segunda é resolvido o seguinte modelo de programação linear:

$$\max \sum_{i=1}^m s_{ik}^- + \sum_{r=1}^s s_{rk}^+ \quad (2.6a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \theta_k^* \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.6c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.6d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.6f)$$

Se  $\theta_k^* = 1$  e o valor ótimo do modelo anterior é igual a 0, isto é, as variáveis desvio nas restrições (2.1b) e (2.1c) são todas iguais a zero na solução ótima, então a DMU<sub>k</sub> é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans. Se, por outro lado,  $\theta_k^* < 1$  e existem variáveis de desvio diferentes de zero na solução ótima então a DMU<sub>k</sub> é fracamente eficiente ou eficiente segundo Farrell.

De modo a unificar as duas fases num só modelo e a incluir as ineficiências devidas a folgas no cálculo da eficiência, Charnes, Cooper, Lewin, Morey e Rousseau (1981) propuseram os modelos CCR e BCC não Arquimedianos. No caso do modelo CCR orientado para *inputs* na forma do envelope, o correspondente modelo não Arquimediano é obtido introduzindo as variáveis de desvio  $s_{ik}^-$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $s_{rk}^+$  ( $r = 1, \dots, s$ ) nas restrições (2.1b) e (2.1c), respetivamente, e substituindo função objetivo (2.1a) por

$$\theta_k^* = \min \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_{ik}^- + \sum_{r=1}^s s_{rk}^+ \right) \quad (2.1a')$$

onde  $\varepsilon$  é um valor não Arquimédiano, isto é, um valor menor do que qualquer valor real positivo. Esta alteração procura garantir a positividade das variáveis no modelo dual, isto é, dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* no modelo dos multiplicadores.

De referir que o uso de modelos não Arquimedianos pode conduzir a uma solução não real ou a resultados insatisfatórios quando é atribuído a  $\varepsilon$  um valor real pequeno, por exemplo,  $10^{-6}$  (ver Färe & Hunsaker (1986) e Ali & Seiford (1993)).

Contudo, como se refere em Cooper, Seiford e Tone (2007), não é necessário recorrer a conceitos de matemática avançada para determinar a eficiência de Pareto-Koopmans através do modelo CCR ou BCC. Basta utilizar um procedimento de duas fases referido anteriormente. De acordo com Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007), a maior parte de software DEA usa este procedimento para determinar a eficiência de Pareto-Koopmans através dos modelos CCR e BCC.

Os modelos radiais orientados para *outputs* têm por objetivo maximizar os *outputs* sem que seja incrementado qualquer dos *inputs*. O modelo CCR orientado para *outputs*, que permite obter a eficiência da DMU<sub>k</sub>, é dado pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\rho_k^* = \max \rho_k \quad (2.7a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n X_{ij} \mu_j \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7b)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \mu_j \geq Y_{rk} \rho_k \quad r = 1, \dots, s \quad (2.7c)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.7d)$$

$$\rho_k \in \mathbb{R} \quad (2.7e)$$

O modelo (2.7) constitui a forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs*. Neste modelo,  $\rho_k^*$  indica o valor pelo qual devem ser multiplicados os *outputs* de uma DMU<sub>k</sub> ineficiente, por forma a que se torne eficiente, refletindo assim a taxa de expansão proporcional e comum aos *outputs* dessa DMU<sub>k</sub> para que a mesma se torne eficiente. As restrições (2.7b) garantem que tal expansão não produz qualquer aumento no valor dos *inputs*. Por sua vez, as restrições (2.7c) garantem que essa expansão não ultrapassa a fronteira de eficiência. As restrições (2.7d) e (2.7e) indicam a natureza das variáveis.

Como neste caso se tem  $\rho_k^* \geq 1$ , o índice de eficiência é dado por  $1/\rho^*$  de modo a garantir uma medida na escala de 0 a 1. Também neste caso, a  $DMU_k$  pertence à fronteira de eficiência quando  $\rho_k^* = 1$  e é ineficiente quando  $\rho_k^* > 1$ . Quando a  $DMU_k$  pertence à fronteira de eficiência, esta pode ser fortemente ou fracamente eficiente de acordo com as condições estabelecidas para a versão orientada para *inputs*.

Os valores das variáveis  $\mu_j$  na solução ótima do modelo anterior,  $\mu_j^*$ , fornecem o mesmo tipo de informação que os valores de  $\lambda_j^*$  na versão orientada para *inputs*, isto é, permitem identificar as DMUs de referência para o caso da  $DMU_k$  ser ineficiente e, no caso de existirem duas ou mais DMUS de referência, permite ainda relativizar a sua importância.

A versão orientada para *outputs* do modelo CCR também pode ser apresentada na forma dos multiplicadores e na forma fracionária à semelhança do que acontece com a versão orientada para *inputs*.

Similarmente ao que acontece com a versão orientada para *inputs*, a forma do envelope do modelo BCC orientado para *outputs* é obtida da correspondente forma do modelo CCR, isto é, do modelo (2.7), através da introdução neste último modelo da restrição

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \quad (2.8)$$

Também neste caso, a inclusão desta restrição corresponde à introdução de uma variável na forma dos multiplicadores e na forma fracionária do modelo CCR orientado para *outputs*, indicando o tipo de retorno de escala, obtendo-se assim a forma dos multiplicadores e a forma fracionária do modelo BCC orientado para *outputs*.

Comparando as versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo CCR, Cooper, Seiford e Tone (2007) mostram que o índice de eficiência fornecido por estas versões é o mesmo, apesar de fornecerem soluções ótimas diferentes. Estes autores mostram também como obter a solução de uma das versões, conhecida a solução ótima da outra versão.

Comparando agora os modelos CCR e BCC, verifica-se que em ambas as versões o índice de eficiência fornecido pelo modelo BCC é maior ou igual do que o fornecido pelo modelo CCR. Basta ter em conta que o modelo BCC resulta do modelo CCR por introdução de uma restrição e, por isso, o conjunto das soluções admissíveis do modelo BCC é um subconjunto do conjunto das soluções admissíveis do modelo CCR. Pode então afirmar-se o índice de

eficiência obtido pelas DMUs sob retornos variáveis de escala é maior ou igual do que o obtido sob retornos constante de escala.

Para terminar esta seção, refira-se que usualmente, em qualquer das versões, uma  $DMU_k$  diz-se CCR-eficiente ou BCC-eficiente se for fortemente eficiente ou eficiente Pareto-Koopmans através do modelo CCR ou BCC, respetivamente.

### 2.3 Modelos não radiais

Na secção anterior fez-se uma breve apresentação dos principais modelos radiais da DEA também conhecidos por modelos clássicos. Como se viu, o valor de eficiência fornecido por esses modelos reflete alterações proporcionais e comuns nos *inputs* (*outputs*) mantendo os *outputs* (*inputs*) mas ignora as ineficiências devidas a excessos de *inputs* ou a défices de *outputs* normalmente conhecidos por desvios ou folgas.

Por forma a incluir esses desvios no cálculo da eficiência, vários modelos, designados de modelos não radiais têm sido propostos na literatura da DEA. Nesta secção apresentam-se os modelos mais representativos desta classe de modelos. Note-se que os primeiros modelos a incluir as folgas no cálculo da eficiência foram os modelos não Arquimedianos introduzidos por Charnes et al. (1981) e referidos na secção anterior.

#### 2.3.1 Modelo aditivo

Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz (1985) propuseram um modelo que considera as orientações para *inputs* e *outputs* em simultâneo, ao invés do que acontece com os modelos radiais CCR e BCC que consideram essas orientações separadamente. Considerando retornos constantes de escala, tal modelo, designado por modelo aditivo, é dado por:

$$\max \sum_{i=1}^m s_{ik}^- + \sum_{r=1}^s s_{rk}^+ \quad (2.9a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.9b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.9c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9d)$$



$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.9e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.9f)$$

Seja  $(\lambda_j^*, s_{ik}^-, s_{rk}^{+*})$  uma solução ótima do modelo (2.9). Uma DMU<sub>k</sub> diz-se eficiente se, e só se,  $s_{ik}^- = 0$  e  $s_{rk}^{+*} = 0$ , para todo  $i$  e para todo o  $r$ ; caso contrário, a DMU<sub>k</sub> diz-se ineficiente. Note-se que uma DMU que é eficiente através do modelo aditivo (2.9) é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans. A medida fornecida pelo modelo (2.9) é completa no sentido em que reflete todas as ineficiências que o modelo pode identificar (Cooper, Seiford, Tone e Zhu, 2007).

A variante deste modelo, considerando retornos variáveis de escala, é obtida incluindo no modelo anterior a restrição de convexidade (2.4).

O modelo aditivo sob retornos variáveis de escala é invariante à translação, como se mostra em Ali e Seiford (1990). Um modelo DEA diz-se invariante à translação se o valor da eficiência não se altera mediante a alteração da origem do sistema de coordenadas. Esta propriedade revela-se atrativa quando existem dados (*inputs* e/ou *outputs*) negativos, uma vez que a adição de uma constante permite obter dados positivos sem alterar a solução ótima.

De notar que o modelo BCC orientado para *inputs* também é invariante à translação em relação aos *outputs*, mas não o é em relação aos *inputs*, assim como o modelo BCC orientado para *outputs* é invariante à translação em relação aos *inputs*, mas não o é em relação aos *outputs*. (Cooper, Seiford e Tone, 2007)

O modelo aditivo apresentado anteriormente permite identificar se uma DMU é eficiente, ou mais especificamente se é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans, mas não permite obter uma medida de eficiência como acontece com os modelos radiais referidos na seção anterior. Este último facto constitui uma deficiência do modelo aditivo que tem levado ao surgimento de vários modelos não radiais que fornecem uma medida de eficiência como acontece nos modelos radiais.

Uma outra deficiência associada ao modelo aditivo tem a ver com o facto de este modelo poder não ser adequado na identificação de DMUs de referência, na avaliação de DMUs, uma vez que pode identificar DMUs de referência que estão muito afastadas da DMU em avaliação, como se refere em Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007).

Apesar das deficiências acabadas de referir, o modelo aditivo tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento de outros modelos não radiais baseados em folgas e que são apresentados mais à frente.

Relativamente ao modelo aditivo podem ainda considerar-se as versões orientadas para *inputs* ou para *outputs*. A primeira obtém-se removendo do modelo anterior as variáveis de desvio associadas aos *outputs*. Similarmente, a segunda obtém-se removendo variáveis de desvio associadas aos *inputs*. Estas duas versões revelam-se pouco interessantes por apenas contabilizarem as ineficiências relativas aos *inputs* ou aos *outputs*.

### 2.3.2 Modelo SBM

Tone (1997, 2001) propôs um modelo baseado nos desvios e por isso designado por SBM (*Slack Based Measure*) para medir a eficiência relativa de um conjunto de DMUs. De acordo com Cooper, Seiford e Tone (2007), este modelo foi inicialmente proposto pelo autor em 1997 num trabalho de investigação científica publicado na “Graduate School of Policy Science” na universidade de Saitama, Japão, e posteriormente publicado em 2001 no *European Journal of Operational Research*. Considerando retornos constantes de escala e assumindo que os dados são todos positivos, isto é,  $x_{ij} > 0$  e  $y_{rj} > 0$  ( $i = 1, \dots, m; r = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n$ ), tal modelo é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (2.10a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.10c)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10d)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.10e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.10f)$$

O modelo anterior tem as mesmas restrições que o modelo aditivo, diferindo deste apenas na função objetivo, a qual usa as variáveis de desvio de modo a permitir uma medida  $\rho_k^*$  que satisfaz a condição  $0 < \rho_k^* \leq 1$ . Se  $\rho_k^* = 1$  ou, equivalentemente, se  $s_{ik}^{-*} = 0$  e  $s_{rk}^{+*} = 0$ , para todo  $i$  e para todo o  $r$ , isto é, quando os desvios relativos ao excesso de *inputs* e ao déficit de *outputs* são iguais a zero, a  $DMU_k$  diz-se eficiente ou, mais especificamente, fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans.

