e-Boletim de Física

International Centre for Physics
Instituto de Física, Universidade de Brasília
Ano 14, 2021 • http://periodicos.unb.br/index.php/e-bfis • eBFIS **11** 11301-1(2021)

Campos de Calibre e o Modelo Padrão de Partículas Elementares: uma revisão pedagógica

Luz, R. R.*
International Center of Physics, Universidade de Brasília, 70.910-900, Brasília, DF, Brazil

Ambrósio, G. V.† and Costa, C. N.‡
Departamento de Física, Universidade Federal de Juiz de Fora, 36036-330, Juiz de Fora, MG, Brazil

Moreira, R. P. M.§
International Center of Physics, Universidade de Brasília, 70.910-900, Brasília, DF, Brazil

Paiva, R. A. S.¶
Faculdade Gama, Universidade de Brasília, campo Leste (Gama), 72444-240, Brasília-DF, Brazil

Petronilo, G. X. A**
International Center of Physics, Universidade de Brasília, 70.910-900, Brasília, DF, Brazil and Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília-DF — CEP 70910-900

O campo de calibre $SU(3)$ do Modelo Padrão (MP) tem sido motivação para uma variedade de estudos. O presente artigo abordará alguns aspectos teóricos da simetria $SU(3)$ no cenário do MP. Serão apresentados o campo de calibre $U(1)$, assim como o campo interação forte. A exibição destes campos serão realizados com o máximo de detalhes possíveis, tratando das respectivas lagrangianas referente a cada um destes.

I. INTRODUÇÃO

Descrito como uma teoria capaz de explicar a maior parte das interações das partículas, o Modelo Padrão (MP) das interações fundamentais [1, 2], incorpora as interações forte ($SU(3)$), fraca ($SU(2)$) e eletromagnética ($U(1)$). O desenvolvimento deste modelo tem como essência o princípio de gauge (calibre) [3–6], no qual traz um conjunto de transformações de simetrias onde a teoria física é medida através de uma mudança dos campos de calibre do correspondente grupo de simetria local e/ou global.

Na Física, diversas teorias são expressas por lagrangianas invariantes sob determinadas transformações de simetrias. A despeito disso, as interações exibidas pelo Modelo Padrão são representadas por lagrangianas invariantes sob a transformação denominada de transformação de calibre. Esta lagrangiana invariante exibe um conjunto de bósons mediadores chamados de bósons de calibre. As transformações de calibre são descritas por um grupo de simetria unitário e, no caso do Modelo Padrão, o grupo de calibre representativo é dado como $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

A introdução do termo de calibre em geometria diferencial foi realizada por Weyl [7]. Em seu trabalho, o autor propôs uma teoria de gravitação na qual o comprimento de um vetor alterava-se sob transporte paralelo. Vale ressaltar, que no período das pesquisas realizadas por Weyl, o objetivo era formular uma teoria eletromagnética (uma teoria de calibre abeliana) compatível com a Relatividade Geral de Einstein.

Com um trabalho seminal, Yang e Mills [8] os foram responsáveis por inserir os primeiros estudos acerca de simetria para grupos de calibre não abelianos. A proposta era tornar local a simetria de isospin das interações fortes. Para tanto, o roteiro escolhido foi o mesmo traçado por Weyl em seu trabalho de 1929 [7]. A fim de escrever as equações de forma local, Yang e Mills introduziram um campo de calibre que satisfazia a simetria de calibre não abeliana, tal fato abriu novos horizontes para este tipo de teoria [9].

Assim, o presente trabalho tem por objetivo apresentar, enquanto uma revisão literária e com profundo cunho pedagógico, os conceitos e ferramentas fundamentais uti-

* renatorodriguesgm@gmail.com
† gabriella.ambrosio@estudante.ufjf.br
‡ cleber.costa@ice.ufjf.br
§ peresroemir@gmail.com
¶ rendisley.paiva@edu.se.df.gov.br
** gustavopetronilo@gmail.com

lizadas em física de altas energias. A apresentação do mesmo está organizada da seguinte forma. Na seção II é feita uma análise da estrutura da teoria de calibre U(1), através da construção de uma ação invariante de Lorentz e do comportamento desta ação sob transformações de fase global e local. A seção III analisa alguns aspectos que estão envoltos do campo de interação forte. As considerações finais são tecidas na seção IV.

