



tecnun
Universidad
de Navarra
Escuela de Ingenieros

DESEQUILIBRIO EN MÁQUINAS ALTERNATIVAS

ESTUDIO TEÓRICO

Juan Tomás Celigüeta

DESEQUILIBRIO EN MÁQUINAS ALTERNATIVAS - ESTUDIO TEÓRICO

Copyright © 2014 por Juan Tomás Celigüeta y tecnun (Universidad de Navarra).

Este documento está licenciado bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento – NoComercial - CompartirIgual 3.0 España (CC BY-NC-SA 3.0 ES). Puede consultar las condiciones de dicha licencia en <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>.



CONTENIDO

1	Desequilibrio en una máquina alternativa simple	1
1.1	Cinemática.....	1
1.2	Cinemática aproximada.....	3
1.3	Sustitución de la biela por masas equivalentes	5
1.4	Sistema dinámico equivalente	7
1.5	Ecuaciones de equilibrio dinámico.....	7
1.6	Fuerzas sobre la sustentación	8
1.7	Equilibrado de la fuerza transversal FDY	11
1.8	Equilibrado del par de desequilibrio MD	11
1.9	Fuerza de desequilibrio longitudinal FDX	12
2	Máquinas con cilindros en línea.....	14
2.1	Fuerzas de desequilibrio	16
2.2	Momento de desequilibrio.....	17
2.3	Máquina de 2 cilindros y ciclo simple	17
2.4	Máquina de 2 cilindros y ciclo doble.....	19
2.5	Máquina de 4 cilindros y ciclo doble.....	20
2.6	Máquina de 3 cilindros y ciclo doble.....	23
2.7	Máquina de 5 cilindros y ciclo doble.....	24
2.8	Máquina de 6 cilindros y ciclo doble.....	25
2.9	Máquina de 8 cilindros y ciclo doble.....	26
2.10	Posición de los cilindros en máquinas en línea.....	26
3	Máquinas con cilindros opuestos.....	29
3.1	Máquina de 4 cilindros opuestos y ciclo doble	31
3.2	Máquina de 6 cilindros opuestos y ciclo doble	32
4	Máquinas con cilindros en V	34
4.1	Mecanismo simple en V	34
4.1.1	Equilibrado de las fuerzas primarias	36
4.1.2	Máquina simple en V a 90°	38
4.2	Máquinas en V a 90° con varios cilindros	39
4.3	Condiciones de equilibrado.....	40
4.4	Máquina con 8 cilindros en V a 90°.....	40
4.5	Máquina con 6 cilindros en V a 90°.....	41

5	Procedimientos Matlab.....	43
5.1	Procedimiento DesequilibrioEnLinea.m.....	43
5.2	Procedimiento DesequilibrioBoxer.m	44

1 DESEQUILIBRIO EN UNA MÁQUINA ALTERNATIVA SIMPLE

Se considera una máquina alternativa simple, formada por un mecanismo de biela-manivela (Figura 1), que se utiliza en un motor o en un compresor para accionar un pistón deslizando, sobre el que actúa la presión de unos gases. Se estudian los esfuerzos producidos por las fuerzas de inercia debidas al movimiento de la máquina, en particular los esfuerzos no equilibrados, que son transmitidos a la sustentación de la máquina.

Se empleará la siguiente notación:

m_m : masa de la manivela OA.

J_m : momento de inercia de la manivela en su centro de gravedad C, situado a una distancia c del punto de giro O.

m_b : masa de la biela AB.

J_b : momento de inercia de la biela en su centro de gravedad G, situado a una distancia a del punto A de unión de la biela con la manivela (cabeza de la biela) y $b = L - a$ del pistón (pie de biela).

m_p : masa del pistón.

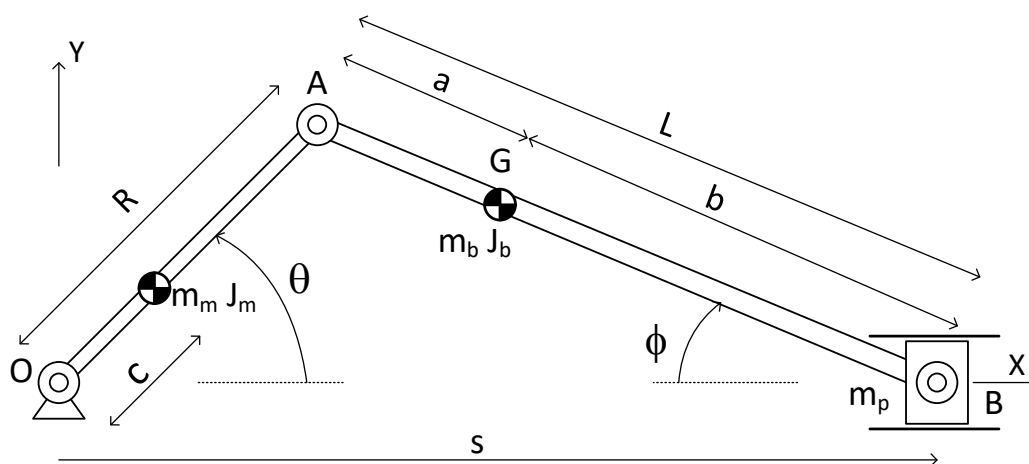


Figura 1 Máquina alternativa simple

1.1 CINEMÁTICA

Interesa poner todas las magnitudes en función del ángulo de la manivela θ , que es normalmente la magnitud de entrada en máquinas alternativas.

La posición del pistón respecto del punto fijo es:

$$s = R \cos \theta + L \cos \phi$$

La relación entre los ángulos de la manivela θ y la biela ϕ se establece aplicando el teorema del seno al triángulo OAB:

$$R \sin \theta = L \sin \phi$$

$$\sin \phi = \lambda \sin \theta$$

siendo λ la relación entre el radio de la manivela y la longitud de la biela:

$$\lambda = \frac{R}{L}$$

En las máquinas habituales (motores, compresores) este parámetro varía entre 0.1 y 0.4.

- La velocidad angular de la biela $\dot{\phi}$ respecto a la de la manivela $\dot{\theta}$ se obtiene diferenciando la relación entre ambos ángulos:

$$\cos \phi \dot{\phi} = \lambda \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{\phi} = \lambda \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \dot{\theta}$$

Se define la función:

$$f = \lambda \frac{\cos \theta}{\cos \phi}$$

Con lo que se tiene: $\dot{\phi} = f \dot{\theta}$

- La velocidad del pistón es:

$$\dot{s} = -R \sin \theta \dot{\theta} - L \sin \phi \dot{\phi}$$

Sustituyendo $\dot{\phi} = f \dot{\theta}$:

$$\dot{s} = -(R \sin \theta + L f \sin \phi) \dot{\theta}$$

- La aceleración del pistón es:

$$\ddot{s} = -(R \sin \theta + L f \sin \phi) \ddot{\theta} - \left(R \cos \theta + L \frac{df}{d\theta} \sin \phi + L f \frac{d}{d\theta} (\sin \phi) \right) \dot{\theta}^2$$

La $\frac{d}{d\theta} (\sin \phi)$ se obtiene de la expresión de $\sin \phi$:

$$\frac{d}{d\theta} (\sin \phi) = \frac{d}{d\theta} (\lambda \sin \theta) = \lambda \cos \theta$$

La $\frac{df}{d\theta}$ es:

$$\frac{df}{d\theta} = \lambda \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \phi} \right) = -\lambda \frac{\sin \theta}{\cos \phi} - \lambda \frac{\cos \theta}{\cos^2 \phi} \frac{d}{d\theta} (\cos \phi)$$

Pero:

$$\frac{d}{d\theta} (\cos \phi) = \frac{d}{d\theta} (1 - \sin^2 \phi)^{1/2} = -(1 - \sin^2 \phi)^{-1/2} \sin \phi \frac{d}{d\theta} (\sin \phi)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\cos \phi) = -\frac{1}{\cos \phi} \sin \phi \lambda \cos \theta$$

Luego $\frac{df}{d\theta}$ queda:

$$\frac{df}{d\theta} = -\lambda \frac{\sin \theta}{\cos \phi} + \lambda^2 \frac{\cos \theta}{\cos^2 \phi} \frac{1}{\cos \phi} \sin \phi \cos \theta$$

$$\frac{df}{d\theta} = -\lambda \frac{\sin \theta}{\cos \phi} + \lambda^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \phi} \tan \phi$$

$$\frac{df}{d\theta} = -\lambda \frac{\sin \theta}{\cos \phi} + f^2 \tan \phi$$

- La aceleración angular de la biela se obtiene derivando $\dot{\phi} = f \dot{\theta}$:

$$\ddot{\phi} = f \ddot{\theta} + \frac{df}{d\theta} \dot{\theta}^2$$

1.2 CINEMÁTICA APROXIMADA

En máquinas alternativas, el movimiento es periódico, por lo que se puede expresar mediante un desarrollo en serie de Fourier, en función del ángulo de entrada θ . Para ello es necesario aproximar el ángulo ϕ como un desarrollo en serie en función de θ .

Para el $\sin \phi$, la relación entre ambos es exacta:

$$\sin \phi = \lambda \sin \theta$$

Para el $\cos \phi$ es necesario apoyarse en el $\sin \phi$, el cual se relaciona con el $\sin \theta$ mediante la expresión anterior:

$$\cos \phi = (1 - \sin^2 \phi)^{1/2} = (1 - \lambda^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$$

Aplicando el teorema binomial generalizado, se efectúa un desarrollo de la potencia r de un binomio donde r es real, en la forma:

$$(x + y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k$$

donde los coeficientes binomiales emplean el factorial descendente con un número real:

$$\binom{r}{k} = \frac{(r)(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

Para el caso de $(1+x)^{1/2}$, con $r = 1/2$ se tiene:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Por lo tanto, se puede poner:

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \theta - \frac{1}{16} \lambda^6 \sin^6 \theta + \dots$$

A continuación, para poner de manifiesto los armónicos del movimiento, es necesario sustituir las potencias de $\sin \theta$ en función de los múltiplos de θ , para ello se emplean relaciones trigonométricas adecuadas, como:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8}(3 + \cos 4\theta - \cos 2\theta)$$

$$\sin^6 \theta = \frac{1}{32}(10 - \cos 6\theta + 6 \cos 4\theta - 15 \cos 2\theta)$$

Con ello se obtiene la expresión aproximada del ángulo de la biela ϕ :

$$\cos \phi = \lambda \left(A_0 + \frac{1}{4} A_2 \cos 2\theta - \frac{1}{16} A_4 \cos 4\theta + \frac{1}{36} A_6 \cos 6\theta + \dots \right)$$

donde los coeficientes A_i son:

$$A_0 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{4} \lambda - \frac{3}{64} \lambda^3 - \frac{5}{256} \lambda^5 + \dots$$

$$A_2 = \lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{15 \lambda^5}{128} + \dots \quad A_4 = \frac{\lambda^3}{4} + \frac{3 \lambda^5}{16} + \dots \quad A_6 = \frac{9 \lambda^5}{128} + \dots$$

Para valores de λ habituales, pueden aproximarse los desarrollos en serie de A_i con los primeros términos. Para simplificar desarrollos posteriores, se supondrá $A_1 = 1$.

- Empleando la aproximación de $\cos \phi$, la posición del pistón queda, en su forma aproximada:

$$s = R \cos \theta + \frac{R}{\lambda} \cos \phi$$

$$s = R \left(A_0 + \cos \theta + \frac{1}{4} A_2 \cos 2\theta - \frac{1}{16} A_4 \cos 4\theta + \frac{1}{36} A_6 \cos 6\theta + \dots \right)$$

- Derivando, se obtiene la velocidad del pistón aproximada:

$$\dot{s} = R \left(-\sin \theta - \frac{1}{2} A_2 \sin 2\theta + \frac{1}{4} A_4 \sin 4\theta - \frac{1}{6} A_6 \sin 6\theta + \dots \right) \dot{\theta}$$

- La aceleración del pistón es:

$$\ddot{s} = R \left(-\sin \theta - \frac{1}{2} A_2 \sin 2\theta + \frac{1}{4} A_4 \sin 4\theta - \frac{1}{6} A_6 \sin 6\theta + \dots \right) \ddot{\theta} +$$

$$+ R \left(-\cos \theta - A_2 \cos 2\theta + A_4 \cos 4\theta - A_6 \cos 6\theta + \dots \right) \dot{\theta}^2$$

- Para hallar la velocidad angular de la biela, lo más sencillo es derivar respecto del tiempo la expresión aproximada inicial del $\cos \phi$.

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \theta - \frac{1}{16} \lambda^6 \sin^6 \theta + \dots$$

$$-\sin \phi \dot{\phi} = \left(-\lambda^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \lambda^4 \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{6}{16} \lambda^6 \sin^5 \theta \cos \theta + \dots \right) \dot{\theta}$$

En el término de la izquierda se puede sustituir $\sin \phi = \lambda \sin \theta$, y simplificar con el de la derecha, con lo que se obtiene:

$$\dot{\phi} = \left(\lambda \cos \theta + \frac{1}{2} \lambda^3 \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{6}{16} \lambda^5 \sin^4 \theta \cos \theta + \dots \right) \dot{\theta}$$

A continuación, empleando las expresiones trigonométricas para las potencias de $\sin \theta$ y de $\cos \theta$ ya vistas, y agrupando términos se puede poner:

$$\dot{\phi} = \lambda \left(B_1 \cos \theta - \frac{1}{3} B_3 \cos 3\theta + \frac{1}{5} B_5 \cos 5\theta + \dots \right) \dot{\theta}$$

Siendo:

$$B_1 = 1 + \frac{\lambda^2}{8} + \frac{3\lambda^4}{64} + \dots \quad B_3 = \frac{3\lambda^2}{8} + \frac{27\lambda^4}{128} + \dots \quad B_5 = \frac{15\lambda^4}{128} + \dots$$

Al igual que para los coeficientes A_i , para los valores habituales de λ , puede aproximarse el desarrollo en serie de B_i con los primeros términos.