Em Tone (1997, 2001) demonstra-se que o valor de  $\rho_k^*$  fornecido pelo modelo SBM não excede o valor  $\theta_k^*$  fornecido pelo modelo CCR. Estes autores demonstram ainda que uma  $DMU_k$  é eficiente segundo Pareto-Koopmans através do modelo CCR se, e só se, é eficiente através do modelo SBM. Verifica-se também que o modelo SBM identifica uma  $DMU_k$  como eficiente se, e só se, o modelo aditivo também identificar essa  $DMU_k$  como eficiente (Cooper, Seiford, Tone & Zhu, 2007).

O modelo SBM é um modelo de programação linear fracionária, que pode ser linearizado através da transformação de Charnes e Cooper (1962). Assim, usando as igualdades

$$\beta = \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}} \right)^{-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.11a)$$

$$\hat{s}_{ik}^- = \beta s_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (2.11b)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ = \beta s_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (2.11c)$$

$$\hat{\lambda}_j = \beta \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (2.11d)$$

o modelo (2.10) pode ser reescrito no seguinte problema de programação linear:

$$\tau_k^* = \min \beta - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{s}_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (2.12a)$$

$$s. a. \quad \beta + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{s}_{rk}^+}{y_{rk}} = 1 \quad (2.12b)$$

$$-\beta x_{ik} + \sum_{j=1}^n x_{ij} \hat{\lambda}_j + \hat{s}_{ik}^- = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.12c)$$

$$-\beta y_{rk} + \sum_{j=1}^n y_{rj} \hat{\lambda}_j - \hat{s}_{rk}^+ = 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.12d)$$

$$\hat{s}_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.12e)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.12e)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.12e)$$

$$\beta \geq 0 \quad (2.12f)$$

Se  $(\tau_k^*, \beta^*, \hat{s}_{ik}^-, \hat{s}_{rk}^+, \hat{\lambda}_j^*)$  é uma solução ótima do modelo anterior então uma solução ótima do modelo SBM é obtida através das relações (Tone 1997, 2001):

$$\rho_k^* = \tau_k^*, \lambda_j^* = \frac{\hat{\lambda}_j^*}{\beta^*}, s_{ik}^- = \frac{\hat{s}_{ik}^-}{\beta^*}, s_{rk}^+ = \frac{\hat{s}_{rk}^+}{\beta^*} \quad (2.13)$$

O conjunto de índices correspondentes aos valores positivos de  $\lambda_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ), isto é, o conjunto

$$R_k = \{j : \lambda_j > 0, j \in \{1, \dots, n\}\} \quad (2.14)$$

é designado conjunto de referência da DMU<sub>k</sub>, à semelhança do que acontece com os modelos radiais.

Como se refere em Tone (2001), o modelo SBM pode ser interpretado como um produto de ineficiências de *inputs* e *outputs*. Para tal considere-se a função objetivo em (2.10) escrita do seguinte modo:

$$\left(1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}}\right) \left(1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik} - s_{ik}^-}{x_{ik}}\right) \left(\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk} + s_{rk}^+}{y_{rk}}\right)^{-1}.$$

No primeiro termo do segundo membro da igualdade anterior, o rácio  $(x_{ik} - s_{ik}^-)/x_{ik}$  calcula a taxa de redução relativa do *input*  $i$ , pelo que esse primeiro termo corresponde à taxa média de redução dos *inputs* ou à ineficiência média dos *inputs*. Similarmente, o rácio  $(y_{rk} + s_{rk}^+)/y_{rk}$  no segundo termo desse segundo membro calcula a taxa de expansão relativa do *output*  $r$  e, deste modo, esse segundo termo corresponde ao inverso da taxa média de expansão dos *outputs* ou à ineficiência média dos *outputs*.

Negligenciando o denominador da função objetivo do modelo SBM não orientado, obtém-se o modelo SBM orientado para *inputs*, dado por:

$$\rho_k^{I*} = \min 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (2.15a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.15b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.15c)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.15d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.15e)$$

Identicamente, negligenciando o numerador da função objetivo do modelo SBM não orientado, obtém-se o modelo SBM orientado para *outputs*, dado pelo seguinte modelo:

$$\rho_k^{O*} = \min \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (2.16a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.16b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.16c)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.16d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.16e)$$

Comparando cada uma das versões orientadas com a versão não orientada do modelo SBM, verifica-se que  $\rho_k^{I*} \geq \rho^*$  e  $\rho_k^{O*} \geq \rho^*$ , como se refere em Cooper, Seiford e Tone (2007). Note-se que a versão orientada para *inputs* do modelo SBM apenas contabiliza os desvios relativos aos *inputs*, enquanto que a versão orientada para *outputs* apenas contabiliza os desvios relativos aos *outputs*, à semelhança do que acontece com as versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo aditivo.

O modelo SBM, assim como as suas versões orientadas para *inputs* e para *outputs*, foram definidos sob a hipótese de retornos constante de escala. Estes modelos podem também ser

definidos sob a hipótese de retornos variáveis de escala por inclusão naqueles modelos da restrição de convexidade (2.4).

### 2.3.3 Modelos da Medida de Russell

A medida de Russell foi inicialmente introduzida, na versão orientada para *inputs*, por Färe e Lovell (1978). A versão orientada para *outputs* surgiu mais tarde e foi proposta por Färe, Grosskopf e Lovell (1985). Combinando estas duas versões, estes últimos autores propuseram também a medida de Russel não orientada, fornecida pelo seguinte modelo:

$$E_k^* = \min \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right) \quad (2.17a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_i x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.17b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq \phi_r y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.17c)$$

$$0 < \theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.17d)$$

$$\phi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.17e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.17f)$$

Existem duas dificuldades associadas à utilização do modelo anterior. A primeira está relacionada com a obtenção da solução ótima por se tratar de um problema de programação não linear, cuja resolução não é fácil. A segunda deve-se ao facto de não permitir uma medida de fácil interpretação, uma vez que resulta da média ponderada das médias aritmética e harmónica (ver Cooper, Park e Pastor, 1999).

No sentido de ultrapassar estas dificuldades associadas à medida de Russell não orientada, Pastor, Ruiz e Sirvent (1999) propuseram uma nova medida que combina as medidas de Russell orientada para *inputs* e para *outputs* na forma de rácio, em vez de o fazer na forma aditiva. Esta medida é denominada medida de Russel não orientada melhorada e é fornecida pelo seguinte modelo:

$$E_k^* = \min \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \quad (2.18a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_i x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.18b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq \phi_r y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.18c)$$

$$0 < \theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.18d)$$

$$\phi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.18e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.18f)$$

Como a função objetivo do modelo anterior indica, esta medida é obtida através do quociente entre a eficiência média dos *inputs* e a eficiência média dos *outputs*. Deste modo, a medida de Russell não orientada melhorada permite uma interpretação mais fácil do que a fornecida pela medida de Russell não orientada.

Pastor, Ruiz e Sirvent (1999) usaram as igualdades

$$\theta_i = \frac{x_{ik} - s_{ik}^-}{x_{ik}} = 1 - \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.19a)$$

$$\phi_r = \frac{y_{rk} + s_{rk}^+}{y_{rk}} = 1 + \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.19b)$$

para obter um novo modelo onde a medida de Russell não orientada melhorada é expressa através das variáveis de desvios (folgas). O modelo obtido é exatamente o modelo SBM apresentado anteriormente. Então o modelo SBM pode ser usado para resolver o modelo da medida de Russell não orientada melhorada e vice-versa (Cooper, Seifird, Tone e Zhu, 2007).

De notar que o modelo (2.18) da medida de Russel não orientada melhorada pode, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), ser linearizado de modo idêntico ao que foi feito com o modelo SBM.

Negligenciando o denominador da função objetivo do modelo anterior obtém-se o modelo da medida de Russell orientada para *inputs* proposta por Färe e Lovell (1978) e apresentado em Färe, Grosskopf e Lovell (1985) por:

$$E_k^{I*} = \min \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \quad (2.20a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_i x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.20b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.20c)$$

$$0 < \theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.20d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.20e)$$

A função objetivo do modelo anterior indica que a medida de Russell orientada para *inputs* reflete a média das reduções associadas a cada *input*. Este modelo difere da forma do envelope do modelo CCR orientado para *inputs* pelo facto de considerar uma variável associada a cada *input*, que reflete a redução ou contração de cada *input*, ao invés de considerar uma única variável que reflete a redução proporcional (radial) e comum de todos os *inputs*.

Identicamente, negligenciando o numerador da função objetivo nesse modelo obtém-se o modelo da medida de Russel orientada para *outputs*, apresentado em Färe, Grosskopf e Lovell (1985) por:

$$E_k^{O*} = \max \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r \quad (2.21a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.21b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq \phi_r y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.21c)$$

$$\phi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.21d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.21e)$$

Nesta versão, a função objetivo indica que a medida de Russell orientada para *outputs* reflete a média das expansões associadas a cada *output*. Também neste caso, a diferença para a forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs* reside no facto de este modelo considerar uma variável associada a cada *output*, que reflete a expansão de cada *output*, ao invés de considerar uma única variável que reflete a expansão proporcional (radial) e comum de todos os *outputs*.



Usando as relações (2.19a), o modelo (2.20) pode ser transformado no modelo SBM orientado para *inputs*. Identicamente, usando as relações (2.19b), o modelo (2.21) pode ser transformado no modelo SBM orientado para *outputs*. Então a medida de eficiência fornecida pelo modelo SBM orientado para *inputs* (*outputs*) é equivalente à medida de Russell orientada para *inputs* (*outputs*) (Tone 1997, 2001). Note-se que, similarmente ao que acontece com as versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo SBM, e também do modelo aditivo, a versão orientada para *inputs* da medida de Russell apenas contabiliza os desvios relativos aos *inputs*, enquanto que a versão orientada para *outputs* apenas contabiliza os desvios relativos aos *outputs*.

### 3. Modelos não radiais de Super-eficiência

#### 3.1 Introdução

Uma das deficiências associadas aos modelos não radiais, e também aos radiais, é a de permitirem que várias DMUs sejam classificadas como eficientes, não permitindo discriminar tais DMUs e, conseqüentemente, obter um ranking para essas DMUs. No sentido de colmatar essa deficiência, vários métodos/abordagens têm sido propostos, como se pode ver, por exemplo, em Alder, Friedman e Sinuany-Stern (2002) e em Aldamak e Zolfaghari (2017), onde se apresenta uma revisão sobre os vários métodos de *ranking* propostos na literatura. Um desses métodos é designado de super-eficiência e foi proposto por Andersen e Petersen (1993). Este método consiste em excluir do conjunto de referência a DMU em avaliação, permitindo assim obter informação adicional quanto às DMUs extremo-eficiente, não disponível nos modelos radiais e não radiais, que pode ser usada para obter um ranking completo para as DMUs eficientes.

Neste capítulo apresenta-se um estudo sobre modelos de super-eficiência baseados nos modelos não radiais. Assim, na secção 3.2, faz-se uma breve referência ao método da super-eficiência, nomeadamente aos modelos radiais de super-eficiência para uma melhor percepção das diferenças entre estes modelos e os não radiais apresentados nas secções seguintes. Na secção 3.3, apresenta-se o modelo de super-eficiência baseado no modelo SBM, proposto por Tone (2002). Na secção 3.4, apresenta-se uma abordagem alternativa à proposta por Tone(2002) sugerida por Fang, Lee, Hwang e Chung (2013). Finalmente, na secção 3.5, apresentam-se os modelos de super-eficiência baseados no modelo aditivo, propostos por Du, Liang e Zhu (2010).

#### 3.2 Preliminares

Para diferenciar as DMUs eficientes e, conseqüentemente, estabelecer um ranking entre as mesmas, Andersen e Petersen (1993) propuseram um método, posteriormente designado de super-eficiência. Este método consiste em excluir a DMU em avaliação do conjunto de referência, o que significa, no caso de uma DMU ser eficiente, excluí-la da fronteira de eficiência, pelo que a eficiência da DMU em avaliação é obtida em relação à fronteira de eficiência definida pelas restantes DMUs eficientes. Deste modo, a exclusão de uma DMU extremo-eficiente provoca uma redução do conjunto de possibilidades de produção, permitindo que tais DMUs se tornem super-eficientes e obtenham diferentes índices de super-

eficiência superiores a 1, possibilitando assim obter um ranking para as DMUs eficientes. Os índices de eficiência para as DMUs ineficientes permanecem inalteráveis relativamente aos modelos clássicos.