II. CAMPO DE CALIBRE U(1)

O estudo das simetrias de calibre foi introduzido por Weyl [7] como uma tentativa de obter a derivação geométrica do campo eletromagnético no âmbito da relatividade geral. Posteriomente, o uso da transformação de calibre na física de partícula originou-se com os trabalhos de Yang e Mills [8]. A teoria de calibre mais simples do modelo padrão é a eletromagnética descrita pelo grupo abeliano U(1) [5]. Esse campo de calibre permite através de simetrias do grupo de Lorentz impor invariâncias no funcional da ação do campo de Dirac que resultam na interação eletromagnética com os férmions.

Esta seção será voltada em construir uma ação que seja um invariante de Lorentz, bem como demonstrar o comportamento da equação de Dirac perante as transformações de calibre global e local. A despeito disso, é observado que tais simetrias podem ser usadas para gerar dinâmicas, isto é, as interações de calibre.

Considere $\psi(x)$, o spinor de Dirac e γ^μ correspondendo as matrizes de Dirac 4×4 das quais satisfazem a relação de anti-comutação $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$, com $(\mu=0,1,2,3)$ [10]. Seja

$$\bar{\psi}=\psi^\dagger(x)\gamma^0, \tag{1}$$

como sendo o spinor adjunto de Dirac. O produto $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ é um escalar de Lorentz, isto é

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \left(S\left[\Lambda\right]\psi(x)\right)^\dagger\gamma^0 S\left[\Lambda\right]\psi(x)\\ &= \psi^\dagger(x)\gamma^0 S\left[\Lambda\right]^{-1}\gamma^0\gamma^0 S\left[\Lambda\right]\psi(x)\\ &= \psi^\dagger(x)\gamma^0 S\left[\Lambda\right]^{-1} S\left[\Lambda\right]\psi(x)\\ &= \psi^\dagger(x)\gamma^0\psi(x)\\ &= \bar{\psi}(x)\psi(x),\end{aligned} \tag{2}$$

onde Λ e $S\left[\Lambda\right]$ são, respectivamente, a matriz de transformação do grupo de Lorentz e a matriz de transformação na representação spinorial do grupo de Lorentz [10]. A mesma análise pode ser feita para o produto $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$, onde conclui-se que este produto é um vetor de Lorentz, que permite construir escalares de Lorentz ao contrair o índice μ com outros índices. Os produtos $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ são suficientes para se escrever uma ação que gere as equações de Dirac para $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$. Observando-as, a ação fica definida como

$$S=\int d^4x\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x). \tag{3}$$

A partir da ação, infere-se que a densidade de Lagrangiana de Dirac é dada por

$$\mathcal{L}_0=\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x). \tag{4}$$

Com a Lagrangiana em mãos, torna-se factível mostrar que a mesma mantém-se invariante sob a ótica da transformação de fase global, em outras palavras, ao incrementar a transformação $\psi'(x)\to U\psi(x)$ na lagrangiana notar-se-á que esta não se altera, como pode ser observado

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}'\to\mathcal{L}\\ \mathcal{L}_0' =&\bar{\psi}'(x)\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\Big)\psi'(x)\\ =&U^\dagger\bar{\psi}(x)\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\Big)U\psi(x)\\ =&U^\dagger U\bar{\psi}(x)\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\Big)\psi(x)\\ =&e^{-i\Lambda}e^{i\Lambda}\bar{\psi}(x)\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\Big)\psi(x)\\ \mathcal{L}_0' =&\bar{\psi}(x)\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\Big)\psi(x)\\ \mathcal{L}_0' =&\mathcal{L}_0\end{aligned}$$

sendo $U=e^{i\Lambda}$ um elemento do grupo abeliano $U(1)$. Percebe-se que quando a transformação é dita de fase global o parâmetro Λ não depende das coordenadas do espaço-tempo como foi apresentado. Por outro lado, se esse parâmetro Λ depender das coordenadas do espaço-tempo, a transformação de calibre é dita de fase local

