Trigonometría y astronomía en el *Tratado del Cuadrante Sennero* (*c.* 1280)*

ELENA AUSEJO**

I. *INTRODUCCION*

El *Cuadrante Sennero*, tal como aparece brevemente descrito en el tratado alfonsí que lleva su nombre, es un instrumento de observación que presenta dos variantes: la primera consiste en un cuadrante móvil combinado con un círculo trazado en el suelo, en el plano del horizonte, y dividido en 360º (1); la segunda consiste en un cuadrante fijo situado en el plano del meridiano.

La obra, original de Rabí Çag, estaba, al parecer, dividida en dos partes —dedicadas a los dos tipos de cuadrantes—, la primera de las cuales comprendería 13 capítulos. De éstos, los ocho que todavía se conservan fueron editados y estudiados por Millás Vallicrosa (MILLÁS VALLICROSA, 1960).

Sin embargo, tanto su carácter como sus contenidos hacen de este breve tratado una obra singular dentro de la producción científica alfonsí, por lo que resulta interesante revisarlo a la luz de las nuevas investigaciones sobre la obra del Rey Sabio.

En primer lugar, la obra que nos ocupa no se ajusta a las características propias de los tratados medievales referentes a instrumental astronómico. El instrumento en cuestión aparece descrito de manera breve e imprecisa, la obra no dedica ni una sola línea a su construcción (2), y, a lo largo del texto, son raras las referencias al instrumento usado a la hora de resolver los diferentes problemas planteados. A diferencia de los tratados recogidos en los *Libros del Saber de Astronomía* (RICO, 1866),

* El presente trabajo ha sido realizado gracias a una subvención de la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

** Departamento de Arabe. Universidad de Barcelona. España.

(1) Un instrumento similar, aunque provisto de un doble cuadrante que permite a dos personas realizar observaciones simultáneas, aparece explicado con todo detalle por al-ʿUrḍī en su descripción de los instrumentos del observatorio de Marāga (siglo XIII) (SEEMAN, 1928, pp. 72-81). Posteriormente, también al-Kāšī (siglo XV) describirá este mismo instrumento —refiriéndose explícitamente a Marāga— (KENNEDY, 1961, pp. 102-103).

(2) Según el índice (MILLÁS, 1960, pp. 240-241), el capítulo XI —hoy perdido— estaría dedicado a la construcción del instrumento. En la tradición medieval los tratados referentes al uso del instrumental astronómico suelen comenzar con la descripción del aparato, para pasar posteriormente a sus aplicaciones.

DYNAMIS
Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam. Vol. 4, 1984, pp. 7-22.
ISSN: 0211-9536.

orientados a la construcción y al uso práctico y concreto de diversos instrumentos astronómicos, el *Tratado del Cuadrante Sennero* presenta una colección de problemas, cada uno de los cuales aparece planteado, resuelto y demostrado con todo rigor. Estas demostraciones constituyen un hecho excepcional en la bibliografía alfonsí. En ellas y en la reconstrucción de las figuras descritas para su ilustración —que no se han conservado— se centra en buena medida nuestro estudio.

El nivel de conocimientos trigonométricos expuesto en este tratado constituye también la única prueba de la asimilación y uso, por parte alfonsí, del tipo de trigonometría superior representada por Ibn Muʿāḏ (siglo XI) (VILLUENDAS, 1979; SAMSO, 1980; GARCÍA DONCEL, 1982) e Ibn Aflaḥ (siglo XII) (LORCH, 1973) en la Península Ibérica, e ilustra el mantenimiento en el siglo XIII de la coexistencia —iniciada en el siglo XI— de este tipo de trigonometría superior junto con una de carácter más práctico —en el caso alfonsí, la correspondiente a los *Libros del Saber de Astronomía* (AUSEJO, 1984)—. El presente trabajo está fundamentalmente enfocado hacia el análisis de esta cuestión.

Sin embargo, el hecho de que esta obra muestre cómo el «utilitarismo» que a menudo caracteriza el quehacer científico alfonsí no implica necesariamente un bajo nivel de desarrollo teórico no debe tampoco llevar a una sobrevaloración del texto en el sentido de un tratado moderno. El *Tratado del Cuadrante Sennero* aparece como una colección de problemas astronómicos ordenados según un grado de dificultad creciente y destinados a un público ya iniciado en el manejo de los conceptos básicos de la astronomía y de la trigonometría.

II. *TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS*

a) *De eclípticas a ecuatoriales*

La declinación de un astro *(arredramiento del ecuador)* se obtiene a partir de su longitud *(longura)* y latitud *(ladeza)* mediante la fórmula

$$\text{sen}\,\delta = \frac{\text{sen}\,(\beta \pm \beta') \cdot \cos \varepsilon}{\cos \beta'} \qquad \text{(MILLÁS, 1960, p. 241)}$$

donde β' es la declinación del grado de la eclíptica que culmina con el grado del rebatimiento del astro —es decir, β' = HC = DG en la Figura 1—. El procedimiento se encuentra documentado en diversos autores, entre ellos Tolomeo (NEUGEBAUER, 1975, I, p. 33), al-Battānī (NA-