- La aceleración angular de la biela se obtiene derivando la expresión aproximada de su velocidad:

$$\ddot{\phi} = \lambda \left(B_1 \cos \theta - \frac{1}{3} B_3 \cos 3\theta + \frac{1}{5} B_5 \cos 5\theta + \dots \right) \ddot{\theta} - \lambda (B_1 \sin \theta - B_3 \sin 3\theta + B_5 \sin 5\theta + \dots) \dot{\theta}^2$$

1.3 SUSTITUCIÓN DE LA BIELA POR MASAS EQUIVALENTES

Se pueden sustituir las propiedades de la biela en su centro de gravedad por (Figura 2):

- Dos masas situadas en sus extremos A y B: m_A m_B
- Un momento de inercia sin masa: J_{b0}

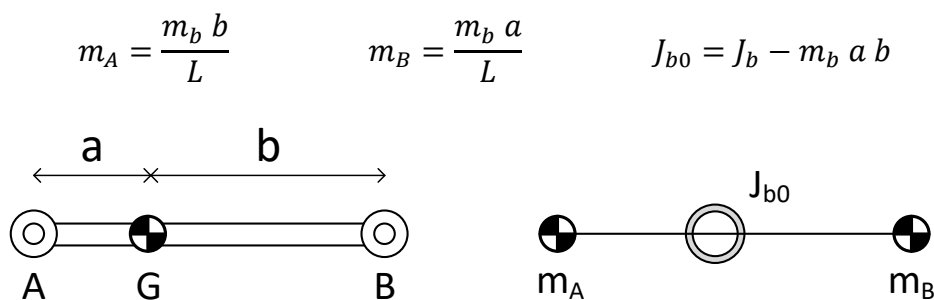


Figura 2 Masas e inercia equivalentes a la biela

Esta sustitución es exacta. Se puede comprobar que se conserva la masa de la biela:

$$m_{sust} = m_A + m_B = \frac{m_b b}{L} + \frac{m_b a}{L} = m_b$$

También se conserva la posición del centro de gravedad:

$$m_A a = \frac{m_b b a}{L} = m_B b$$

Asimismo, se conserva el momento de inercia respecto del centro de gravedad:

$$J_{sust} = m_A a^2 + m_B b^2 + J_{b0} = m_b \left(\frac{ba^2}{L} + \frac{ab^2}{L} \right) + J_b - m_b a b = J_b$$

Para comprobar que se conserva la energía cinética, se hace uso de la relación entre las velocidades de tres puntos A, G, B alineados sobre una barra, a distancias AG=a y GB=b entre ellos, con AB=L si la barra tiene velocidad angular $\dot{\phi}$:

$$v_G^2 = \frac{b}{L} v_A^2 + \frac{a}{L} v_B^2 - a b \dot{\phi}^2$$

Demostración. Al estar A, G y B alineados, la relación entre las velocidades de A y G y de B y G se puede poner:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{GA}} = \mathbf{v}_G - a \dot{\phi} \mathbf{e}_{\perp AB}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{GB}} = \mathbf{v}_G + b \dot{\phi} \mathbf{e}_{\perp AB}$$

donde $\mathbf{e}_{\perp AB}$ es un vector unitario en dirección perpendicular a la recta AGB. Elevando al cuadrado ambas ecuaciones, multiplicando la primera por b y la segunda por a , y sumando se obtiene:

$$\begin{aligned} b v_A^2 + a v_B^2 &= b (v_G^2 - 2a \dot{\phi} \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{e}_{\perp AB} + a^2 \dot{\phi}^2) + a (v_G^2 + 2b \dot{\phi} \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{e}_{\perp AB} + b^2 \dot{\phi}^2) \\ b v_A^2 + a v_B^2 &= b v_G^2 + ba^2 \dot{\phi}^2 + a v_G^2 + ab^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Dividiendo por $a + b = L$ y simplificando se obtiene la relación buscada.

La energía cinética del sistema equivalente, formado por las masas m_A , m_B y la inercia rotativa J_{b0} , es:

$$T_{sust} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} J_{b0} \dot{\phi}^2$$

Sustituyendo los distintos valores:

$$T_{sust} = \frac{1}{2} m_b \frac{b}{L} v_A^2 + \frac{1}{2} m_b \frac{a}{L} v_B^2 + \frac{1}{2} (J_b - m_b a b) \dot{\phi}^2$$

$$T_{sust} = \frac{1}{2} m_b \left(\frac{b}{L} v_A^2 + \frac{a}{L} v_B^2 - a b \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2} J_b \dot{\phi}^2$$

En el primer término se identifica la velocidad del centro de gravedad v_G , con lo que obtiene que la energía cinética del sistema equivalente es igual a la de la biela T_b .

$$T_{sust} = \frac{1}{2} m_b v_G^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\phi}^2 = T_b$$

1.4 SISTEMA DINÁMICO EQUIVALENTE

La máquina alternativa simple se puede sustituir por su sistema dinámico equivalente, formado por dos masas rotativas m_m, m_A , una masa en traslación ($m_p + m_B$), la inercia al giro de la manivela J_m y una inercia rotativa sin masa J_{b0} (Figura 3).

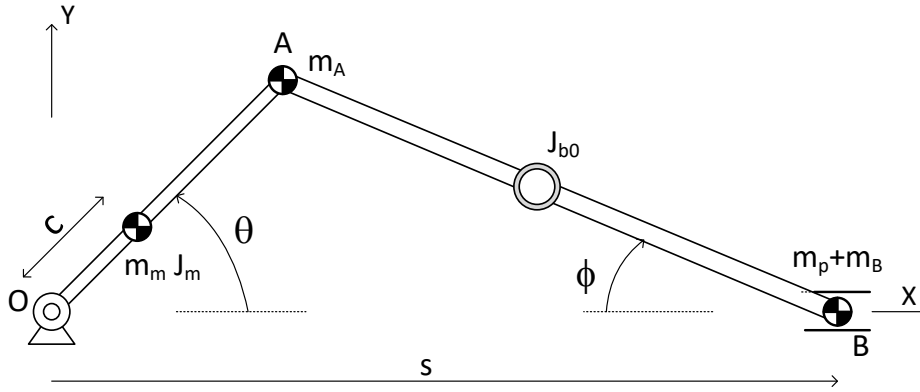


Figura 3 Sistema dinámico equivalente a la máquina alternativa simple

1.5 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINÁMICO

Los esfuerzos exteriores actuantes sobre el mecanismo manivela + biela + pistón son: fuerza debida a los gases F_g , reacciones en el apoyo de la manivela X_O, Y_O , reacción lateral en el pistón Y_B y par motor sobre la manivela T_m . El conjunto de los esfuerzos exteriores y de inercia sobre el mecanismo se muestra en la Figura 4.

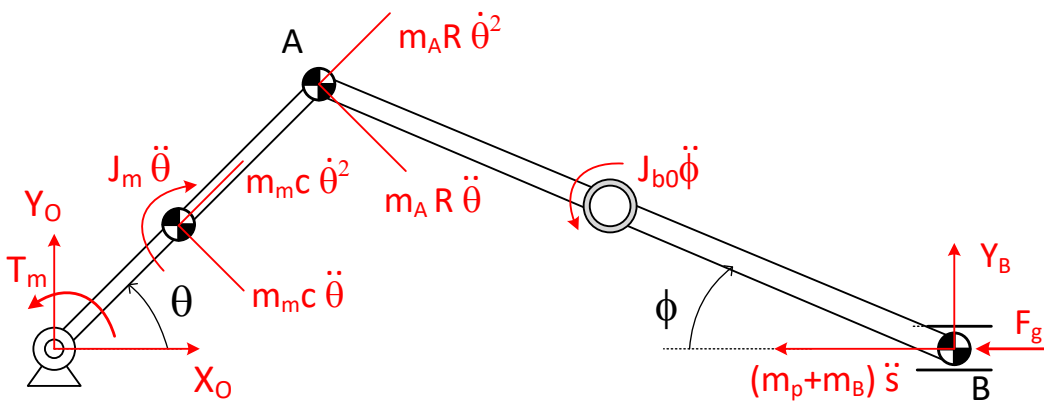


Figura 4 Fuerzas exteriores y de inercia sobre la máquina alternativa simple

Las ecuaciones de equilibrio dinámico del mecanismo biela + manivela + pistón son:

$$\Sigma F_X = 0$$

$$X_O + (m_m c + m_A R) \dot{\theta}^2 \cos \theta + (m_m c + m_A R) \ddot{\theta} \sin \theta - (m_p + m_B) \ddot{s} - F_g = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$Y_O + (m_m c + m_A R) \dot{\theta}^2 \sin \theta - (m_m c + m_A R) \ddot{\theta} \cos \theta + Y_B = 0$$

$$\Sigma M_O = 0$$

$$Y_B s - (m_m c^2 + m_A R^2 + J_m) \ddot{\theta} + J_{b0} \ddot{\phi} + T_m = 0$$

De ellas se pueden obtener X_O , Y_O , Y_B en función del par motor T_m , de la fuerza en el cilindro F_g , y de las magnitudes cinemáticas $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$. Es decir que, una vez conocido el movimiento, las tres ecuaciones anteriores resuelven el problema de la dinámica inversa, proporcionando las reacciones en los apoyos del mecanismo.

1.6 FUERZAS SOBRE LA SUSTENTACIÓN

El mecanismo de biela-manivela está soportado por un bloque sobre el que se apoya la manivela y desliza el pistón. El bloque a su vez está soportado por algún tipo de sustentación, como una bancada, chasis de vehículo, etc. (Figura 5).

Las fuerzas que ejerce el mecanismo sobre el bloque que lo soporta son (en azul en la Figura 5): reacciones en el apoyo de la manivela X_O , Y_O , fuerza debida a los gases en la cámara del bloque F_g y reacción lateral en el pistón Y_B .

Los esfuerzos transmitidos entre el bloque y su sustentación son una fuerza con componentes F_{DX} , F_{DY} y un momento M_D (Figura 5, en rojo). Estos esfuerzos se calculan referidos al punto O, pero en la realidad se producirán en los distintos puntos de sustentación del bloque. Es decir que F_{DX} , F_{DY} , M_D son la resultante neta de todas las fuerzas de interacción entre el bloque y su sustentación, trasladadas a O.

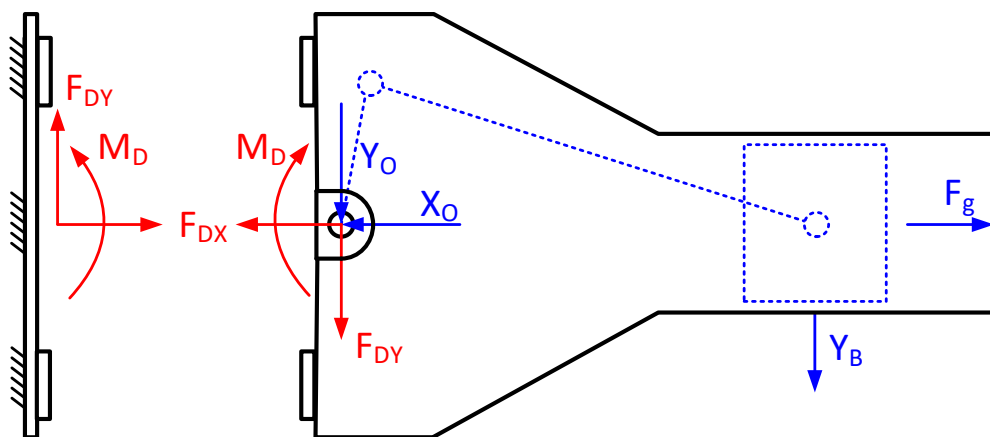


Figura 5 Fuerzas aplicadas sobre el bloque de la máquina y su sustentación

La Figura 6 muestra el conjunto del mecanismo biela-manivela y el bloque que lo contiene, con todas las acciones que actúan sobre él. Las fuerzas F_g , Y_B , X_O , Y_O no aparecen por ser fuerzas interiores al sistema conjunto mecanismo + bloque.

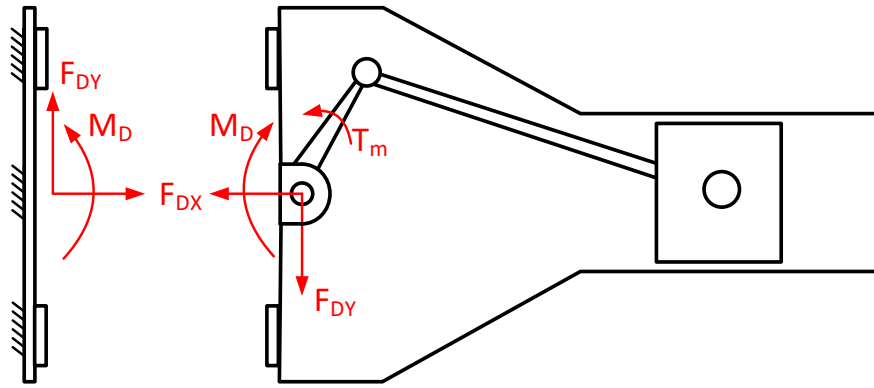


Figura 6 Conjunto de la máquina alternativa, con su bloque y sustentación

Los esfuerzos efectuados sobre el bloque por su sustentación se obtienen del equilibrio del bloque (Figura 5):

$$F_{DX} = F_g - X_O$$

$$F_{DY} = -Y_B - Y_O$$

$$M_D = -Y_B s$$

Introduciendo los valores de X_O, Y_O, Y_B se obtiene:

$$F_{DX} = m_{rot} R (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) - m_{tra} \ddot{s}$$

$$F_{DY} = m_{rot} R (\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta)$$

$$M_D = -(m_A R^2 + m_m c^2 + J_m) \ddot{\theta} + J_{b0} \ddot{\phi} + T_m$$

siendo:

$$m_{rot} = m_m \frac{c}{R} + m_A = m_m \frac{c}{R} + m_b \frac{b}{L}$$

$$m_{tra} = m_p + m_B = m_p + m_b \frac{a}{L}$$

Analizando los valores de las fuerzas transmitidas a la sustentación por el bloque, F_{DX}, F_{DY} , se observa que se corresponden con las fuerzas de inercia debidas a (Figura 7):

- Una masa m_{rot} situada a una distancia R girando con el ángulo θ .
- Una masa m_{tra} en traslación con la distancia s .

Así pues, m_{rot} representa la masa equivalente del mecanismo en la rotación θ , y m_{tra} la masa equivalente del mecanismo en la traslación s .

En las fuerzas transmitidas a la sustentación por el bloque no aparece la fuerza debida a la presión de los gases, por ser una fuerza interior al sistema biela-manivela-bloque.

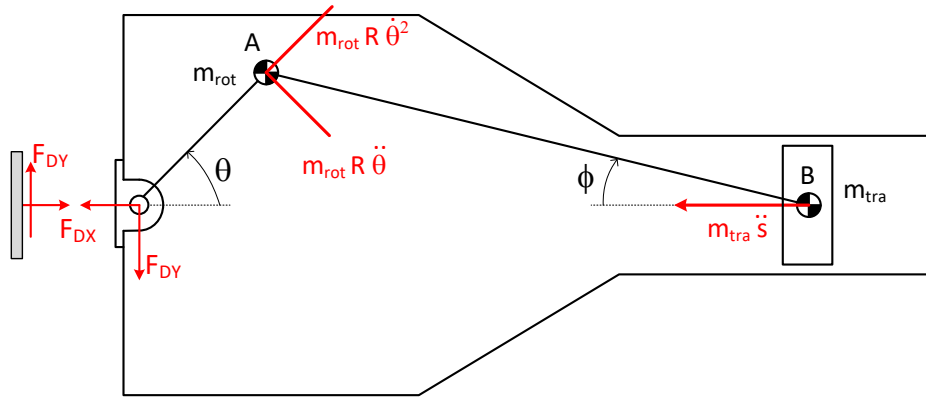


Figura 7 Fuerzas transmitidas a la sustentación debidas a las fuerzas de inercia

El par transmitido a la sustentación M_D tiene términos debidos a las distintas inercias al giro, así como el término T_m que es el par aplicado desde el exterior sobre la manivela, y que se transmite hasta la sustentación del bloque de la máquina alternativa (Figura 8).

