МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

IX-й Международной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 26–28 мая 2022 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2022

5. *Cui Z., Han Y., Ai X., Zhao W.* A domain decomposition of the finite element-boundary integral method for scattering by multiple objects // Electromagnetics. – 2011. – V. 31. – P. 469-482.

6. *Hall W.S., Mao X.Q.* Boundary element method calculation for coherent electromagnetic scattering from two and three dielectric spheres // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1995. – V. 15. – P. 313–320.

7. *Hunka J.F., Mei K.K.* Electromagnetic scattering by two bodies of revolution // Electromagnetics. – 1987. – V. 1 – No. 3. – P. 329–347.

8. *Ewe W.-B., Li L.-W., Leong M.-S.* Solving mixes dielectric/conducting problem using adaptive integral method // Progress in Electromagnetic Research, PIER. – 2004. – V. 46. – P. 143–163.

9. *Sharkawy M.H., Demir V., Elsherbeni A.Z.* Plane wave Scattering from throe dimensional multiple Objects using the iterative multiregion technique based on the FDFD method // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2006. – V. AP-54. – No. 2. – P. 666–673.

10. *Alfonzatti S., Borzi G.* Finite-element solution to electromagnetic scattering problems by means of the Robin boundary condition iteration method // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2002. – V. AP.-50. – No. 2. – P. 132–140.

11. *Дмитренко А.Г., Мукомолов А.И.* Об одной модификации метода неортогональных рядов для решения задач электромагнитного рассеяния на произвольных гладких идеально проводящих телах // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т. 33. – № 3. – С. 449–455.

12. *Дмитренко А.Г., Мукомолов А.И.* Численный метод решения задач электромагнитного рассеяния на трехмерном магнитодиэлектрическом теле произвольной формы // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40. – № 6. – С. 875–880.

DOI: 10.17223/978-5-907572-27-0-2022-9

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ПАРТИИ ТОВАРА С ОГРАНИЧЕННЫМ СРОКОМ РЕАЛИЗАЦИИ

Лившиц К.И., Шеянова Е.Е.

Томский государственный университет

kim47@mail.ru, fizerskat@gmail.com

Введение

Задача розничной продажи товара с ограниченным сроком годности формулируется следующим образом [1–4]. Продавец, приобретая (производя) партию товара Q по цене d за единицу продукции, перепродает ее по розничной цене c. Считается, что время реализации T ограничено. По истечении времени T товар не может быть реализован, а продавец может нести дополнительные затраты, связанные с утилизацией непроданной единицы продукции b. Необходимо определить оптимальный размер партии товара Q и розничную цену c, которые обеспечивают продавцу максимальную среднюю прибыль. Сложность задачи определяется в основном тем, что для ее точного решения необходимо знать статистические характеристика спроса на товар. Для различных моделей спроса на товар решение задачи содержится, например, в работах [1,5,6].

1. Математическая модель задачи. Средняя прибыль

Будем считать, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda = \lambda(c)$, которая зависит от розничной цены товара. Покупатели покупают товар независимо друг от друга, объем покупки ξ есть случайная величина с моментами $M\{\xi\} = a$, $M\left\{\xi^2\right\} = a_2$ и плотностью распределения $p(x)$.

Пусть T – длительность торговой сессии и n – число покупателей, которые купили бы товар за время T. Тогда объем спроса на товар за время T при фиксированном n есть $x_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$.