Este método foi proposto tendo por base os modelos radiais, CCR e BCC, em que os respetivos modelos de super-eficiência, aqui denotados por SE-CCR e SE-BCC, são obtidos impondo a condição  $j \neq k$  nas restrições daqueles modelos. Assim, a versão orientada para *inputs* do modelo SE-CCR para a DMU<sub>k</sub> é dado por

$$\theta_k^{SE*} = \min \theta_k^{SE} \quad (3.1a)$$

$$s. a. \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \theta_k^{SE} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.1c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.1d)$$

$$\theta_k^{SE} \in \mathbb{R} \quad (3.1e)$$

De modo idêntico obtém-se a versão orientada para *outputs* destes modelos com base na correspondente versão do modelo CCR. Assim, o modelo SE-CCR orientado para *outputs* é dado por:

$$\phi_k^{SE*} = \max \phi_k^{SE} \quad (3.2a)$$

$$s. a. \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \geq \phi_k^{SE} y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.2c)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2d)$$

$$\phi_k^{SE*} \in \mathbb{R} \quad (3.2e)$$

As versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo SE-BCC são obtidas das correspondentes versões do modelo SE-CCR por inclusão nesses modelos da restrição de convexidade

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n \lambda_j = 1 \quad (3.3)$$

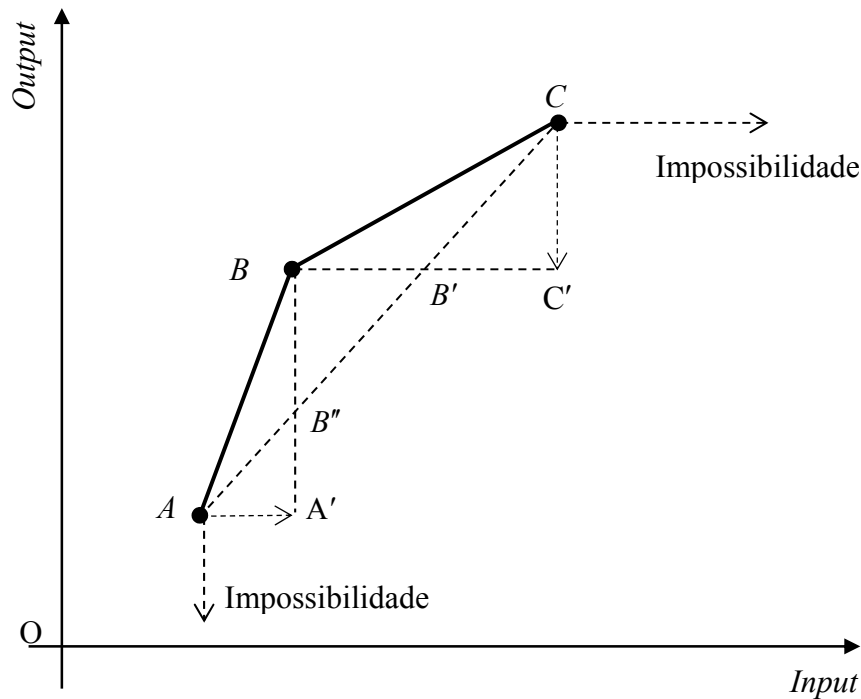
Apesar dos modelos radiais de super-eficiência terem sido pensados para obter a super-eficiência das DMUs eficientes, eles permitem obter o mesmo índice de eficiência para as DMUs não eficientes. De facto, se uma  $DMU_k$  é eficiente mas não extremo-eficiente, fracamente eficiente ou não eficiente e é excluída do conjunto de referência então a fronteira de eficiência, definida pelas DMUs extremo-eficientes, permanece inalterável. Em consequência, os modelos de super-eficiência são sempre possíveis e equivalentes aos modelos radiais (clássicos) da DEA, como se refere em Seiford e Zhu (1999). No entanto, se a  $DMU_k$  é extremo-eficiente, a sua exclusão do conjunto de referência pode levar a que os modelos radiais de super-eficiência se tornem, sob certas condições, modelos impossíveis. Isto constitui uma limitação desses modelos por, nessas condições, não permitirem um ranking completo das DMUs.

Este problema de impossibilidade é mais comum nos modelos de super-eficiência sob retornos variáveis de escala. Nos modelos sob retornos constantes de escala, o problema da impossibilidade apenas ocorre no modelo orientado para *inputs*, uma vez que para a versão orientada para *outputs* o modelo admite sempre a solução nula. Como se refere em Lovell e Rouse (2003), condições de impossibilidade para o modelo SE-CCR orientado para *inputs* têm sido estabelecidas em Thrall (1996), Zhu (1996), Dulá e Hickman (1997) e Seiford e Zhu (1999).

Em Zhu (1996) mostra-se que o modelo de super-eficiência SE-CCR orientado para *inputs* é impossível se, e só se, um certo tipo de dados com zeros ocorre nos *inputs* e *outputs*, por exemplo, a DMU excluída tem alguns *inputs* iguais a zero que são positivos nas restantes DMUs, ou tem alguns *outputs* positivos que são iguais a zero para as restantes DMUs (Seiford & Zhu, 1999).

Nos modelos de super-eficiência sob retornos variáveis de escala, isto é, nos modelos SE-BCC, o problema de os modelos se tornarem impossíveis pode também ocorrer quando os dados são positivos. Tal verifica-se quando não é possível atingir a fronteira de eficiência, definida pelas restantes DMUs eficientes, através de um incremento de *inputs*, no caso do modelo orientado para *inputs*, ou através de uma redução de *outputs*, no caso do modelo orientado para *outputs*. Para ilustrar esta situação, assim como o funcionamento do método de super-eficiência, para o caso de um *input* e um *output*, considere-se a figura 3.1 onde estão

representadas três DMUS A, B e C, extremo-eficientes, que definem a fronteira de eficiência sob retornos variáveis de escala, ABC.



**Figura 3.1** - Modelo SE-BCC impossível.

Fonte: Seiford e Zhu (1999)

Da observação da figura anterior, verifica-se que aplicando o modelo SE-BBC orientado para *inputs* à DMU B esta é avaliada por referência ao ponto B' situado sobre a nova fronteira de eficiência definida pelas DMUs A e C. Deste modo, obtém-se  $\theta_B^{SE*} > 1$  indicando que, para produzir a mesma quantidade de *output*, o *input* da DMU B é incrementado para o nível de *input* usado pela DMU B' por forma a atingir a nova fronteira de eficiência. Nestas circunstâncias, a DMU B é dita super-eficiente porque para produzir a mesma quantidade de *output* necessita de menos *input* do que a DMU B', existindo assim uma poupança de *input* associada à super-eficiência da DMU B.

De modo idêntico, aplicando o modelo SE-BBC orientado para *outputs* à DMU B esta é avaliada por referência ao ponto B'' situado sobre a nova fronteira de eficiência definida pelas DMUs A e C. Neste caso, obtém-se  $\phi_B^{SE*} < 1$ , indicando que, usando a mesma quantidade de *input*, o *output* da DMU B será de reduzido para o nível de *output* produzido pela DMU B'' por forma a atingir a nova fronteira de eficiência. Nestas circunstâncias, a DMU B é dita super-

eficiente porque usando a mesma quantidade de *input* produz mais *output* do que a DMU B', existindo assim um ganho de *output* associado à super-eficiência da DMU B.

Analisando agora as DMUs A e C, a aplicação do modelo SE-BCC orientado para *inputs* à DMU A avalia esta DMU por referência à DMU A' permitindo obter um valor  $\theta_A^{SE*} > 1$ . Contudo, este modelo torna-se impossível quando aplicado à DMU C por não existir uma DMU na nova fronteira de eficiência referente à qual a DMU pode ser avaliada. Similarmente, quando o modelo SE-BCC orientado para *outputs* é aplicado à DMU C, esta é avaliada por referência à DMU C' permitindo obter um valor  $\phi_C^{SE*} < 1$ . Contudo, quando aplicado à DMU A, o modelo torna-se impossível por não existir uma DMU na nova fronteira referente à qual a DMU A possa ser avaliada. Note-se que a impossibilidade acabada de referir ocorre para a DMU A e para a DMU C representadas pelos pontos mais à esquerda e mais à direita da fronteira de eficiência, isto é, pelos pontos que constituem as extremidades da fronteira de eficiência.

A análise anterior indica que o uso do modelo SE-BCC não permite estabelecer um ranking completo entre todas as DMUs extremo-eficientes devido à existência de situações em que esse modelo se torna impossível. Essas situações têm sido descritas na literatura da especialidade através de condições para a impossibilidade dos modelos SE-BCC, apresentadas em Zhu (1996), Dulá e Hilkman (1997), Seiford e Zhu (1999) e Xue e Harker (2002), como se refere em Lovell e Rouse (2003).

Uma condição necessária para que um modelo SE-BCC se torne impossível é que a DMU excluída seja extremo-eficiente. Uma condição suficiente, quando os *inputs* e *outputs* são positivos para todas as DMUs, é que tenha pelo menos um *output* maior do que correspondente *output* de qualquer uma das restantes DMUs no conjunto de referência, no caso do modelo orientado para *inputs*, ou tenha pelo menos um *input* menor do que o correspondente *input* de qualquer uma das restantes DMUs no conjunto de referência, no caso modelo orientado para *outputs* (Lovell & Rouse, 2003).

Estes autores estabelecem assim que uma condição necessária e suficiente para a impossibilidade do modelo SE-BCC é que a DMU excluída seja “super-eficiente” no sentido de que, no modelo orientado para *inputs*, tenha pelo menos um *output* maior do que uma combinação convexa daquele *output* entre todas as DMUs no conjunto de referência, ou, no

caso do modelo orientado para *outputs*, tenha pelo menos um *input* menor do que uma combinação convexa daquele *input* entre todas as DMUs no conjunto de referência.

Para resolver o problema da impossibilidade nos modelos SE-BCC com dados positivos, vários modelos têm sido propostos por diversos autores nomeadamente por Lovell e Rouse (2003), Chen (2005), Cook, Liang, Zha e Zhu (2009), Lee, Chu e Zhu (2011) e Chen e Liang (2011). Para o caso em que a impossibilidade resulta da existência de dados com valores iguais a zero, Lee e Zhu (2012) propõem um modelo assente numa modificação do modelo proposto por Lee, Chu e Zhu (2011).

Apesar de inicialmente proposto para modelos radiais, o método de super-eficiência pode também ser aplicado aos modelos não radiais, nomeadamente ao modelo SBM e ao modelo aditivo. Contudo, neste caso, a obtenção dos modelos de super-eficiência não é tão direta como acontece no caso dos modelos radiais, isto é, não basta impor a condição  $j \neq k$  nas restrições dos modelos, como se pode verificar na secção que se segue.

### 3.3 Modelos de super-eficiência SBM

Tone (2002) foi o primeiro a propor um modelo de super-eficiência baseado em desvios ou folgas, mais precisamente baseado no modelo SBM proposto pelo autor. A abordagem proposta por Tone (2002) requer que primeiro se utilize o modelo SBM para classificar as DMUs em eficientes e não eficientes e, de seguida, se utilize o modelo de super-eficiência para discriminar as DMUs classificadas como eficientes. Assim, para uma DMU<sub>k</sub> eficiente pelo modelo SBM, Tone (2002) propôs o seguinte modelo, baseado no modelo SBM, para calcular a sua super-eficiência:

$$\delta_k^* = \min \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ik}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \bar{y}_{rk}} \quad (3.4a)$$

$$s. a. \quad \bar{x}_{ik} \geq \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4b)$$

$$\bar{y}_{rk} \leq \sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \quad r = 1, \dots, s \quad (3.4c)$$

$$\bar{x}_{ik} \geq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4d)$$

$$\bar{y}_{rk} \leq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.4e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4f)$$

$$\bar{y}_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.4g)$$

Este modelo será no que se segue referido por SE-SBM e, como já foi referido, é apenas usado para as DMUs que são classificadas como eficientes pelo modelo SBM. Tendo em conta as restrições (3.4d) e (3.4e), o valor  $\delta_k^*$  é maior ou igual a 1, e é igual a 1 apenas quando a exclusão da DMU<sub>k</sub> não produz qualquer efeito no conjunto de possibilidades de produção. Então, se for usado para avaliar as DMUs classificadas como ineficientes, o índice de eficiência será igual a 1 para todas essas DMUs, o que significa que o modelo não consegue diferenciar as DMUs ineficientes.