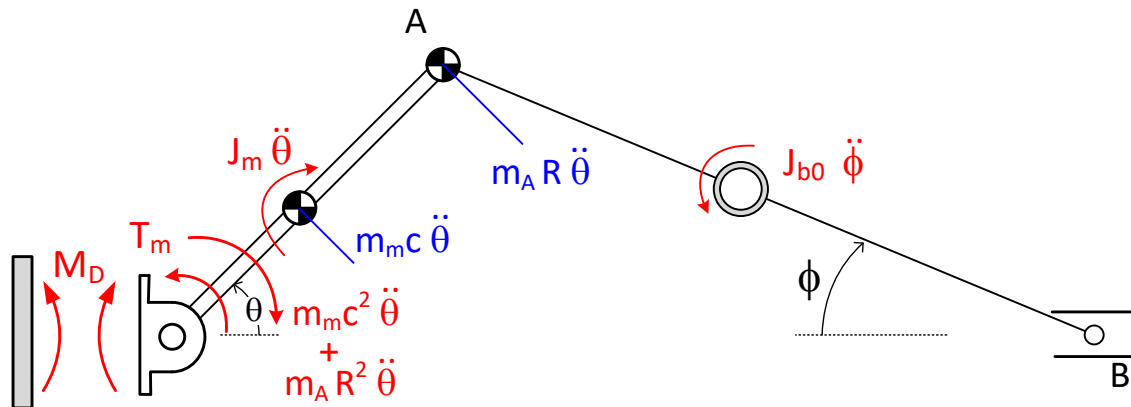


Figura 8 Par transmitido a la sustentación M_D debido a las fuerzas de inercia

Introduciendo los desarrollos en serie de \ddot{s} y $\ddot{\phi}$ se obtienen los distintos armónicos existentes en las fuerzas transmitidas a la sustentación:

$$\begin{aligned}
 F_{DX} &= m_{rot} R (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \\
 &\quad + m_{tra} R \dot{\theta}^2 (\cos \theta + A_2 \cos 2\theta - A_4 \cos 4\theta + A_6 \cos 6\theta - \dots) \\
 &\quad + m_{tra} R \ddot{\theta} \left(\sin \theta + \frac{A_2}{2} \sin 2\theta - \frac{A_4}{4} \sin 4\theta + \frac{A_6}{6} \sin 6\theta - \dots \right) \\
 F_{DY} &= m_{rot} R (\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta) \\
 M_D &= -J_{b0} \lambda \dot{\theta}^2 (B_1 \sin \theta - B_3 \sin 3\theta + B_5 \sin 5\theta - \dots) \\
 &\quad + J_{b0} \lambda \ddot{\theta} \left(B_1 \cos \theta - \frac{B_3}{3} \cos 3\theta + \frac{B_5}{5} \cos 5\theta - \dots \right) \\
 &\quad - (m_A R^2 + m_m c^2 + J_m) \ddot{\theta} + T_m
 \end{aligned}$$

Como ya se ha indicado, para los valores habituales de λ las reacciones F_{DX} , F_{DY} , M_D pueden aproximarse mediante sus primeros términos, normalmente dos.

1.7 EQUILIBRADO DE LA FUERZA TRANSVERSAL F_{DY}

La fuerza F_{DY} transversal al movimiento alternativo de deslizamiento, que se transmite por la máquina a su sustentación, puede cancelarse completamente (tanto en régimen estacionario como no), sin más que hacer $m_{rot} = 0$. Esto se consigue fácilmente pues:

$$m_{rot} = m_m \frac{c}{R} + m_b \frac{b}{L} = 0$$

$$m_m c = -m_b \frac{b R}{L}$$

El término de la derecha es fijo para una biela dada, por lo que basta con elegir el producto $m_m c$ igual a dicho valor. Nótese que se obtiene un valor negativo para c , lo que corresponde a situar el centro de gravedad de la manivela en la zona del contrapeso (Figura 9). Esta es la solución que se adopta siempre, por su sencillez.

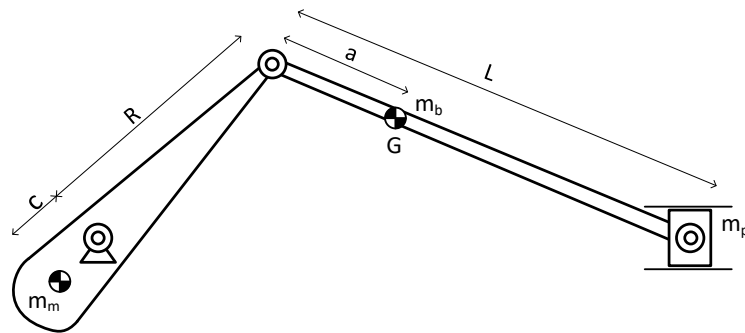


Figura 9 Equilibrado de la fuerza transversal mediante contrapeso en la manivela

1.8 EQUILIBRADO DEL PAR DE DESEQUILIBRIO M_D

El par de desequilibrio, transmitido por la máquina a su sustentación (Figura 8), es:

$$M_D = -(m_A R^2 + m_m c^2 + J_m) \ddot{\theta} + J_{b0} \ddot{\phi} + T_m$$

Para anular los términos debidos a la inercia deben ser nulos a la vez:

$$J_{b0} = 0 \quad \rightarrow \quad J_b - m_b a (L - a) = 0$$

$$m_A R^2 + m_m c^2 + J_m = 0$$

Estas condiciones son incompatibles.

- La primera requiere que $L - a > 0$, pues J_b, m_b, a son > 0 .
- La segunda requiere que $m_A < 0$ pues todos los demás sumandos son > 0 . Pero como $m_A = \frac{m_b (L-a)}{a}$, debe ser $L - a < 0$, es decir $L < a$.

Por lo tanto, en el caso general con un movimiento no estacionario, no se puede cancelar el par de desequilibrio. Sin embargo, para el caso estacionario $\ddot{\theta} = 0$, basta con cumplir la primera condición $J_{b0} = 0$.

$$J_{b0} = J_b - m_b a b = 0$$

Esta condición no es difícil de cumplir al diseñar la biela, adoptando unos valores adecuados de las magnitudes involucradas. Para una biela ya diseñada, se pueden añadir masas m_{a1} , m_{b1} a distancias a_1 , b_1 de los extremos hasta que se cumpla la relación anterior (Figura 10). Estos valores deben cumplir:

$$a_1(L + a_1)m_{a1} + b_1(L + b_1)m_{b1} = -J_{b0}^{ini}$$

siendo J_{b0}^{ini} el valor de J_{b0} antes de añadir las masas. Este método aumenta el valor de la masa de la biela en un 10% a 15%.

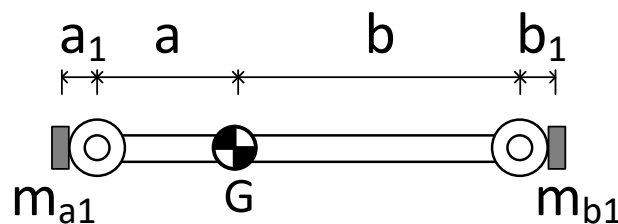


Figura 10 Equilibrado de una biela por adición de masas

Nótese que, aunque se efectúe un diseño con $J_{b0} = 0$, en la expresión del par de reacción M_D siempre está presente el par motor aplicado desde el exterior sobre la manivela T_m .

1.9 FUERZA DE DESEQUILIBRIO LONGITUDINAL F_{DX}

La fuerza de reacción longitudinal F_{DX} que se transmite por la máquina a su sustentación se anula, para cualquier régimen, si se cumple que $m_{rot} = 0$ y $m_{tra} = 0$.

La condición $m_{rot} = 0$ ya se ha tenido en cuenta para eliminar la fuerza transversal F_{DY} .

La condición $m_{tra} = 0$ es:

$$m_{tra} = m_p + m_b \frac{a}{L} = 0$$

Como m_b y m_p son positivos, para cumplir con esta condición se debería hacer $a < 0$, es decir desplazar el centro de gravedad de la biela más allá del punto A. Esto se podría hacer a base de añadir un contrapeso en prolongación de la biela, aunque esto no se hace nunca, por consideraciones de tipo práctico. Por lo tanto, esta fuerza F_{DX} en la dirección del eje de deslizamiento de la máquina queda siempre presente como fuerza de desequilibrio debida al movimiento alternativo de la máquina, y se transmite a la sustentación.

Suponiendo que la máquina se ha equilibrado para fuerzas transversales ($F_{DY} = 0$), lo cual implica $m_{rot} = 0$, y en régimen estacionario $\ddot{\theta} = 0$, el valor de la fuerza de desequilibrio longitudinal que actúa sobre la sustentación de la máquina (Figura 11) es:

$$F_{DX} = m_{tra} R \omega^2 (\cos \theta + A_2 \cos 2\theta - A_4 \cos 4\theta + A_6 \cos 6\theta - \dots)$$

siendo $\omega = \dot{\theta} = C^{te}$. Considerando sólo los dos primeros armónicos y con A_2 aproximado sólo con su primer sumando, se obtiene la expresión habitual, simplificada, de la fuerza de desequilibrio transmitida a la sustentación, que se emplea en muchas ocasiones:

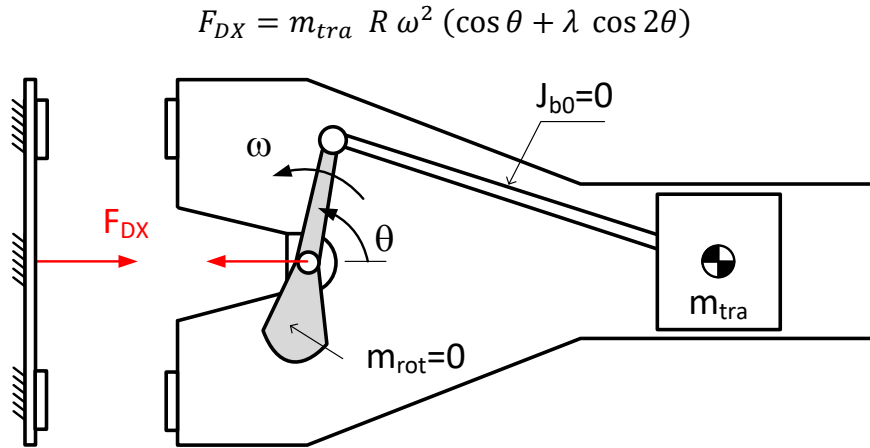


Figura 11 Fuerza de desequilibrio longitudinal F_{DX} debida a la masa en traslación m_{tra}

2 MÁQUINAS CON CILINDROS EN LÍNEA

Se considera una máquina con varios cilindros en línea, todos iguales, separados una distancia fija d . Suponiendo que cada mecanismo biela-manivela está equilibrado de tal forma que $m_{rot} = 0$ y $J_{b0} = 0$, sólo se produce una fuerza de desequilibrio longitudinal F_{DX} , en la dirección del eje de deslizamiento de los pistones, que actúa sobre la sustentación de la máquina (Figura 12).

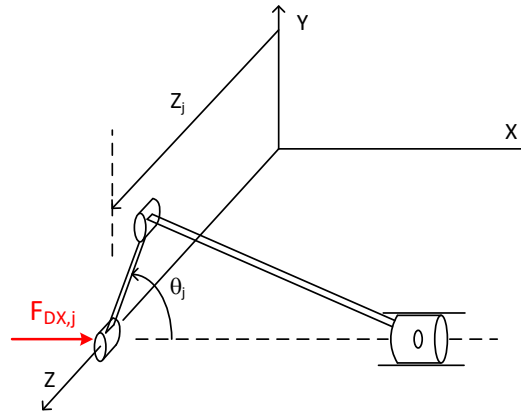


Figura 12 Cilindro tipo de una máquina de varios cilindros en línea

En régimen estacionario $\omega = \dot{\theta} = C^{te}$ el valor de la fuerza de desequilibrio debida al pistón j (Figura 13) es la ya deducida en el apartado 1.9:

$$F_{DX,j} = m_{tra} R \omega^2 (\cos \theta_j + A_2 \cos 2\theta_j - A_4 \cos 4\theta_j + A_6 \cos 6\theta_j - \dots)$$

Definimos F_{A1} como la fuerza de desequilibrio del primer armónico:

$$F_{A1} = m_{tra} R \omega^2$$

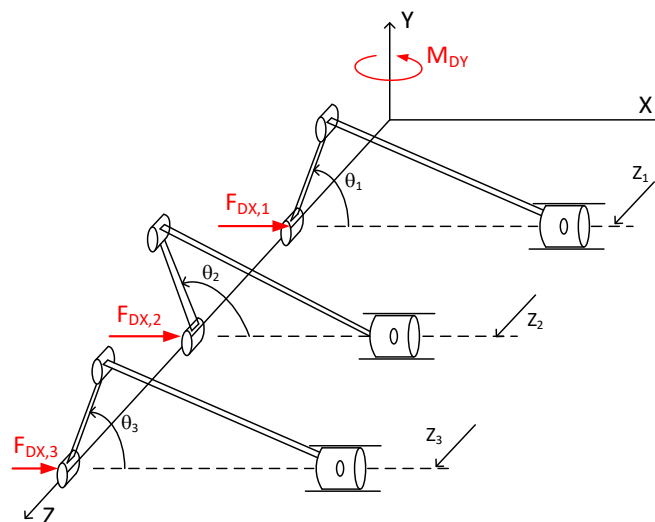


Figura 13 Fuerzas de desequilibrio actuantes sobre la sustentación de una máquina de varios cilindros en línea

Si la máquina tiene n_{cil} cilindros en línea, la fuerza total de desequilibrio producida por todos los cilindros de la máquina es:

$$F_{DX} = \sum_{j=1, n_{cil}} F_{DX,j}$$

$$F_{DX} = F_{A1} (\Sigma \cos \theta_j + A_2 \Sigma \cos 2\theta_j - A_4 \Sigma \cos 4\theta_j + A_6 \Sigma \cos 6\theta_j - \dots)$$

Las fuerzas $F_{DX,j}$ producen un momento respecto al eje Y de valor:

$$M_{DY} = \sum_{j=1, n_{cil}} z_j F_{DX,j}$$

$$M_{DY} = F_{A1} (\Sigma z_j \cos \theta_j + A_2 \Sigma z_j \cos 2\theta_j - A_4 \Sigma z_j \cos 4\theta_j + A_6 \Sigma z_j \cos 6\theta_j - \dots)$$

Las condiciones para el equilibrado total de la máquina son:

$$\text{Equilibrio de fuerzas de orden } n: \Sigma \cos n\theta_j = 0 \quad n = 1, 2, 4, 6, \dots$$

$$\text{Equilibrio de momentos de orden } n: \Sigma z_j \cos n\theta_j = 0 \quad n = 1, 2, 4, 6, \dots$$

Las posiciones angulares de los distintos pistones se pueden referir a la posición del primero:

$$\theta_j = \theta_1 + \alpha_j \quad j = 1, n_{cil}$$

siendo α_j el ángulo de giro del cilindro j medido con respecto al del cilindro 1, es decir el ángulo de la manivela del cilindro j respecto a la manivela del cilindro 1, adoptando $\alpha_1 = 0$.

