Apropriação do raciocínio combinatório nos movimentos de peças de um jogo e na construção de diagramas de árvore

Appropriation of combinatorial reasoning in the movement of pieces in a game and in the construction of tree diagrams

Paulo Jorge Magalhaes Teixeira

Resumo: Este trabalho objetiva tornar conhecida a proposta de ensino-aprendizagem acerca de conteúdos básicos de combinatória por meio de um jogo de tabuleiro ‘Grelha quadrada 3 x 3`. A proposta deste jogo está em consonância com indicações presentes na BNCC – Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) para o ensino e aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e visa fomentar a apropriação, o exercício e o desenvolvimento do raciocínio combinatório enquanto as possibilidades de tomadas de decisão relativas à movimentação de tampinhas de garrafa pet sobre o tabuleiro de um jogo são avaliadas, enquanto um diagrama de árvore mostrando essas possibilidades vai sendo construído em paralelo. O desenrolar das análises de possibilidades de jogadas deu-se logo após o início de uma partida (antes da primeira movimentação) e a partir de um dado momento de jogo até que a partida chegasse ou não ao seu final. Em prosseguimento, após o consequente reconhecimento das regras do jogo, foram propostos problemas de combinatória aos jogadores, conforme preconiza a teoria de Resolução de Problemas, (ONUCHIC, 1999). Trata-se de uma pesquisa bibliográfica que culminou com a proposição do jogo, segundo o qual se objetivou dimensionar a importância e a contribuição que a proposição e criação de um jogo didático representam para a melhoria do processo de ensino aprendizagem de combinatória com estudantes dos anos iniciais, em particular arvores de possibilidades, bem como disponibilizar material didático para uso de professores.
Palavras-chave: Jogo. Combinatória. Pensamento Combinatório. Árvore de Possibilidades.

Abstract:
This work aims to make known the teaching-learning proposal about basic combinatorial contents through a board game 'Square grid 3 x 3`. The proposal of this game is in line with indications present in the BNCC - National Common Curricular Base (BRASIL, 2018) for the teaching and learning of Mathematics in the early years of Elementary School, and aims to encourage the appropriation, exercise and development of combinatorial reasoning while the possibilities of decision making regarding the movement of pet bottle caps on a game board are evaluated while a tree diagram showing these possibilities is being built in parallel. The development of the analysis of the possibilities of moves took place right after the beginning of a match (before the first move) and from a given moment of play until the match reached its end or not. In continuation, after the consequent recognition of the rules of the game, combinatory problems were proposed to the players, as recommended by the theory of Problem Solving (ONUCHIC, 1999). This is a bibliographical research that culminated in the proposition of the game, according to which the objective was to dimension the importance and the contribution that the proposition and creation of a didactic game represent for the improvement of the teaching-learning process of combinatorics with students of the initials, in particular trees of possibilities, as well as making teaching material available for use by teachers.

Keywords: Game. Combinatorics. Combinatorial Thinking. Tree of Possibilities.

INTRODUÇÃO

Nos últimos vinte e poucos anos o ensino de combinatória na educação básica tem sido razão de preocupações dos educadores e pesquisadores matemáticos, como Batanero et al. (2016) e Bryant e Nunes (2012), muito em função das orientações presentes quando do lançamento dos "Princípios e Normas para a Matemática", em NCTM (2000), mormente em documentos curriculares, orientadores e/ou prescritos, em alguns países, como é caso no Brasil com os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais, em (Brasil, 1997, 1998), e a BNCC – Base Nacional Comum Curricular, em Brasil (2018). Ademais, vários estudiosos da Educação Matemática, como Grando (2000), Muniz (2010), entre outros, defendem a proposta de jogos como um recurso didático que possibilita o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, mas também em relação às diferentes formas de pensamento matemático.

Tais pesquisadores e os autores da BNCC (BRASIL, 2018) ressaltam a importância de um trabalho exploratório com conceitos básicos de Combinatória desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental de modo que o letramento combinatório se dê de modo contínuo, crescente e que se consolide por meio de ações pedagógicas já na escola, as quais podem ter início com a proposição de um jogo didático, por exemplo. Contudo, para caracterizá-lo como recurso de ensino é necessário que ele apresente desafios às crianças, além da diversão, como é o caso do que é proposto aqui. Assim, é possível aos alunos elaborarem estratégias variadas nos jogos que são propostos por seu professor, compartilhá-las com os colegas e a partir de reflexões, ampliarem seus conhecimentos. Ademais, os jogos didáticos possibilitam aprendizados matemáticos e aprendizados extra-matemáticos e em muitos casos incluem o levantamento e testes de hipóteses, a criação de estratégias, a reflexão, a análise, o debate e a argumentação.

Por parte dos professores se espera que o ensino de tais conceitos se inicie com a compreensão acerca das primeiras intuições das crianças em relação a ações de seleção, agrupamento e combinação de objetos entre si, bem como o contato com os conceitos iniciais de Combinatória, de modo informal. Por outro lado, a aprendizagem é um processo pessoal e subjetivo do aluno, o qual pode, inclusive, não ocorrer com êxito segundo o que é desejado e esperado pelo professor. Também são esperadas possíveis dificuldades cognitivas quando do confronto de ideias e concepções dos estudantes, caso um ensino pedagógico não tenha sido desenvolvido com orientação, cautela e num continuo. Daí a importância de estabelecer mecanismos pedagógicos que visem minimizá-las.

O professor pode fazer bom uso de jogos para o desenvolvimento e a apropriação de conteúdos matemáticos, a partir dos quais “observará conhecimentos e fragilidades dos alunos em relação aos conceitos que nele são tratados, construídos ou em construção”.

Alguns jogos didáticos - como é o caso do Jogo Grelha Quadrada 3 x 3, objeto deste trabalho - se prestam bem a atender questões relacionadas com a compreensão de conceitos iniciais de combinatória, uma vez que contribuem para o conhecimento, compreensão e desenvolvimento do raciocínio combinatório. Não apenas para o bom desenrolar do jogo em si, mas também como ferramenta pedagógica que facilita o trabalho do professor em relação à identificação e a compreensão de elementos dessa temática pelos alunos enquanto jogam e em relação à orientações para a resolução de problemas que deles são derivados, contribuindo fortemente para a consolidação do letramento matemático. A BNCC (BRASIL, 2018) orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, em relação à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado as aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes; entre eles e seu cotidiano, e entre os diferentes temas matemáticos.

No que concerne ao estudo de noções de natureza combinatória e a exploração de habilidades, sugerido pelos autores da BNCC (BRASIL, 2018, p. 294) para serem desenvolvidos a partir do 5º ano do Ensino Fundamental, os objetos de conhecimento são os problemas de contagem do tipo “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?”, e a única habilidade requerida “(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o Princípio Multiplicativo, com a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou de tabelas“.

Ressalte-se que a habilidade acima, a qual é sugerida pelos autores da BNCC para ser desenvolvida com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental não só é a primeira no conteúdo de Combinatória como é a única para este segmento nos cinco primeiros anos iniciais.

Diferentemente do que aponta a habilidade descrita acima, presente na BNCC, o autor entende que etapas importantes associadas à mobilização e o exercício do raciocínio combinatório ficam bastante comprometidas quando o estudante não é instado a resolver problemas de contagem que envolvem os dois Princípios Básicos de Contagem: Multiplicativo e Aditivo em conjunto. Tais tipos de problemas não estão condicionados à combinação de cada objeto de uma coleção com todos de outra coleção - tal como é nomeado na referida habilidade -, mas a um ou mais dentre os elementos (não todos) da outra coleção.

Ademais, o Principio Multiplicativo é evocado logo de imediato, o que talvez possa deixar transparecer aos desavisados que somente esses tipos de problemas tenham resoluções via representações gráficas por meio de tabelas e árvores de possibilidades, com equivalência em representações numéricas via aplicação deste Principio. Desse modo o Principio Aditivo nunca será evocado, tanto na representação numérica quanto na representação gráfica. O Principio Aditivo também pode/deve ser aplicado a partir de tabelas de dupla entrada e em diagramas de árvores, e confirmado em uma correspondente representação numérica.