Devido à função objetivo, o modelo requer que os *inputs* e *outputs* sejam positivos para as DMUs eficientes, isto é,  $x_{ij} > 0$  e  $y_{rj} > 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $r = 1, \dots, s$ ;  $j = 1, \dots, n$ ). Tone (2002) relaxa esta condição para  $x_{ij} \geq 0$  e  $y_{rj} \geq 0$  e descrevem como proceder para o caso de existirem *inputs* e *outputs* com valores iguais a zero.

O modelo SE-SBM (3.4) não contempla explicitamente desvios ou folgas como acontece com o modelo SBM. Contudo, usando as relações  $\bar{x}_{ik} = x_{ik} + w_{ik}^-$  e  $\bar{y}_{rk} = y_{rk} - w_{rk}^+$ , obtém-se um modelo equivalente baseado em folgas e mais consistente com o modelo SBM, como se refere em Fang, Lee, Hwang e Chung (2013). Tal modelo é dado por

$$\delta_k^* = \min \frac{1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{w_{ik}^-}{x_{ik}}}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{w_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.5a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - w_{ik}^- \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5b)$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + w_{rk}^+ \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5c)$$

$$w_{rk}^+ \leq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5d)$$

$$w_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5e)$$



$$w_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.5g)$$

As representações (3.4) e (3.5) do modelo SE-SBM contemplam retornos constantes de escala. As correspondentes representações deste modelo considerando retornos variáveis de escala obtêm-se por inclusão, nesses modelos, da restrição de convexidade (3.3). Em Tone (2002), mostra-se que, sob retornos variáveis de escala, o modelo SE-SBM é sempre possível, não sofrendo assim do problema de impossibilidade do modelo radial SE-BCC.

O modelo de super-eficiência SBM, em qualquer das representações, é um modelo de programação linear fracionária, que pode ser transformado num modelo de programação linear através da transformação de Charnes e Cooper (1962). Assim, usando as relações

$$\beta = \left( \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\bar{y}_{rk}}{y_{rk}} \right)^{-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6a)$$

$$\tilde{x}_{ik} = \beta \bar{x}_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6b)$$

$$\tilde{y}_{rk} = \beta \bar{y}_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.6c)$$

$$\hat{\lambda}_j = \beta \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6d)$$

o modelo (3.4) pode ser transformado no seguinte modelo de programação linear:

$$\tau_k^* = \min \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{x}_{ik}}{x_{ik}} \quad (3.7a)$$

$$s. a. \quad 1 = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\tilde{y}_{rk}}{y_{rk}} \quad (3.7b)$$

$$\tilde{x}_{ik} \geq \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \hat{\lambda}_j \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7c)$$

$$\tilde{y}_{rk} \leq \sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \hat{\lambda}_j \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7d)$$

$$\tilde{x}_i \geq \beta x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7e)$$

$$\tilde{y}_{rk} \leq \beta y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7f)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7g)$$

$$\tilde{y}_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7h)$$

$$\beta \geq 0 \quad (3.7i)$$

Sendo  $(\tau_k^*, \tilde{x}_{ik}^*, \tilde{y}_{rk}^*, \hat{\lambda}_j^*, \beta^*)$  solução ótima do modelo anterior, a solução ótima do modelo SE-SBM na representação (3.3) é obtida através das relações (Tone, 2002):

$$\delta_k^* = \tau_k^*, \lambda_j^* = \frac{\hat{\lambda}_j^*}{\beta^*}, \bar{x}_{ik}^* = \frac{\tilde{x}_{ik}^*}{\beta^*}, \bar{y}_{rk}^* = \frac{\tilde{y}_{rk}^*}{\beta^*} \quad (3.8)$$

Identicamente, usando as relações

$$\beta = \left( 1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{w_{rk}^+}{y_{rk}} \right)^{-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9a)$$

$$\hat{w}_{ik}^- = \beta w_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9b)$$

$$\hat{w}_{rk}^+ = \beta w_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9c)$$

$$\hat{\lambda}_j = \beta \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9d)$$

obtem-se a linearização da representação (3.5) do modelo SE-SBM, dada por:

$$\tau_k^* = \min \beta + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{w}_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (3.10a)$$

$$s. a. \quad \beta - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{w}_{rk}^+}{y_{rk}} = 1 \quad (3.10b)$$

$$-\beta x_{ik} + \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \hat{\lambda}_j - \hat{w}_{ik}^- \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10c)$$

$$-\beta y_{rk} + \sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \hat{\lambda}_j + \hat{w}_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.10d)$$

$$\hat{w}_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10e)$$

$$\hat{w}_{rk}^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10f)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10g)$$

$$\beta \geq 0 \quad (3.10h)$$

Sendo  $(\tau_k^*, \hat{\lambda}_j^*, \hat{w}_{ik}^{-*}, \hat{w}_{rk}^{+*}, \beta^*)$  solução ótima do modelo anterior, a solução ótima do modelo SE-SBM na representação (4.4) é obtida através das relações:

$$\rho_k^* = \tau_k^*, \lambda_j^* = \frac{\hat{\lambda}_j^*}{\beta^*}, w_{ik}^{-*} = \frac{\hat{w}_{ik}^{-*}}{\beta^*}, w_{rk}^{+*} = \frac{\hat{w}_{rk}^{+*}}{\beta^*} \quad (3.11)$$

A linearização do modelo SE-SBM para retornos variáveis de escala, nas duas representações anteriores (3.4) e (3.5), obtém-se por inclusão nos modelos (3.7) e (3.10) da restrição

$$-\beta + \sum_{j=1, j \neq k}^n \hat{\lambda}_j = 0 \quad (3.12)$$

O modelo de super-eficiência SBM é um modelo não orientado, isto é, considera que a projeção da DMU excluída do conjunto de referência na fronteira de eficiência definida pelas restantes DMUs eficientes é feita através do aumento de *inputs* e da redução de *outputs*. Tone (2002) propôs também duas versões orientadas deste modelo, uma orientada para *inputs* e outra orientada para *outputs*. A versão orientada para *inputs* é dada pelo seguinte modelo:

$$\delta_k^{I*} = \min \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_{ik}}{x_{ik}} \quad (3.13a)$$

$$s. a. \quad \bar{x}_{ik} \geq \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13b)$$

$$\bar{y}_{rk} \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13c)$$

$$\bar{x}_{ik} \geq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13d)$$

$$\bar{y}_{rk} = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13f)$$

$$\bar{y}_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13g)$$

Para a versão orientada para *outputs*, tem-se o seguinte modelo:

$$\delta_k^{O*} = \min \frac{1}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \bar{y}_{rk} / y_{rk}} \quad (3.14a)$$

$$s. a. \quad \bar{x}_{ik} \geq \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14b)$$

$$\bar{y}_{rk} \leq \sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14c)$$

$$\bar{x}_{ik} = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14d)$$

$$\bar{y}_{rk} \leq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.14f)$$

$$\bar{y}_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14g)$$

Atendendo a que o conjunto das soluções admissíveis de cada uma versões orientadas do modelo SE-SBM está contido no conjunto das soluções admissíveis deste modelo tem-se  $\delta_k^{I*} \geq \delta_k^*$  e  $\delta_k^{O*} \geq \delta_k^*$  (Tone, 2002).

Os modelos anteriores consideram retornos constantes de escala. Para obter os correspondentes modelos considerando retornos variáveis de escala, basta introduzir a restrição de convexidade (3.3) naqueles modelos. Note-se que neste caso, contrariamente à variante não orientada, existe o problema da impossibilidade referido na seção 3.2 para os modelos radiais sob retornos variáveis de escala, como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007).

### 3.4 Modelo de super-eficiência SBM alternativo

Em vez de utilizar o modelo SBM para determinar o índice de eficiência e depois aplicar o modelo SE-SBM para diferenciar as DMUs eficientes, como proposto por Tone (2002), Fang, Lee, Hwang e Chung (2013) invertem a sequência de otimização. Assim, primeiro aplicam o modelo SE-SBM para determinar a super-eficiência e, seguidamente, o modelo SBM reformulado é usado para discriminar as DMUs classificadas como não eficientes pelo modelo SE-SBM.

Sendo  $(w_{ik}^-, w_{rk}^{+*})$  a solução ótima do modelo SE-SBM descrito por (3.4), o modelo SBM descrito na subseção 3.3.2 por (2.10) pode ser reformulado como se segue:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.15a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - w_{ik}^- + s_{ik}^{-*} = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + w_{rk}^{+*} - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.15c)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15d)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.15e)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.15f)$$

Como é referido pelos autores, a lógica subjacente à sua abordagem é que se uma  $DMU_k$  está do lado de fora do conjunto de possibilidades de produção, definido por todas as DMUs com exclusão da  $DMU_k$ , o modelo (3.5) identificará primeiro a distância mínima da  $DMU_k$  à fronteira em termos de poupança de *input* ( $w_i^-$ ) e de excedente (excesso) de *output* ( $w_r^+$ ). Adicionando a poupança de *input* à  $DMU_k$  e subtraindo o excesso de *output* dessa  $DMU_k$ , a mesma será movida para a fronteira de eficiência. Contudo, a sua projeção na fronteira pode não ser fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans. Para contornar este problema, o modelo (3.15) é usado para identificar eventual excesso de *input* ( $s_i^-$ ) ou déficit de *output* ( $s_r^+$ ). Se a  $DMU_k$  não é eficiente pelo modelo SBM, isto é, se a  $DMU_k$  está dentro do conjunto de possibilidades de produção definido por todas as DMUs com exceção da  $DMU_k$ , as poupanças de *input* ( $w_i^-$ ) e os excessos de *output* ( $w_r^+$ ) serão iguais a zero. Então o modelo (3.15) identificará o excesso de *input* ( $s_i^-$ ) e o déficit de *output* ( $s_r^+$ ).

O índice de eficiência da  $DMU_k$  é então definido do seguinte modo:

$$\varphi_k^* = \begin{cases} \frac{1 + (1/m) \sum_{i=1}^m (w_{ik}^- / x_{ik})}{1 - (1/s) \sum_{r=1}^s (w_{rk}^+ / y_{rk})} , & \text{se } \frac{1 + (1/m) \sum_{i=1}^m (w_{ik}^- / x_{ik})}{1 - (1/s) \sum_{r=1}^s (w_{rk}^+ / y_{rk})} > 1 \\ \frac{1 - (1/m) \sum_{i=1}^m (s_{ik}^- / x_{ik})}{1 + (1/s) \sum_{r=1}^s (s_{rk}^+ / y_{rk})} , & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.16)$$

Como os autores mostram, o índice de eficiência dado por (3.16) é o mesmo que o dado por SE-SBM (3.5) quando a DMU<sub>k</sub>, isto é, a DMU em avaliação, não pertence ao conjunto de possibilidades de produção definido pelas restantes DMUs. Por outro lado, quando a DMU em avaliação pertence ao conjunto de possibilidades de produção definido pelas restantes DMUs, o índice de eficiência dado por (3.15) é o mesmo que o dado por SBM (2.10).