$$U=e^{i\Lambda(x)}, \tag{5}$$

e substituindo essa transformação na densidade Lagrangiana de Dirac, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0' &= \bar{\psi}'(x)\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\Big)\psi'(x)\\ &= e^{-i\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\Big)e^{i\Lambda(x)}\psi(x)\\ &= e^{-i\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\Lambda(x)}\psi(x))\\ &- e^{i\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)me^{i\Lambda(x)}\psi(x)\\ &= e^{-i\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu e^{i\Lambda(x)}(\partial_\mu+i\partial_\mu\Lambda)\psi(x)\\ &- me^{-i\Lambda(x)}e^{i\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)\psi(x)\\ &= \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu+i\partial_\mu\Lambda)\psi(x)-m\bar{\psi}(x)\psi(x)\\ &= \bar{\psi}(x)\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\Big)\psi(x)-\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu\Lambda)\psi(x)\\ \mathcal{L}_0' &= \mathcal{L}_0-\mathcal{L}_{ext}.\end{aligned}$$

Neste caso, ao aplicar a transformação de fase local, verifica-se que a densidade Lagrangiana de Dirac não é mais invariante, uma vez que surge um termo adicional em relação à original representado por $\mathcal{L}_{ext} = -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu\Lambda)\psi(x)$.

Com o intuito de recuperar a invariância, se faz necessário adicionar um termo que seja um invariante de calibre e contenha um novo campo que se transforme de modo a cancelar os termos não invariantes oriundos de $\mathcal{L}_0$. Para este fim, introduz-se a seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_1 = -\bar{\psi}(x)eA_\mu(x)\gamma^\mu\psi(x), \tag{6}$$

em que $A_\mu(x)$ corresponde ao novo campo que, sob transformação de calibre, muda da seguinte forma

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x). \tag{7}$$

Uma transformação como esta também deixa invariante a teoria eletromagnética. Assim, é natural tomar A_μ como sendo o potencial vetor do campo eletromagnético [10]. Desta forma, a densidade de Lagrangiana invariante de calibre assume

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - \bar{\psi}(x)eA_\mu(x)\gamma^\mu\psi(x)\\ &= \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)\\ &= \bar{\psi}(x)\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right) - m\right]\psi(x)\\ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 &= \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi(x),\end{aligned} \tag{8}$$

onde foi introduzida a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x). \tag{9}$$

Vale ressaltar que a derivada covariante $D_\mu\psi(x)$ segue a mesma transformação do campo $\psi(x)$, ou melhor, a derivada covariante não muda o fator de fase nos termos $D_\mu\psi(x)$ [5], de tal modo que

$$\begin{aligned}(D_\mu\psi)' &= \left(\partial_\mu + ieA'_\mu(x)\right)\psi'\\ &= \left[\partial_\mu + ie\left(A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)\right)\right]e^{i\Lambda(x)}\psi\\ &= e^{i\Lambda(x)}\left(\partial_\mu + ieA_\mu(x)\right)\psi\\ &= UD_\mu\psi,\end{aligned} \tag{10}$$

mostrando que o termo $i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi(x)$ é invariante.

Usando o fato que D_μ é invariante de calibre, pode-se definir o tensor do campo eletromagnético como

$$F_{\mu\nu} = -i[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{11}$$

Em que o comutador das derivadas convariantes representa o tensor de curvatura $F_{\mu\nu}$ que está associado com A_μ.

Assim, a inserção de outro termo na Lagrangiana se faz necessário para que se consiga derivar a equação de movimento em relação a A_μ [5]. A escolha mais simples que preserva a invariancia de Poincaré e de Calibre será

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{12}$$

Logo, a Lagrangiana final toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2,\\ \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{13}$$

que corresponde à teoria de partículas fermiônicas que possui interação com o campo eletromagnético da eletrodinâmica quântica (QED).

A interação eletromagnética pode ser generalizada para as demais interações. Para tanto, faz-se a escolha de um determinado grupo de simetria compatível com a prescrição desejada. Como exemplo desta generalização, na próxima seção será abordado o campo de interação forte representado pelo grupo de simetria SU(3).