LLINO, 1899-1907, I, pp. 192-193), Ibn Yūnus (DELAMBRE, 1819, página 141), Abū-l-Ḥasan (NALLINO, 1899-1907, I, p. 192), Ibn al-Bannā' (VERNET, ORUS, 1950) y Ulug Beg (SEDILLOT, 1847-1853, II, páginas 89-90). La Figura 2 reconstruye la explicada en el texto, que es totalmente correcta salvo en la referencia al triángulo BDA, donde debe leerse BDN (MILLÁS, 1960, p. 242):

Siendo ABC el cerco del mediodía —que en este caso no es el meridiano—, DHZ el ecuador, AHC la eclíptica y T la posición del astro, la demostración se basa en la proporción (Figura 2):

$$\frac{\text{sen NT}}{\text{sen TL}} = \frac{\text{sen NB}}{\text{sen BD}}$$

donde TL es la unica incógnita, ya que sen NB = cos NK y sen BD = = cos ε. En efecto, aplicando el teorema de Menelao se tiene:

$$\frac{\text{sen DB}}{\text{sen DP}_Q} = - \frac{\text{sen BN}}{\text{sen TN}} \cdot \frac{\text{sen TL}}{\text{sen LP}_Q}$$

$$\text{sen TL} = \frac{\text{sen NT} \cdot \text{sen BD}}{\text{sen NB}} = \frac{\text{sen}\,(\beta \pm \beta') \cdot \cos \varepsilon}{\cos \beta'}$$

La demostración, sencilla y clara, sólo ofrece un punto de duda en lo relativo a la *declinación* en sentido alfonsí, es decir, a la cantidad β' = NK de la Figura 2. Al plantear la figura afirma (MILLÁS, 1960, página 242) que si la estrella estuviese sobre el punto K, su declinación

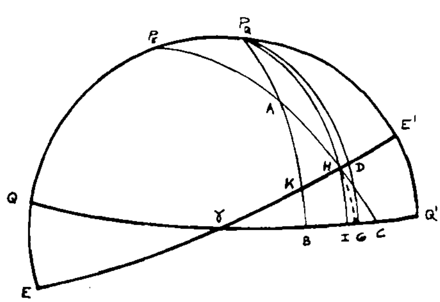

Figura 1

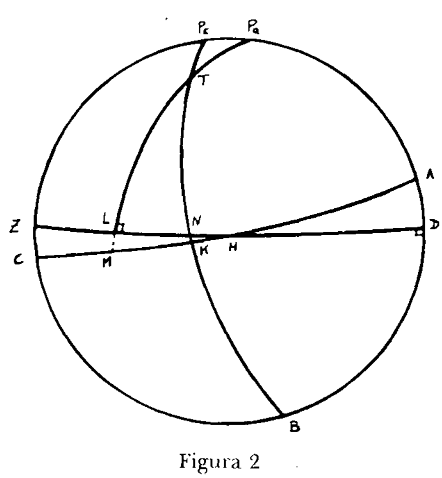

Figura 2

(arredramiento) sería NK, lo cual, además de ser falso, contradice la fórmula del autor —sustituyendo $\beta = 0$ se obtiene $\text{sen}\,\delta = \text{tg}\,\beta' \cdot \cos\varepsilon$—. La poca claridad del pasaje que describe la determinación de β' y esta confusión de β' con δ plantean dudas acerca de la correcta determinación y uso de esta magnitud por parte del autor.

La ascensión recta *(sobimientos eguales)* de un astro se determinan mediante la fórmula

$$\alpha = \lambda' \pm \Delta, \text{ donde } \cos\Delta = \frac{\cos(\beta \pm \beta') \cdot 60}{\cos\delta}$$

(MILLÁS, 1960, pp. 243-244)

siendo Δ = LN la diferencia de paso *(desvariamiento del passamiento* o *diverssidat del passamiento)* y λ' = HN *(arredramiento egual)* —Figura 2—. Buscando en la tabla de ascensiones rectas se obtiene el grado de la eclíptica que culmina con el astro.

La demostración trigonométrica (MILLÁS, 1960, pp. 244-245) se basa en una aplicación directa del teorema del coseno al triángulo esférico rectángulo TLN (Figura 2):

$$\frac{\cos \text{TN}}{\cos \text{TL}} = \frac{\cos \text{NL}}{\text{sen } 90}, \text{ de donde } \cos\Delta = 60 \cdot \frac{\cos(\beta \pm \beta')}{\cos\delta}$$

El punto M representa el grado de la eclíptica que culmina con el astro (Figura 2). Hay que señalar que en toda la descripción de la figura debe leerse *k* por *h*. Se ofrece además otra figura (Figura 3) para el caso en que la declinación y la latitud son de signos distintos —U representa la posición del astro y Q el grado que culmina con él—.

Este procedimiento no parece haber sido tomado de la tradición tolemaica, ni aparece descrito en ninguno de los autores árabes anteriores a Alfonso X arriba citados. Sí que aparece, sin embargo, recogido posteriormente por Ibn al-Bannā' (VERNET; ORUS, 1950).

b) *De horizontales a eclípticas*

A esta cuestión está dedicado el capítulo séptimo del *Tratado del Cuadrante Sennero* (MILLÁS, 1960, pp. 251-255). Probablemente debido a la complejidad del procedimiento empleado en este capítulo, a diferencia de los seis que le preceden, no se expone la fórmula utilizada para pasar luego a la demostración, sino que se detallan cada uno de los pasos efectuados, quedando la figura más como ilustración que como base de la demostración. Veamos el proceso:

Sea IEOC el horizonte, QEQ' el ecuador, KOB la eclíptica, ABC el meridiano, O el ascendente, A el cénit y H la posición del astro (Figura 4). Como datos disponemos de la altura HD y acimut *(zonte de la altura)* DC del astro y de la longitud del ascendente. Podemos, pues, obtener la declinación del grado de medio cielo BQ' y, con ella, la altura del grado de medio cielo BC mediante la fórmula:

altura meridiana = colatitud ± declinación (MILLÁS, 1960, pp. 241-242)

Hallando la amplitud ortiva del ascendente *(anchura del orientamiento)* EO —por un procedimiento que detallaremos más adelante— conoceremos el acimut del ascendente CO *(arredramiento del zonte del ascendent)* sumando o restando de 90º. Hallando además la distancia, medida sobre la eclíptica, del ascendente al grado de medio cielo *(arredramiento del ascendent del grado de medio cielo)* OB se obtiene:

$$\text{sen O} = \frac{\text{sen BC} \cdot 60}{\text{sen OB}} \qquad \text{(Teorema del seno en BOC)}$$

$$\text{OD} = \text{OC} - \text{DC}$$

$$\cos \text{Z} = \frac{\cos \text{OD} \cdot \text{sen O}}{60}$$

[Teorema de Geber en OZD; debe leerse cos OD por sen OD (MILLÁS, 1960, p. 252, lín. 24)].

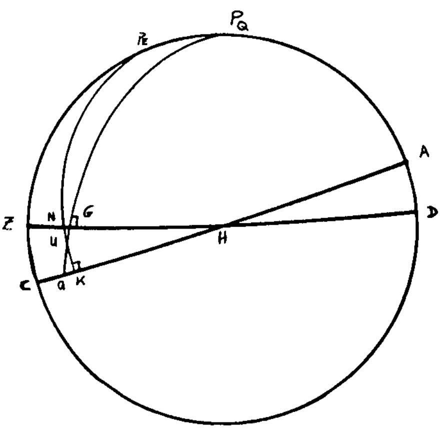

Figura 3

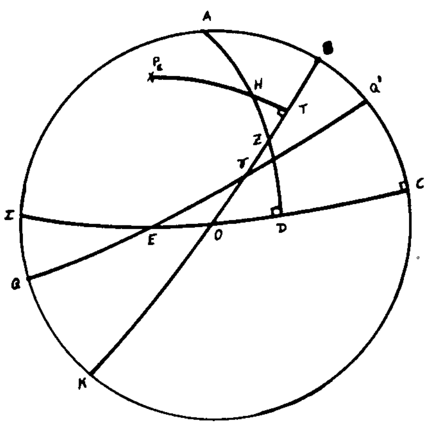

Figura 4

$$\text{sen } OZ = \frac{\text{sen } OD \cdot 60}{\text{sen } Z} \qquad \text{(Teorema del seno en OZD)}$$

$$\text{sen } ZD = \frac{\text{sen } OZ \cdot \text{sen } O}{60} \qquad \text{(Teorema del seno en OZD)}$$

$$HZ = HD - ZD$$

$$\text{sen } HT = \frac{\text{sen } HZ \cdot \text{sen } Z}{60} \qquad \text{(Teorema del seno en HTZ)}$$

$$\cos ZT = \frac{\cos HZ \cdot 60}{\cos HT} \qquad \text{(Teorema del coseno en HTZ)}$$

longura primera $= 90 - \text{arcsen}(\cos ZT) = ZT$

longura cierta $= ZT \pm OZ = OT$

longura $= \sigma O \pm OT = \gamma T$

Con esto hemos obtenido la latitud *(ladeza)* HT y la longitud *(longura)* γT del astro. Sólo señalar que la diferenciación de signos que se produce a partir de la determinación de la *longura primera* depende de si HD > ZD (latitud Norte) o HD < ZD (latitud Sur), como indica el texto en un pasaje bastante oscuro (MILLÁS, 1960, p. 253, lín. 5-7 y 12-13).

En el caso en que OC = DC se tiene que los ángulos antes designados por O y Z (α_1 y α_2 en la Figura 5) son complementarios y que la *longura primera* es igual a la *longura cierta*. Si además $\gamma = O$ entonces la *longura cierta* es igual a la longitud.

Una última precisión: la soltura y frecuencia con que en el texto se manejan fórmulas que incluyen la utilización indiscriminada de arcos y ángulos, senos y cosenos al mismo tiempo, la expresión de dichas fórmulas y la figura descrita señalan, a nuestro juicio, el uso de los teoremas indicados, sin que ello quiera decir que no pudieran ser obtenidos más o menos laboriosamente a partir del teorema de Menelao.