Usando as relações

$$\beta = \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}} \right)^{-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17a)$$

$$\hat{s}_{ik}^- = \beta s_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17b)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ = \beta s_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.17c)$$

$$\hat{\lambda}_j = \beta \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.17d)$$

o modelo (3.15) pode ser transformado no seguinte modelo de programação linear:

$$\tau_k^* = \min \beta + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{s}_{ik}^-}{x_{ik}} \quad (3.18a)$$

$$s. a. \quad \beta + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{s}_{rk}^+}{y_{rk}} = 1 \quad (3.18b)$$

$$-\beta x_{ik} + \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \hat{\lambda}_j + \beta w_{ik}^{-*} - \hat{s}_{ik}^- = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18c)$$

$$-\beta y_{rk} + \sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \hat{\lambda}_j - \beta w_{rk}^{+*} + \hat{s}_{rk}^+ = 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.18d)$$

$$\hat{s}_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18e)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18f)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.18g)$$

$$\beta \geq 0 \quad (3.18h)$$

Sendo  $(\tau_k^*, \hat{\lambda}_j, \hat{s}_{ik}^{-*}, \hat{s}_{rk}^{+*}, \beta^*)$  solução ótima do modelo anterior, a solução ótima do modelo (3.15) é obtida através das relações:

$$\rho_k^* = \tau_k^*, \lambda_j^* = \frac{\hat{\lambda}_j^*}{\beta^*}, s_{ik}^- = \frac{\hat{s}_{ik}^-}{\beta^*}, s_{rk}^+ = \frac{\hat{s}_{rk}^+}{\beta^*} \quad (3.19)$$

### 3.5 Modelos de super-eficiência aditivos

Du, Liang e Zhu (2010) estenderam o modelo SE-SBM para o modelo aditivo proposto por Charnes et al. (1985) e apresentado no capítulo anterior. Assim, para uma DMU<sub>k</sub> eficiente pelo modelo aditivo (2.9), estes autores propuseram o seguinte modelo de super-eficiência:

$$\alpha_k^* = \min \alpha_k = \sum_{i=1}^m t_{ik}^- + \sum_{r=1}^s t_{rk}^+ \quad (3.20a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} + t_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20b)$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + \geq y_{rk} - t_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.20c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k \quad (3.20d)$$

$$t_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20f)$$

$$t_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.20g)$$

Note-se que, à semelhança do que acontece para obtenção do modelo SE-SBM, também neste caso não basta modificar o modelo aditivo removendo a DMU<sub>k</sub> do conjunto referência para obter o modelo de super-eficiência aditivo que será denotado por SE-Aditivo. Efetuando apenas essa alteração o modelo resultante pode ser impossível. Assim, para além dessa alteração, torna-se necessário alterar as restrições para contemplar o incremento dos *inputs* e decréscimo dos *outputs* da DMU<sub>k</sub> por forma a atingir a fronteira de eficiência definida pelas restantes DMUs eficientes. Finalmente, a função objetivo é alterada de máximo para mínimo por forma a obter um modelo limitado.

Du, Liang e Zhu (2010) também propuseram um outro modelo que difere do anterior apenas na função objetivo, dado por:

$$\beta_k^* = \min \beta_k = \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{t_{ik}^-}{x_{ik}} + \sum_{r=1}^s \frac{t_{rk}^+}{y_{rk}} \right) \quad (3.21a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} + t_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.21b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + \geq y_{rk} - t_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.21c)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k \quad (3.21d)$$

$$t_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.21e)$$

$$t_{rk}^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.21f)$$

Como os autores referem, as restrições dos modelos anteriores podem ser escritas na forma das restrições do modelo SE-SBM. Então o modelo SE-SBM pode ser considerado uma versão do modelo de super-eficiência aditivo. De facto, sendo  $(\alpha_k^*, \lambda_j^*(\alpha), t_{ik}^{*-}(\alpha), t_{rk}^{*+}(\alpha))$  uma solução ótima do modelo (3.20) e  $(\beta_k^*, \lambda_j^*(\beta), t_{ik}^{*-}(\beta), t_{rk}^{*+}(\beta))$  uma solução ótima do modelo (3.21), os autores definem o índice de super-eficiência, dado por

$$\hat{\delta}_k^*(\alpha) = \min \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik} + t_{ik}^{*-}(\alpha)}{x_{ik}}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk} - t_{rk}^{*+}(\alpha)}{y_{rk}}} \quad e \quad \hat{\delta}_k^*(\beta) = \min \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik} + t_{ik}^{*-}(\beta)}{x_{ik}}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y_{rk} - t_{rk}^{*+}(\beta)}{y_{rk}}}$$

que estão na forma da função objetivo do modelo SE-SBM. Uma vez que  $\delta_k^*(\alpha) \geq 1$  e  $\hat{\delta}_k^*(\beta) \geq 1$ , então  $\hat{\delta}_k^*(\alpha)$  e  $\hat{\delta}_k^*(\beta)$  podem ser usados como índices de super-eficiência dos modelos (3.20) e (3.21), respetivamente.

No que se segue, o modelo definido por (3.20) e  $\hat{\delta}_k^*(\alpha)$  será denotado por SE-Aditivo( $\alpha$ ) e, identicamente, o modelo definido por (3.21)  $\hat{\delta}_k^*(\beta)$  será denotado por SE-Aditivo( $\beta$ ).

Os modelos apresentados anteriormente assumem retornos constantes de escala. Incluindo nesses modelos a restrição de convexidade (3.3) obtêm-se os modelos de super-eficiência aditivos para retornos variáveis de escala.

Du, Liang e Zhu (2010) mostram que os modelos SE-Aditivos são sempre possíveis quer sob retornos constantes de escala quer sob retornos variáveis de escala, à semelhança do que



acontece com o modelo SE-SBM proposto por Tone (2002). Como resultado tem-se que o uso destes modelos permite obter um ranking completo das DMUs eficientes.

Du, Liang e Zhu (2010) referem ainda que na função objetivo dos modelos SE-SBM (3.4) e SE-Aditivo (3.21),  $x_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $y_{rk}$  ( $r = 1, \dots, s$ ) podem ser substituídos por  $R_i^-$  e  $R_r^+$  ou  $\bar{R}_i^-$  e  $\bar{R}_r^+$  respetivamente, em que

$$R_i^- = \max_j \{x_{ij}\} \qquad R_r^+ = \max_j \{y_{rj}\}$$

$$\bar{R}_i^- = \max_j \{x_{ij}\} - \min_j \{x_{ij}\} \qquad \bar{R}_r^+ = \max_j \{y_{rj}\} - \min_j \{y_{rj}\}.$$

Com esta modificação, a condição de positividade requerida nos dados (*inputs* e *outputs*) do modelo SE-SBM (3.4) pode ser removida.

## 4. Aplicação a uma situação real

### 4.1 Introdução

No capítulo 4 foi apresentado um estudo sobre modelos não radiais de super-eficiência na metodologia DEA que permitem diferenciar as DMUs avaliadas como eficientes através dos modelos não radiais apresentados no capítulo 3. O presente capítulo destina-se à aplicação de alguns desses modelos a uma situação real, mais especificamente à obtenção dos índices de eficiência e de super-eficiência e, em consequência, estabelecer rankings para os dezoito municípios que integram a região da Área Metropolitana de Lisboa. Esta região constitui uma das sete regiões do território português de acordo com o nível II da NUTS (Nomenclatura das Unidades Territoriais para Fins Estatísticos). Esta nomenclatura, que contempla os níveis I, II e III, foi criada pelo EUROSTAT com os Institutos de Estatística dos diferentes países da União Europeia para efeitos de análise estatística de dados, com base numa divisão coerente e estruturada do território económico comunitário (INE, 2015). As restantes regiões deste nível da nomenclatura são as regiões Norte, Centro, Alentejo e Algarve, no Continente, e as regiões Autónomas da Madeira e dos Açores.

De acordo com os dados disponibilizados pela Pordata, a região da Área Metropolitana de Lisboa é, entre estas sete regiões, a segunda região com mais população (2854802 habitantes), apenas superada pela região Norte (3573661 habitantes), e, à exceção das regiões autónomas dos Açores e da Madeira, é a região com menor área (3015 Km<sup>2</sup>). É a região do país com maior densidade populacional (946,8 habitantes por Km<sup>2</sup>) e consideravelmente superior à das restantes regiões. De facto, a sua densidade populacional é cerca de três vezes a da região Madeira, seis vezes a da região Norte, nove vezes a da região dos Açores, onze vezes a da região do Algarve, doze vezes a da região Centro, quarenta e três vezes a da região do Alentejo e cerca de oito vezes e meia a média de Portugal. Claramente que esta densidade populacional reflete a elevada densidade populacional dos municípios que dela fazem parte. De referir que dos dez municípios de Portugal com maior densidade, sete fazem parte da região da área Metropolitana de Lisboa.

O resto deste capítulo é estruturado como se segue. Na seção 4.2 são apresentados os dados respeitantes aos *inputs* e *outputs* dos dezoito municípios que integram a região da área Metropolitana de Lisboa, é descrita a forma como estes dados foram recolhidos assim como a seleção dos modelos utilizados neste trabalho prático. Posteriormente, na seção 4.3, são apresentados os resultados obtidos e é efetuada a respetiva análise.

## 4.2 Seleção dos dados e modelos

Para a realização deste estudo prático foram utilizados os dados publicados pela Pordata, referentes ao ano de 2018, que são os dados mais recentes publicados até à data de início deste trabalho. Foram então selecionados três *inputs* e dois *outputs* relativamente aos dezoito municípios que integram a região da área Metropolitana de Lisboa. Os *inputs* selecionados foram os seguintes:

- Número de trabalhadores;
- Despesas correntes (valores em euros);
- Despesas de capital (valores em euros).

No que diz respeito ao número de trabalhadores na administração pública local, este constitui um recurso importante de análise uma vez que corresponde ao número efetivo de pessoas que se encontram ao serviço, o que pode ter impacto na forma como os municípios são geridos.

Outros dois recursos importantes na gestão dos municípios são as despesas correntes e as despesas de capital. As despesas correntes correspondem às despesas com pessoal, juros, bens de consumo e serviços necessários ao funcionamento dos municípios. Por sua vez, as despesas de capital dizem respeito às despesas que contribuem diretamente para a formação ou aquisição de um bem de capital, designadamente despesas de investimento (materiais de transporte, edifícios, máquinas), grandes reparações e bens duradouros utilizados, no mínimo, durante um ano na produção de bens e serviços sem que dessa utilização advenha uma alteração significativa.

Relativamente aos *outputs*, foram selecionados os seguintes:

- Número de habitantes;
- Área do município (em km<sup>2</sup>).

A seleção destes *outputs* justifica-se pelos objetivos que devem estar inerentes à função dos municípios: o de servir uma determinada população e uma determinada área.

Na tabela 4.1 apresenta-se a informação respeitante aos *inputs* e *outputs* de cada um dos dezoito municípios em análise. Nas primeiras duas colunas da tabela identificam-se os municípios em análise, nas três colunas que se seguem apresentam-se os valores relativos aos *inputs* e nas duas últimas apresentam-se os valores respeitantes *outputs*.

Tabela 4.1 - Dados relativos aos *inputs* e *outputs*.

Municípios:	<i>Inputs</i>			<i>Outputs</i>	
	Nº de Funcionários	Despesas Correntes	Despesas de Capital	Nº de Habitantes	Área (Km2)
01 Alcochete	374	12.481	1.985	18.914	128
02 Almada	1.652	68.689	11.157	169.510	70
03 Amadora	1.685	63.999	10.390	177.407	24
04 Barreiro	765	31.515	8.711	76.206	36
05 Cascais	2.163	133.094	52.336	210.625	97
06 Lisboa	7.926	607.204	213.046	504.718	100
07 Loures	2.331	88.687	10.244	206.719	167
08 Mafra	951	44.707	17.187	82.271	292
09 Moita	735	24.565	4.371	64.936	55
10 Montijo	838	22.771	2.448	55.448	349
11 Odivelas	1.243	51.584	14.532	155.273	27
12 Oeiras	2.427	95.623	24.137	173.794	46
13 Palmela	887	35.469	5.459	64.128	465
14 Seixal	1.571	69.229	49.456	164.874	95
15 Sesimbra	876	34.140	8.536	50.853	196
16 Setúbal	1.384	61.563	15.650	117.380	230
17 Sintra	3.094	111.936	25.114	383.234	319
18 V. F. de Xira	883	45.296	13.987	140.729	318

Fonte: Elaboração própria.