Las condiciones de equilibrio se pueden poner como:

$$\Sigma \cos n\theta_j = \cos n\theta_1 \Sigma \cos n\alpha_j - \sin n\theta_1 \Sigma \sin n\alpha_j = 0$$

$$\Sigma z_j \cos n\theta_j = \cos n\theta_1 \Sigma z_j \cos n\alpha_j - \sin n\theta_1 \Sigma z_j \sin n\alpha_j = 0$$

Dado que las funciones $\cos n\theta_1$ y $\sin \theta_1$ pueden tener cualquier valor entre 0 y 1 al variar θ_1 , las condiciones de equilibrado quedan:

- Condiciones de equilibrado de fuerzas de orden n :

$$\sum_j \cos n\alpha_j = 0 \quad \sum_j \sin n\alpha_j = 0 \quad n = 1, 2, 4, 6, \dots$$

- Condiciones de equilibrado de momentos de orden n :

$$\sum_j z_j \cos n\alpha_j = 0 \quad \sum_j z_j \sin n\alpha_j = 0 \quad n = 1, 2, 4, 6, \dots$$

2.1 FUERZAS DE DESEQUILIBRIO

Se definen los coeficientes:

$$C_n = \sum_j \cos n\alpha_j \quad S_n = \sum_j \sin n\alpha_j$$

$$D_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2} \quad \tan \beta_n = \frac{S_n}{C_n}$$

Con ellos, los términos $\sum \cos n\theta_j$ que aparecen en la expresión de la fuerza de desequilibrio horizontal se pueden poner como:

$$\sum_j \cos n\theta_j = \sum_j \cos n(\theta_1 + \alpha_j) = C_n \cos n\theta_1 - S_n \sin n\theta_1 = D_n \cos(n\theta_1 + \beta_n)$$

Empleando estos coeficientes, la fuerza de desequilibrio de toda la máquina queda finalmente:

$$F_{DX} = F_{A1} D_1 \cos(\theta_1 + \beta_1) + F_{A1} A_2 D_2 \cos(2\theta_1 + \beta_2) \\ - F_{A1} A_4 D_4 \cos(4\theta_1 + \beta_4) + F_{A1} A_6 D_6 \cos(6\theta_1 + \beta_6) + \dots$$

Esta expresión indica que el armónico n de la fuerza de desequilibrio total F_{DX} es la proyección sobre el eje X de deslizamiento de una fuerza rotativa de módulo $F_{A1} D_n A_n$, (empleando $A_1 = 1$), que gira a la velocidad $n\omega$ y tiene un desfase de valor β_n (F_{DXn} en la Figura 14). La proyección es en dirección positiva o negativa según el armónico.

Por lo tanto, la condición de equilibrado de fuerzas del armónico n queda:

$$D_n = 0 \quad \rightarrow \quad C_n = 0 \quad S_n = 0$$

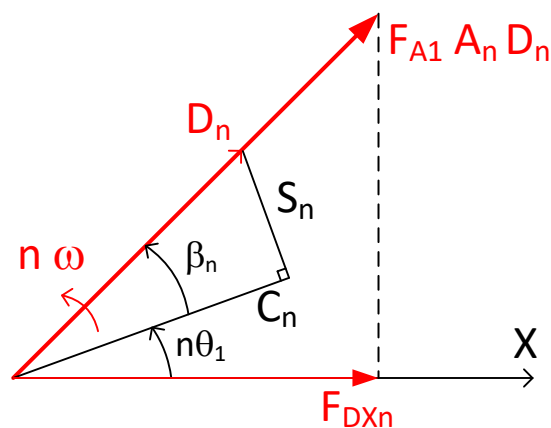


Figura 14 Fuerza de desequilibrio debida al armónico n en una máquina con varios cilindros

2.2 MOMENTO DE DESEQUILIBRIO

Se definen los coeficientes:

$$C'_n = \sum_j z_j \cos n\alpha_j \quad S'_n = \sum_j z_j \sin n\alpha_j$$

$$D'_n = \sqrt{C_n'^2 + S_n'^2} \quad \tan \beta'_n = \frac{S'_n}{C'_n}$$

Con ellos, los términos $\sum z_j \cos n\theta_j$ que aparecen en la expresión del momento de desequilibrio se pueden poner como:

$$\sum_j z_j \cos n\theta_j = C'_n \cos n\theta_1 - S'_n \sin n\theta_1 = D'_n \cos(n\theta_1 + \beta'_n)$$

Empleando estos coeficientes el momento total de desequilibrio queda:

$$M_{DY} = F_{A1} D'_1 \cos(\theta_1 + \beta'_1) + F_{A1} A_2 D'_2 \cos(2\theta_1 + \beta'_2) \\ - F_{A1} A_4 D'_4 \cos(4\theta_1 + \beta'_4) + F_{A1} A_6 D'_6 \cos(6\theta_1 + \beta'_6) + \dots$$

El módulo de cada armónico del momento de desequilibrio total tiene una expresión similar al módulo de la fuerza de desequilibrio correspondiente (con $A_1 = 1$):

$$|M_{DYn}| = F_{A1} A_n D'_n \quad n = 1, 2, 4, 6, \dots$$

Por lo tanto, la condición de equilibrado de momentos queda:

$$D'_n = 0 \quad \rightarrow \quad C'_n = 0 \quad S'_n = 0$$

2.3 MÁQUINA DE 2 CILINDROS Y CICLO SIMPLE

Esta máquina corresponde a los motores de dos tiempos y a los compresores de simple efecto. Las dos muñequillas del cigüeñal se sitúan a 180° (Figura 15). Tomando el origen de coordenadas Z en el punto medio entre los cilindros, que están separados una distancia d , se tiene que:

$$\alpha_1 = 0 \quad z_1 = -\frac{d}{2}$$

$$\alpha_2 = \pi \quad z_2 = +\frac{d}{2}$$

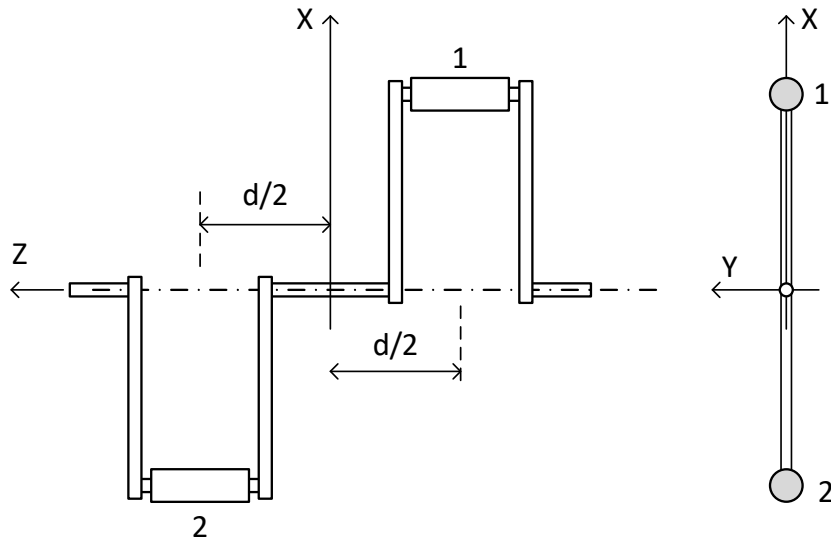


Figura 15 Máquina de dos cilindros y ciclo simple

- Fuerza total de desequilibrio debida al armónico 1. Es nula:

$$C_1 = \sum_j \cos \alpha_j = \cos 0 + \cos \pi = +1 - 1 = 0$$

$$S_1 = \sum_j \sin \alpha_j = \sin 0 + \sin \pi = 0$$

- Momentos debidos al armónico 1:

$$C'_1 = \sum_j z_j \cos \alpha_j = -\frac{d}{2} \cos 0 + \frac{d}{2} \cos \pi = -d$$

$$S'_1 = \sum_j z_j \sin \alpha_j = -\frac{d}{2} \sin 0 + \frac{d}{2} \sin \pi = 0$$

$$D'_1 = d \quad \beta'_1 = \pi$$

Existe un momento de desequilibrio M_{DY} de orden $n = 1$.

Las fuerzas de desequilibrio debidas al armónico 1 en ambos cilindros son:

$$F_{DX1,1} = F_{A1} \cos \theta_1 \quad F_{DX1,2} = F_{A1} \cos(\theta_1 + \alpha_2) = -F_{A1} \cos \theta_1$$

Estas dos fuerzas $F_{DX1,j}$ del armónico 1 de ambos cilindros se equilibran entre sí, y por ello la fuerza total de desequilibrio es nula (Figura 16).

El armónico 1 del momento de desequilibrio total no es nulo, y corresponde al par de las dos fuerzas de desequilibrio, que están separadas una distancia d :

$$M_{DY1} = F_{A1} D'_1 \cos(\theta_1 + \beta'_1) = F_{A1} d \cos(\theta_1 + \pi) = -F_{A1} d \cos \theta_1$$

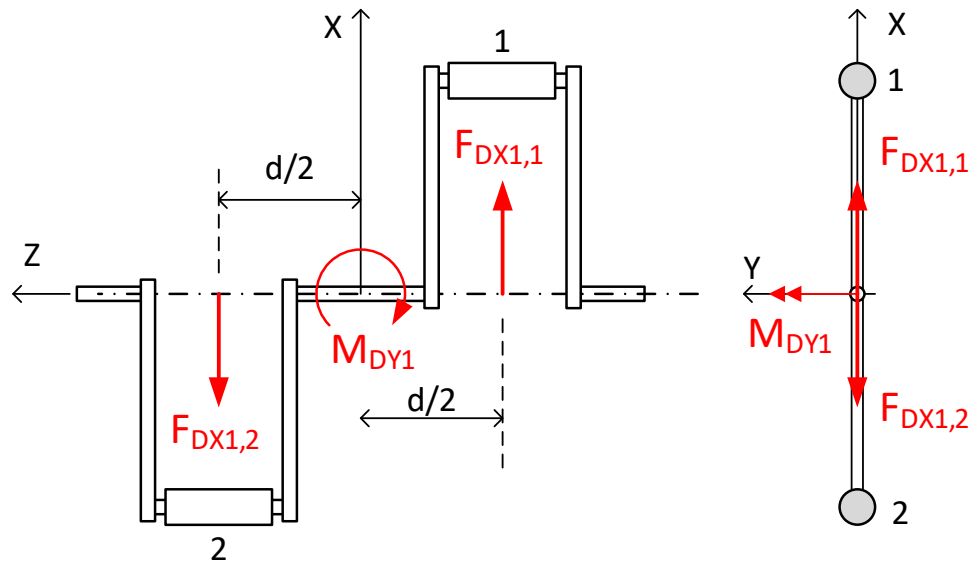


Figura 16 Esfuerzos de desequilibrio debidos al armónico 1, en máquinas de dos cilindros y ciclo simple

- Fuerza total de desequilibrio debida a los armónicos 2, 4, 6, ...

$$C_n = \sum_j \cos n\alpha_j = \cos 0 + \cos n\pi = 1 + 1 = 2$$

$$S_n = \sum_j \sin n\alpha_j = \sin 0 + \sin n\pi = 0$$

$$D_n = 2 \quad \beta_n = 0 \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

Existen fuerzas debidas a todos estos armónicos $n \geq 2$, cuyo valor es:

$$F_{DXn} = F_{A1} D_n A_n \cos(n\theta_1 + \beta_n) = m_{tra} R \omega^2 2 A_n \cos n\theta_1 \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

- Momentos de desequilibrio debidos a los armónicos 2, 4, 6, ...

$$C'_n = \sum_j z_j \cos n\alpha_j = -\frac{d}{2} \cos 0 + \frac{d}{2} \cos n\pi = 0$$

$$S'_n = \sum_j z_j \sin n\alpha_j = -\frac{d}{2} \sin 0 + \frac{d}{2} \sin n\pi = 0$$

Por lo tanto, todos los momentos de orden superior $n \geq 2$ están equilibrados. Las fuerzas de desequilibrio F_{DXn} están situadas en el eje X.

2.4 MÁQUINA DE 2 CILINDROS Y CICLO DOBLE

Esta máquina corresponde a los motores de 4 tiempos. Las dos muñequillas del cigüeñal están situadas en el mismo sentido (Figura 17), y sus parámetros son:

$$\alpha_1 = 0 \quad z_1 = -\frac{d}{2}$$

$$\alpha_2 = 0 \quad z_2 = +\frac{d}{2}$$

Se puede estudiar como una máquina de un cilindro con todas las masas al doble. Por lo tanto, tiene todas las fuerzas de desequilibrio en todos los armónicos, como en la máquina simple.

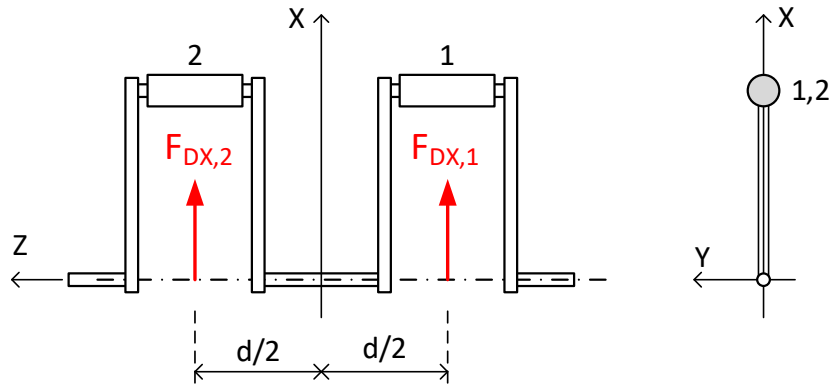


Figura 17 Máquina de 2 cilindros y ciclo doble

Los momentos están todos equilibrados, ya que:

$$C'_n = \sum_j z_j \cos n\alpha_j = -\frac{d}{2} \cos 0 + \frac{d}{2} \cos 0 = 0$$

$$S'_n = \sum_j z_j \sin n\alpha_j = -\frac{d}{2} \sin 0 + \frac{d}{2} \sin 0 = 0$$

2.5 MÁQUINA DE 4 CILINDROS Y CICLO DOBLE

Esta máquina corresponde a los motores de 4 cilindros y 4 tiempos. El cigüeñal es plano, con muñequillas a 180° (Figura 18). Tomando el origen de coordenadas en el punto central del cigüeñal, sus parámetros son:

j	α_j	z_j
1	0	$-\frac{3d}{2}$
2	π	$-\frac{d}{2}$
3	π	$+\frac{d}{2}$
4	0	$+\frac{3d}{2}$

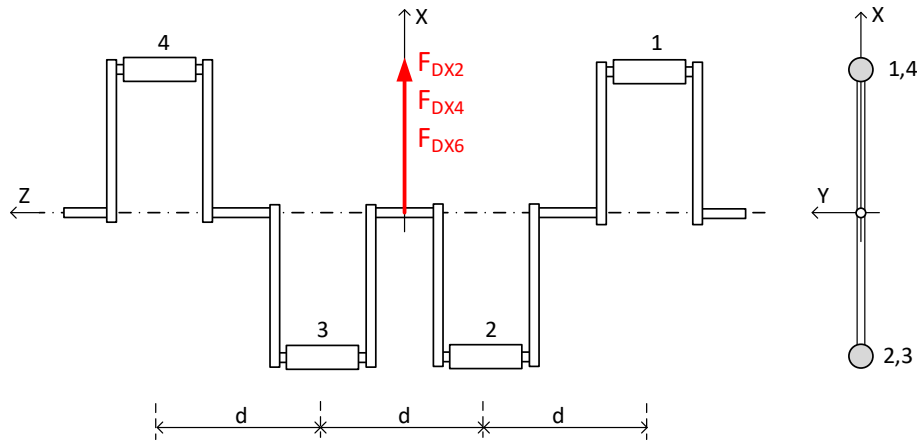


Figura 18 Máquina de 4 cilindros y ciclo doble

- Fuerzas debidas al armónico 1

$$C_1 = \sum_j \cos \alpha_j = +1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

$$S_1 = \sum_j \sin \alpha_j = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Todas las fuerzas del primer armónico están equilibradas.