Com a proposição deste jogo objetiva-se promover compreensão acerca da mobilização e o exercício do raciocínio combinatório para a construção de um diagrama de árvore, não com o propósito de quantificar possibilidades - não envolve diretamente o Principio Multiplicativo -, mas com o objetivo de enumerar (mostrar) todos os possíveis resultados que podem ser obtidos quando da disputa de uma partida no jogo.

As possibilidades de movimentação das tampinhas sobre o tabuleiro de jogo perpassam pela mobilização e o exercício do raciocínio combinatório e, diferentemente do que aponta a habilidade da BNCC acima, a construção da árvore de possibilidades não está condicionada à combinação de cada objeto de uma coleção com todos os objetos de outra coleção. Por conta disso, e por meio da utilização deste jogo, o início da proposta de trabalho com combinatória está centrado no desenvolvimento da noção de obtenção de todas as possibilidades que atendem às condições do problema combinatório associado, qual seja: enumerar todas as possibilidades como o Jogo Grelha Quadrada 3 x 3 pode vir a se desenrolar ao longo de uma partida.

Enquanto os alunos constroem o diagrama de árvore de possibilidades, espera-se que eles compreendam que o referido diagrama é uma representação gráfica que permite exibir todas essas possibilidades - quando esse quantitativo de possibilidades não é demasiado grande, melhor ainda, com é o caso do quantitativo no presente caso. Por outro lado, embora esse total de possibilidades não seja numeroso torna-se complexo fazer uso de uma representação numérica para quantificá-lo.

É muito comum que pessoas se esqueçam de considerar uma ou outra possibilidade que atenda à solução qualitativa ou quantitativa de um problema de Combinatória por não conhecerem uma maneira como todas as possibilidades podem ser enumeráveis - construir um diagrama de árvore, por exemplo -, não necessariamente tendo de construí-lo por completo.

Tais conhecimentos contribuem enormemente para o desenvolvimento e aprimoramento da mobilização e o exercício do raciocínio combinatório, mormente para a determinação do quantitativo de possibilidades, isto é, quando for preciso fazer uso de uma representação numérica.

Ademais, o conhecimento acerca da construção de árvores de possibilidades vai além desse único propósito. Também se mostra imprescindível durante a etapa de aprendizado com experimentos aleatórios, nos quais seja requerido determinar todas as possibilidades que podem vir a acontecer. É importante que os alunos verbalizem esses resultados com o propósito de dar início à construção do correspondente espaço amostral, e para tal faz-se necessário construir uma arvore de possibilidades para identificar todos os eventos simples. Também compreenderem que a estrutura da arvore de possibilidades servirá de apoio para a determinação da respectiva arvore de probabilidades, a qual facilitará em muito o cálculo das probabilidades de cada um dos eventos simples e, também, de eventos compostos.

Este trabalho é um recorte de uma pesquisa ampla do grupo de pesquisa formado por professores de matemática e estudantes de graduação do qual o proponente é o coordenador. Tal pesquisa objetiva responder à seguinte questão principal: “Em consonância com as orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que situações de aprendizagem um professor de matemática precisa selecionar, dirigir e propor de modo a identificar e conhecer como o raciocínio combinatório é apropriado, exercitado e desenvolvido pelos seus alunos do Ensino Fundamental, durante a resolução de problemas próprios da temática combinatória, de modo a compreender as dificuldades que eles enfrentam e para ajudá-los a superar essas dificuldades?”

De modo a encontrar subsídios que respondam à questão de pesquisa, parte dela se direcionou no sentido de compreender de que forma cada tomada de decisão em relação a uma possível jogada no jogo de tabuleiro Grelha Quadrada 3 x 3, por cada jogador, contribui para que os jogadores e demais alunos compreendam acerca das possibilidades de se construir um diagrama de árvore que retrate esses momentos e como essa construção deve ser feita.

Inicia-se por fazer uma pesquisa bibliográfica acerca do objeto matemático e o uso de jogos no ensino aprendizagem da Matemática básica e ela levou a conceber testar e propor o Jogo Grelha

Quadrada 3 x 3, objeto do presente recorte da pesquisa. Tomamos com referência texto dos autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em Brasil (1997), segundo os quais

> [...] um aspecto relevante nos jogos, é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver (BRASIL, 1997, p.49).

Levando em conta os aspectos básicos que caracterizam uma investigação qualitativa, como os que estão presentes em Franco (2005), o estudo se caracterizou como uma investigação de natureza qualitativa. Assim, este trabalho tem o propósito de apresentar as regras do jogo e como objetivo pedagógico o de permitir que os alunos construam um diagrama de árvore, além de apresentar propostas de proposição de problemas que têm relação direta com o jogo e o objeto matemático requerido para prover as resoluções, qual seja: o conhecimento, desenvolvimento e o exercício do raciocínio combinatório para a construção do diagrama de árvore.

Uma vez compreendido como o diagrama de árvore pode ser construído é recomendável finalizar tais momentos construtivos representando todas as possibilidades que se apresentam a partir dos primeiros movimentos das peças do jogo grelha quadrada 3 x 3, pelos dois jogadores, considerando que o quantitativo de possibilidades não é demasiado grande e o fato de que o diagrama pode ser construído por partes. Tendo o diagrama de árvore sido construído de início, tem-se o propósito de que o aluno compreenda que ele retrata todos os possíveis modos como uma partida do jogo pode se desenrolar a partir de um particular momento do jogo, que pode ou não ser o momento da jogada inicial.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

O raciocínio combinatório é imprescindível a todo sujeito que continuamente dele se aproprie, o compreenda e faça correto uso por toda a sua escolaridade, de modo que esteja preparado para mobilizá-lo quando da resolução de diferentes tipos de problemas durante o estudo de Combinatória, mas não apenas com este fim.

É importante perceber e identificar a estreita relação que há entre o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico e não naturalizar a Combinatória como área coadjuvante da Probabilidade. Tanto o raciocínio probabilístico, um dos raciocínios matemáticos que devem ser desenvolvidos ainda na tenra idade, desde o 1º Ano do ensino fundamental, quanto o raciocínio combinatório, cuja orientação é a de que seja desenvolvido a partir do 5º Ano do ensino fundamental, segundo os autores da BNCC, têm significativa importância para o letramento matemático dos cidadãos, enquanto agentes transformadores sobre a ordem social, ao permitirem o acesso, a compreensão e o manejo de informações.

Uma vez que o raciocínio combinatório seja compreendido, apropriado e exercitado, ele permite o provimento de conhecimentos matemáticos suficientes ao entendimento e a apropriação de todos os outros conceitos da combinatória que são necessários para resolver uma extensa variedade de diferentes tipos de problemas de contagem. A compreensão e a conceptualização dos conceitos de arranjo, permutação e combinação passam, necessário e obrigatoriamente, pelo exercício e o desenvolvimento do raciocínio combinatório, e são estes conceitos da Combinatória os que mais fortemente são explorados com os estudantes do ensino básico. Assim, tanto o letramento matemático combinatório quanto o matemático probabilístico devem ser feitos em um constante, e se estenderem ao longo do tempo por muitos anos, e não apenas durante o período de estudos da escola básica.

Tais letramentos precisam continuamente ser alimentados (adquiridos, exercitados) uma vez que não fazendo assim podem vir a ser esquecidos ou exercitados de maneira incorreta, mormente em situações cotidianas distantes da escola (particularmente em relação à literacia estatística, muito presente na vida do cidadão contemporâneo que precisa compreender certas questões e procedimentos inferenciais estatísticos associados aos conceitos de risco, por exemplo). Em muitas vezes causando situações equivocadas de compreensão de probabilidade que afetam fortemente nas tomadas de decisão - principalmente nas áreas de investimentos, seguros e avaliações. Daí a importância de o ensino destas duas temáticas serem feitas na escola desde os anos iniciais, estendendo-se para uma formação mais ampla do cidadão. Mediante o exposto, entende-se o porquê de a sua importância no ensino da matemática ser constantemente ressaltada por professores e pesquisadores e quase sempre ser posta à prova em diferentes áreas da própria Matemática e/ou em diversas situações cotidianas, as quais exigem seu correto exercício para a compreensão do contexto em que está presente, e dele se precise para a tomada de uma decisão, por exemplo.