Para a elaboração deste estudo prático foram utilizados o modelo não radial SBM apresentado no capítulo 2 e os modelos não radiais de super-eficiência SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ), assim como as variantes dos modelos SE-SBM e SE-Aditivo( $\beta$ ) com função objetivo modificada, apresentados no capítulo 3. Todos estes modelos foram aplicados considerando retornos constantes e retornos variáveis de escala.

### 4.3 Resultados e respetiva análise

Nesta seção apresentam-se os resultados relativos aos índices de eficiência e de super-eficiência obtidos pelos modelos referidos na secção anterior e é efetuada uma análise dos mesmos. Para a obtenção dos índices de eficiência fornecidos pelo modelo SBM na forma do envelope, foi utilizada a versão gratuita do *software* MaxDEA, que pode ser obtida em

<http://maxdea.com/>. Para obtenção dos índices fornecidos pelos modelos de super-eficiência selecionados, foi utilizado o módulo de programação linear, bem como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*), do pacote CPLEX *Optimization Studio Academic Research 12.5*.

Na tabela 4.2 apresentam-se os resultados obtidos pelos modelos selecionados para retornos constantes de escala. Nas duas primeiras colunas da tabela, da esquerda para a direita, identificam-se os municípios, na terceira coluna apresentam-se os índices de eficiência obtidos pelo modelo SBM, nas quarta, quinta e sexta colunas apresentam-se os índices de super-eficiência obtidos pelos modelos SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ), respetivamente. Os resultados que permitiram calcular os índices de super-eficiência obtidos pelos modelos , SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) estão apresentados nos apêndices A e B, respetivamente.

Tabela 4.2 - Resultados obtidos pelos modelos SBM, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos constantes de escala

<b>Municípios:</b>	<b>SBM</b>	<b>SE-SBM</b>	<b>SE-Aditivo(<math>\alpha</math>)</b>	<b>SE-Aditivo(<math>\beta</math>)</b>
<b>01</b> Alcochete	0,6242	-	-	-
<b>02</b> Almada	0,2522	-	-	-
<b>03</b> Amadora	0,2646	-	-	-
<b>04</b> Barreiro	0,1746	-	-	-
<b>05</b> Cascais	0,1187	-	-	-
<b>06</b> Lisboa	0,0273	-	-	-
<b>07</b> Loures	1	1,0275	1,0512	1,0275
<b>08</b> Mafra	0,5778	-	-	-
<b>09</b> Moita	0,3144	-	-	-
<b>10</b> Montijo	1	1,3701	1,8726	1,4318
<b>11</b> Odivelas	0,116	-	-	-
<b>12</b> Oeiras	0,0609	-	-	-
<b>13</b> Palmela	1	1,0863	1,1190	1,1190
<b>14</b> Seixal	0,1785	-	-	-
<b>15</b> Sesimbra	0,4436	-	-	-
<b>16</b> Setúbal	0,4278	-	-	-
<b>17</b> Sintra	1	1,0759	1,1151	1,0805
<b>18</b> V. F. de Xira	1	1,1859	1,3359	1,2661

**Fonte:** Elaboração própria.

Da observação da tabela 4.2, verifica-se que o modelo SBM permitiu identificar cinco municípios com índice de eficiência igual a 1 e por isso considerados eficientes, que são os municípios de Loures (07), Montijo (10), Palmela (13), Sintra (17) e Vila Franca de Xira (18). Para os restantes treze municípios os índices de eficiência obtidos por esse modelo são inferiores a 1, pelo que esses municípios são considerados ineficientes. Neste caso, os índices de eficiência obtidos são todos diferentes, o que possibilita a diferenciação destes municípios e, conseqüentemente, estabelecer um ranking, em termos de superioridade de performance, para esses municípios.

Para diferenciar os cinco municípios considerados eficientes através do modelo SBM, foram utilizados os três modelos de super-eficiência selecionados, isto é, os modelos SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ). Como se pode observar na tabela 4.2, os índices de super-eficiência obtidos por cada um destes três modelos são todos diferentes, permitindo assim diferenciar os municípios eficientes. Então o uso conjunto do modelo SBM e de um dos modelos de super-eficiência referidos anteriormente permite obter um ranking completo, em termos de superioridade de performance, para todos os municípios em análise. No que respeita às diferenças entre os valores fornecidos pelos três modelos de super-eficiência verifica-se que são, em geral, pouco significativas.

Na tabela 4.3 apresentam-se os rankings obtidos pelos modelos selecionados em correspondência com os resultados apresentados na tabela 5.2. Nessa tabela, o valor 1 indica o município com melhor performance enquanto o valor 18 indica o município com pior performance.

Da observação da tabela 4.3, e na sequência do que já foi referido quanto aos resultados da super-eficiência apresentados na tabela 4.2, verifica-se que os rankings obtidos para os municípios eficientes coincidem em todos os modelos de super-eficiência usados neste estudo prático. Verifica-se ainda que o município que obteve a melhor posição no ranking foi o município do Montijo (10), que seguido dos municípios de Vila Franca de Xira (18), Palmela (13), Sintra (17) e Loures (07), constituem assim o top-5 dos municípios com melhor performance. Por outro lado, o município que obteve a pior posição do ranking foi o de Lisboa (06), que seguido dos municípios de Oeiras (12), Odivelas (11), Cascais (05) e Barreiro (04) constituem o top-5 dos municípios com pior performance.

Tabela 4.3 - Rankings obtidos pelos modelos SBM, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos constantes de escala

<b>Municípios:</b>	<b>SBM</b>	<b>SE-SBM</b>	<b>SE-Aditivo(<math>\alpha</math>)</b>	<b>SE-Aditivo(<math>\beta</math>)</b>
<b>01</b> Alcochete	6	-	-	-
<b>02</b> Almada	12	-	-	-
<b>03</b> Amadora	11	-	-	-
<b>04</b> Barreiro	14	-	-	-
<b>05</b> Cascais	15	-	-	-
<b>06</b> Lisboa	18	-	-	-
<b>07</b> Loures	1	5	5	5
<b>08</b> Mafra	7	-	-	-
<b>09</b> Moita	10	-	-	-
<b>10</b> Montijo	1	1	1	1
<b>11</b> Odivelas	16	-	-	-
<b>12</b> Oeiras	17	-	-	-
<b>13</b> Palmela	1	3	3	3
<b>14</b> Seixal	13	-	-	-
<b>15</b> Sesimbra	8	-	-	-
<b>16</b> Setúbal	9	-	-	-
<b>17</b> Sintra	1	4	4	4
<b>18</b> V. F. de Xira	1	2	2	2

**Fonte:** Elaboração própria.

Na tabela 4.4, que segue a estrutura da tabela 4.2, apresentam-se os índices de eficiência e super-eficiência obtidos pelos modelos selecionados considerando retornos variáveis de escala.

Neste caso, o modelo SBM permitiu identificar nove municípios com índice de eficiência igual a 1, isto é, eficientes, que são os municípios de Alcochete (01), Amadora (03), Lisboa (06), Loures (07), Moita (09), Montijo (10), Palmela (13), Sintra (17) e Vila Franca de Xira (18). Para os restantes nove municípios obteve-se um índice de eficiência inferior a 1 e diferente para todos eles. Também, neste caso, a aplicação dos modelos de super-eficiência selecionados aos municípios eficientes permite diferenciá-los conforme se pode observar nas três últimas colunas da tabela 4.3. Os resultados que permitiram calcular os índices de super-eficiência obtidos pelos modelos , SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) estão apresentados nos apêndices C e D, respetivamente.

Tabela 4.4 - Resultados obtidos pelos modelos SBM, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos variáveis de escala

Municípios:	SBM	SE-SBM	SE-Aditivo( $\alpha$ )	SE-Aditivo( $\beta$ )
01 Alcochete	1	1,7661	1,7661	1,7661
02 Almada	0,293	-	-	-
03 Amadora	1	1,0116	1,0150	1,0116
04 Barreiro	0,1834	-	-	-
05 Cascais	0,2202	-	-	-
06 Lisboa	1	1,1368	1,1368	1,1368
07 Loures	1	1,0781	1,5380	1,0915
08 Mafra	0,5913	-	-	-
09 Moita	1	1,0202	1,0249	1,0207
10 Montijo	1	1,3981	1,9411	1,5264
11 Odivelas	0,1371	-	-	-
12 Oeiras	0,1218	-	-	-
13 Palmela	1	1,1443	1,1443	1,1443
14 Seixal	0,2596	-	-	-
15 Sesimbra	0,4436	-	-	-
16 Setúbal	0,5142	-	-	-
17 Sintra	1	1,4193	1,8376	1,4193
18 V. F. de Xira	1	1,2001	1,6879	1,2950

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 4.5, que segue a estrutura da tabela 4.3, apresentam-se os rankings obtidos, pelos modelos selecionados, para retornos variáveis de escala a partir dos resultados apresentados na tabela 4.4. Também, nessa tabela, o valor 1 indica o município com melhor performance enquanto o valor 18 indica o município com pior performance.

Comparando os rankings obtidos pelos três modelos de super-eficiência, verifica-se que não existem diferenças significativas entre esses rankings. De facto, existem três municípios em que não há diferença entre os rankings, isto é, que ocupam a mesma posição nos rankings fornecidos pelos três modelos, que são os municípios de Amadora (03), Moita (09) e Vila Franca de Xira (18) que ocupam as posições 9, 8 e 4, respetivamente. Existem três municípios em que a diferença de rankings é 1, que são os municípios de Lisboa (06), Palmela (13) e Vila Franca de Xira (18). Finalmente, existem também três municípios em que a diferença de



rankings é 2, que são os municípios de Alcochete (01), Loures (07) e Montijo (10). As diferenças observadas são essencialmente devidas ao modelo SE-Aditivo( $\alpha$ ), uma vez que a diferença entre os modelos SE-SBM e SE-Aditivo( $\beta$ ) apenas se verifica nos municípios do Montijo (10) e Sintra (17) que trocam de posição (de 2 para 3).

**Tabela 4.5** - Rankings obtidos pelos modelos SBM, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos variáveis de escala

Municípios:	SBM	SE-SBM	SE-Aditivo( $\alpha$ )	SE-Aditivo( $\beta$ )
01 Alcochete	1	1	3	1
02 Almada	13	-	-	-
03 Amadora	1	9	9	9
04 Barreiro	16	-	-	-
05 Cascais	15	-	-	-
06 Lisboa	1	6	7	6
07 Loures	1	7	5	7
08 Mafra	10	-	-	-
09 Moita	1	8	8	8
10 Montijo	1	3	1	2
11 Odivelas	17	-	-	-
12 Oeiras	18	-	-	-
13 Palmela	5	5	6	5
14 Seixal	14	-	-	-
15 Sesimbra	12	-	-	-
16 Setúbal	11	-	-	-
17 Sintra	1	2	2	3
18 V. F. de Xira	1	4	4	4

**Fonte:** Elaboração própria.

Relativamente às cinco primeiras posições do ranking, tem-se que a posição 1 é ocupada por Alcochete (01) (através dos modelos SE-SBM e SE-Aditivo( $\beta$ )) e pelo Montijo (10) (através do modelo SE-Aditivo( $\alpha$ )); a posição 2 é ocupada por Sintra (17) (SE-SBM e SE-Aditivo( $\alpha$ )) e pelo Montijo (10) (SE-Aditivo( $\beta$ )); a posição 3 é ocupada pelo Montijo (10) (SE-SBM), por Alcochete (01) (SE-Aditivo( $\alpha$ )) e por Sintra (17) (SE-Aditivo( $\beta$ )); a posição 4 é ocupada por Vila Franca de Xira (18) (todos os modelos) e a posição 5 é ocupada por Palmela (13) (SE-SBM e SE-Aditivo( $\beta$ )) e Loures (07) (SE-Aditivo( $\alpha$ )). Note-se que os três modelos de super-

eficiência identificam os mesmos municípios para as primeiras quatro posições do ranking embora com alguma variação de posição, que são os municípios de Alcochete (01), Montijo (10), Sintra (17) e Vila Franca de Xira (18). De entre todos os municípios, o município de Oeiras (12) seguido dos municípios de Odivelas (11), Barreiro (04), Cascais (05) e Seixal (14) são os cinco municípios com pior performance.