- Fuerzas debidas a los armónicos 2, 4, 6, ...

$$C_n = \sum_j \cos n\alpha_j = \cos 0 + \cos n\pi + \cos n\pi + \cos 0 = 4$$

$$S_n = \sum_j \sin n\alpha_j = \sin 0 + \sin n\pi + \sin n\pi + \sin 0 = 0$$

$$D_n = 4 \quad \beta_n = 0 \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

Todos los armónicos superiores $n \geq 2$ están presentes.

- Momentos

$$C'_n = \sum_j z_j \cos n\alpha_j = -\frac{3d}{2} \cos 0 - \frac{d}{2} \cos n\pi + \frac{d}{2} \cos n\pi + \frac{3d}{2} \cos 0 = 0$$

$$S'_n = \sum_j z_j \sin n\alpha_j = -\frac{3d}{2} \sin 0 - \frac{d}{2} \sin n\pi + \frac{d}{2} \sin n\pi + \frac{3d}{2} \sin 0 = 0$$

Todos los momentos de desequilibrio son nulos. Dada la simetría del sistema, la fuerza total de desequilibrio está situada en el eje X (Figura 18).

- En resumen, los armónicos de la fuerza de desequilibrio total son:

$$F_{DXn} = F_{A1} D_n A_n \cos(n\theta_1 + \beta_n) \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

Sustituyendo F_{A1} y con los valores $D_n = 4$ y $\beta_n = 0$:

$$F_{DXn} = F_{A1} 4 A_n \cos(n\theta_1) \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

La fuerza de desequilibrio producida por el armónico n (F_{DXn}) es la proyección sobre el eje X de un vector de módulo $F_{A1} 4 A_n = m_{tra} R \omega^2 4 A_n$, situado con un ángulo $n \theta_1$ respecto a la posición θ_1 del cilindro 1 (Figura 19), es decir, girando con velocidad 2ω .

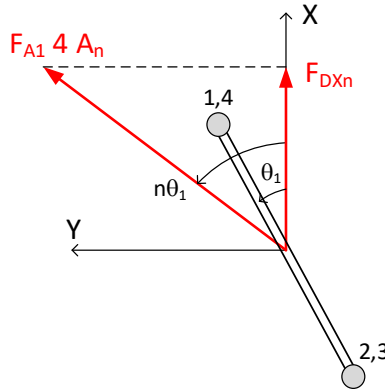


Figura 19 Fuerzas de desequilibrio debidas a los armónicos $n=2, 4, \dots$ en la máquina de 4 cilindros y ciclo doble

La fuerza debida al armónico 2, que es la más importante, vale:

$$F_{DX2} = F_{A1} 4 A_2 \cos(2\theta_1) \approx m_{tra} R \omega^2 4 \lambda \cos(2\omega t)$$

Esta fuerza se puede equilibrar mediante dos masas iguales girando en sentido contrario a velocidad 2ω , situadas en el bloque del motor, en el centro entre los 4 cilindros (Figura 20). Este dispositivo es conocido como equilibrador de Lanchester, por su inventor. Las componentes horizontales de sus fuerzas centrífugas se anulan, y las masas se eligen para que la componente vertical de sus fuerzas centrífugas sea igual a F_{DX2} .

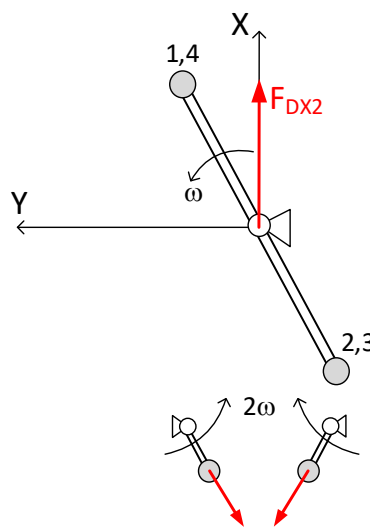


Figura 20 Equilibrado del armónico 2 de la fuerza de desequilibrio en la máquina de 4 cilindros y ciclo doble

2.6 MÁQUINA DE 3 CILINDROS Y CICLO DOBLE

Esta máquina corresponde a los motores de 3 cilindros y 4 tiempos. El cigüeñal tiene muñequillas a 120° (Figura 21). Sus parámetros son:

j	α_j	z_j
1	0	$-d$
2	120°	0
3	240°	$+d$

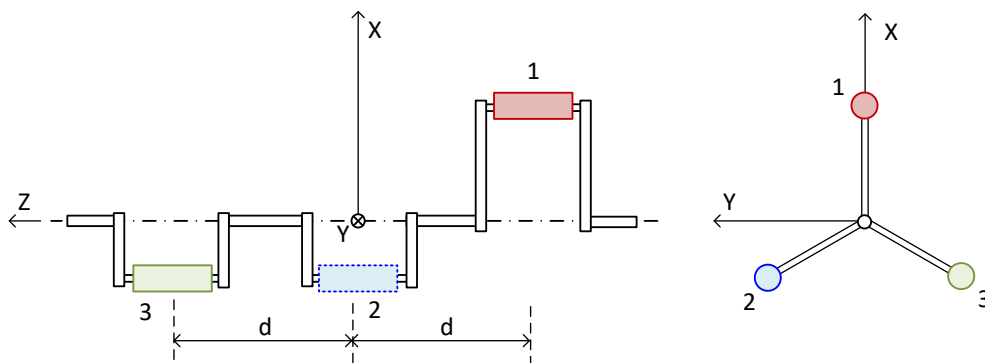


Figura 21 Máquina de 3 cilindros y ciclo doble

- Condición de equilibrado de fuerzas:

$$C_n = \sum_j \cos n\alpha_j = \cos 0 + \cos(120 n) + \cos(240 n)$$

$$S_n = \sum_j \sin n\alpha_j = \sin 0 + \sin(120 n) + \sin(240 n)$$

Los valores para distintos n se muestran en la tabla siguiente:

n	C_n	S_n	D_n
1, 2, 4, 8, 10, 14	0	0	0
6, 12	3	0	3

Por lo tanto, esta máquina está equilibrada en fuerzas hasta armónico 6.

- Condición de equilibrado de momentos

$$C'_n = \sum_j z_j \cos n\alpha_j = -d \cos 0 + d \cos(240 n)$$

$$S'_n = \sum_j z_j \sin n\alpha_j = -d \sin 0 + d \sin(240 n)$$

Los valores para distintos n se muestran en la tabla siguiente:

n	C'_n	S'_n	D'_n	β'_n
1, 4	$-\frac{3}{2}d$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}d$	$\sqrt{3}d$	-150°
2, 8	$-\frac{3}{2}d$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}d$	$\sqrt{3}d$	$+150^\circ$
6	0	0	0	

Por lo tanto, existen momentos de desequilibrio desde los armónicos más bajos. Para el armónico 1, su valor es:

$$M_{DY1} = m_{tra} R \omega^2 \sqrt{3} d \cos(\theta_1 - 150^\circ)$$

Para el armónico 2, su valor es:

$$M_{DY2} = m_{tra} R \omega^2 A_2 \sqrt{3} d \cos(2\theta_1 + 150^\circ)$$

donde A_2 se puede aproximar por $\lambda = R/L$.

2.7 MÁQUINA DE 5 CILINDROS Y CICLO DOBLE

Esta máquina corresponde a los motores de 5 cilindros y 4 tiempos. El cigüeñal tiene muñequillas cada 144° (Figura 22). Tomando el origen de coordenadas en el punto central del cigüeñal, sus parámetros son:

j	α_j	z_j
1	0	$-2d$
2	216°	$-d$
3	144°	0
4	72°	$+d$
5	288°	$+2d$

- Coeficientes para el equilibrado de fuerzas. Los valores para distintos n , calculados con el procedimiento Matlab DesequilibrioEnLinea.m, se muestran en la tabla siguiente:

n	C_n	S_n	D_n
1, 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 24	0	0	0
10, 20, 30	5	0	5

Por lo tanto, esta máquina está equilibrada en fuerzas hasta armónico 10.

- Coeficientes para el equilibrado de momentos:

n	C'_n	S'_n	D'_n	β'_n
1, 4, 6	$-0.264 d$	$-0.363 d$	$0.449 d$	-126°
2, 8	$-4.736 d$	$\mp 1.539 d$	$4.98 d$	$\mp 162^\circ$
10	0	0	0	

Por lo tanto, existen momentos de desequilibrio desde los armónicos más bajos.

2.8 MÁQUINA DE 6 CILINDROS Y CICLO DOBLE

Esta máquina corresponde a los motores de 6 cilindros y 4 tiempos. El cigüeñal tiene muñequillas cada 120° (Figura 22). Tomando el origen de coordenadas en el punto central del cigüeñal, sus parámetros son:

j	α_j	z_j
1	0	$-2.5 d$
2	240°	$-1.5 d$
3	120°	$-0.5 d$
4	120°	$+0.5 d$
5	240°	$+1.5 d$
6	0°	$+2.5 d$

- Coeficientes para el equilibrado de fuerzas. Los valores para distintos n , calculados con el procedimiento Matlab DesequilibrioEnLinea.m, se muestran en la tabla siguiente:

n	C_n	S_n	D_n
1, 2, 4, 8, 10, 14, 16	0	0	0
6, 12, 18, 24	6	0	6

Por lo tanto, esta máquina está equilibrada en fuerzas hasta armónico 6.

- Coeficientes para el equilibrado de momentos:

n	C'_n	S'_n	D'_n	β'_n
1 ... 24	0	0	0	

Por lo tanto, no existen momentos de desequilibrio.

2.9 MÁQUINA DE 8 CILINDROS Y CICLO DOBLE

Esta máquina corresponde a los motores de 8 cilindros y 4 tiempos. El cigüeñal tiene 8 muñequillas, cada 90° . Tomando el origen de coordenadas en el punto central del cigüeñal, sus parámetros son:

j	α_j	z_j
1	0	$-3.5 d$
2	180	$-2.5 d$
3	270°	$-1.5 d$
4	90°	$-0.5 d$
5	90°	$+0.5 d$
6	270°	$+1.5 d$
7	180°	$+2.5 d$
8	0	$+3.5 d$

- Coeficientes para el equilibrado de fuerzas. Los valores para distintos n , calculados con el procedimiento Matlab DesequilibrioEnLinea.m, se muestran en la tabla siguiente:

n	C_n	S_n	D_n
1, 2, 6, 10, 14, ...	0	0	0
4, 8, 12, 16	8	0	6

Por lo tanto, esta máquina está equilibrada en fuerzas hasta armónico 4.

- Coeficientes para el equilibrado de momentos:

n	C'_n	S'_n	D'_n	β'_n
1 ... 24	0	0	0	

Por lo tanto, no existen momentos de desequilibrio.

2.10 POSICIÓN DE LOS CILINDROS EN MÁQUINAS EN LÍNEA

La actuación de la máquina (expansión en motores, compresión en compresores) debe hacerse en intervalos regulares, por lo que es necesario que los distintos cilindros estén separados angularmente entre sí un intervalo angular uniforme γ .

El valor del intervalo angular γ depende de la duración angular del ciclo de la máquina y del número de cilindros de la misma (n_{cil}).

Ciclo simple. La duración del ciclo es una revolución (360°). Es el caso de motores de dos tiempos y compresores de simple efecto. El intervalo angular entre cilindros es:

$$\gamma = \frac{360^\circ}{n_{cil}}$$

Ciclo doble. La duración del ciclo es de dos revoluciones (720°). Es el caso de motores de cuatro tiempos. El intervalo angular es:

$$\gamma = \frac{720^\circ}{n_{cil}}$$

Además, la disposición de los cilindros debe guardar cierta simetría a fin de minimizar los momentos de desequilibrio. Las disposiciones habituales de cilindros y el ángulo γ entre ellos se muestran en la Figura 22.

	2	3	4	5	6	8
Ciclo simple (360°)	180°	120°	90°	72°	60°	45°
Ciclo doble (720°)	360°	240°	180°	144°	120°	90°

Figura 22 Disposiciones angulares de los cilindros en máquinas en línea

Efectuando el análisis del desequilibrio a las distintas disposiciones, se obtienen los armónicos de las fuerzas de desequilibrio que existen en cada una de ellas, que se muestran en la tabla siguiente.

Número de cilindros n_{cil}	Ciclo	Número de posiciones angulares del cigüeñal n_{ang}	Armónicos de la fuerza de desequilibrio
2	Simple	2	2, 4, 6, ...
2	Doble	1	1, 2, 4, 6, ...
3	Ambos	3	6, 12, 18, 24, ...
4	Simple	4	4, 8, 12, 16, ...
4	Doble	2	2, 4, 6, 8, ...
5	Ambos	5	10, 20, 30, ...
6	Simple	6	6, 12, 18, 24, ...
6	Doble	3	6, 12, 18, 24, ...
8	Doble	4	4, 8, 12, 16

Una regla general, que puede comprobarse haciendo un estudio detallado, es la siguiente: para máquinas en línea de 3 o más cilindros y ángulo α uniforme, sólo existen fuerzas de desequilibrio para los armónicos múltiplos pares de n_{ang} . Así puede comprobarse con las máquinas estudiadas anteriormente. Una excepción importante a esta regla es el motor de 4 cilindros, que tiene armónicos de desequilibrio de orden 2 en ciclo doble y de orden 4 en ciclo simple.

3 MÁQUINAS CON CILINDROS OPUESTOS

En este caso, todos los cilindros están en un mismo plano, pero la mitad están orientados según el eje +X y la otra mitad está orientada a 180°, según el -X, en la conocida como disposición *boxer*. Se considera que todos los cilindros son iguales y están separados una distancia fija d , con los cilindros impares deslizando según el eje +X y los cilindros pares según el -X (Figura 23). Cada cilindro está unido a una manivela diferente.