A señalar que tampoco este procedimiento aparece en ninguno de los autores hasta ahora citados.

c) *Declinación solar*

El capítulo octavo (MILLÁS, 1960, pp. 255-258), el único en el que aparece una referencia explícita a la utilización del *Cuadrante Sennero* (MILLÁS, 1960, p. 255), expone un procedimiento para hallar la declina-

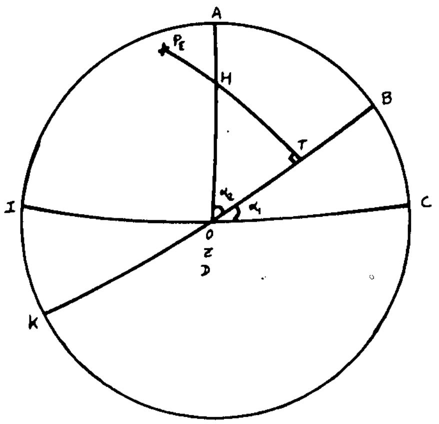

Figura 5

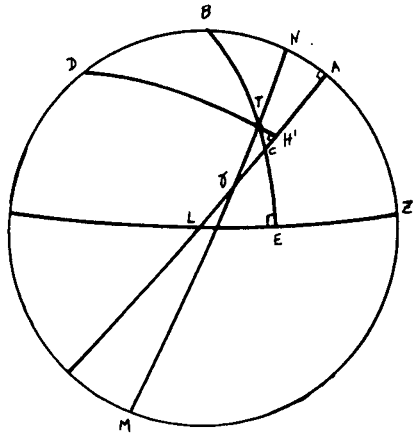

Figura 6

ción del Sol a partir de sus coordenadas horizontales, que tampoco se encuentra en los autores previamente citados —habitualmente se obtiene la declinación del Sol a partir de su longitud mediante la fórmula sen δ = sen λ · sen ε—. El proceso es el siguiente:

Sea LEZ el horizonte, LA el ecuador, MN la eclíptica, DZ el meridiano, D el polo del ecuador, B el cénit, T la posición del Sol, TE su altura y EZ su acimut (Figura 6). Entonces se tiene:

$$\frac{\text{sen EZ} \cdot \text{sen } (90 - \varphi)}{60} = \cos C$$

(Teorema de Geber en BCA, ya que B = EZ y BA = φ = 90 − AZ. En la demostración debe leerse AZ por AC (MILLÁS, 1960, p. 257, lín. 11).

$$90 - \text{arcsen } (\cos C) = C$$

$$\frac{\text{sen } \varphi \cdot 60}{\text{sen } C} = \text{sen BC}$$ (Teorema del seno en BCA, ya que A = 90º)

$$90 - BC = CE$$

$$TE - CE = TC$$

$$\frac{\text{sen TC} \cdot \text{sen C}}{60} = \text{sen TH'} = \text{sen } \delta$$ [Teorema del seno en TCH' (3)]

(3) El texto olvida tomar seno en TC (MILLÁS, 1960, p. 256, l.7-8). Además, en la p. 257, líneas 34 y ss., debe leerse H' por H, ya que H es el segundo punto de corte de horizonte y ecuador —que no aparece en nuestra figura—. En las tres primeras líneas de la p. 258 debe leerse *proporción del sino de .c.t. al sino del angulo de h', el que es subtender al angulo derecho a*

La declinación será nula si TE = CE, positiva si TE > CE y negativa si TE < CE. Una vez obtenida la declinación remite, para el conocimiento de la longitud, a una tabla de declinación solar que no aparece en las versiones latinas de las tablas alfonsíes (4), aunque sí se alude a ella en los cánones castellanos (RICO, 1866, IV, p. 136, cap. XX).

El hecho de considerar la longitud como incógnita explica la no utilización del procedimiento habitual al que aludíamos al principio de este apartado. Sin embargo, podría haber utilizado el procedimiento de cambio de coordenadas descrito en el apartado anterior para obtener directamente la longitud solar sin pasar por la declinación. En este sentido, la obra presenta un encomiable afán de superación e innovación.

En el caso en que el Sol se encuentre en el cuadrante oriental septentrional u occidental septentrional se expone un procedimiento análogo al anterior:

Siendo HKLT el horizonte, HLE el ecuador, KT la eclíptica, ANE el meridiano, A el cénit, P el polo del ecuador, B la posición del astro, DL y BD nuestros datos, se tiene (Figura 7):

$$\frac{\text{sen ND} \cdot \text{sen}\,(90-\varphi)}{60} = \cos C$$

(Teorema de Geber en DCL, ya que L = 90 − φ, LD = 90 − ND y D = 90°).

$$90 - \text{arcsen}\,(\cos C) = C$$

$$\text{arcsen}\left(\frac{\text{sen LD} \cdot \text{sen}\,(90-\varphi)}{\text{sen } C}\right) + \text{BD} = \text{BC}$$

[Teorema del seno en DCL, aunque el texto olvida tomar arcseno (MILLÁS, 1960, p. 258, 1.26)].

$$\frac{\text{sen BC} \cdot \text{sen } C}{60} = \text{sen}\,\delta$$

[Teorema del seno en BCH', aunque el texto olvida tomar seno en BC y en δ (MILLÁS, 1960, p. 258, lín. 27-28)].

1x. Pues de la multiplicación del sino de .c.t. en el sino del angulo de .c.t. en el sino del angulo de .c. el que nombramos padron, et de la partición de lo que saliere sobre 1x sera el sino de .h'.t. sabudo.

(4) Hemos consultado las ediciones de 1483, 1524 y 1553.

III. *UNA CONSTRUCCION DE ORIGEN HINDU*

La determinación del arco diurno, de las horas iguales y temporales y de la división de las casas del zodiaco tiene especial relevancia en este texto alfonsí porque desemboca en la utilización, para la resolución de un problema concreto, de técnicas de origen hindú.