Diante de tais argumentos, os quais são tão caros aos professores e pesquisadores, parece-nos não ser difícil entender que um estudante não se transforma em um sujeito letrado combinatoriamente de um dia para outro. Tampouco a escolaridade na escola básica parece ser suficiente para dotá-lo de tal competência matemática embora não seja isso o que se queira, almeje e busque enquanto professores neste segmento de ensino. Portanto, como tudo começa do início, é preciso iniciar com consistência e cuidados desde as situações presentes no cotidiano dos alunos e de suas famílias.

Por exemplo, faz-se oportuno permitir que os estudantes reflitam acerca da quantidade de modos como pode escolher uma calça e uma camisa para sair se no seu armário há tantas peças de cada, ou refletir quando do uso de materiais manipuláveis, de modo que compreendam acerca do exercício do raciocínio combinatório, por exemplo. Ou, ainda, o reconhecimento acerca de representações espontâneas (mais lúdicas) ou gráficas para se chegar às representações numéricas. Tudo no seu tempo e hora, para se chegar adiante à complexidade que é própria da mobilização e do exercício do raciocínio combinatório para resolver situações amplas e mais complexas.

Mas, afinal, o que é o raciocínio combinatório?

"Uma possibilidade (agrupamento-solução) para um problema combinatório é resultante da *combinação* entre dois ou mais objetos, letras, algarismos, peças, cores etc., presentes no contexto do problema". Tais *combinações* e respectivas possibilidades sempre podem ser apresentadas em um diagrama de árvore, a partir do momento em que o sujeito que o está construindo se coloque na posição de alguém que vai executar tais *ações de combinação* mobilizando e exercitando o raciocínio combinatório. No caso particular do jogo em questão e antes de movimentar sua tampinha de movimentação no jogo, o sujeito jogador já deve refletir à luz das regras do jogo qual (is) movimentação (ões) e (são) possível (is) ser (em) feita (s) a partir da situação de jogo deixada pelo seu oponente por ocasião da jogada anterior, "combinando-as" entre si para que a sua jogada impeça o seu oponente de fazer a jogada seguinte, ou que ele a faça com certa dificuldade.

O exercício do raciocínio (pensamento) combinatório por alunos e/ou professores é perceptível a partir do enfrentamento de situações-problema de contagem nas quais o enunciado pede seja feita a enumeração (solução qualitativa) de todas as soluções (possibilidades, agrupamentos-solução) ou que se determine o seu quantitativo total (solução quantitativa). Para enumerar as soluções, faz-se uso de uma representação gráfica (esquema, produto cartesiano, tabela de dupla entrada ou uma árvore de possibilidades (diagrama de árvore), quando for o caso), nas situações em que o quantitativo de possibilidades a "combinar" não seja demasiado grande.

Para contar a totalidade de soluções, tal contagem pode ser feita uma a uma (ou por grupos) diretamente a partir da representação gráfica que tenha sido utilizada (caso esse quantitativo não seja demasiado grande) ou, faz-se uso de uma representação numérica para efetuar a contagem total a partir da mobilização e exercício do raciocínio (pensamento) combinatório. Em qualquer das duas situações, a contagem de possibilidades permite que se utilize um novo jeito de pensar, isto é, será preciso mobilizar e exercitar o raciocínio combinatório para dar conta de obter uma resposta qualitativa ou obter uma resposta quantitativa.

Fato é que para fazer a contagem de todas as possibilidades que atendem a solução de um problema de combinatória, não será preciso lançar mão de um repertório de fórmulas para dar conta da contagem, mas sim por meio de um processo que apenas vai exigir a construção de um modelo simplificado, claro, objetivo e explicativo a respeito da situação presente no contexto. O modelo poderá atender a situações particulares, de início, mas também pode ser mais geral, como é o caso da construção de um diagrama de árvore. Em particular, o diagrama de árvore constitui uma representação gráfica bastante adequada para introduzir e compreender ideias combinatórias iniciais relativas ao exercício do raciocínio combinatório segundo o qual é possível conhecer cada uma das possibilidades e obter o quantitativo total destas, quando da exploração e resolução de uma extensa variedade de problemas de Combinatória.

Uma vez que um sujeito cumule experiências diversificadas no trato de situações próprias da Combinatória, ou seja, uma vez que tenha total domínio sobre o conceito combinatório presente no enunciado de um problema de contagem, por vezes basta que faça um simples rascunho de como seria o diagrama de árvore para que defina de pronto uma estratégia para encaminhar a resolução do problema e, assim, obter o quantitativo de todas as possibilidades. Mas, não pense ser sempre uma tarefa simples resolver um problema combinatório, pois em alguns problemas pode ser que vários conceitos combinatórios precisem ser mobilizados em conjunto.

Em comum entre os diferentes tipos de problemas combinatórios o fato de ser indispensável o exercício do raciocínio combinatório, além da necessidade de o sujeito que está prestes a resolver o problema ter plena compreensão acerca da situação envolvida, segundo os termos do enunciado. Por vezes, problemas combinatórios com enunciados concisos exigem resoluções engenhosas e/ou complexas e, nestes casos, para a mobilização do raciocínio combinatório, será preciso fazer uso de procedimentos diretamente relacionados com o seu exercício por reiteradas vezes.

As citações seguintes ajudam-nos a uma ampliação conceitual acerca da mobilização e exercício do raciocínio combinatório:

Inhelder e Piaget (1955), *apud* Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), apontam a maneira como o raciocínio combinatório (embora o chamem de raciocínio hipotético-dedutivo), opera com as possibilidades, segundo a citação a seguir:

> [...] De acordo com Inhelder e Piaget (1955), o raciocínio hipotético-dedutivo opera com as possibilidades que o sujeito descobre e avalia, por meio de operações combinatórias. Esta capacidade pode relacionar-se com os estágios descritos na teoria de Piaget: depois do período das operações formais, o adolescente descobre procedimentos sistemáticos de construção combinatória, ainda que para as permutações seja necessário esperar a idade de 15 anos (NAVARRO-PELAYO, BATANERO e GODINO, 1996, p. 2).

Para Inhelder e Piaget (1955), *apud* Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997):

> [...] as operações combinatórias representam algo mais importante que um mero ramo da matemática. Elas constituem um esquema tão geral como a proporcionalidade e a correlação, que emergem simultaneamente após a idade de 12 a 13 anos (estágio das operações formais, segundo Piaget). A capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo, o qual opera pela combinação e avaliação das possibilidades em cada situação (BATANERO, GODINO e NAVARRO-PELAYO, 1997, p. 27).

Resultados de uma pesquisa que foi feita por Fischbein (1975) mostram que a "capacidade de resolver situações-problemas que envolvem o raciocínio combinatório (problemas combinatórios)" nem sempre se alcança no nível das operações formais se um ensino específico do assunto não for oferecido. Ou seja, ainda que de forma indireta, Fischbein (1975) aponta que o raciocínio combinatório precisa ser exercitado, estimulado e desenvolvido pelo professor enquanto ele propõe que os seus alunos resolvam problemas de Combinatória e ele atue como mediador da aprendizagem. Neste particular contexto, o papel de mediador da aprendizagem (o mesmo que organizador) exige do professor que ele conheça bem seus alunos no tocante às expectativas e competências cognitivas uma vez que ele é responsável por escolher os problemas que possibilitam aos alunos construírem conhecimento, e compreenderem aspectos procedimentais de resolução dos problemas. Para tal, será preciso que ele constantemente os acompanhe durante todo o processo de resolução de problemas de combinatória e probabilidade, tendo em vista os objetivos os quais propõe que eles os alcancem, durante todo o decorrer da aprendizagem.

Uma vez que consideramos ser a aprendizagem fruto de ações efetivas do próprio estudante, no sentido de promovê-la para si, referimo-nos ao olhar do professor de organizador da aprendizagem como responsável por orientar, incentivar e cuidar para que o estudante esteja sempre se questionando para poder acompanhá-lo de perto de maneira que não esmoreça frente as dificuldades que encontre mas que prossiga. Outra faceta do papel do professor em todo o processo de ensino-aprendizagem deve ser a de portar-se como um ouvidor, isto é, aquele que compartilha com os alunos informações, textos, materiais etc. que são necessários a todo o processo de aprendizagem e, que ele sabe de antemão, que os alunos sozinhos provavelmente não teriam condições de obtê-los. Acerca de parte dessas questões, assim se manifesta Freire (2013):

> [...] Meu papel fundamental, ao falar com clareza sobre o objeto, é incitar o aluno a fim de que ele, com os materiais que ofereço, produza a compreensão do objeto em lugar de recebê-la, na íntegra, de mim. Ele precisa se apropriar da inteligência do conteúdo para que a verdadeira relação de comunicação entre mim, como professor, e ele, como aluno se estabeleça. [...] Ensinar e aprender têm que ver com o esforço metodicamente crítico do professor de desvelar a compreensão de algo e com o empenho igualmente crítico do aluno de ir entrando como sujeito em aprendizagem, no processo de desvelamento que o professor ou professora deve deflagrar. Isso não tem nada que ver com a transferência de conteúdo e fala da dificuldade, mas, ao mesmo tempo, da boniteza da docência e da discência (FREIRE, 2013, p.116).