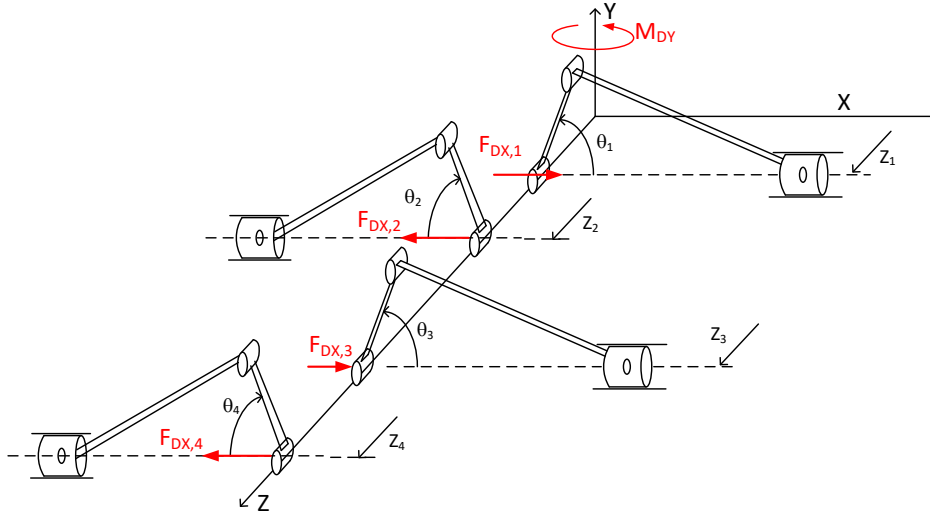


Figura 23 Máquina con cilindros opuestos

Suponiendo que cada mecanismo biela-manivela está equilibrado de tal forma que $m_{rot} = 0$ y $J_{b0} = 0$, cada uno de ellos produce una fuerza de desequilibrio longitudinal F_{DX} , en la dirección del eje de deslizamiento de cada pistón. Por lo tanto, la mitad de las fuerzas de desequilibrio está orientada según el eje +X y la otra mitad según el -X.

En régimen estacionario $\omega = \dot{\theta} = C^{te}$ la fuerza de desequilibrio debida a un cilindro impar $j = 1, 3, ..$ es:

$$F_{DX,j} = F_{A1} (\cos \theta_j + A_2 \cos 2\theta_j - A_4 \cos 4\theta_j + A_6 \cos 6\theta_j - \dots)$$

Para un cilindro par $k = 2, 4, ..$, la fuerza de desequilibrio tiene el mismo valor, pero su signo es contrario.

$$F_{DX,k} = -F_{A1} (\cos \theta_k + A_2 \cos 2\theta_k - A_4 \cos 4\theta_k + A_6 \cos 6\theta_k - \dots)$$

La fuerza total de desequilibrio producida por todos los cilindros de la máquina es:

$$F_{DX} = F_{DXI} + F_{DXP} = \sum_{j=1,3,..} F_{DX,j} + \sum_{k=2,4,..} F_{DX,k}$$

donde el primer sumatorio corresponde a los cilindros impares y el segundo los pares. Sustituyendo el valor de las fuerzas:

$$F_{DXI} = F_{A1} (\Sigma_j \cos \theta_j + A_2 \Sigma_j \cos 2\theta_j - A_4 \Sigma_j \cos 4\theta_j + A_6 \Sigma_j \cos 6\theta_j - \dots)$$

$$F_{DXP} = -F_{A1} (\Sigma_k \cos \theta_k + A_2 \Sigma_k \cos 2\theta_k - A_4 \Sigma_k \cos 4\theta_k + A_6 \Sigma_k \cos 6\theta_k - \dots)$$

La condición de equilibrado de fuerzas $F_{DX} = 0$, es decir $F_{DXI} = -F_{DXP}$ implica que:

$$\sum_j \cos n\theta_j = \sum_k \cos n\theta_k \quad n = 1, 2, 4, 6, \dots \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

Para los cilindros impares, las posiciones angulares de los distintos pistones se pueden referir a la posición del primero de la misma forma que en las máquinas en línea: $\theta_j = \theta_1 + \alpha_j$ $j = 1, 3, \dots$ siendo α_j el ángulo de giro del cilindro j medido con respecto al del cilindro 1, es decir el ángulo de la manivela del cilindro j respecto a la manivela del cilindro 1, adoptando $\alpha_1 = 0$.

Luego las condiciones de equilibrio para los cilindros impares se pueden poner como:

$$\Sigma_j \cos n\theta_j = \cos n\theta_1 \Sigma_j \cos n\alpha_j - \sin n\theta_1 \Sigma_j \sin n\alpha_j$$

Para los cilindros pares, la relación entre el giro del cilindro θ_k y el giro del primer cilindro θ_1 es: $\theta_k = \pi - \theta_1 - \alpha_k$. Luego:

$$\Sigma_k \cos n\theta_k = \Sigma_k \cos(n\pi - n\theta_1 - n\alpha_k)$$

$$\Sigma_k \cos n\theta_k = \cos n\theta_1 \Sigma_k \cos(n\alpha_k - n\pi) - \sin n\theta_1 \Sigma_k \sin(n\alpha_k - n\pi)$$

Dado que las funciones $\cos n\theta_1$ y $\sin n\theta_1$ pueden tener cualquier valor entre 0 y 1 al variar θ_1 , sus coeficientes deben ser iguales para los cilindros pares e impares, y las condiciones de equilibrado de fuerzas quedan:

$$C_{nj} = C_{nk} \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

$$S_{nj} = S_{nk} \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

siendo:

$$C_{nj} = \Sigma_j \cos n\alpha_j \quad C_{nk} = \Sigma_k \cos(n\alpha_k - n\pi) \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

$$S_{nj} = \Sigma_j \sin n\alpha_j \quad S_{nk} = \Sigma_k \sin(n\alpha_k - n\pi) \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

Para el par de desequilibrio se procede de la misma forma, y se llega a que las condiciones de equilibrado son:

$$C'_{nj} = C'_{nk} \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

$$S'_{nj} = S'_{nk} \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

siendo:

$$C'_{nj} = \Sigma_j z_j \cos n\alpha_j \quad C'_{nk} = \Sigma_k z_k \cos(n\alpha_k - n\pi) \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

$$S'_{nj} = \Sigma_j z_j \sin n\alpha_j \quad S'_{nk} = \Sigma_k z_k \sin(n\alpha_k - n\pi) \quad j = 1, 3, \dots \quad k = 2, 4, \dots$$

3.1 MÁQUINA DE 4 CILINDROS OPUESTOS Y CICLO DOBLE

Esta máquina corresponde a los motores de 4 cilindros y 4 tiempos con arquitectura *boxer*. El cigüeñal es plano, con muñequillas a 180° . Tomando el origen de coordenadas en el punto central del cigüeñal, sus parámetros son (Figura 24):

j, k	α_j, α_k	z_j, z_k
$j = 1$	0	$-\frac{3d}{2}$
$k = 2$	π	$-\frac{d}{2}$
$j = 3$	π	$+\frac{d}{2}$
$k = 4$	0	$+\frac{3d}{2}$

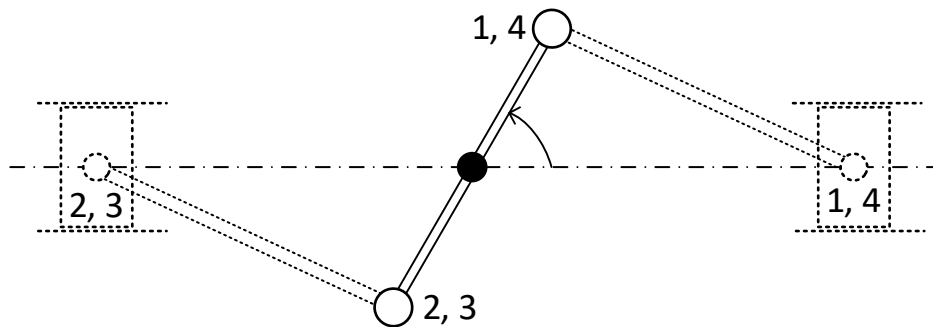


Figura 24 Disposición de los cilindros en un motor *boxer* de 4 cilindros

- Fuerzas debidas al armónico 1

$$C_{1j} = \sum_{j=1,3,\dots} \cos \alpha_j = \cos 0 + \cos \pi = 0$$

$$C_{1k} = \sum_{k=2,4,\dots} \cos(\alpha_k - \pi) = 0$$

$$S_{1j} = \sum_{j=1,3,\dots} \sin \alpha_j = \sin 0 + \sin \pi = 0$$

$$S_{1k} = \sum_{k=2,4,\dots} \sin(\alpha_k - \pi) = 0$$

Como $C_{1j} = C_{1k} = S_{1j} = S_{1k} = 0$, no existen fuerzas desequilibradas en el armónico 1.

- Fuerzas debidas a los armónicos $n=2, 4, 6, \dots$

$$C_{nj} = \sum_j \cos n\alpha_j = \cos 0 + \cos n\pi = 2$$

$$C_{nk} = \sum_k \cos(n\alpha_k - n\pi) = 2$$

$$S_{nj} = \sum_j \sin n\alpha_j = \sin 0 + \sin n\pi = 0$$

$$S_{nk} = \sum_k \sin(n\alpha_k - n\pi) = 0$$

Como $C_{nj} = C_{nk}$ y $S_{nj} = S_{nk}$ se cumple la condición de equilibrado, y no hay fuerzas de desequilibrio en los armónicos superiores.

- Momentos debidos al armónico 1

$$C'_{1j} = \sum_j z_j \cos \alpha_j = -2d$$

$$C'_{1k} = \sum_k z_k \cos(\alpha_k - \pi) = -2d$$

$$S'_{1j} = \sum_j z_j \sin \alpha_j = \sin 0 + \sin \pi = 0$$

$$S'_{1k} = \sum_k z_{ki} \sin(\alpha_k - \pi) = 0$$

Como $C'_{1j} = C'_{1k}$, y $S'_{1j} = S'_{1k} = 0$ no existen momentos de desequilibrio en el armónico 1.

- Momento de desequilibrio debido a los armónicos $n=2, 4, 6, \dots$

$$C'_{nj} = \sum_j \cos n\alpha_j = \cos 0 + \cos n\pi = -1$$

$$C'_{nk} = \sum_k \cos(n\alpha_k - n\pi) = +1$$

$$S'_{nj} = \sum_j \sin n\alpha_j = \sin 0 + \sin n\pi = 0$$

$$S'_{nk} = \sum_k \sin(n\alpha_k - n\pi) = 0$$

Como $C'_{nj} \neq C'_{nk}$, existen momentos de desequilibrio debidos a los armónicos $n \geq 2$.

3.2 MÁQUINA DE 6 CILINDROS OPUESTOS Y CICLO DOBLE

Esta máquina corresponde a los motores de 6 cilindros y 4 tiempos con arquitectura *boxer* usados en aviación y algunos vehículos.

La regularidad de marcha requiere actuación de los cilindros cada 120° , por lo que el cigüeñal tiene muñequillas a 120° . Los tres cilindros impares están separados angularmente entre sí 120° y los tres cilindros pares están también separados 120° , pero desfasados 180° respecto de los impares (Figura 25).

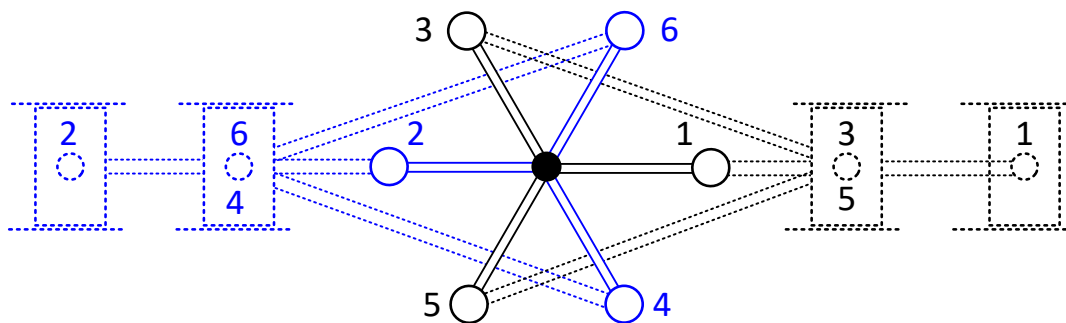


Figura 25 Disposición de los cilindros en un motor *boxer* de 6 cilindros

Tomando el origen de coordenadas en el punto central del cigüeñal, sus parámetros son:

j, k	α_j, α_k	z_j, z_k
$j = 1$	0	-2.5 d
$k = 2$	180°	-1.5 d
$j = 3$	120°	-0.5 d
$k = 4$	300°	+0.5 d
$j = 5$	240°	+1.5 d
$k = 6$	60°	+2.5 d

- Los coeficientes para el desequilibrio de fuerzas, calculados con el procedimiento Matlab DesequilibrioBoxer.m, se muestran en la tabla siguiente:

n	C_{nj}	C_{nk}	S_{nj}	S_{nk}
1, 2, 4, 8, 10, 14, 16	0	0	0	0
6, 12, 18	3	3	3	3

Como $C_{nj} = C_{nk} = S_{nj} = S_{nk} = 0$ en la mayoría de los armónicos, o bien $C_{nj} = C_{nk}$ y $S_{nj} = S_{nk}$ en los armónicos múltiplos de 6, se cumple la condición de equilibrado, y no hay fuerzas de desequilibrio.

- Los coeficientes para el desequilibrio de momentos se muestran en la tabla siguiente:

n	C'_{nj}	C'_{nk}	S'_{nj}	S'_{nk}
1, 2, 4, 8, 10, 14, 16	-3 d	-3 d	$-\sqrt{3} d$	$-\sqrt{3} d$
6, 12, 18	-1.5 d	1.5 d	0	0

En los armónicos que no son múltiplos de 6, se cumplen las condiciones $C'_{nj} = C'_{nk}$ y $S'_{nj} = S'_{nk}$ y no hay momentos de desequilibrio.

En los armónicos múltiplos de 6, se obtiene $C'_{nj} \neq C'_{nk}$ y por lo tanto existen momentos de desequilibrio.

4 MÁQUINAS CON CILINDROS EN V

4.1 MECANISMO SIMPLE EN V

En este caso cada manivela mueve dos conjuntos biela + pistón, situados formando un ángulo ψ entre sus ejes de deslizamiento (Figura 26). Cada uno de ellos se trata como en el caso de un mecanismo simple con un cilindro. Se denomina I al mecanismo situado a la izquierda mirando la máquina de frente con la bisectriz de la V vertical, y D al otro.