Veamos cómo se resuelve:

a) *Determinación del arco diurno. Horas iguales y temporales*

El arco diurno se obtiene mediante la fórmula:

$$\text{arc. diurno} = 180^{\circ} \pm 2P \qquad \text{(MILLÁS, 1960, p. 246)}$$

$$\text{donde sen } P = 60 \; \frac{\text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta} \qquad \text{(MILLÁS, 1960, p. 246)}$$

siendo P la ecuación del día *(diverssidat* o *desvariamiento)*. Dividiendo el arco diurno por 12 obtendremos horas temporales, y dividiendo por 15, horas iguales.

Siendo ABCD el meridiano, AVC el horizonte, BVD el ecuador, O y E los polos del ecuador y M la posición del astro (Figura 8) la demostración es la siguiente (MILLÁS, 1960, pp. 246-247):

$$\frac{\text{sen } M}{\text{sen } L} = \frac{\cos V}{\cos \delta} \qquad \text{(Teorema de Geber)}$$

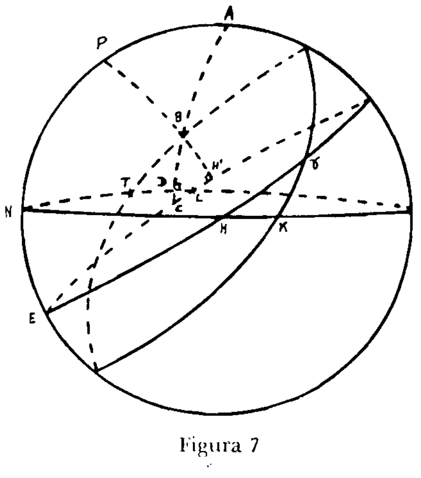

Figura 7

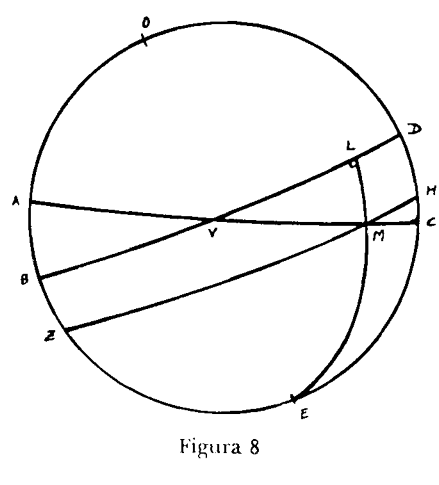

Figura 8

$$\frac{\text{sen LM}}{\text{sen V}} = \frac{\text{sen LV}}{\text{sen M}} \qquad \text{(Teorema del seno)}$$

$$\text{sen LV} = \text{sen M} \ \frac{\text{sen } \delta}{\cos \varphi} = 60 \ \frac{\text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$$

por ser L $= 90^o - \varphi$, V $= 90^o - \varphi$, y LM $= \delta$.

El texto presenta algunas erratas. En la exposición de la fórmula olvida multiplicar por sen δ. Además, en la demostración debe leerse *circulatorio de z.m.h.* por *circulatorio de e.m.h.* (MILLÁS, 1960, p. 246, lín. 37) y en la aplicación del teorema del seno se trata del seno de *l.v* y no del seno de *l.n*, puesto que *n* no existe en la figura anteriormente descrita (MILLÁS, 1960, p. 247, lín. 21); en una ocasión aparece también la cantidad CX por XC (MILLÁS, 1960, p. 247, lín. 14).

El capítulo finaliza con el apunte de una demostración análoga para el caso en que la estrella esté en el hemisferio Norte. También aquí hay que hacer algunas correcciones. Si, como indica el texto, la estrella está situada en K, este punto deberá estar sobre el horizonte —para obtener una situación análoga a la anterior y aplicar el mismo razonamiento—; entonces la estrella se moverá en un círculo TKF, por ejemplo, y no TKA, como figura en el texto (MILLÁS, 1960, p. 247, lín. 28-33). Así las cosas, operando como antes se obtiene el *desvariamiento* VN (Figura 9) y el arco diurno será 2VN + 180°.

Antes de continuar conviene aclarar que cuando aquí se indica que se utiliza determinado teorema en una demostración no quiere decir que sea esa la única posibilidad, sino simplemente que, tal y como aparece el texto, resulta la más probable —puesto que los textos trigonométricos alfonsíes suelen detallar las operaciones realizadas—.

Varios autores recogen este procedimiento, entre ellos Tolomeo (NEUGEBAUER, 1975, I, p. 36), Ḥabaš al-Ḥāsib (TEKELI, 1972, p. 613), al-Battānī (NALLINO, 1899-1907, I, pp. 188-189) Ibn Yūnus (DELAMBRE, 1819, p. 107) y Ulug Beg (SEDILLOT, 1847-1853, II, p. 95).

Una vez obtenido el arco diurno se determina la *saeta del arco diurno* que, en la obra alfonsí, indica en realidad el seno verso del arco semidiurno (5). Con esta definición, y designando por P el *desvariamiento* anteriormente obtenido, queda (MILLÁS, 1960, p. 247):

$$\textit{saeta del arco diurno} = \begin{array}{l} R - \cos(90 - P) = R - \text{sen P, si } \delta < 0 \\ R - \cos(90 + P) = R + \text{sen P, si } \delta > 0 \end{array}$$

(5) *Saeta del arco diurno* es traducción literal del árabe *sahm qaws al-nahar*.