Ademais, o próprio professor deve servir de exemplo ao exercitar coletivamente o raciocínio combinatório enquanto promove a resolução de problemas de contagem durante os momentos de reflexões e discussões. Ou seja, enquanto exerce o papel de mediador.

Portanto, de maneira a acompanhar de modo diligente a compreensão, a apropriação, o exercício e o desenvolvimento do raciocínio combinatório de seus alunos, o professor precisa estar atento à maneira como eles se comportam em cada um desses momentos durante a resolução de cada problema que tenha proposto, e eles o estiverem resolvendo.

Em relação à conceptualização do raciocínio combinatório, Xxxxxx (xxxx) salienta que

> [...] o raciocínio combinatório é um conjunto de ações cognitivas, não inatas ao sujeito, as quais permitam que ele encaminhe procedimentos sistemáticos de seleção, partição ou colocação de objetos, pessoas, números ou letras, combinando-os adequadamente, de modo que o resultado dessas ações tenha significado e obedeça às sistematizações necessárias à garantia de obtenção de todas as possibilidades (agrupamentos-solução) que satisfazem ao problema de contagem proposto. Além do mais, o resultado das "combinações" é obtido com a exploração e o exercício do raciocínio combinatório de maneira recursiva em relação ao que antes já havia sido "combinado". As "combinações" feitas, passo a passo, podem ser visualizadas por meio da construção de uma representação gráfica, ou compreendidas por meio de uma representação numérica via uma ou mais operações numéricas multiplicativas e/ou aditivas. Portanto, podemos então caracterizar o raciocínio combinatório como o raciocínio que é derivado do ato de "combinar" (o mesmo que associar, juntar, compor) objetos (ou pessoas, letras, algarismos) com outros de igual natureza ou não (XXXXXXXX, xxxx, p. 36-37).

Não obstante passados mais de 13 anos que os PCN foram lançados, o ensino tradicional da matemática baseado na exposição de um resumo de parte do conteúdo por meio de definições, exemplos e exercícios de fixação/aplicação presentes ou não no livro didático ou em fichas de atividades auxiliares, ainda está muito presente nas escolas. Metodologia que prima em dar importância aos aspectos relacionados com o "treinar técnicas" e "operacionalizar" no seu uso por meio de uma abordagem sucinta, fragmentada, desarticulada de temas sociais e desvinculada da realidade do aluno, colocando-o diante de ações de passividade pois ele vê, ouve e reproduz. E, para ele, se todas às vezes ele faz tudo isso razoavelmente bastante bem, fica-lhe a sensação de que aprendeu o conteúdo que foi ensinado. Ensino em que acontece o "ensinar por ensinar" o "cálculo pelo cálculo" e nada mais, configurando a reprodução de um "conhecimento" sem sentido para o aluno. Nessas situações, pouco ou nada do cognitivo do aluno é explorado e deixado que venha à tona em sala de aula porque o professor em poucas ou em nenhuma vez lhe dá voz. No coletivo, muito pouco é refletido sobre as amostras das realizações pessoais ou dos colegas que poderiam/deveriam estar reunidos em grupos pequenos, de até 4 alunos, por exemplo.

Entende-se que as considerações acima têm uma considerável visibilidade quando são sustentadas em reflexões oriundas de trabalhos de renomados educadores, como é o caso, tais como as que estão presentes em todo o trabalho de Freire (2013), como no recorte a seguir:

> [...] Somente quem escuta paciente e criticamente o outro, fala com ele, mesmo que, em certas condições, precise fala a ele. O que jamais faz quem aprende a escutar para poder falar com é falar impositivamente. Até quando, necessariamente, fala contra posições ou concepções do outro, fala com ele como sujeito da escuta de sua fala crítica e não como objeto de seu discurso. O educador que escuta aprende a difícil lição de transformar o seu discurso, às vezes necessário, ao aluno, em uma fala com ele (FREIRE, 2013, p.111).

Por conta de toda essa prática pedagógica entendemos que o aluno não se torna partícipe da sua própria aprendizagem, ou seja, não reflete sobre o que lê e ouve e tampouco discute questões com os seus colegas e o professor. Ou seja, o aluno não é instado pelo seu professor a estabelecer conexões entre os seus conhecimentos anteriores e apropriações de novos saberes, as quais podem ser estabelecidas por meio da resolução de problemas em conjunto com os colegas ou durante a exposição da produção acerca daquilo que compreendeu e cumulou. Segundo Freire (2013, p. 83), "O fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é **dialógica**, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que professor e alunos se assumam **epistemologicamente curiosos**" (grifos do autor).

Uma vez que o professor de Matemática já saiba de antemão que o conceito de mobilização do raciocínio combinatório estará presente em um particular conjunto de problemas que vai propor aos seus alunos ele precisa ter amplo domínio acerca deste conceito e dos seus diferentes significados, conforme seja a aplicação que está em estudo. A maioria das aplicações de conceitos combinatórios pode ser explorada com alunos do ensino fundamental, mas também com os alunos do ensino médio. O domínio do conteúdo permite ao professor sentir-se em condições de fazer a transposição didática - para cada um dos significados do raciocínio combinatório -, conforme seja o universo dos alunos em que a temática estará sendo desenvolvida. Mas não é uma tarefa simples, pois o professor precisa ter plena compreensão acerca das ferramentas que devem ser mobilizadas para caracterizar o modelo matemático que atenda à situação que estará sendo explorada. É o conhecimento que Shulman (1986, p. 2) chama de "conhecimento pedagógico do conteúdo" (tradução nossa), conhecimento para o ensino de um determinado conteúdo, matemático ou não.

Para este particular contexto tal conhecimento deve ser mobilizado pelo professor de modo que ele tenha plena compreensão acerca dos significados dos dois princípios de contagem - os quais precisam também ser apropriados pelos alunos quando da apresentação e o desenvolvimento da temática independentemente do conteúdo que esteja sendo explorado, e para qual universo de alunos do ensino básico tenha o propósito de atender. Neste estudo, o objeto matemático ressaltado contempla as competências associadas com o propósito de propor, refletir, discutir e resolver problemas de combinatória, os quais, por sua vez, exigem a mobilização e o exercício do raciocínio combinatório, explorando ideias básicas em um contexto da combinatória desde os anos iniciais e em um crescente, ao longo de toda a escolaridade básica. Também porque os problemas relacionados com o conteúdo devem ser explorados ao longo de toda a educação básica segundo uma metodologia que se aproxima de uma espiral: o conteúdo é retomado de tempos em tempos, para ser ampliado com a proposição de problemas de contagem mais complexos.

Todo o estudo tem o propósito de tornar conhecidas as diferentes técnicas de contagem para resolver problemas de combinatória - desde os mais simples aos mais complexos -, os quais exigem técnicas de contagem mais sofisticadas e/ou o uso de mais que um conteúdo em conjunto com outro (s). Em comum, todos exigem a mobilização e o exercício do raciocínio combinatório.

Ao iniciar o estudo, o professor precisa estimular a exploração de conceitos matemáticos associados com o pensamento aditivo, o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório por meio da proposição de diferentes tipos de problemas que envolvem diferentes técnicas de contagem.

Trata-se de um conteúdo da Matemática que precisa ser apresentado, explorado, discutido e fundamentado desde os anos iniciais do ensino fundamental uma vez que tais experiências permitem promover a inserção dos alunos em problemas presentes no cotidiano de suas famílias, desde então, a partir de conceitos da própria Matemática. Por essas razões consideramos que o conhecimento e a apropriação de conceitos da Combinatória, pelos alunos, mostram-se importantes e indispensáveis ser desenvolvidos na escola já desde a mais tenra idade.