Comparando os rankings obtidos para retornos constantes de escala com os obtidos para retornos variáveis de escala, verifica-se que para a maioria dos municípios a diferença de ranking é de 1 ou 2. As exceções são o município de Cascais (05) que mantém o mesmo ranking, o município de Mafra (08), através do modelo SBM, e o município de Palmela (13), através do modelo SE-Aditivo( $\alpha$ ), que apresentam uma diferença de ranking igual a 3, o município de Sesimbra (15) que, através do modelo SBM, apresenta uma diferença de 4 e, finalmente, o município de Lisboa (06) que apresenta uma diferença de 12 através dos modelos SE-SBM e SE-Aditivo( $\beta$ ) e uma diferença de 11 através do modelo SE-Aditivo( $\alpha$ ).

A seguir apresentam-se os resultados obtidos pelas variantes dos modelos SE-SBM e SE-Aditivo ( $\beta$ ) em que  $x_{ik}$  ( $i=1, \dots, m$ ) e  $y_{rk}$  ( $r=1, \dots, s$ ) são substituídos por  $R_i^-$  e  $R_r^+$  ou  $\bar{R}_i^-$  e  $\bar{R}_r^+$ , respetivamente, conforme descrito no final do capítulo anterior. No primeiro caso os modelos são denotados por SE-SBM(R) e SE-Aditivo( $\beta$ )(R) e no segundo por SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ). Note-se que para poder comparar estas variantes a mesma modificação será feita na expressão que fornece o valor de  $\hat{\delta}_k^*(\beta)$ . Na tabela 4.6 apresentam-se os resultados obtidos por estes modelos para retornos constantes de escala.

Tabela 4.6 - Resultados obtidos pelos modelos SE-SBM(R), SE-Aditivo( $\beta$ )(R), SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ) para retornos constantes de escala

Municípios	SE-SBM(R)	SE-Aditivo( $\beta$ )(R)	SE-SBM( $\bar{R}$ )	SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ )
07 Loures	0,4272	0,4272	0,4233	0,4243
10 Montijo	0,1330	0,13499	0,1311	0,01329
13 Palmela	0,1330	0,1330	0,1311	0,1311
17 Sintra	0,3417	0,3436	0,3378	0,3395
18 V. F. de Xira	0,1984	0,2167	0,1945	0,2133

Fonte: Elaboração própria.

Da observação da tabela 4. 6, verifica-se que, sob retornos constantes de escala, os resultados obtidos pelos quatro modelos para cada município são iguais ou apresentam diferenças muito

pequenas. Em consequência, os rankings obtidos por estes modelos e apresentados na tabela 4.7 são todos iguais, com exceção do município de Palmela (13). Há, no entanto, a salientar que os modelos SE-SBM(R) e SE-SBM( $\bar{R}$ ) fornecem o mesmo valor para os municípios do Montijo (10) e de Palmela (13) não permitindo diferenciar estes dois municípios e, deste modo, obter um ranking completo para todos os municípios.

**Tabela 4.7** - Rankings obtidos pelos modelos SE-SBM(R) SE-Aditivo( $\beta$ )(R), SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ) para retornos constantes de escala

Municípios	SE-SBM(R)	SE-Aditivo( $\beta$ )(R)	SE-SBM( $\bar{R}$ )	SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ )
07 Loures	1	1	1	1
10 Montijo	4	4	4	4
13 Palmela	4	5	4	5
17 Sintra	2	2	2	2
18 V. F. de Xira	3	3	3	3

Fonte: Elaboração própria.

Relativamente aos resultados obtidos por estes quatro modelos para retornos variáveis de escala, apresentados na tabela 4.8, verifica-se que, também neste caso, são iguais ou apresentam diferenças muito pequenas, como acontece no caso de retornos constantes de escala. Deste modo, os rankings fornecidos pelos quatro modelos são os mesmos como se pode observar na tabela 4.9.

**Tabela 4.8** - Resultados obtidos pelos modelos SE-SBM(R), SE-Aditivo( $\beta$ )(R), SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ) para retornos variáveis de escala

Municípios	SE-SBM(R)	SE-Aditivo( $\beta$ )(R)	SE-SBM( $\bar{R}$ )	SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ )
01 Alcochete	0,3282	0,3282	0,3235	0,3235
03 Amadora	0,6100	0,6100	0,6070	0,6070
06 Lisboa	2,0526	2,0526	2,0217	2,0217
07 Loures	0,4332	0,4332	0,4292	0,4292
09 Moita	0,4219	0,4219	0,4178	0,4178
10 Montijo	0,1347	0,1364	0,1328	0,1344
13 Palmela	0,1493	0,1493	0,1470	0,1470
17 Sintra	0,4633	0,4632	0,4569	0,4568
18 V. F. de Xira	0,2008	0,2204	0,1967	0,2170

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4.9 - Rankings obtidos pelos modelos SE-SBM( $R$ ) SE-Aditivo( $\beta$ )( $R$ ), SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ) para retornos variáveis de escala

Municípios	SE-SBM( $R$ )	SE-Aditivo( $\beta$ )( $R$ )	SE-SBM( $\bar{R}$ )	SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ )
01 Alcochete	6	6	6	6
03 Amadora	2	2	2	2
06 Lisboa	1	1	1	1
07 Loures	4	4	4	4
09 Moita	5	5	5	5
10 Montijo	9	9	9	9
13 Palmela	8	8	8	8
17 Sintra	3	3	3	3
18 V. F. de Xira	7	7	7	7

Fonte: Elaboração própria.

Para finalizar esta análise dos resultados, comparem-se os rankings fornecidos pelos modelos SE-SBM e SE-Aditivo( $\beta$ ) e pelas variantes  $R$  e  $\bar{R}$ . Para facilitar essa comparação considerem-se os gráficos apresentados nas figuras 4.1 e 4.2, relativos aos rankings fornecidos por aqueles modelos, para retornos constantes de escala e para retornos variáveis de escala, respetivamente. Nesses gráficos estão também incluídos os rankings obtidos pelo modelo SE-Aditivo( $\alpha$ ) por forma a consolidar a análise feita anteriormente.

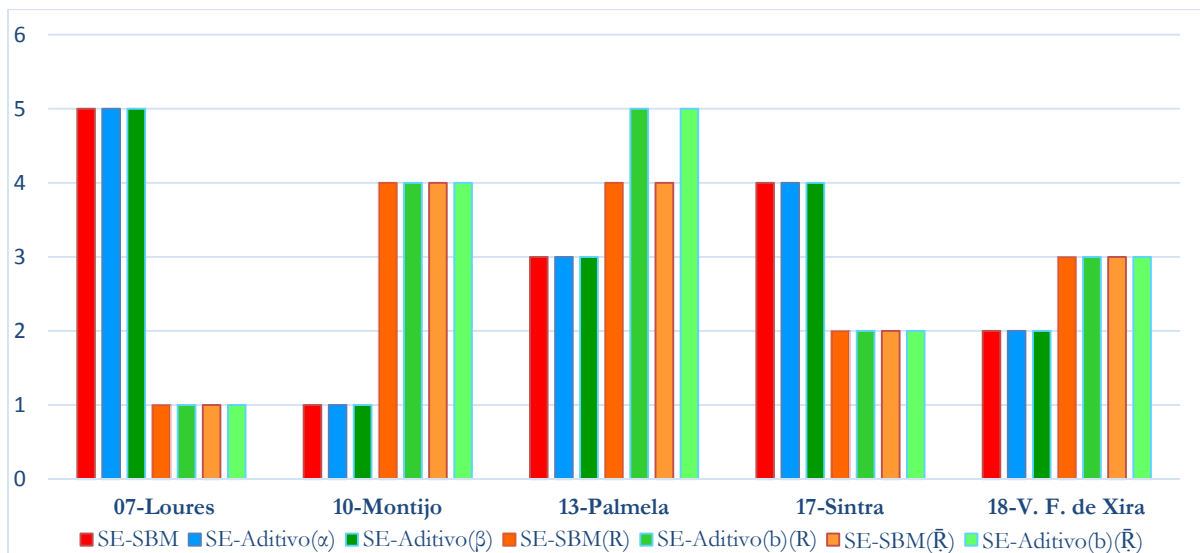


Figura 4.1 – Gráfico dos Rankings obtidos através dos modelos SE-SBM, SE-Aditivo ( $\alpha$ ), SE-Aditivo ( $\beta$ ), modelos SE-SBM( $R$ ) SE-Aditivo( $\beta$ )( $R$ ), SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ), para retornos constantes de escala.

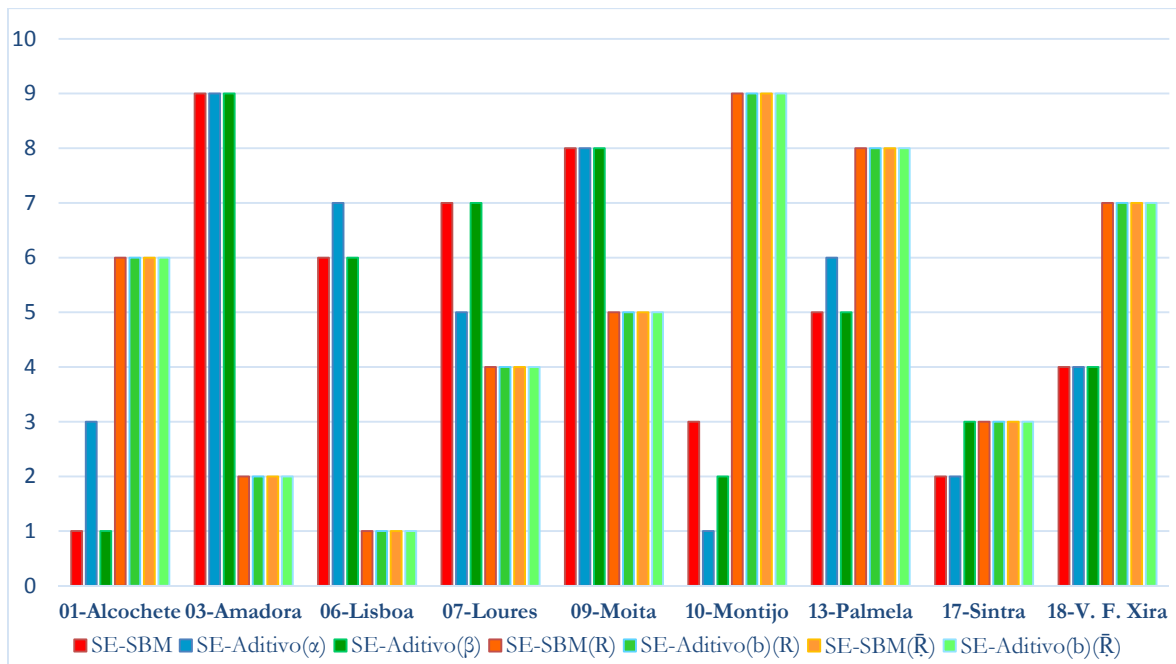


Figura 4.2 – Gráfico dos Rankings obtidos através dos modelos SE-SBM, SE-Aditivo ( $\alpha$ ), SE-Aditivo ( $\beta$ ), modelos SE-SBM(R) SE-Aditivo( $\beta$ )(R), SE-SBM( $\bar{R}$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ )( $\bar{R}$ ), para retornos variáveis de escala.

Da observação desses gráficos, verifica-se que existem diferenças, nalguns casos significativas, entre os rankings fornecidos pelos modelos originais SE-SBM e SE-Aditivo ( $\beta$ ) e pelas variantes R e  $\bar{R}$  desses modelos, para todos os municípios eficientes. No caso do gráfico da figura 4.1, para retornos constantes de escala, essa diferença chega a ser de 4, que é a maior possível, para o município de Loures (07). Também no caso do gráfico da figura 4.2, para retornos variáveis de escala, essa diferença chega a ser de 7 para o município da Amadora (03) e para o município do Montijo (10), quando a maior diferença possível é de 8.