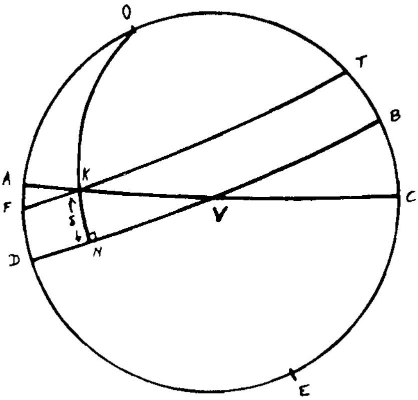

Figura 9

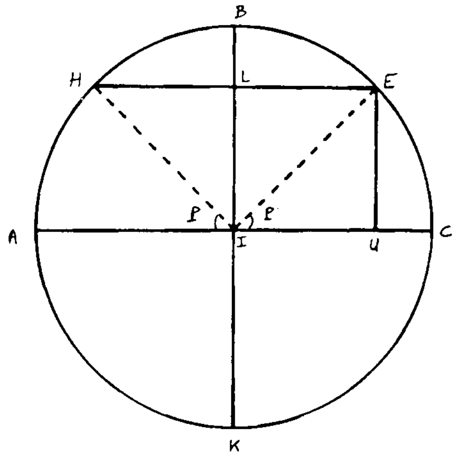

Figura 10

Siendo HBE el arco diurno —y no HBC, como figura en el texto (MILLÁS, 1960, p. 248)—, BL su seno verso (Figura 10), la demostración es la siguiente:

BL = BI − LI = 60 − EU = 60 − sen P, ya que LI = EU por ser *equidistantes* (MILLÁS, 1960, p. 248).

En la figura 11 el arco diurno es ZBO, su seno verso HB y sen P = UO = HI (y no UO = KI como figura en el texto) por lo que HB = BI + IH = 60 + sen P (MILLÁS, 1960, p. 248).

Antes de pasar a la división de las casas del zodiaco y al problema de origen hindú aprovecharemos la Figura 8 para ver la determinación de la amplitud ortiva *(anchura del orientamiento)* MV, obtenida mediante la fórmula:

$$\text{sen MV} = 60 \cdot \frac{\text{sen } \delta}{\cos \varphi} \qquad \text{(MILLÁS, 1960, p. 248)}$$

ya que, por el Teorema de Menelao se tiene:

$$\frac{\text{sen AB}}{\text{sen BE}} = \frac{\text{sen AV}}{\text{sen VM}} \cdot \frac{\text{sen LM}}{\text{sen LE}}$$

luego, por ser sen AV = sen LE = 60 y sen BE = sen L, queda:

$$\frac{\text{sen ML}}{\text{sen AB}} = \frac{\text{sen MV}}{\text{sen L}} \qquad \text{(MILLÁS, 1960, pp. 248-249)}$$

con sen AB = sen $(90 - \varphi) = \cos \varphi$, ML = δ y L = 90°. Este procedimiento está perfectamente localizado en la tradición anterior, en autores como Ḥabaš al-Ḥāsib (TEKELI, 1972, p. 614), al-Battānī (NALLINO, 1899-1907, I, pp. 177-178), Ibn Yūnus (DELAMBRE, 1819, p. 148) y Ulug Beg (SEDILLOT, 1847-1853, II, p. 95).

b) *Determinación de las casas del zodiaco. Horas transcurridas*

La resolución de este problema pasa por la determinación del ángulo horario *t* mediante la fórmula:

$$\text{seno verso t} = \text{seno verso } (90 \pm P) - \frac{\text{sen h} \cdot \text{sen vers } (90 \pm P)}{\text{sen alt. mer.}}$$

donde h es la altura del Sol y P la ecuación del día —el problema se encuentra planteado para el Sol—. La fórmula aparece ya citada por autores como Ḥabaš al-Ḥāsib (TEKELI, 1972, p. 613), al-Battānī (NALLINO, 1899-1907, I, pp. 189-190 y 195-196), Abū-l-Ḥasan (NALLINO, 1899-1907, I, p. 190), Azarquiel (MILLÁS, 1950, pp. 141-142) y Ulug Beg (SEDILLOT, 1847-1853, II, p. 122). Al parecer, la fórmula habría sido obtenida por Ḥabaš y demostrada por Abū-l-Wafā' y al-Bīrūnī y sería equivalente a la dada por Brahmagupta en su Jandajādyaka (TEKELI, 1972, p. 613).

Obtenido el ángulo horario, su suma con la ascensión recta del Sol nos dará la ascensión recta del principio de la casa X y, mediante tablas, tendremos también su longitud. A continuación averiguaremos la posición del ascendente —lo cual es factible, puesto que conocemos la ecuación del día y la ascensión recta de la casa X, aunque el pasaje del texto que describe esta operación resulta bastante oscuro (MILLÁS, 1960, páginas 249-250)— y su ascensión oblicua. Restando la ascensión oblicua del Sol de la ascensión oblicua del ascendente obtendremos lo que ha girado la esfera desde el orto. Dividiendo por 15 hallaremos el número de horas iguales transcurridas y dividiendo por 12, el número de horas temporales (6).

La demostración de la fórmula dada para la obtención del ángulo horario es esencialmente la misma que la de Abū-l-Wafā' (NADIR, 1960):

Siendo AB el horizonte, HC el meridiano, ACB el paralelo de declinación del astro situado en L y H el cénit, tendremos que CD es el seno de la altura meridiana, LM el seno de la altura del astro LN, CT el seno verso del ángulo horario CL y CZ el seno verso del arco semidiurno

(6) Las ascensiones oblicuas se obtienen por tabla.