Por conta dessas considerações concordamos com Xxxxxxxx (2020) quando enfatiza que

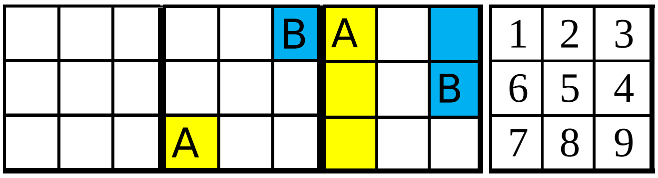
> [...] tais experiências apresentam possibilidades de novas aprendizagens no exercício docente a partir de ações dialógicas e da interação entre pares, as quais vêm reforçar uma tese muito presente na área de formação e prática docente de professores em grupos colaborativos, segundo a qual é pela reflexão na prática e sobre a prática que se pode reestruturar os conhecimentos profissionais dos professores (XXXXXXXX, xxxx, p.111).

Em prosseguimento, seguem as regras e considerações a respeito do jogo.

3. O JOGO GRELHA QUADRADA 3 X 3

I. Material a ser disponibilizado para uso durante o desenrolar do jogo: O jogo utiliza um tabuleiro quadrado 3 x 3 (três quadrados menores dispostos no sentido vertical por 3 quadrados menores dispostos no sentido horizontal, totalizando 3 x 3 = 9 quadrados menores), denominado por *Grelha Quadrada 3 x 3*, como mostrado na Figura 1, a seguir, mais à esquerda e um outro, numerado, mais à direita. Trata-se de um jogo entre dois oponentes: A e B. Para realizar os movimentos sobre o tabuleiro são utilizadas duas *tampinhas de garrafa pet* de cores distintas. O jogador que vai dar início ao jogo será decidido por meio de uma disputa tipo *par ou ímpar*. O vencedor dessa disputa deve colocar sua *tampinha de garrafa pet* no quadrado localizado no canto inferior à esquerda (ou canto superior à direita) e o seu oponente deverá colocar a sua *tampinha de garrafa pet* no quadrado localizado no canto superior à direita (ou canto inferior à esquerda), como mostrado no tabuleiro intermediário da Figura 1, a seguir, o qual mostra a disposição das *tampinhas* antes de o jogo ter início. Para o restante do texto, considere que o jogador A foi o vencedor da disputa *par ou ímpar*. O tabuleiro mais à direita, mostrado na Figura 1, abaixo, aponta para um momento de jogo que foi interrompido após o 3º movimento, feito pelo jogador A, o último a jogar.

Figura 1: Tabuleiro do Jogo *Grelha Quadrada 3 X 3*, possíveis posições iniciais, os possíveis 3 primeiros movimentos de uma partida e os quadrados do tabuleiro numerados

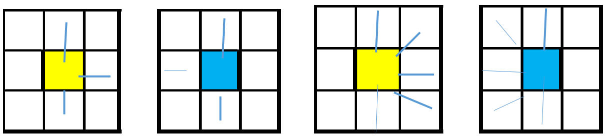


Fonte: o autor.

II. Objetivos do jogo: O objetivo de cada jogador é capturar a *tampinha* do seu oponente ou posicionar a sua *tampinha* na posição do seu oponente quando do início da partida. Para atender a qualquer um desses dois objetivos será preciso que cada jogador obedeça às regras do jogo, as quais serão mostradas em prosseguimento.

III. *Regras do jogo*: As regras do jogo precisam ser compreendidas pelos jogadores antes do início de uma disputa. Eis as quatro regras para o jogo: *1ª regra*: Conforme os dois primeiros tabuleiros mostrados na Figura 2, a seguir, a primeira regra estipula que o jogador A pode movimentar sua *tampinha* na posição vertical, uma posição por vez, para cima ou para baixo e também pode movimentar sua *tampinha* na posição horizontal, uma posição por vez, somente para a direita, sendo permitido retornar com a sua tampinha à qualquer posição anteriormente visitada apenas por uma vez, durante o decorrer de uma mesma partida; O jogador B pode movimentar sua *tampinha* na posição vertical, uma posição por vez, para cima ou para baixo e também pode movimentar sua *tampinha* na posição horizontal, uma posição por vez, somente para a esquerda, sendo permitido retornar com a sua tampinha à qualquer posição anteriormente visitada apenas por uma vez, durante o decorrer de uma mesma partida.

Figura 2: Movimentos permitidos serem feitos e movimentos possíveis de captura de uma "tampinha" no Tabuleiro do Jogo Grelha Quadrada 3 X 3



Fonte: o autor.

2ª regra: É obrigatória a captura da *tampinha* do oponente sempre que possível: quando as *tampinhas* do jogador e do seu oponente se encontrarem *em diagonal* (deve ser respeitado o sentido horizontal do jogador que vai fazer a captura: a captura da *tampinha* de B pelo jogador A se dará *em diagonal* para a direita ou *em diagonal* para a esquerda, enquanto que a captura da *tampinha* de A pelo jogador B se dará *em diagonal* para a esquerda ou *em diagonal* para a direita. A captura da tampinha do oponente se dará sempre que as duas tampinhas estiverem adjacentes (juntas), respeitando o sentido de movimentação vertical (para cima ou para baixo) e o sentido de movimentação horizontal (para a direita ou para a esquerda, conforme seja o jogador). *3ª regra:* Será obrigatório finalizar a disputa sempre que um jogador estiver com a sua *tampinha* junto ao quadrado inicial do seu oponente, ou sempre que a *tampinha* do seu oponente estiver em posição que o permita fazer a captura. *4ª regra:* O movimento das *tampinhas* durante o desenrolar de uma partida do jogo não poderá ultrapassar o limite máximo de 8 (oito) movimentos. Assim, cada jogador poderá movimentar sua *tampinha* no máximo por 4 vezes. Quando o jogador B fizer o 8º movimento (considerando que o jogador A inicia a disputa, como dito) a disputa estará encerrada. Em qualquer momento de uma partida a disputa será finalizada e o empate estará configurado no momento em que a tampinha de um jogador estiver adjacente (junta) à tampinha do seu oponente, impossibilitando que uma jogada seja feita, O mesmo ocorre se, após o 8º movimento, o jogador B não conseguir colocar a sua *tampinha* na posição inicial do jogador A.

IV. *Objetivo pedagógico do jogo*: A restrição em relação ao número máximo de oito movimentos tem duas razões: A primeira é a de permitir que o jogo não se estenda por muitos movimentos tornando-se cansativo e desinteressante pelos jogadores. A segunda razão tem a ver com a resolução de problemas combinatórios e probabilísticos associados ao jogo - que são sugeridos em prosseguimento - de modo que o professor avalie a viabilidade/possibilidade/importância de propor aos seus alunos. Tal razão vai ao encontro de encurtar as resoluções de alguns problemas, sem deixar de permitir que o exercício dos raciocínios combinatório e probabilístico, durante a construção de diagramas de árvore (para se chegar à lista de todas as possibilidades como o jogo poderia se desenrolar, a partir de determinado momento do jogo ou desde o seu início), bem como a determinação da chance de cada jogador vencer uma partida. Espera-se que cada jogador se comporte como um jogador pro ativo, isto é, um jogador que deseja vencer e aprender algo novo, com o jogo e pelo jogo. Podemos dizer que o jogo é, por assim dizer, um disparador do ensino aprendizagem de alguns conceitos de combinatória e de probabilidade, mormente a oportunidade de aprender a construir diagramas de árvore e de mobilizar e exercitar o raciocínio combinatório durante a sua construção. Para resolver os problemas, sugerimos que o professor e alunos recorram à construção de diagramas de árvore com o propósito de identificar todas (ou algumas) possibilidades que o rumo de uma partida pode tomar. Está aí o primeiro conhecimento básico de combinatória, a partir do jogo: a construção de diagramas de árvore. Uma vez construído o diagrama de árvore, por completo (a partir do início de uma partida ou de um particular momento do jogo), todos os resultados finais possíveis ao prosseguimento da partida tornar-se-ão conhecidos. Por sua vez, importante salientar aos alunos que cada resultado final mostrado no diagrama da árvore poderá ser alcançado por um jogador, conforme tenha sido o desenrolar de uma partida. Então, acrescentam-se aos objetivos pedagógicos do jogo a oportunidade de os jogadores, para cada movimento de sua *tampinha*, se depararem com a necessidade de ter de tomar uma decisão e dar prosseguimento à partida respeitando-se as regras que foram estabelecidas para o jogo; exercitem o raciocínio combinatório, enquanto vão aprendendo a construir um diagrama de árvore; apropriem-se de novos conhecimentos que são próprios dos conteúdos de combinatória e de probabilidade.