## 5. Conclusões

Neste trabalho foi realizado um estudo, no âmbito da metodologia DEA, sobre a obtenção de rankings com base em modelos não radiais de super-eficiência que, por sua vez, são baseados em modelos não radiais para medir a eficiência relativa de um conjunto de DMUs. Como se viu, a aplicação destes últimos modelos à avaliação de um conjunto de DMUs conduz, em geral, à existência de várias DMUs consideradas eficientes, não permitindo a sua diferenciação em termos de performance e, deste modo, estabelecer um ranking completo de todas as DMUs em avaliação.

Para contornar este problema, vários métodos e modelos têm sido propostos na literatura. Um desses métodos é o da super-eficiência, proposto por Andersen e Petersen (2002), com base nos modelos radiais. Este método consiste em excluir a DMU em avaliação do conjunto de referência pelo que a sua eficiência é obtida em relação à fronteira de eficiência definida pelas restantes DMUs, originando que DMUs classificadas como extremo-eficientes se tornem super-eficientes e obtenham um índice superior a 1. Deste modo, é possível diferenciar as DMUs eficientes e, conseqüentemente obter um ranking completo de todas as DMUs.

Em determinadas condições, nomeadamente sob retornos variáveis de escala, os modelos radiais de super-eficiência tornam-se modelos impossíveis, o que constitui uma dificuldade de aplicação destes modelos, pois, nessas condições, torna-se necessário recorrer a modelos que permitem contornar essa dificuldade. Essa impossibilidade não ocorre com os modelos não radiais de super-eficiência, isto é, os modelos de super-eficiência baseados nos modelos não radiais. Este facto constitui uma vantagem destes modelos sobre os modelos radiais. O método de super-eficiência baseado nos modelos não radiais é executado em duas fases: na primeira é usado um modelo não radial para classificar as DMUs em eficientes e ineficientes e na segunda é usado um de super-eficiência para diferenciar as DMUs eficientes. Os modelos de super-eficiência não radiais, contrariamente ao que acontece com os radiais, não permitem diferenciar as DMUs ineficientes, uma vez que quando aplicados a estas obtêm-se o índice de eficiência igual a 1 para todas elas. Deste modo, o ranking para as DMUs ineficientes é obtido a partir do modelo não radial usado na primeira fase.

Para se ter uma ideia mais precisa acerca de alguns dos modelos referidos neste estudo, nomeadamente das diferenças entre esses modelos, foi feita uma aplicação dos mesmos a uma situação real, mais precisamente à determinação dos rankings dos dezoito municípios que integram a região da Área Metropolitana de Lisboa. Como se verificou, a aplicação do modelo

não radial SBM permitiu identificar cinco municípios eficientes, considerando retornos constantes de escala, e nove, considerando retornos variáveis de escala.

Usando qualquer um dos modelos não radiais de super-eficiência, SE-SBM, SE-Aditivo( $\alpha$ ) e SE-Aditivo( $\beta$ ), foi possível diferenciar todos municípios considerados eficientes pelo modelo SBM e, deste modo, obter um ranking completo para todos os municípios em avaliação. Verificou-se também que os rankings fornecidos pelos três modelos de super-eficiência foram os mesmos quando se consideram retornos constantes de escala e que, para retornos variáveis de escala, as diferenças encontradas não são significativas. Neste último caso as diferenças são essencialmente devidas ao modelo SE-Aditivo( $\alpha$ ), notando-se uma certa semelhança entre os rankings obtidos através dos modelos SE-SBM e SE-Aditivo( $\beta$ ).

Esta semelhança ocorreu também quando se consideraram as variantes destes dois modelos com função objetivo modificada como descrito no final do capítulo 4. De salientar que neste caso, o modelo SE-SBM não permitiu diferenciar dois dos municípios eficientes e, conseqüentemente, estabelecer um ranking completo para todos os municípios. Além disso, os rankings obtidos através destes modelos são muito diferentes dos obtidos com os modelos iniciais. Os resultados obtidos indicam assim não parecer existir qualquer vantagem na utilização destas variantes, a não ser a da não exigência dos dados positivos no caso do modelo SE-SBM.

## Referências bibliográficas

- Adler, N., Friedman, L., & Sinuany-Stern, Z. (2002). Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European journal of operational research*, 140(2), 249-265.
- Ali, A. & Seiford, L. (1990). Translation Invariance in Data Envelopment Analysis. *Operations Research Letters*, 9, 403-405.
- Ali, A, & Seiford, L. (1993). Computational Accuracy and Infinitesimals in Data Envelopment Analysis. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 31, 290-297.
- Aldamak, A. & Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency ranking methods in data envelopment analysis. *Measurement*, 106, 161-172.
- Andersen, P., & Petersen, N. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management science*, 73, 1261-1264
- Banker, R., Charnes, A., & Cooper, W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078-1092.
- Charnes, A., & Cooper, W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics (NRL)*, 9, 181-186.
- Charnes, A., Cooper, W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- Charnes, A., Cooper, W., & Rhodes, E. (1979). Short Communication; Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, 3(4), 338-339.
- Charnes, A., Cooper, W., Lewin, A., Morey, R., & Rousseau, J. (1981). *Data Envelopment Analysis: A Non-Archimedean and Robustness Calculus*. Gradual School and Business Administration: Duke University.
- Charnes, A., Cooper, W., Golany, B., Seiford, L., & Stutz, J. (1985). *Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions*. Center for Cybernetic Studies: University of Texas.
- Chen, Y. (2005). Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility. *European Journal of Operational Research*, 161, 545-551.



- Chen, Y., & Liang, L. (2011). Super-Efficiency DEA in the presence of infeasibility: One model approach. *European Journal of Operational Research*, 213, 359-360.
- Cook, W., Liang, L., Zha, Y., & Zhu, J. (2009). A modified super-efficiency DEA model for infeasibility. *Journal of the Operational Research Society*, 60, 276-28.
- Cooper, W., Park, K., & Pastor, J. (1999). RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 11, 5-42.
- Cooper, W., Seiford, L., & Tone, K. (2007). *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA – Solver software*. New York: Springer Science + Business Média.
- Cooper, W., Seiford, L., Tone, K., & Zhu, J. (2007). Some models and measures for evaluating performances with DEA: past accomplishments and future prospects. *Journal of Productivity Analysis*, 28(3), 151-163.
- Du, J., Liang, L., & Zhu, J. (2010). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis: A comment. *European Journal of Operational Research*, 204, 694-697.
- Dulá, J., & Hickman, B. (1997). Effects of excluding the column being scored from the DEA envelopment LP technology matrix. *Journal of the Operational Research Society*, 48, 1001-12.
- Fang, H., Lee, H., Hwang, S., & Chung, C. (2013). A slacks-based measure of super efficiency in data envelopment analysis: An alternative approach. *Omega*, 41, 731-734.
- Färe, R., & Lovell, C. (1978). Measuring the technical efficiency of production. *Journal of Economic theory*, 19(1), 150-162.
- Färe, R., Grosskopf, S., & Lovell, C. (1985). *The Measurement of Efficiency of Production*. Boston: Kluwer Academic Publishers Group.
- Färe, R. & Hunsaker, W. (1986). Notions of Efficiency and Their Reference Sets. *Management Science*, 32(2), 237-243.
- Lee, H., Chu, C., & Zhu, J. (2011). Super-efficiency DEA in the presence of infeasibility. *European Journal of Operational Research*, 212, 141-147.

- Lee, H. & Zhu, J. (2012). Super-efficiency infeasibility and zero data in DEA. *European Journal of Operational Research*, 216, 429–433.
- Lovell, C. & Rouse, A. (2003). Equivalent standard DEA models to provide superefficiency scores. *Journal of the Operational Research Society*, 54(1), 101-108.
- MaxDEA (2020, novembro 1). *MaxDEA for Data Envelopment Analysis, MaxDEA Basic 6.13*. <http://maxdea.com/>.
- Pastor, J., Ruiz, J., & Sirvent, I. (1999). Theory and Methodology: An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. *European Journal of Operational Research*, 115, 596-607.
- Pordata (2020, outubro 3). Finanças Autárquicas. <http://www.pordata.pt/Municipios>.
- Seiford, L. & Zhu, J. (1999). Infeasibility Of Super-Efficiency Data Envelopment Analysis Models. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 37(2), 174-187.
- Thrall, R. (1996). Duality, classification and slacks in DEA. *Annals of Operations Research*, 66, 109-138.
- Tone, K. (1997). DEA with controllable category levels. *In Proceedings of the Spring National Conference of the Operations Research Society of Japan*. Tokyo: Tokyo Institute of Technology.
- Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 130(3), 498-509.
- Xue, M. & Harker, P. (2002). Note: Ranking DMUs with Infeasible Super Efficiency in DEA Models. *Management Science*, 48(5), 705-710.
- Zhu, J. (1996). Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 90, 451-460.

**APÊNDICE A – SE-Aditivo( $\alpha$ ) para retornos constantes**

Municípios	$\alpha$	$t_1^-$	$t_2^-$	$t_3^-$	$t_1^+$	$t_2^+$	$\delta(\alpha)$
07 Loures	357,94	357,94	0	0	0	0	1,0512
10 Montijo	722,46	0	0	418,44	0	304,02	1,8726
13 Palmela	98,88	0	0	0	0	98,88	1,1190
17 Sintra	23974,07	0	19730	4244,40	0	0	1,1151
18 V.F. de Xira	443,41	345,63	0	0	0	97,78	1,3359

Fonte: Elaboração Própria.

**APÊNDICE B – SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos constantes**

Municípios	$\alpha$	$t_1^-$	$t_2^-$	$t_3^-$	$t_1^+$	$t_2^+$	$\delta(\beta)$
07 Loures	0,01	0	0	0	11078	0	1,0275
10 Montijo	0,17	0	0	1056,70	14278	50,47	1,4318
13 Palmela	0,04	0	0	0	0	98,88	1,1190
17 Sintra	0,03	0	0	0	57072	0	1,0805
18 V.F. de Xira	0,08	0	0	0	59148	0	1,2661

Fonte: Elaboração Própria.

**APÊNDICE C – SE-Aditivo( $\alpha$ ) para retornos variáveis**

Municípios	$\alpha$	$t_1^-$	$t_2^-$	$t_3^-$	$t_1^+$	$t_2^+$	$\delta(\alpha)$
01 Alcochete	11217	464	10290	463	0	0	1,7661
03 Amadora	75,72	75,72	0	0	0	0	1,0150
06 Lisboa	121484	0	0	0	121480	0	1,1368
07 Loures	2343,85	0	0	2242,90	0	100,99	1,5380
09 Moita	608,63	37,79	570,84	0	0	0	1,0249
10 Montijo	1663	0	0	1392,80	0	270,22	1,9411
13 Palmela	117,25	0	0	0	0	117,25	1,1443
17 Sintra	163308,50	0	0	0	163150	155	1,8376
18 V.F. de Xira	687,61	413,72	73,75	0	0	200,14	1,6879

**Fonte:** Elaboração Própria.

**APÊNDICE D – SE-Aditivo( $\beta$ ) para retornos variáveis**

Municípios	$\alpha$	$t_1^-$	$t_2^-$	$t_3^-$	$t_1^+$	$t_2^+$	$\delta(\beta)$
01 Alcochete	0,46	464	10290	463	0	0	1,7661
03 Amadora	0,00	0	0	0	4068,60	0	1,0116
06 Lisboa	0,05	0	0	0	121480	0	1,1368
07 Loures	0,03	0	0	0	34650	0	1,0915
09 Moita	0,01	0	0	0	2630,30	0	1,0207
10 Montijo	0,19	0	0	1092	16295	70,15	1,5264
13 Palmela	0,05	0	0	0	0	117,25	1,1443
17 Sintra	0,12	0	0	0	226420	0	1,4193
18 V.F. de Xira	0,09	0	0	0	64110	0	1,2950

**Fonte:** Elaboração Própria.