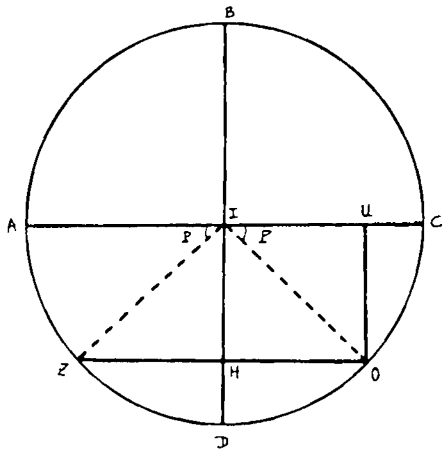

Figura 11

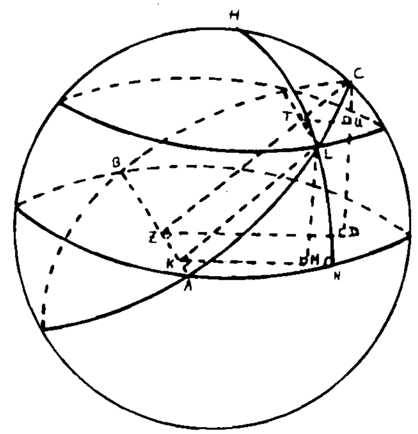

Figura 12

ALC —es CZ y no EZ (MILLÁS, 1960, p. 250, lín. 23)—. Entonces, por semejanza de los triángulos ZDC y KML se tiene (Figura 12):

$$LK = \frac{CZ \cdot LM}{CD} \text{ y } CT = CZ - TZ = CZ - LK$$

(MILLÁS, 1960, pp. 250-251)

Se ofrece, además, la siguiente demostración equivalente, basada en la semejanza de los triángulos TUC y ZDC:

$$CT = \frac{CZ \cdot CU}{CD} = \frac{CZ \cdot (CD - LM)}{CD} = CZ - \frac{CZ \cdot LM}{CD}$$

(MILLÁS, 1960, pp. 250-251)

Como correcciones, señalar que en la p. 250, a partir de la lín. 30 debe leerse *.k.* por *.h.;* también en la p. 250, lín. 40, debe leerse *.t.l.* por *.k.l.,* y en la p. 251, lín. 4, *.c.d.* por *.z.d.*

Todo el procedimiento está basado en la utilización de configuraciones rectilíneas dentro de la esfera, a pesar de que el problema tratado concierne a arcos de la superficie esférica. Según Nadir, ésta sería una técnica característica de la astronomía esférica hindú, así como de la astronomía griega anterior a la utilización del teorema de Menelao (NADIR, 1960, p. 462).

IV. *CONCLUSIONES*

Al principio del presente trabajo señalábamos como centro de interés del *Tratado del Cuadrante Sennero* el hecho de que una obra en principio dedicada a un instrumento de observación se presentara como una colección de problemas astronómicos planteados, resueltos y demostrados según un orden de dificultad creciente. Apuntábamos también la aparición en este tratado de un tipo de trigonometría superior a la de los *Libros del Saber de Astronomía.* En efecto, a lo largo de las páginas precedentes hemos visto la utilización de los teoremas del seno, del coseno y de Geber. Esto prueba, cuando menos, la asimilación por parte alfonsí de la obra de Ibn Aflaḥ e ilustra la permanencia, en el siglo XIII, de la ya mencionada coexistencia de dos niveles en la trigonometría hispánica medieval. Sin embargo, no puede afirmarse categóricamente que Alfonso X conociera la obra trigonométrica de Ibn Muʿāḏ, puesto que el texto no maneja los teoremas que, como el de las tangentes, diferencian y sitúan a este autor en un nivel superior al de Ibn Aflaḥ.

Pero el *Tratado del Cuadrante Sennero* no sólo permite hablar de asimilación, sino también de un cierto grado de originalidad. En las cuestiones relativas a transformación de coordenadas se observa el uso de procedimientos de cálculo no documentados ni en la tradición tolemaica ni en autores árabes tan relevantes como Habaš al-Ḥāsib, al-Battānī, Ibn Yūnus, Azarquiel, Abū-l-Ḥasan, Ibn al-Bannā' o Ulug Beg. Quizá sea prematuro hablar de originalidad, aunque no deja de ser sintomático el hecho de que estas técnicas, además de no encontrarse en importantes autores anteriores a Alfonso X, tampoco estén recogidas en destacados autores posteriores. En cualquier caso, es importante resaltar esta emancipación alfonsí de autores que, como Tolomeo o al-Battānī, son de alguna manera las fuentes paradigmáticas que alimentan la trigonometría y astronomía hispánica medieval.

En medio de este nivel de asimilación e incluso posible originalidad resulta llamativa la regresión a fuentes hindúes que aparece en relación con la determinación del ángulo horario. La dificultad aparente en la construcción de la figura —al tratar con rectas *dentro* de la esfera— no supone un estadio más avanzado en la trigonometría esférica, sino al contrario. Sin embargo, hay que decir que la aplicación del teorema del seno a este problema no es fácil, e incluso Abū-l-Wafā', uno de los descubridores del teorema del seno, utiliza este tipo de configuraciones de origen hindú en dos de los tres métodos que expone para la determinación del «arco de revolución» —el tercer procedimiento utiliza el teorema de Menelao, aunque con el cuadrilátero esférico en lugar del triángulo esférico como configuración básica, por lo que también sería un método arcaico— (NADIR, 1960, p. 463).