V. Organização dos alunos em sala: Os participantes podem participar do jogo tanto de modo individual (um contra o outro) quanto em grupos menores.

VI. Alunos comunicando a aprendizagem: Recomendamos ao professor oportunizar aos alunos a possibilidade de eles mostrarem o que aprenderam com o jogo promovendo reflexões e discussões conjuntas a esse respeito, pedindo que eles escrevam sobre o que aprenderam.

VI. Explorando problemas associados com o jogo:

Uma vez os alunos estejam familiarizados com as regras do jogo após terem jogado por algumas rodadas, o professor pode propor os problemas a ele relacionados em prosseguimento às disputas. Para tal, sugerimos alguns problemas como os que estão presentes no item 5.

Em seguida, seguem considerações a respeito da metodologia do estudo.

4. METODOLOGIA E OS SUJEITOS DO ESTUDO

O estudo contou com a participação de quatro estudantes, doravante designados sujeitos do estudo, os quais foram separados em duas duplas para efeito das disputas e durante a resolução dos problemas: A e B contra B e C. Também contou com a mediação de uma colega professora que ensina Matemática para os anos iniciais, que atuou como mediadora. No estudo foi utilizada a metodologia "*Design Experiment in Educational Research*" de Cobb; Confrey; DiSessa; Lehrer e Schauble (2003). A escolha da metodologia se deu em função dela ser dotada de flexibilidade de adaptação ao desenho inicial proposto, considerando as produções fornecidas pelos sujeitos do estudo. Segundo a metodologia, um desenho básico flexível - que pode ou não sofrer modificações ao longo de todo o processo do estudo - deve ser preliminarmente elaborado. Por conta de possíveis modificações, a metodologia permite que sejam geradas novas conjecturas, como é preciso, as quais precisam ser testadas a posteriori. Além do mais, tal metodologia prevê a elaboração de experimentos de ensino de conteúdos da Matemática com vistas à obtenção de inovações.

Salienta-se que o pesquisador precisou se responsabilizar por identificar as adaptações que se fizeram necessárias implementar ao longo do estudo ao assumir o papel de orientador, intervindo durante o desenrolar das tarefas propostas somente em momentos críticos considerados por ele como de bloqueio. O presente estudo - previsto para ser desenvolvido ao longo de 5 a 6 aulas de 40 minutos cada – foi desenvolvido quando o propósito inicial foi de analisar a produção dos alunos no tocante ao conhecimento, apropriação e exercício do raciocínio combinatório; na construção de diagramas de árvore, e nas resoluções e comunicação de respostas referentes a um conjunto de problemas que foram propostos ao final de três partidas, para todos os sujeitos do estudo.

As disputas no jogo tiveram o propósito de se tornarem disparadores no tocante ao ensino aprendizagem para a construção de diagramas de arvores. Segundo Lopes e Rezende (2010, p.680), “A associação do jogo com a resolução de problemas torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento”.

Para atender os propósitos do jogo um planejamento precisou ser elaborado, tomando por base o objetivo de desenvolver o conceito de raciocínio combinatório segundo o significado de construção de diagramas de árvore, para cada problema proposto. Inclusive, por conta do momento que atravessávamos de isolamento social, foi propício que parte do estudo (envio das regras do jogo e tabuleiro) fosse encaminhado pelo pesquisador aos sujeitos do estudo por meio de aulas on-line. O estudo reuniu um forte cunho descritivo em relação às regras do jogo quando do retorno dos sujeitos ao presencial (apenas para fins de participar do estudo), incluindo os diálogos havidos entre os estudantes e entre eles e o pesquisador. Em Xxxxxx (xxxx) o diagrama de árvore completo está apresentado. Contém todas as possibilidades como uma partida do jogo pode se desenrolar, desde os primeiros movimentos possíveis serem feitos por um dos jogadores.

Uma vez que nos dias de hoje o retorno às aulas presenciais é uma realidade, recomenda-se que este estudo seja desenvolvido mais uma vez, agora em um ambiente natural (sala de aula), para a coleta direta de dados da produção após reflexões, intervenções e discussões dos alunos entre si e estes com o professor - momentos em que o professor poderá exercer o papel de mediador e incentivador na promoção de reflexões e discussões coletivas que visem a construção de diferentes digramas de árvore, e a constatação pelos alunos do resultado obtido em uma partida à luz de um dos ramos da árvore de possibilidades.

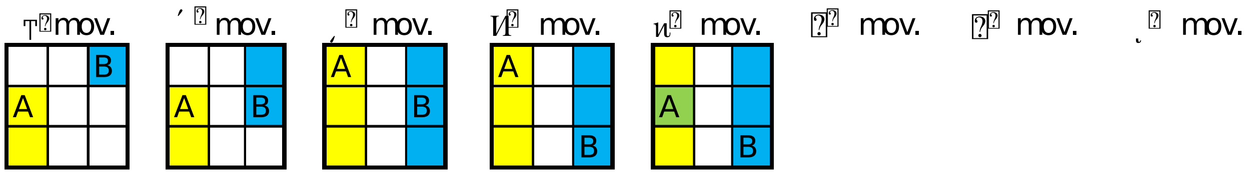
5. RESULTADOS E ANÁLISES

Os quatro estudantes foram divididos em duas duplas; A e B contra B e C, com a professora de matemática mediando o desenrolar do jogo e a explicação/esclarecimento das regras do jogo. Três partidas foram disputadas, com a dupla A e B vencedora em duas delas (a mesma dupla que iniciou jogando), o que suscitou a seguinte pergunta do pesquisador: O que vocês acham do fato de a mesma dupla sair vencedora nas duas primeiras partidas?

Respostas dos sujeitos: A: Acho que vence quem inicia jogando; B: Mera coincidência. Com mais partidas a dupla que não começa jogando pode vir a vencer; C: Acho que nós perdemos porque em uma das posições fizemos o retorno e eles não; D: Não tenho uma opinião a respeito.

O pesquisador pediu que os alunos avaliassem o resultado final de uma partida cujas movimentações até o 5º movimento (realizado pelo jogador A, que iniciou jogando) são mostradas na Figura 3, a seguir.

Figura 3: Momento de uma partida no Tabuleiro do Jogo Grelha Quadrada 3 X 3, após o 5º movimento ter sido relizado pelo jogador A

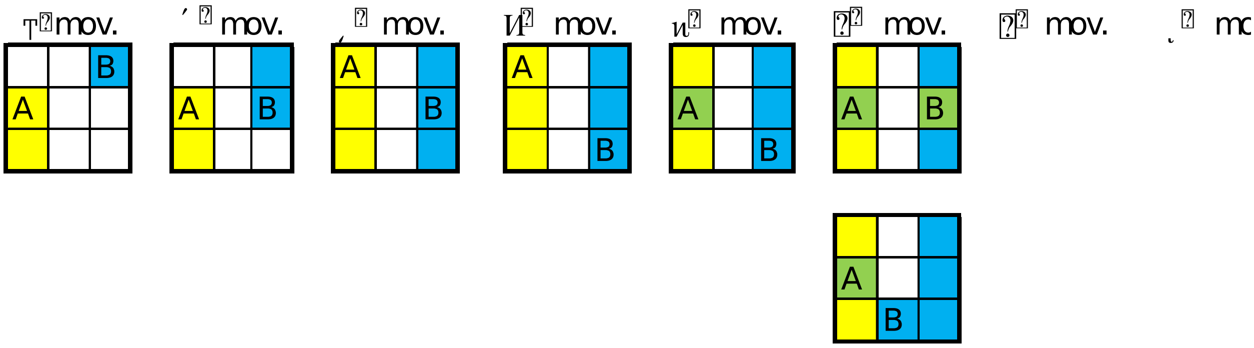


Fonte: o autor.