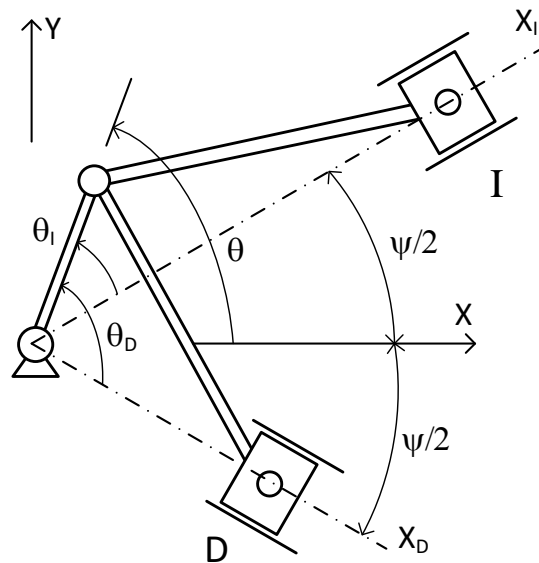


Figura 26 Máquina simple con cilindros en V

Debe situarse la mitad de la masa de la manivela m_m en cada mecanismo, pues una manivela mueve dos mecanismos. Por lo tanto, el valor de la masa rotativa a emplear en cada mecanismo es:

$$m_{rot} = \frac{m_m c}{2} \frac{c}{R} + m_b \frac{b}{L}$$

La masa en traslación en cada mecanismo es la misma que en la máquina simple:

$$m_{tra} = m_b \frac{a}{L} + m_p$$

Cada una de las bancadas I y D produce unas fuerzas actuantes sobre la sustentación de la máquina, debidas al desequilibrio, en sus direcciones de deslizamiento F_{X_I} , F_{X_D} y transversales F_{Y_I} , F_{Y_D} (Figura 27).

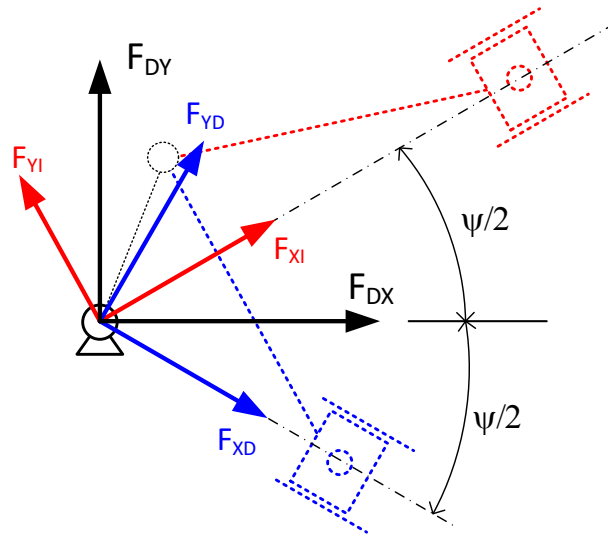


Figura 27 Fuerzas sobre la sustentación debidas al desequilibrio en máquinas en V

Considerando el régimen estacionario $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = \omega = C^{te}$, los valores de las fuerzas $F_{XI}, F_{XD}, F_{YI}, F_{YD}$ se obtienen del estudio de la máquina de un cilindro (apartado 1.6). Los valores para el banco I son:

$$F_{XI} = (m_{rot} + m_{tra}) R \omega^2 \cos \theta_I + m_{tra} R \omega^2 (A_2 \cos 2\theta_I - A_4 \cos 4\theta_I + A_6 \cos 6\theta_I - \dots)$$

$$F_{YI} = m_{rot} R \omega^2 \sin \theta_I$$

Los valores para el banco D son similares, cambiando el subíndice I por D .

$$F_{XD} = (m_{rot} + m_{tra}) R \omega^2 \cos \theta_D + m_{tra} R \omega^2 (A_2 \cos 2\theta_D - A_4 \cos 4\theta_D + A_6 \cos 6\theta_D - \dots)$$

$$F_{YD} = m_{rot} R \omega^2 \sin \theta_D$$

Respecto al par de desequilibrio M_D , se considera que se ha equilibrado, es decir que $J_{b0} = 0$, como se indica en el apartado 1.8.

La resultante de las fuerzas totales de desequilibrio producidas por ambos bancos, I y D , situados formando un ángulo ψ , es (Figura 27):

$$F_{DX} = (F_{XI} + F_{XD}) \cos \frac{\psi}{2} - (F_{YI} - F_{YD}) \sin \frac{\psi}{2}$$

$$F_{DY} = (F_{XI} - F_{XD}) \sin \frac{\psi}{2} + (F_{YI} + F_{YD}) \cos \frac{\psi}{2}$$

Sustituyendo las fuerzas debidas a cada banco:

$$\begin{aligned}
 F_{DX} &= \cos \frac{\psi}{2} [(m_{rot} + m_{tra})R \omega^2 (\cos \theta_I + \cos \theta_D)] \\
 &\quad + \cos \frac{\psi}{2} [m_{tra} R \omega^2 (A_2 (\cos 2\theta_I + \cos 2\theta_D) - A_4 (\cos 4\theta_I + \cos 4\theta_D) + \dots)] \\
 &\quad - \sin \frac{\psi}{2} [m_{rot} R \omega^2 (\sin \theta_I - \sin \theta_D)] \\
 F_{DY} &= \sin \frac{\psi}{2} [(m_{rot} + m_{tra})R \omega^2 (\cos \theta_I - \cos \theta_D)] \\
 &\quad + \sin \frac{\psi}{2} [m_{tra} R \omega^2 (A_2 (\cos 2\theta_I - \cos 2\theta_D) - A_4 (\cos 4\theta_I - \cos 4\theta_D) + \dots)] \\
 &\quad + \cos \frac{\psi}{2} [m_{rot} R \omega^2 (\sin \theta_I + \sin \theta_D)]
 \end{aligned}$$

El ángulo de giro de la manivela θ se mide desde el eje bisectriz de la V (Figura 26). Por lo tanto, los ángulos de giro de cada banco son:

$$\theta_I = \theta - \frac{\psi}{2} \quad \theta_D = \theta + \frac{\psi}{2}$$

Sustituyendo θ_D y θ_I en las expresiones de F_{DX} y F_{DY} y operando se obtiene:

$$\begin{aligned}
 F_{DX} &= 2 \left(m_{rot} + \cos^2 \frac{\psi}{2} m_{tra} \right) R \omega^2 \cos \theta \\
 &\quad + 2 m_{tra} R \omega^2 \cos \frac{\psi}{2} (A_2 \cos \psi \cos 2\theta - A_4 \cos 2\psi \cos 4\theta + A_6 \cos 4\psi \cos 6\theta + \dots) \\
 F_{DY} &= 2 \left(m_{rot} + \sin^2 \frac{\psi}{2} m_{tra} \right) R \omega^2 \sin \theta \\
 &\quad + 2 m_{tra} R \omega^2 \sin \frac{\psi}{2} (A_2 \sin \psi \sin 2\theta - A_4 \sin 2\psi \sin 4\theta + A_6 \sin 4\psi \sin 6\theta + \dots)
 \end{aligned}$$

4.1.1 Equilibrado de las fuerzas primarias

Las fuerzas primarias (primer armónico) son el primer sumando de F_{DX} y F_{DY} . Se pueden cancelar si se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned}
 m_{rot} + \cos^2 \frac{\psi}{2} m_{tra} &= 0 \\
 m_{rot} + \sin^2 \frac{\psi}{2} m_{tra} &= 0
 \end{aligned}$$

Sumando y restando estas ecuaciones se llega a:

$$\begin{aligned}
 2 m_{rot} + m_{tra} &= 0 \\
 \cos^2 \frac{\psi}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2} &= 0
 \end{aligned}$$

La segunda ecuación se cumple si $\psi = 90^\circ$.

La primera ecuación se cumple si:

$$2 m_{rot} + m_{tra} = 0$$

Sustituyendo m_{rot} y m_{tra} :

$$m_m \frac{c}{R} + 2 m_b \frac{b}{L} + m_b \frac{a}{L} + m_p = 0$$

Despejando el primer sumando de la derecha:

$$m_m \frac{c}{R} = -m_b \left(\frac{2b + a}{L} \right) - m_p$$

Los dos términos de la derecha son fijos para un diseño de la biela y el pistón, pero la ecuación anterior permite determinar la masa de la manivela m_m y la posición de su centro de gravedad (c) para lograr el equilibrio. Se obtiene un valor negativo para la distancia (c) del centro de gravedad de la manivela al punto de giro, es decir que se debe situar un contrapeso en la muñequilla, al igual que en la máquina simple de un cilindro.

Por lo tanto, en la máquina en V pueden equilibrarse las fuerzas primarias adoptando un ángulo de 90° entre las bancadas y situando contrapesos adecuados en la manivela (Figura 28).

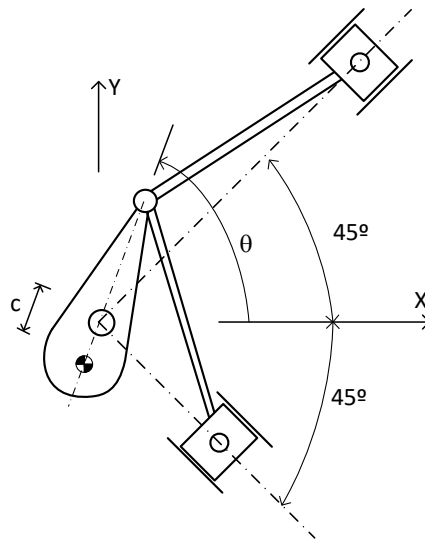


Figura 28 Equilibrado de las fuerzas primarias en máquinas en V a 90° mediante contrapeso en la manivela

4.1.2 Máquina simple en V a 90°

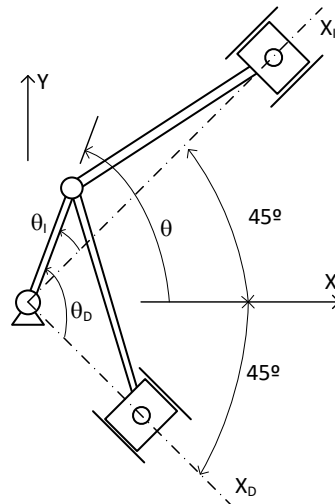


Figura 29 Máquina simple en V a 90°

Suponiendo que el ángulo de la V es $\psi = 90^\circ$ y que se ha equilibrado el primer armónico mediante contrapesos en la manivela, las fuerzas no equilibradas quedan:

$$F_{DX} = \sqrt{2} m_{tra} R \omega^2 (A_4 \cos 4\theta + A_6 \cos 6\theta + \dots)$$

$$F_{DY} = \sqrt{2} m_{tra} R \omega^2 (A_2 \sin 2\theta)$$

En la fuerza F_{DX} en dirección del eje de la V existen todos los armónicos de orden superior (4, 6, ...). En la fuerza transversal F_{DY} sólo existe el armónico de orden 2 y desaparecen los superiores, por la presencia de los factores $\sin 2\psi$, $\sin 4\psi$, etc.

En resumen, las fuerzas de primer orden pueden equilibrarse mediante contrapesos, pero queda una fuerza transversal al eje de la V, de segundo orden, además de las fuerzas longitudinales según el eje de la V, de orden 4 y superior (Figura 30).

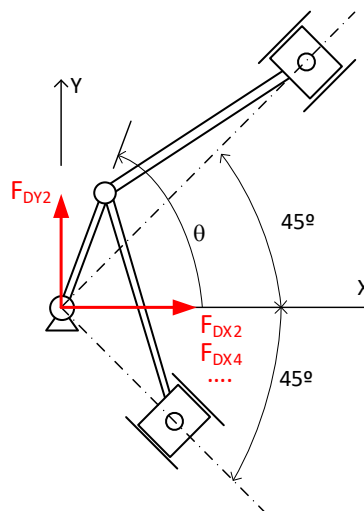


Figura 30 Fuerzas de desequilibrio en la máquina simple en V a 90°

La relación entre las fuerzas F_{DX} y F_{DY} es A_4/A_2 , y para los valores habituales de λ (0.1 a 0.4) dicho factor es del orden de 0.025 a 0.038. Por lo tanto, las fuerzas F_{DX} en dirección del eje de la V son de un valor muy inferior a las transversales F_{DY} y de ordinario se ignoran.

4.2 MÁQUINAS EN V A 90° CON VARIOS CILINDROS

Estudiamos una máquina con varias filas de cilindros iguales, en V a 90°, equilibradas cada una de ellas para orden 1 como se ha indicado antes. Por lo tanto, para cada fila sólo queda como fuerza sobre la sustentación una fuerza transversal de desequilibrio, de orden 2. No se consideran las fuerzas de orden 4 y superior en la dirección X (eje de la V) por ser de valor mucho más pequeño.

La Figura 31 muestra una fila típica, situada a una distancia z_j del origen.

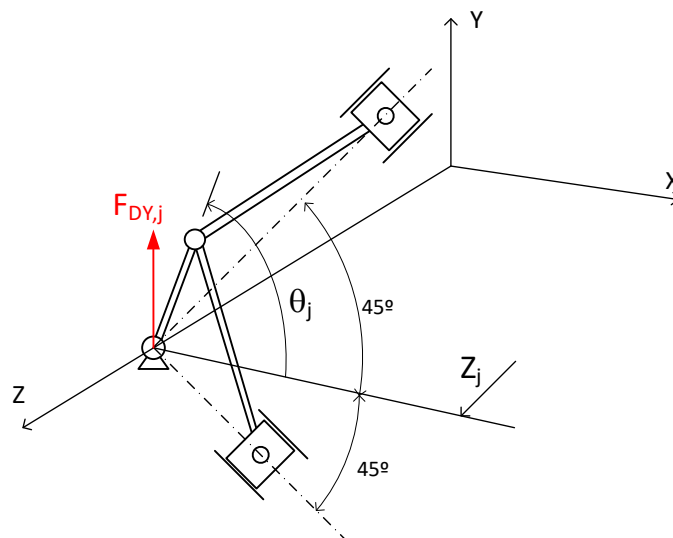


Figura 31 Fila con dos cilindros en V en una máquina con varios cilindros en V a 90°

La fuerza transversal de desequilibrio de orden 2 para la fila j es:

$$F_{DY,j} = \sqrt{2} m_{tra} R \omega^2 (A_2 \sin 2\theta_j)$$

El módulo de esta fuerza es F_{D2} :

$$F_{D2} = \sqrt{2} m_{tra} R \omega^2 A_2$$

Por lo tanto, la fuerza de desequilibrio transversal es la componente vertical de una fuerza rotativa de módulo F_2 y frecuencia 2ω :

$$F_{DY,j} = F_{D2} \sin 2\theta_j$$

Esta fuerza produce un momento según el eje X de valor:

$$M_{DX,j} = z_j F_{DY,j} = z_j F_{D2} \sin 2\theta_j$$

La fuerza y el momento de desequilibrio totales, debidas a todas las filas de cilindros, son:

$$F_{DY} = \sum F_{DY,j} = F_{D2} \sum \sin 2\theta_j$$

$$M_{DX} = \sum M_{DX,j} = F_{D2} \sum z_j \sin 2\theta_j$$

Empleando la relación entre el giro de las distintas filas: $\theta_j = \theta_1 + \alpha_j$ se puede poner:

$$\sum \sin 2\theta_j = \sin 2\theta_1 \sum \cos 2\alpha_j + \cos 2\theta_1 \sum \sin 2\alpha_j$$

$$\sum z_j \sin 2\theta_j = \sin 2\theta_1 \sum z_j \cos 2\alpha_j + \cos 2\theta_1 \sum z_j \sin 2\alpha_j$$

Se definen las constantes:

$$C_2 = \sum \cos 2\alpha_j \quad S_2 = \sum \sin 2\alpha_j \quad C'_2 = \sum z_j \cos 2\alpha_j \quad S'_2 = \sum z_j \sin 2\alpha_j$$

Se obtiene así la expresión final de la fuerza lateral F_{DY} y del momento de desequilibrio M_{DX} , que son de orden 2:

$$F_{DY} = F_{D2} (C_2 \sin 2\theta_1 + S_2 \cos 2\theta_1)$$

$$M_{DX} = F_{D2} (C'_2 \sin 2\theta_1 + S'_2 \cos 2\theta_1)$$

4.3 CONDICIONES DE EQUILIBRADO

Las condiciones de equilibrado son del mismo tipo que para las máquinas con cilindros en línea:

$$\text{Equilibrado de fuerzas: } C_2 = 0 \quad S_2 = 0$$

$$\text{Equilibrado de momentos: } C'_2 = 0 \quad S'_2 = 0.$$

4.4 MÁQUINA CON 8 CILINDROS EN V A 90°

Las cuatro muñequillas se sitúan a 90°, en una disposición antisimétrica (Figura 32). El origen de coordenadas se sitúa en el centro de una muñequilla extrema, que se numera como 1.