Обозначим $p_n(x)$ – плотность распределения вероятностей величины x_n. Тогда общий объем спроса на товар x за время T имеет плотность вероятностей [1,2] $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$. Можно показать [1,5], что при $\lambda T \gg 1$ величина x является асимптотически нормальной со средним значением m_x и дисперсией σ_x^2, равными соответственно

$$m_x = \lambda T a \,, \ \sigma_x^2 = \lambda T a_2 \,. \qquad (1)$$

Подсчитаем теперь среднюю прибыль продавца за торговую сессию [1,5]. На покупку партии товара размера Q тратится Qd средств. Если спрос на товар $x > Q$, то за время T будет распродана вся партия товара и выручка составит Qc. Если $x < Q$, то за проданный товар он выручит xc средств и потратит на утилизацию $(Q - x)b$ денег. Усредняя по x, получим, что средняя прибыль продавца составит величину

$$S = -dQ + cQ\int_Q^{\infty} p(x)dx + c\int_0^Q xp(x)dx - b\int_0^Q (Q-x)p(x)dx \,.$$

Для определения оптимальной величины Q вычислим $\dfrac{dS}{dQ} = -(d+b) + (c+b)\int_Q^{\infty} p(x)dx$, откуда оптимальный объем партии товара Q будет определяться как решение уравнения

$$\int_Q^{\infty} p(x)dx = \frac{d+b}{c+b} \,. \qquad (2)$$

Так как $d < c$, то уравнение (2) заведомо имеет единственное решение.

При $\lambda T \gg 1$, когда распределение спроса может быть аппроксимировано нормальным распределением со средним m_x и дисперсией σ_x^2, определяемыми соотношениями (1), соотношение (2) дает

$$Q = \lambda T a + \sqrt{\lambda T a_2}\,\psi\left(1 - \frac{d+b}{c+b}\right), \qquad (3)$$

где $\psi(x)$ – функция, обратная к функции Лапласа.

Еще одной характеристикой, которая представляет большой интерес при анализе задачи продажи партии товара с ограниченным сроком реализации, является случайное время $t(Q)$ реализации партии товара размера Q. Можно показать [5,6], что при $Q \gg 1$ $t(Q)$ имеет асимптотически нормальное распределение со средним значением m_t и дисперсией σ_t^2, равными соответственно

$$m_t = \frac{Q}{\lambda a} \,, \ \sigma_t^2 = \frac{Q a_2}{\lambda^2 a^3} \,. \qquad (4)$$

Из приведенных выше соотношений вытекает, что для определения величины оптимальной партии товара необходимо даже в асимптотическом случае $\lambda T \gg 1$ знать такие характеристики потока покупателей как $\lambda T a$ и $\lambda T a_2$. Если они заранее неизвестны, а процесс продаж повторяется неоднократно, то можно попытаться определить размер оптимальной партии товара по результатам торговых сессий.

2. Адаптивный алгоритм

Рассмотрим следующий естественный алгоритм определения оптимального объема партии товара, предлагаемой на продажу.

Пусть на шаге с номером m на продажу была выставлена партия товара размера Q_m. Тогда в конце торговой сессии возможны два варианта:

1) товар был продан в количестве $x_m < Q_m$, т.е. остался непроданный товар в количестве $Q_m - x_m$;

2) весь товар был продан, продажа товара окончилась в момент времени $t_m < T$, т.е. на время $T - t_m$ товара не хватило.

Тогда на шаге с номером $m+1$ на продажу выставляется партия товара

$$Q_{m+1} = Q_m - k(Q_m - x_m)I(Q_m - x_m) + k\frac{Q_m}{t_m}(T - t_m)I(T - t_m), \quad (5)$$

где $0 < k < 1$ – некоторая постоянная, $I(x)$ – единичная ступенчатая функция.

Таким образом, при наличии непроданного товара на шаге m его количество на следующем шаге уменьшается на величину, пропорциональную остатку $Q_m - x_m$, а при недостатке продаваемого товара его количество на следующем шаге увеличивается пропорционально величине недостающего товара на время $T - t_m$.

Пример. На рис. 1 приведен пример, иллюстрирующий работу рассматриваемого алгоритма при следующих условиях. Параметры $T = 10$, $\lambda = 1$, величины покупок имеют экспоненциальное распределение со средним $a = 1$, начальное значение $Q_1 = 1$. Как видно из приведенных графиков, характер получающейся реализации процесса Q_m зависит от выбора параметров k.