Também lembrou aos sujeitos do estudo que a indicação da cor verde em uma posição do tabuleiro, conforme assinalado na Figura 3, acima, evidencia que o jogador A já fez um movimento de retorno a uma posição por ele percorrida e, portanto, não lhe é permitido fazer mais nenhum outro retorno; que o número máximo de movimentos em uma partida é igual a 8; e que o jogador B será o jogador a fazer o 6º movimento na partida. Uma vez que tivessem feito tais observações, o pesquisador pediu que eles indicassem os possíveis movimentos que o jogador B poderia vir a fazer no decorrer desta partida, agora por ocasião do 6º movimento.

Corretamente, os sujeitos responderam que o jogador B poderá movimentar sua tampinha no sentido horizontal para a esquerda ou no sentido vertical para cima, retornando a uma posição por ele já percorrida. Então, o pesquisador pediu que um dos sujeitos do estudo escrevesse em uma folha de papel em branco, essas duas possibilidades, as quais são mostradas na Figura 4, a seguir:

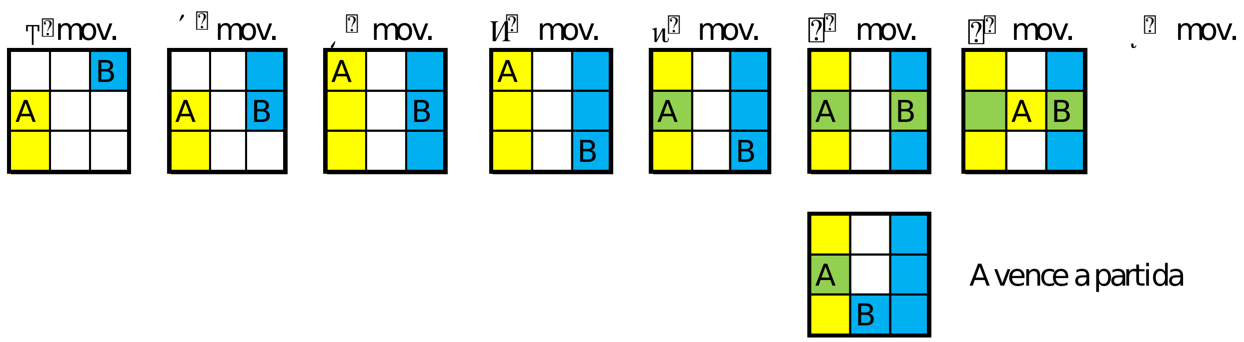
Figura 4: Momento de uma partida no Tabuleiro do Jogo Grelha Quadrada 3 X 3, após o 6º movimento, possíveis serem realizados pelo jogador B



Fonte: o autor.

O pesquisador explicou aos sujeitos do estudo que o registro das duas possibilidades de jogada como mostrado na Figura 4, configura o registro de dois ramos de um diagrama de árvore em fase de construção. Agora, em continuidade, o pesquisador indicou aos sujeitos ser a vez de o jogador A fazer a movimentação de sua tampinha por ocasião do 7º movimento da partida, e que este movimento seria o último a ser feito por ele nesta partida. Os sujeitos responderam que na primeira situação o jogador A poderá movimentar sua tampinha apenas no sentido horizontal para a direita, já que não pode mais fazer movimentos de retorno a uma posição já percorrida, e que na segunda situação o jogador A vence a partida ao capturar a tampinha do jogador B. A Figura 5, a seguir, mostra essas duas possibilidades, ampliando o desenho do diagrama de árvore.

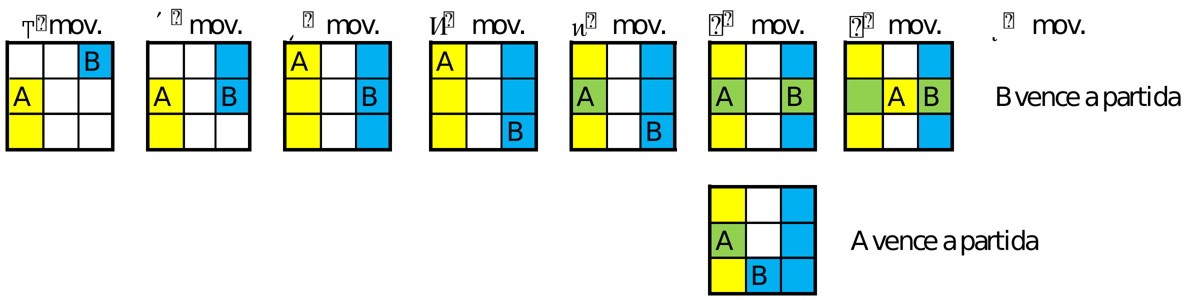
Figura 5: Momento de uma partida no Tabuleiro do Jogo Grelha Quadrada 3 X 3, após o 7º movimento, possíveis serem realizados pelo jogador A



Fonte: o autor.

O pesquisador indicou ser a vez de o jogador B fazer a movimentação de sua tampinha por ocasião do 8º movimento, o último de uma partida. Nesta única situação de jogada o jogador B vence ao capturar a tampinha do jogador A. A Figura 6, a seguir, mostra essa possibilidade, finalizando o desenho do diagrama de árvore iniciado a partir do 6º movimento.

Figura 6: Momento de uma partida no Tabuleiro doJjogo Grelha Quadrada 3 X 3, após o 8º movimento, possível ser realizado pelo jogador B



Fonte: o autor.

O diagrama de árvore mostrado acima foi apenas um dentre alguns que foram propostos aos sujeitos do estudo, a partir de um dado momento de uma partida. Outros momentos de jogo foram apresentados para que eles construíssem árvores que mostrassem o transcorrer de uma possível partida, desde o particular momento até o seu final conforme as possibilidades de movimentação das tampinhas dos jogadores A e B. Considerando o desembaraço dos alunos em relação à compreensão das regras do jogo - mormente no que refere às tomadas de decisão de possibilidades de movimentação da sua tampinha em cada momento do jogo, exemplificando a mobilização do exercício do raciocínio combinatório - e as diferentes construções de diagramas de árvore, consideramos que ter sido bastante produtiva a apropriação de conhecimentos relativos a esses momentos construtivos de um diagrama. Satisfatoriamente, também, foi a proposição e a resolução de problemas associados com o jogo - como os que são apresentados a seguir -, segundo a Teoria de Resolução de Problemas defendida por Onuchic (1999), aos sujeitos do estudo em um só grupo de estudo. Eis os enunciados dos problemas propostos:

Problema 1: É possível que os dois jogadores movimentem suas tampinhas por no máximo 2 vezes em uma mesma partida e mesmo assim já se conheça um vencedor? Se sim, como? ....

Problema 2: A e B estão jogando o Jogo *Grelha Quadrada 3 x 3***.** Supondo que após o jogador A ter feito o 5º movimento sua *tampinha* esteja no quadrado de número 6 (com retorno de 5 para 6) - numeração conforme mostrado na Figura 1, acima - e a tampinha do jogador B esteja no quadrado de número 9, há algum movimento que A possa fazer para impedir que B vença o jogo? Explique.

Problema 3: A e B estão jogando o Jogo *Grelha Quadrada 3 x 3***.** Considerando que o jogador A inicia jogando, você identifica ao menos uma *estratégia ganhadora* que permita ao jogador B vencer o jogo? Em caso afirmativo, descreva-a. Por *estratégia ganhadora* estende-se uma sequência de movimentos que leve um jogador a vitória, independentemente das jogadas que o seu oponente venha a fazer ao longo da disputa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao apresentar e analisar o Jogo *Grelha Quadrada* 3 x 3 e algumas possibilidades de contribuição para o estudo inicial de construção de diagramas de árvore e a apropriação do raciocínio combinatório por estudantes do Ensino Fundamental, entendemos ser este um caminho promissor para iniciar o ensino da temática Combinatória neste segmento de ensino.

Considerou-se atraente e lúdica esta proposta de trabalho e mais uma possibilidade para o professor explorar esses conteúdos no decorrer do seu trabalho docente, sem desconsiderar outras propostas didáticas. Assim, tanto a proposição e avaliação do presente trabalho pedagógico quanto o entendimento das regras e as disputas do jogo revestem-se de boas oportunidades para o professor ampliar conceitualmente seus conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos de conteúdo acerca da temática, segundo o que defende Shulman (1986).

Ademais, o entendimento acerca dos propósitos do jogo representa mais um degrau para o professor galgar na construção e (re) significação da longa prática docente, no que refere aos conhecimentos acima e também em relação aos conhecimentos curriculares.