III. O CAMPO INTERAÇÃO FORTE

Existe um tipo de força fundamental na natureza que mantém os núcleos atômicos estáveis. Essa força que supera as repulsões eletromagnéticas é chamada de força nuclear forte [11–14]. A teoria de campo proposta na década de 1970 por David Politzer, Frank Wilczek e David Gross, responsável por explicar as interações nucleares fortes denominada de Cromodinâmica Quântica (QCD) [15, 16], é tida como uma teoria de calibre não abeliana (Yang-Mills), representada através do grupo de simetria $SU(3)$ [17–22]. Nesta teoria, as partículas que constituem a matéria são descritas pelos quarks. E, além disso, esta prevê a existência de partículas mediadoras da interação forte denominados de glúons. Estes glúons são os bósons de calibre distribuidos em oito espécies [11–14, 23–26].

Para formular a Cromodinâmica Quântica precisa-se compreender as consequências da propriedade da cor do quark. E, com a finalidade de tornar a discussão simples, considere um quark sem massa no qual será descrito pela equação de Dirac, sendo que o campo de Dirac representará o campo de quarks denotado por ψ_i, $i = 1, 2, 3$. O índice i rotula o estado de cor permitido pelo quark, onde estes estados de cores representam uma simetria. Com isso, a interação forte fica alicerçada na simetria de calibre $SU(3)$. Assim, tem-se uma simetria exata, ou seja, a carga de cor tende a ser conservada [11–14]. Nesta seção será explorada a matemática do grupo $SU(3)$ e posteriormente construida a lagrangiana representativa da QCD.

Considere uma transformação do tipo

$$\begin{aligned}\psi_i \rightarrow &U_{ij}\psi_j\\ &= U_{i1}\psi_1 + U_{i2}\psi_2 + U_{i3}\psi_3,\end{aligned} \tag{14}$$

tal que ψ_1, ψ_2 e ψ_3 são bases ortonormais. Nesta situação, tomando a transformação para $\psi^{\dagger i}$, resulta

$$\psi^{\dagger i}\psi_i \rightarrow U_{ij}^{\dagger}\psi^{\dagger i}U_{ij}\psi_i. \tag{15}$$

Em que o produto $\psi^{\dagger i}\psi_i = 0$, se $i \neq j$ de acordo com a condição de ortogonalidade. Se a condição de normalização for imposta

$$|U_{i1}|^2 + |U_{i2}|^2 + |U_{i3}|^2 = 1. \tag{16}$$

Então, haverá conservação da probabilidade. Continuando neste caminho, o produto $\psi^{\dagger i}\psi_i$ é o mesmo independente do estado, ou seja

$$\psi^{\dagger 1}\psi_1 = \psi^{\dagger 2}\psi_2 = \psi^{\dagger 3}\psi_3. \tag{17}$$

Numa notação mais familiar, tem-se

$$\psi = u_1\psi_1 + u_2\psi_2 + u_3\psi_3 \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

sendo u_1, u_2 e u_3 números complexos. Como ψ obedece a condição de normalização

$$\begin{pmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{19}$$
$$= |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_1|^2 = 1.$$

Dessa maneira, uma rotação $SU(3)_c$ dada pela lei de transformação resulta

$$\psi \rightarrow U\psi, \tag{20}$$

onde U é uma matriz 3×3. Esta matriz U possui entradas complexas com 18 parâmetros. Contudo, nem todos os elementos são independentes, pois ocorre a existência de vínculos. Neste caso, U satisfará as seguintes condições [29, 31]:

- $U^{\dagger}U = 1$;
- $U \in U(3)$;
- $detU = 1$;
- 18 parâmetros, sendo 9 reais e 9 imaginários;
- Com a restrição da unidade se fixa 9 parâmetros.

Então, a matriz $U_{3\times3}$ possui 8 parâmetros independentes, configurando uma característica da álgebra de Lie do grupo $SU(3)$ como um espaço vetorial de 8 dimensões. E as matrizes de base $T \in M(3, \mathbb{C})$ satisfazem a condição,

$$(T^a)^{\dagger} = T^a \tag{21}$$

onde $a = 1, 2, ..., 8$. Desta forma, um elemento do grupo $SU(3)$ pode ser escrito exponenciando a álgebra de Lie

$$U = e^{i\alpha^a T^a}, \tag{22}$$

no qual α^a é uma constante real. Desse modo, o passo seguinte será desenvolver as matrizes de base da álgebra de Lie. Partindo da matriz T escrita na forma geral