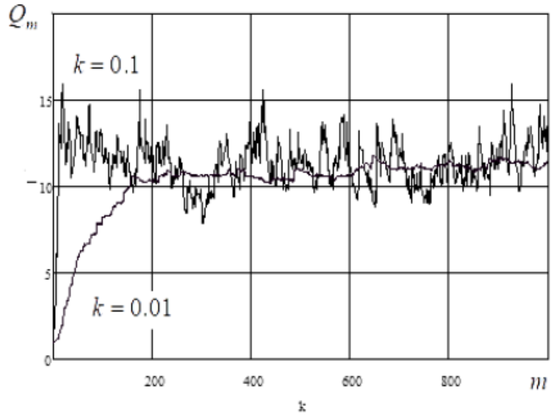

Рис. 1. Изменение величины партии товара, предлагаемого к продаже

На рис. 2 приведены выборочное среднее M_m и выборочное среднеквадратичное отклонение S_m величины партии товара, предлагаемого к продаже, при $T = 10$, $T = 100$ и $\lambda = 1$. Объем выборки равен 1000. Значение $M_{100} = 11.234$ при $T = 10$ и $M_{100} = 101.012$ при $T = 100$.

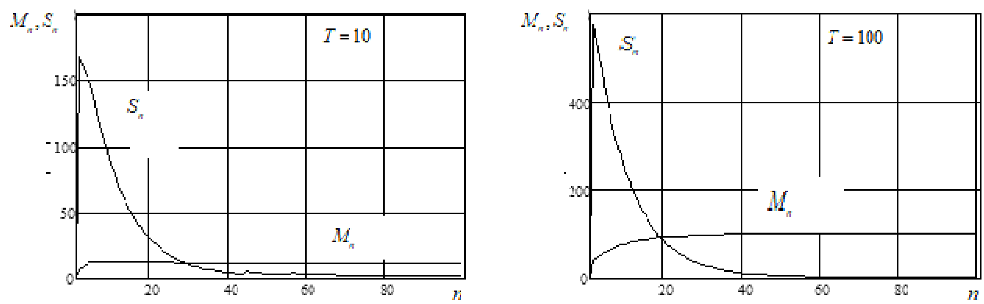

Рис. 2. Изменение выборочного среднего M_m и выборочного среднеквадратичного отклонения S_m величины партии товара, предлагаемого к продаже

Из приведенного примера следует, что с ростом T выборочное среднее стремится к λTa в соответствии с асимптотическим соотношением (3). Приведем доказательство этого факта на «физическом» уровне строгости. Пусть $Q_m = \gamma_m T$. Величины γ_m, согласно (5), будут удовлетворять рекуррентному соотношению

$$\gamma_{m+1} = \gamma_m - k(\gamma_m - z_m) I(\gamma_m - z_m) + k\frac{\gamma_m}{t_m}(T - t_m) I(T - t_m),$$

где $z_m = \frac{x_m}{T}$ при $T \gg 1$ являются нормальными случайными величинами с математическим ожиданием $m_z = \lambda a$ и дисперсией $\sigma_z^2 = \frac{\lambda a_2}{T}$, поэтому

$$M\{(\gamma_m - z) I(\gamma_m - z)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{(\gamma_m - m_z - y)^2}{2\sigma_z^2}} dy \to (\gamma_m - \lambda a) I(\gamma_m - \lambda a)$$

при $T \to \infty$ и фиксированном γ_m, где использована аппроксимация δ-функции [7]: $\delta(x,\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \to \delta(x)$ при $\alpha \to \infty$.