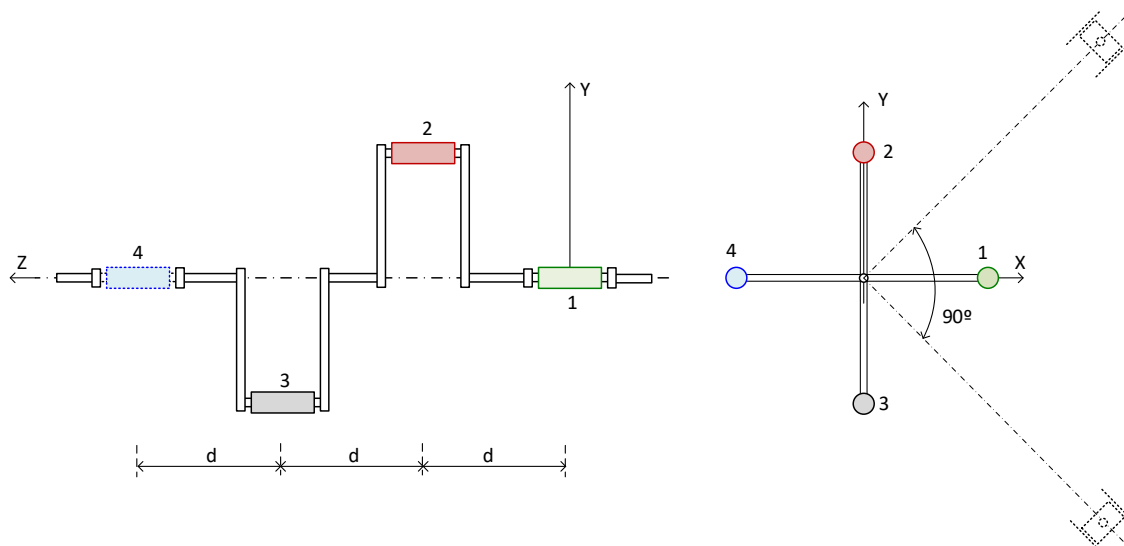


Figura 32 Máquina con 8 cilindros en V a 90°

Los valores de los distintos parámetros geométricos se muestran en la tabla siguiente.

j	α_j	z_j	$2\alpha_j$	$\cos 2\alpha_j$	$\sin 2\alpha_j$	$z_j \cos 2\alpha_j$	$z_j \sin 2\alpha_j$
1	0°	0	0°	+1	0	0	0
2	90°	d	180°	-1	0	-d	0
3	270°	2d	540°	-1	0	-2d	0
4	180°	3d	360°	+1	0	+3d	0
				$C_2 = 0$	$S_2 = 0$	$C'_2 = 0$	$S'_2 = 0$

Esta máquina tiene equilibrado total de fuerzas y momentos de orden 2. El equilibrado de orden 1 se hace de forma individual en cada fila, mediante contrapesos en la manivela.

4.5 MÁQUINA CON 6 CILINDROS EN V A 90°

Las tres muñequillas se sitúan a 120°. El origen de coordenadas se sitúa en el centro de una muñequilla extrema, que se numera como 1 (Figura 33).

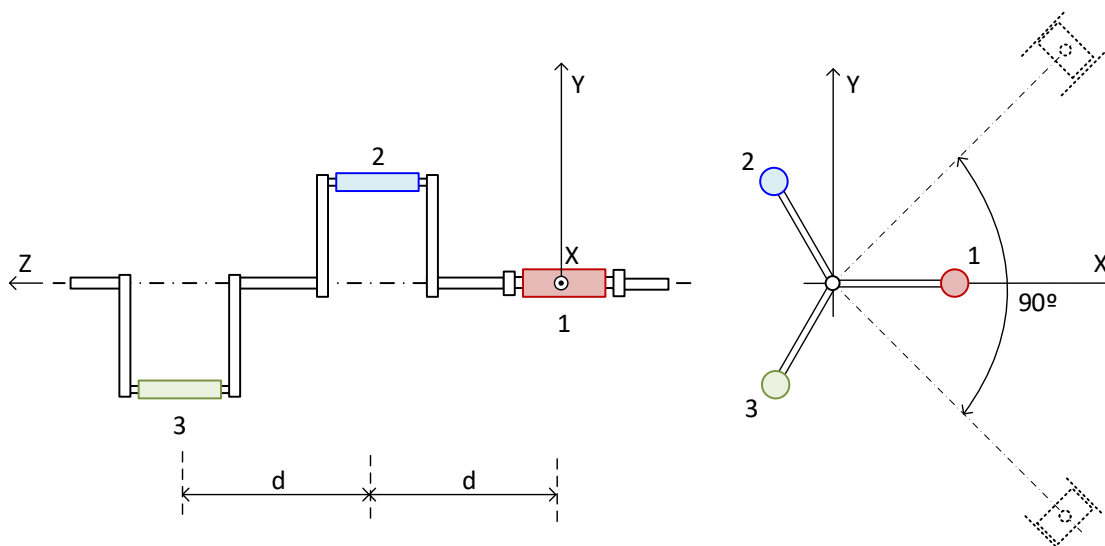


Figura 33 Máquina con 6 cilindros en V a 90°

Los valores de los distintos parámetros geométricos se muestran en la tabla siguiente.

j	α_j	z_j	$2\alpha_j$	$\cos 2\alpha_j$	$\sin 2\alpha_j$	$z_j \cos 2\alpha_j$	$z_j \sin 2\alpha_j$
1	0°	0	0°	+1	0	0	0
2	120°	d	240°	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-d/2$	$-d\sqrt{3}/2$
3	240°	2d	480°	-1/2	$+\sqrt{3}/2$	$-2d/2$	$-2d\sqrt{3}/2$
				$C_2 = 0$	$S_2 = 0$	$C'_2 = -3d/2$	$S'_2 = -3d\sqrt{3}/2$

Esta máquina tiene equilibrado total de fuerzas, pues $C_2 = 0$ $S_2 = 0$. En efecto, las fuerzas de orden 2 en dirección Y debidas a las tres filas son:

$$F_{DY2} = F_{DY2,1} + F_{DY2,2} + F_{DY2,3} = F_{D2} \sin 2\theta_1 + F_{D2} \sin 2\theta_2 + F_{D2} \sin 2\theta_3$$

$$F_{DY2} = F_{D2} \sin 2\theta_1 + F_{D2} \sin 2(\theta_1 + 120^\circ) + F_{D2} \sin 2(\theta_1 + 240^\circ)$$

Desarrollando, se obtiene:

$$F_{DY2} = F_{D2} \left(\sin 2\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta_1 \right) = 0$$

Es decir que las fuerzas de desequilibrio transversales a la máquina se anulan entre sí.

Sin embargo, existe un desequilibrio de momentos de orden 2, pues los momentos no se anulan, ya que C'_2 y S'_2 no se anulan. Su resultante es:

$$M_{DX2} = F_{D2} \left(-\frac{3d}{2} \sin 2\theta_1 - \frac{3d\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta_1 \right)$$

5 PROCEDIMIENTOS MATLAB

5.1 PROCEDIMIENTO DESEQUILIBRIOENLINEA.M

```

% Coeficientes de desequilibrio de una máquina con cilindros en línea
% Alpha: Posición angular de las muñequillas (grados)
% Z: Posición axial (Z) de los cilindros
% nVals: Armónicos a estudiar
% d: Separación entre los cilindros

clear variables

%% Datos de la máquina a estudiar

% Máquina de 2 cilindros. Ciclo simple
% Alpha=[0 180];
% d=1; % Separación entre los cilindros
% Origen de coordenadas Z en el punto medio entre los cilindros
% Z=[-d/2 +d/2];
% nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 24];

% Máquina de 3 cilindros. Ciclo simple o doble
% Alpha=[0 120 240];
% d=1; % Separación entre los cilindros
% Origen de coordenadas Z en el cilindro central
% Z=[-d 0 +d];
% nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 24];

% Máquina de 4 cilindros. Ciclo doble. Muñequillas cada 180°
% Alpha=[0 180 180 0];
% d=1; % Separación entre los cilindros
% Origen de coordenadas Z en el punto medio entre los cilindros
% Z=d*[-1.5 -0.5 +0.5 +1.5];
% nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 24 30];

% Máquina de 5 cilindros. Ciclo simple o doble
% Alpha=[0 216 144 72 288];
% d=1; % Separación entre los cilindros
% Origen de coordenadas Z en el cilindro central
% Z=d*[-2 -1 0 +1 +2];
% nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 24 30];

% Máquina de 6 cilindros. Ciclo doble. Muñequillas cada 120°
% Alpha=[0 240 120 120 240 0];
% d=1; % Separación entre los cilindros
% Origen de coordenadas Z en el punto medio entre los cilindros
% Z=d*[-2.5 -1.5 -0.5 +0.5 +1.5 +2.5];
% nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 24 30];

% Máquina de 8 cilindros. Ciclo doble. Muñequillas cada 90°
Alpha=[0 180 270 90 90 270 180 0];
d=1; % Separación entre los cilindros
% Origen de coordenadas Z en el punto medio entre los cilindros
Z=d*[-3.5 -2.5 -1.5 -0.5 +0.5 +1.5 +2.5 +3.5];
nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 24 30];

%% Cálculos
fprintf('Número de cilindros: %d\n',length(Alpha));
for j=1:length(Alpha)
    fprintf('j: %1d Alpha: %6.1f Z: %5.1f\n',j,Alpha(j),Z(j));
end

% Coeficientes del equilibrado de fuerzas
fprintf('Equilibrado de fuerzas\n');
for n=nVals

```

```

    Cn=sum(cosd(n*Alpha));
    Sn=sum(sind(n*Alpha));
    Dn=sqrt(Cn^2+Sn^2);
    Betan=atan2d(Sn,Cn);
    fprintf('n: %2d Cn: %8.4f Sn: %8.4f Dn: %8.4f Betan: %8.2f\n',n, Cn,
Sn, Dn, Betan);
end

% Coeficientes del equilibrado de momentos
fprintf('Equilibrado de momentos\n');
for n=nVals
    Cpn=sum(Z.*cosd(n*Alpha));
    Spn=sum(Z.*sind(n*Alpha));
    Dpn=sqrt(Cpn^2+Spn^2);
    Betapn=atan2d(Spn,Cpn);
    fprintf('n: %2d Cpn: %8.4f Spn: %8.4f Dpn: %8.4f Betapn: %8.2f\n',n, Cpn,
Spn, Dpn, Betapn);
end

```

5.2 PROCEDIMIENTO DESEQUILIBRIOBOXER.M

```

% Coeficientes de desequilibrio de una máquina boxer con cilindros opuestos
% Cilindros pares e impares situados a 180°
%
% AlphaI: Posición angular de las muñequillas impares (grados)
% ZI: Posición axial (Z) de los cilindros impares
% AlphaP: Posición angular de las muñequillas pares (grados)
% ZP: Posición axial (Z) de los cilindros pares
% nVals: Armónicos a estudiar
% d: Separación entre los cilindros

clear variables

%% Datos de las máquinas

% Máquina de 4 cilindros. Ciclo doble. Muñequillas cada 180°
AlphaI=[0 180];
AlphaP=[180 0];
d=1; % Separación entre los cilindros
% Origen de coordenadas Z en el punto medio entre los 4 cilindros
ZI=d*[-1.5 +0.5];
ZP=d*[-0.5 +1.5];
nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 24 30];
nVals=[1 2 4 6 8 10 12];

% Máquina de 6 cilindros. Ciclo doble. Muñequillas cada 120°
% AlphaI=[0 120 240];
% AlphaP=[180 300 60];
% d=1; % Separación entre los cilindros
% Origen de coordenadas Z en el punto medio entre los 4 cilindros
% ZI=d*[-2.5 -0.5 +1.5];
% ZP=d*[-1.5 +0.5 +2.5];
% nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 24 30];
% nVals=[1 2 4 6 8 10 12 14 16 18];

%% Cálculos

fprintf('Número de cilindros: %d\n',length(AlphaI)+length(AlphaP));
for j=1:length(AlphaI)
    fprintf('j: %1d Impar Alpha: %6.1f Z: %5.1f\n',2*j-1,AlphaI(j),ZI(j));
    fprintf('j: %1d Par Alpha: %6.1f Z: %5.1f\n',2*j,AlphaP(j),ZP(j));
end

% Coeficientes del equilibrado de fuerzas
fprintf('Equilibrado de fuerzas\n');

```



```

for n=nVals
    % Cilindros impares
    CnI=sum(cosd(n*AlphaI));
    SnI=sum(sind(n*AlphaI));
    fprintf('n: %2d Impar CnI: %8.4f SnI: %8.4f\n',n, CnI, SnI);
    % Cilindros pares
    CnP=sum(cosd(n*AlphaP-n*180));
    SnP=sum(sind(n*AlphaP-n*180));
    fprintf('n: %2d Par CnP: %8.4f SnP: %8.4f\n',n, CnP, SnP);
end

% Coeficientes del equilibrado de momentos
fprintf('Equilibrado de momentos\n');
for n=nVals
    % Cilindros impares
    CpnI=sum(ZI.*cosd(n*AlphaI));
    SpnI=sum(ZI.*sind(n*AlphaI));
    fprintf('n: %2d Impar CpnI: %8.4f SpnI: %8.4f\n',n, CpnI, SpnI);
    % Cilindros paresD
    CpnP=sum(ZP.*cosd(n*AlphaP-n*180));
    SpnP=sum(ZP.*sind(n*AlphaP-n*180));
    fprintf('n: %2d Par CpnP: %8.4f SpnP: %8.4f\n',n, CpnP, SpnP);
end

```