$$T = \begin{pmatrix} u & u_1 & u_2 \\ u_1^* & x & u_3 \\ u_2^* & u_3^* & z \end{pmatrix}, \tag{23}$$

sendo $\{u, x, z\} \in \mathbb{R}$, $\{u_1, u_2, u_3\} \in \mathbb{C}$. A matriz T pode ser reescrita como

$$T = \begin{pmatrix} u & a_1 - ia_2 & b_1 - ib_2 \\ a_1 + ia_2 & x & c_1 - ic_2 \\ b_1 + ib_2 & c_1 + ic_2 & z \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Neste sentido, T é representada por uma combinação linear de seus geradores, ou seja

$$\begin{aligned} T = a_1T_1 + a_2T_2 + uT_3 + b_1T_4 + b_2T_5 \\ +c_1T_6 + c_2T_7 + xT_8. \end{aligned} \tag{25}$$

E fazendo algumas redefinições

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 - ia_2, \\ u_2 &= b_1 - ib_2, \\ u_3 &= c_1 - ic_2. \end{aligned} \tag{26}$$

Então, uma mudança de base foi realizada. A base nova contida no espaço vetorial é denominada de base de Gell-Mann, dadas por

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

em que estes geradores pertencem ao grupo de simetria $SU(3)$. Logo, a álgebra de Lie consiste de 8 matrizes 3×3 que obedecem as conjunturas:

- Serem hermitianas;
- $Tr = 0$;
- Linearmente independentes (L.I.).

Tomando qualquer um dos geradores, obtêm-se

$$\left[\frac{\hat{T}_i}{2}, \frac{\hat{T}_j}{2}\right] = if_{ijk}\frac{\hat{T}_k}{2}. \tag{27}$$

sendo f_{ijk} as constantes de estrutura. E assim, os geradores T constituem a base do espaço vetorial. Neste, além da operação de soma, revela-se uma outra operação que será a de comutação ([,]). Desse modo, se tomar o comutador de dois elementos da base, uma combinação linear de vetores da base é obtida. Com isso, é encontrado um elemento de dentro do espaço vetorial.

Seguindo o raciocínio e comparando com a definição de álgebra de Lie, isto é:

1. Espaço vetorial;
2. Operação de soma definida;
3. Lei de composição, que neste caso corresponde ao comutador $([,])$;
4. E a necessidade de uma lei de composição que cumpra os requisitos:

$$\begin{aligned}[A,B]&=-[B,A],\\ [A,B+C]&=[A,B]+[A,C],\\ [A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]&=0.\end{aligned}$$

Portanto, conforme observado, o espaço vetorial das matrizes hermitianas com traço nulo representam uma álgebra de Lie. A relação de comutação, Eq.(27), é suficiente para reconhecer de forma inequívoca a lei de composição de um grupo [28, 30]. No caso estudado aqui, o grupo $SU(3)$.

A próxima etapa, será observar como a simetria $SU(3)_c$ opera na lagrangiana de Dirac (quark sem massa). Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\bar{\psi}i\gamma.\partial\psi=\bar{\psi}^i i\gamma.\partial\psi_i\\ &=\bar{\psi}^1 i\gamma.\partial\psi_1+\bar{\psi}^2 i\gamma.\partial\psi_2+\bar{\psi}^3 i\gamma.\partial\psi_3,\end{aligned}\tag{28}$$

onde $(i=1,2,3)$. Utilizando a lei de transformação já estudada para ψ e seu conjugado $\bar{\psi}$, ou seja

$$\begin{aligned}\psi&\to U\psi,\\ \bar{\psi}&\to\bar{\psi}U^\dagger.\end{aligned}\tag{29}$$

Ao atuar uma transformação de simetria do tipo $SU(3)_c$, nota-se que a lagrangiana de Dirac fica invariante,