En conjunto, el *Tratado del Cuadrante Sennero* representa una de las más altas cotas dentro del quehacer científico alfonsí y se sitúa perfectamente en un nivel al menos medio, dentro del contexto de la producción científica árabe medieval.

V. *GLOSARIO*

Recogemos aquí una relación de los principales términos astronómicos utilizados en el texto del *Tratado del Cuadrante Sennero:*

abaxa lo un oficio: dividir por 60.
acomediamiento: mediación.
alça lo un oficio: multiplicar por 60.
altura de la Cabeça de Aries: colatitud.
altura en el cerco del medio día: altura meridiana.
anchura del occidentamiento: amplitud occidua.
anchura del orientamiento: amplitud ortiva.
ángulo derecho/ángulo levantado: ángulo recto.
arredramiento: distancia.
arredramiento del cerco de mediodía: ángulo horario.
arredramiento del eguador del día: declinación.
arredramiento del zonte: acimut.
arredramiento egual: λ' = HN (Figura 2).
ascendent: ascendente.
cerco de los signos: eclíptica.
circulatorio: paralelo de declinación.
comediamiento: mediación.
declinación: 1) β' = NK (Figura 2).
2) declinación del Sol (MILLÁS, 1960, 255-258).
declinación mayor: oblicuidad de la eclíptica (del árabe *al-mayl al-aʿẓam* o *al-mayl al-kullī*).
desvariamiento/diverssidat: ecuación del día.
desvariamiento del passamiento/diverssidat del passamiento: diferencia del paso Δ = LN (Figura 2).
eguador del día: ecuador.
equidistante: paralelo (MILLÁS, 1960, pp. 248-251).
grado que se acomedia: mediación.
ladeza: latitud.
longura: longitud.
mudamiento estival: solsticio de verano.
mudamiento ivernal: solsticio de invierno.
saeta del arco diurno: seno verso del arco semidiurno (del árabe *sahm* qaws al-nahār).

sobimientos de tu lugar: ascensión oblicua.
sobimientos eguales: ascensión recta.
sobrefaz: plano.
zonte de la altura: acimut.
zonte de la cabeca: cenit.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

AUSEJO, E. (1984). Sobre los conocimientos trigonométricos en los Libros del Saber de Astronomía de Alfonso X el Sabio. *Llull, 6,* 5-36.

DELAMBRE, J. B. (1819). *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age.* Paris.

GARCÍA DONCEL, M. (1982). Quadratic interpolation in Ibn Muᶜādh. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 32,* 68-77.

KENNEDY, E. S. (1961). Al-Kāshī's treatise on astronomical observational instruments. *Journal of Near Eastern Studies, 20,* 98-108. Reeditado en KENNEDY, E. S. (1983). *Studies in the Islamic Exact Sciences.* American University of Beirut, 394-404.

LORCH, R. (1973). Jābir ibn Aflah, *in: DSB,* VII, New York, 37-39.

MILLÁS VALLICROSA, J. M. (1950). *Estudios sobre Azarquiel.* Madrid-Granada.

MILLÁS VALLICROSA, J. M. (1960). Una nueva obra astronómica alfonsí: el Tratado del *Cuadrante Sennero, in: Nuevos Estudios sobre Historia de la Ciencia Española,* Barcelona, 221-258. Originalmente publicado en *Al-Andalus, 21,* 59-92.

NADIR, N. (1960). Abū al-Wafā' on the solar altitude. *The Mathematics Teacher, 53,* 460-463. Reeditado en KENNEDY, E. S. (1983). *Studies in the Islamic Exact Sciences.* American University of Beirut, 280-283.

NALLINO, C. A. (1899-1907). *Al-Battānī sive Albatenii. Opus Astronomicum.* Milano.

NEUGEBAUER, O. (1975). *A History of Ancient Mathematical Astronomy.* Berlin, Heidelberg, New York.

RICO y SINOBAS, M. (1866). *Libros del Saber de Astronomía del rey don Alfonso X de Castilla.* 5 vols., Madrid.

SAMSO, J. (1980). Notas sobre la trigonometría esférica de Ibn Muᶜāḏ *Awraq, 3,* 60-68.

SEDILLOT, L. P. E. A. (1847-1853). *Prolégomènes des Tables Astronomiques d'Oloug Beg.* 2 vols., Paris.

SEEMANN, H. J. (1928). Die Instrumente der Sternwarte zu Marâgha nach den Mitteilungen von al-Urdî. *Sitzungsberichten der Physikalish-medizinischen Sozietät zu Erlangen, 60,* 15-126.

TEKELI, S. (1972). Ḥabaš al-Ḥāsib, *in: DSB,* V, New York, 612-620.

VERNET, J.; ORUS, J. J. de (1950). Transformación de coordenadas astronómicas entre los árabes. *Gaceta matemática, 2,* 3-7. Reeditado en *Estudios sobre Historia de la Ciencia Medieval,* Barcelona-Bellaterra, 1979, 327-331.

VILLUENDAS, M. V. (1979). *La trigonometría europea en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Muᶜāḏ, el Kitāb Mayhūlāt.* Barcelona, Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas Letras.