Далее, при $T \gg 1$ $Q_m = \gamma_m T \gg 1$. Поэтому t_m – нормальная случайная величина с моментами (4) и

$$M\left\{\frac{T - t_m}{t_m} I(T - t_m)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \int_{-\infty}^{T} \frac{T - x}{x} e^{-\frac{(x - m_t)^2}{2\sigma_t^2}} dx = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi\gamma_m \alpha_2}} \int_{-\infty}^{1} \frac{1 - z}{z} e^{-\frac{T(z - \gamma_m \alpha_1)^2}{2\gamma_m \alpha_2}} dz,$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{\lambda a}$, $\alpha_2 = \frac{a_2}{\lambda^2 a^3}$, поэтому при $T \to \infty$

$$M\left\{\frac{T - t_m}{t_m} I(T - t_m)\right\} \to \frac{\lambda a - \gamma_m}{\gamma_m} I(\lambda a - \gamma_m).$$

Таким образом, при $T \gg 1$

$$M\{\gamma_{m+1} | \gamma_m\} = \gamma_m - k(\gamma_m - \lambda a) I(\gamma_m - \lambda a) + k(\lambda a - \gamma_m) I(\lambda a - \gamma_m),$$

откуда $M\{\gamma_{m+1} - \lambda a\} = (1-k) M\{\gamma_m - \lambda a\}$ или $M\{\gamma_{m+1} - \lambda a\} = (1-k)^m M\{\gamma_1 - \lambda a\} \to 0$ при $k \to \infty$.

Далее,

$$\begin{aligned}(\gamma_{m+1} - \lambda a)^2 &= (\gamma_m - \lambda a)^2 + k^2 (\gamma_m - z_m)^2 I(\gamma_m - z_m) - 2k(\gamma_m - a)(\gamma_m - z_m) I(\gamma_m - z_m) + \\ &+ 2k(\gamma_m - a)\frac{\gamma_m (T - t_m)}{t_m} I(T - t_m) + k^2 \frac{\gamma_m^2 (T - t_m)^2}{t_m^2} I(T - t_m).\end{aligned} \quad (6)$$

Усредняя по z_m и t_m входящие в (6) слагаемые при $T \gg 1$ и фиксированном γ_m, получим, что $M\left\{(\gamma_{m+1} - \lambda a)^2 | \gamma_m - \lambda a\right\} = (1-k)^2 (\gamma_m - \lambda a)^2$ или $M\left\{(\gamma_{m+1} - \lambda a)^2 |\right\} = (1-k)^2 M\left\{(\gamma_m - \lambda a)^2\right\}$, откуда $M\left\{(\gamma_m - \lambda a)^2\right\} \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, при $T \gg 1$ величина партии товара $Q_m \to \lambda a T$.

Заключение

В данной работе рассмотрена задача розничной продажи товара с ограниченным сроком годности T. Предложен адаптивный алгоритм, позволяющий по результатам повторяющихся торговых сессий определить оптимальную величину партии товара, предназначенного для продажи. Показана сходимость в среднеквадратичном предложенного алгоритма в случае, когда $T \gg 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новицкая Е.В., Терпугов А.Ф.* Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 96 с.

2. *Petruzzi N.C., Dada M.* Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions // Operations Research.– 1999. – V. 47 (2). – P. 183–194.

3. *Chen X., Simchi-Levi D.* Joint Pricing and Inventory Management // In The Oxford handbook of pricing management, edited by Ö. Özer, and R. Phillips. – London: Oxford University Press, 2012.

4. *Turken N., Tan Y., Vakharia A.J., Wang L., et al.* The Multi-Product Newsvendor Problem: Review, Extension, and Directions for Future Research // In Handbook of Newsvendor Problems: Models, Extensions and Applications. – 2012. – V. 176. – P. 3–39.

5. *Быков В.А., Лившиц К.И.* Розничная продажа скоропортящейся продукции // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № S16. – С. 193–201.

6. *Kitaeva A., Livshits K., Ulyanova E.* The multiproduct Newsboy Problem with Price Depended Demand and Fast Moving Items // Information technologies and mathematical modeling: Proceeding of the 16 th International Scientific Conference, ITMM 2017 named after A.F. Terpugov. – CCIS. – V. 800. – Springer, 2017. – P. 297.

7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Изд-во «Наука», 1977. – 831 с.