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}i\gamma.\partial\psi\to\bar{\psi}U^\dagger i\gamma.\partial U\psi=\bar{\psi}i\gamma.\partial\psi,\tag{30}$$

sendo U uma matriz unitária e constante. À vista disso, foi considerado uma transformação $SU(3)_c$ independente de pontos no espaço-tempo. Agora, para uma transformação unitária $SU(3)$ dependente do espaço-tempo, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\bar{\psi}i\gamma.\partial\psi\to\bar{\psi}U^\dagger i\gamma.\partial U\psi=\\ &=\bar{\psi}U^\dagger(Ui\gamma.\partial-T^aU\gamma.\partial\alpha^a(x))\psi\\ &=\bar{\psi}i\gamma.\partial\psi-\bar{\psi}T^a(\gamma.\partial\alpha^a(x))\psi\\ &=\mathcal{L}-\bar{\psi}T^a(\gamma.\partial\alpha^a(x))\psi.\end{aligned}\tag{31}$$

Em que $U(x)=e^{i\alpha^a(x)T^a}$, e a invariância na lagrangiana de Dirac é perdida simbolizando que o operador derivada ∂_μ realizou deslocamentos nos campos de férmions na lagrangiana de Dirac. Para resturar a invariância, insere-se um campo A^a_μ que cancela o último termo na Eq. 31. Diante disso, a lagrangiana fica escrita

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\gamma.\partial+g\gamma.A^aT^a)\psi,\tag{32}$$

no qual g é uma constante de acoplamento. Para esta lagrangiana ser invariante, o campo A^a_μ deve se transformar na forma

$$A^a_\mu\to A^a_\mu+\Delta A^a_\mu,\tag{33}$$

então, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\gamma.\partial+g\gamma.A^aT^a)\psi&\to\\ \bar{\psi}U^\dagger(i\gamma.\partial+g\gamma A^a_\mu T^a+g\gamma.\Delta A^a_\mu T^a)U\psi&\\ =\bar{\psi}U^\dagger i\gamma.U\psi+\bar{\psi}U^\dagger(g\gamma.A^a_\mu T^a&\\ +g\gamma\Delta A^a_\mu T^a)U\psi=&\\ =\bar{\psi}i\gamma.\partial\psi-\bar{\psi}T^a(\gamma.\partial\alpha^a(x))\psi&\\ +\bar{\psi}U^\dagger(g\gamma.A^a_\mu T^a+g\gamma.\Delta A^a_\mu T^a)U\psi&\\ =\bar{\psi}i\gamma.\partial\psi-\bar{\psi}\gamma.\partial\alpha^a(x)T^a\psi&\\ +\psi U^\dagger(g\gamma.A^a_\mu T^a+g\gamma.\Delta A^a_\mu T^a)U\psi.&\end{aligned}\tag{34}$$

Para a Eq. 34 ser invariante, realiza-se algumas operações algébricas que ficarão a cargo do leitor verificar. Neste caminho, encontra-se a transformação dada por

$$\Delta A^a_\mu T^a=UA^a_\mu T^aU^\dagger+\frac{1}{g}U(\partial_\mu\alpha^a(x)T^a-gU^\dagger A^a_\mu T^aU)U^\dagger.\tag{35}$$

Fazendo a substituição de ∂_μ pelo operador D_μ,

$$\partial\to D_\mu\equiv\partial_\mu-igA^a_\mu T^a.\tag{36}$$

sendo D_μ a derivada covariante. Atuando-o frente uma rotação $SU(3)_c$ resulta

$$\begin{aligned}D_\mu&\to\partial_\mu-igA^a_\mu-ig\Delta A^a_\mu T^a\\ &=\partial_\mu-igA^a_\mu T^a-\\ &-ig\left[UA^a_\mu T^aU^\dagger+\frac{1}{g}U(\partial_\mu\alpha^a(x)T^a-gU^\dagger A^a_\mu T^aU)U^\dagger\right]\\ &=\partial_\mu-iU(gA^a_\mu+\partial_\mu\alpha^a(x))T^aU^\dagger.\end{aligned}$$

Ou na forma compacta

$$D_\mu\to UD_\mu U^\dagger.\tag{37}$$

Com isso, a nova lagrangiana se transforma como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=\bar{\psi}i\gamma.D\psi&\to\bar{\psi}U^\dagger i\gamma^\mu.(UDU^\dagger)U\psi=\\ &=\bar{\psi}i\gamma.D\psi.\end{aligned}\tag{38}$$

A invariância em $\mathcal{L}$ é restaurada sob uma transformação de calibre $SU(3)_c$. Assim, os requisitos para a construção de uma lagrangiana invariante sob $SU(3)_c$ será confeccionar um operador D_μ, onde possa ser introduzido um novo campo A_μ. Este novo campo em geometria diferencial é chamado de conexão da variedade $SU(3)$ [14, 23–27]. Na etapa seguinte será explorado esses elementos matemáticos (conexão e curvatura) usando a ideia de transporte paralelo de vetores.