Embora o jogo tenha sido testado por um pequeno número de 4 estudantes os resultados que foram obtidos mostraram-nos que a ampliação conceitual que ele proporcionou ao aprendizado dos estudantes foi bastante significativo, tendo em vista que o raciocínio combinatório foi mobilizado, exercitado e desenvolvido, por muitas vezes, durante a construção dos ramos das árvores de possibilidades.

Em consequência de todo o trabalho desenvolvido no tocante aos conhecimentos relacionados com a construção de diagramas de arvore, tal habilidade foi amplamente contemplada tal qual foi ela elencada pelos autores da BNCC. Com um número mais expressivo de problemas que podem ser propostos para resolução e um aumento na quantidade de sujeitos de estudo (uma turma como um todo), são esperados resultados que se tornarão promissores ao longo do estudo da temática Combinatória.

Não podemos considerar relevante que a proposição de um jogo, em um contexto de sala de aula, revista-se da ideia de que seja visto como “uma diversão”, o jogo pelo jogo, e mais nada além do fato de ocupar os alunos com o seu jogar e divertir-se. Um jogo didático deve fazer parte de um contexto de ensino aprendizagem mais amplo que o simples fato de possibilitar que o joguem. Ou seja, um jogo didático deve propiciar condições favoráveis para a apropriação de um ou mais conhecimentos, como é o caso do presente Jogo Grelha Quadrada 3 x 3.

É neste contexto que nesse jogo se apresenta uma proposta de ir além da diversão, ao permitir que os jogadores exercitem o raciocínio combinatório para construírem diagramas de árvore.

Se, por exemplo, considerarmos alterações nas regras do jogo de modo a ele servir para um experimento aleatório segundo o qual as jogadas devem ser feitas em decorrência do resultado mostrado na face de um dado cúbico, o diagrama de arvore que foi construído será útil para o estabelecimento do espaço amostral de possibilidades (eventos simples prováveis ocorrer). Por conta disso a proposição deste jogo não terá sido concebido visando apenas a diversão dos alunos, mas presta-se também a possibilitar que os alunos construam conhecimentos por meio dele e com ele quando do seu jogar.

De modo que um jogo possa se caracterizar como um recurso auxiliar do professor no ensino aprendizagem da Matemática escolar é imprescindível que ele faça o jogador pensar para tomar uma decisão sobre a jogada que vai fazer em seguida e os desdobramentos de ter tomado uma decisão e não outra. O presente jogo se propõe a tal.

Ademais, um jogo didático precisa apresentar desafios a todos os que o jogam de modo que para vencer o jogo um jogador precise superar tais desafios, por meio do estabelecimento de estratégia (s) proativa (s) que o permitam sair vencedor e não que os jogadores considerem o jogo apenas como só mais uma diversão, entre tantas outras, em que ora um vença ora vença o outro.

É evidente que a diversão é um componente importante para o desenrolar de um jogo mas a diversão não pode ser apenas o mote que motive um professor a propor um jogo didático uma vez que é preciso que ele contemple alguns componentes didáticos: o pensar, o avaliar, o decidir e o jogar, como é o caso do Jogo Grelha Quadrada 3 x 3, e não um jogo de sorte e azar.

Além do mais, é recomendável e saudável que os alunos após terem elaborado estratégias pessoais para vencer um jogo as compartilhem com os colegas do seu "time", e em algum momento posterior à disputa também o façam com os colegas que foram os seus oponentes quando da disputa, também com os outros colegas que não participaram do jogo até então. Enquanto partilham as variadas estratégias pessoais de jogo invariavelmente os alunos criam uma atmosfera agradável de trocas, reflexões e questionamentos entre si, as quais os levam a uma ampliação conceitual acerca do conhecimento matemático subjacente ao jogo em si e os conhecimentos que subliminarmente também estão presentes quando do desenrolar do jogo.

Um jogo didático, como é o caso do jogo grelha quadrada 3 x 3, favorece, pois, a oportunidade de trabalhos em grupo, a descoberta, a partilha de saberes e a ampliação da aprendizagem de um novo conteúdo matemático nele presente - estendendo-se ao desenvolvimento de competências que visam preparar cada jogador para competir no jogo de modo mais eficiente e a apropriação de conceitos de Combinatória.

O presente jogo também possibilita o exercício do pensamento (raciocínio) combinatório; a análise de possibilidades para se fazer a combinação de possibilidades de jogadas; a reflexão para a tomada de decisões; a realização de testes de hipóteses, as quais são levantados durante as discussões coletivas; a ampliação do debate acerca da descoberta e a ampliação de estratégias de jogo que visam à melhoria, compreensão e a apropriação de conceitos. Por fim, um jogo didático também leva os atores envolvidos a atitudes relacionadas com o hábito e o desenvolvimento de ações pertinentes ao processo de argumentação.

Portanto, ressaltamos o quanto um jogo didático pode favorecer o trabalho de um professor no tocante à apresentação e o desenvolvimento de ferramentas matemáticas concernentes ao ensino e aprendizagem de um conteúdo, por meio dele e a partir dele. Em particular, o ensino aprendizagem de combinatória (em conjunto com o de probabilidade), desde os anos iniciais do ensino fundamental, por meio do Jogo Grelha Quadrada 3 x 3.

Ressaltamos, também, que o bom uso de um jogo e a sua adequada exploração pode contribuir para que o professor melhore seus instrumentos observacionais em relação ao rendimento e conhecimentos de seus alunos, de modo mais amiúde. Tudo isso, porque o jogo permite ao professor conhecer melhor as dificuldades de seu aluno e as interpretações que ele faz quando da leitura do enunciado de um problema, por exemplo. Também em relação às fragilidades conceituais que porventura o aluno possa vir a ter - mais facilmente identificáveis durante o desenrolar de uma partida do jogo -, bem como em relação às concepções e às crenças de cada aluno a respeito do conhecimento matemático objeto do jogo e em relação às atividades se seguem ao seu desenrolar.

Com base em todas essas considerações, o professor pode/deve refletir acerca de quais conhecimentos e competências terá de considerar para ajudar seu aluno a superar as dificuldades que tenha e, assim, poder contribuir para melhorar o rendimento escolar dos seus alunos no tocante ao ensino aprendizagem da Matemática como um todo.

Finalizando, enfatiza-se a pertinência de se realizarem futuros estudos que abordem as propostas presentes nos problemas que foram sugeridos (talvez outros), de modo a conhecer mais amiúde como se dá a compreensão e o exercício do pensamento combinatório para a construção de diagramas de árvores em uma dimensão mais ampla e em diferentes contextos; bem como a possibilidade de estabelecer outros espaços amostrais e posterior quantificação e comparação de probabilidades, tudo em consonância com as habilidades e competências presentes na BNCC.

REFERÊNCIAS

BATANERO, Carmem; GODINO, Juan Diaz; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Combinatorial reasoning and its assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, D.J.B. (Ed.). **The assessment challenge in statistics educativo**. Minnesota: IOS Press, p. 239-252, 1997. Recuperado de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref. Acesso: 13 abr.2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos**. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília, 2018.

Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf . Acesso: 13 abr.2022.

COBB, Paul; CONFREY, J;., diSESSA, A.;, LEHRER, R. e SCHAUBLE, L. Design Experiments in Educational Research. **Educational Researcher**, v.32, n.1, p. 9-13, 2013.

FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: Reidel, 1975.

FRANCO, Maria Amélia Santoro. Pedagogia da Pesquisa-ação. **Revista Educação e Pesquisa**. v.31, n.3, p.483-502, set/dez 2005. São Paulo. SP. Recuperado de http:// www.sciwlo.br/pdf/ep/v31/n3/a11v31n3.pdf. Acesso: 13 abr.2022.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia:** Saberes necessários à Prática Educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2013.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas (SP), 2000. Recuperado de http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251334. Acesso: 13 abr.2022.

LOPES, Jose Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade. **Boletim Bolema**, Rio Claro (SP), v.23, n.36, p.657-682, 2010.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

NAVARRO-PELAYO, Virginia, BATANERO, Carmem e GODINO, Juan Diaz. Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria. **Educación Matemática**. Grupo Editorial Ibero América, Madrid, v.8, n.1, p. 26-39, 1996.

NCTM **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2000.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational**, v.15, n.2, p.4-14, 1986.