Considere o transporte paralelo de dois pontos no espaço-tempo x_1 a x_2 por dois caminhos diferentes. Uma expansão em série de Taylor é feita nesses pontos

$$x_2 = x_1 + \Delta x + \Delta y. \tag{39}$$

Caminho 1:

$$\begin{aligned}\psi_{c1}(x_1 + \Delta x + \Delta y) = {} & \psi(x_1 + \Delta x) + \\ & + \Delta y^\nu D_\nu \psi(\psi_1 + \Delta x) + ... \\ & = \psi(x_1) + \Delta x^\mu D_\mu \psi(x_1) + \Delta y^\nu D_\nu \psi(x_1) \\ & + \Delta x^\mu \Delta y^\nu D_\nu D_\mu \psi(x_1) + ...\end{aligned} \tag{40}$$

Caminho 2:

$$\begin{aligned}\psi_{c2}(x_1 + \Delta x + \Delta y) = {} & \psi(x_1 + \Delta x) + \\ & + \Delta x^\mu D_\mu \psi(\psi_1 + \Delta y) + ... \\ & = \psi(x_1) + \Delta x^\mu D_\mu \psi(x_1) + \Delta y^\nu D_\nu \psi(x_1) \\ & + \Delta x^\mu \Delta y^\nu D_\nu D_\mu \psi(x_1) + ...\end{aligned} \tag{41}$$

Tomando a diferença da Eq. (40) e Eq. (41), resulta

$$\begin{aligned}\psi_{c1}(x_1 + \Delta x + \Delta y) - \psi_{c2}(x_1 + \Delta x + \Delta y) = \\ = \Delta x^\mu \Delta y^\nu (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x_1),\end{aligned} \tag{42}$$

ou seja, o termo entre parênteses na Eq. (42) é escrito como

$$[D_\mu, D_\nu] = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)$$

$$\begin{aligned}&= (\partial_\mu - igA^a_\mu T^a)(\partial_\nu - igA^b_\nu T^b) - (\partial_\nu - igA^b_\nu T^b)\times \\ &\quad \times(\partial_\mu - igA^a_\mu T^a) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu - ig\partial_\mu A^b_\nu T^b - ig\partial_\mu A^a_\nu T^a + i^2 g^2 A^a_\mu T^a A^b_\nu T^b - \\ &\quad -(\partial_\nu\partial_\mu - ig\partial_\nu A^a_\mu T^a - igA^b_\nu T^b \partial_\mu + i^2 g^2 A^b_\nu T^b A^a_\mu T^a) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu - ig\partial_\mu A^b_\nu T^b - igA^a_\nu T^a \partial_\mu - g^2 A^a_\mu A^a_\nu T^a T^b - \\ &\quad -\partial_\nu\partial_\mu + ig\partial_\nu A^a_\mu T^a + igA^b_\nu T^b \partial_\mu + g^2 A^b_\nu A^a_\mu T^b T^a \\ &= -ig\left(\partial_\mu A^a_\nu T^a - \partial_\nu A^a_\mu T^a - igA^a_\mu A^b_\nu \left[T^a, T^b\right]\right) \\ &= -igF^a_{\mu\nu} T^a.\end{aligned}$$

Onde esta diferença de operadores é denominado de tensor de curvatura ou tensor de campo de Yang-Mills. E, possui a seguinte forma

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\mu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{43}$$

Ou seja, $F^a_{\mu\nu}$ representa uma medida da curvatura do grupo de simetria interno $SU(3)$ com conexão A_μ. Além do mais, $F^a_{\mu\nu}$ transforma-se sob o calibre $SU(3)$

$$\begin{aligned}F^a_{\mu\nu} T^a \rightarrow e^{i\alpha^b(x)T^b} F^a_{\mu\nu} T^a e^{-i\alpha^b(x)T^b} = \\ = UF^a_{\mu\nu} T^a U^\dagger.\end{aligned} \tag{44}$$

No entanto, é preciso tomar o traço das matrizes sob a transformação de calibre $SU(3)$

$$\begin{aligned}Tr[F^a_{\mu\nu} T^a F^{\mu\nu b} T^b] &\rightarrow Tr[UF^a_{\mu\nu} T^a U^\dagger U F^{\mu\nu b} T^b U^\dagger] \\ &= Tr[F^a_{\mu\nu} T^a U^\dagger U F^{\mu\nu b} T^b U^\dagger] \\ &= Tr[F^a_{\mu\nu} T^a F^{\mu\nu b} T^b].\end{aligned} \tag{45}$$

Em que a normalização para as matrizes é feita usando a forma de Killing $Tr[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$. Por fim, a lagrangiana da cromodinâmica quântica toma a forma

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \bar{\psi} i\gamma.D\psi,$$

no qual A^a_μ representa o campo de gluon.

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizou-se uma revisão acerca dos elementos das interações eletromagnéticas do campo de calibre U(1), e generalizou-se para as interações nucleares fortes, responsáveis pela coesão entre prótons e nêutrons no interior dos núcleos atômicos. Mostrou-se que a interação forte é regida por um grupo de simetria de calibre não abeliana denominada de grupo SU(3). Tendo como os constituintes fundamentais da teoria os quarks, entidades confinadas ao interior dos prótons, nêutrons e os demais hádrons, que interagem e se ligam uns aos outros pelos glúons, denominados de bósons vetoriais da QCD cuja teoria de calibre SU(3) está associada ao número quântico de cor. Por fim, foi construida a lagrangiana da QCD e demonstrada a sua invariância perante a simetria SU(3).

V. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao professor Ademir E. Santana pelas contribuições e sugestões na elaboração deste trabalho. Também, ao Grupo Produto Estrela pela acolhida dada durante a realização deste.

[1] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge university press, 2nd ed., 2007.

[2] R. Mann, *An introduction to particle physics and the standard model*, CRC press, 2011.

[3] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2nd ed., UK, 1996.

[4] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons, 2nd ed., UK, 2010.

[5] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory - Algebraic Aspects and Applications*, World Scientific, London, 2009.

[6] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*,John Wiley & Sons, UK, 1987.

[7] H. Weyl, Gravitation and the Electron. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 15, n. 4, 1929.

[8] C. N. Yang, R. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev., 96, 1954.

[9] D. Gross, Quantum Chromodynamics - The Perfect Yang Mills Theory. Int. J. Mod. Phys. A, v. 31, n. 08, 2016.

[10] J. B. Neto, *Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica*, Editora Livraria da Física, 1st ed., 2017.

[11] A. J. Larkoski, *Elementary Particle Physics: An Intuitive Introduction*, Cambridge University Press, 2019.

[12] L. D. Landau, *The Classical Theory of Fields*, Elsevier, v. 2, 4th ed., 2013.

[13] M. Thomson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press, 2013.

[14] W. Greiner, and B. Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries*, Springer Science & Business Media, 2nd ed., 2012.

[15] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World scientific, v. 57, 2nd ed., 1998.

[16] A. Bettini, *Introduction to Elementary Particle Physics*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2014.

[17] Matthew B. Robinson et al, Jay, A Simple Introduction to Particle Physics Part I - Foundations and the Standard Model, arXiv:0810.3328 [hep-th].

[18] Matthew B. Robinson et al, A Simple Introduction to Particle Physics: Part II Geometric Foundations and Relativity, arXiv:0908.1395v1 [hep-th].

[19] P. Ramond, *Field theory: a modern primer*, New York, 2nd ed., 1997.

[20] L. D. Faddeev, and A. A. Slavnov, and G.B. Pontecorvo, *Gauge fields: Introduction to Quantum Theory*, CRC Press, 2nd ed., 2018.

[21] E. Leader and E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, Cambridge University Press, v. 1, 1996.

[22] A. Das, *Lectures on quantum field theory*, World Scientific, 2020.

[23] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*, IOP Publishing, v. 1, 4th ed. 2012.

[24] S. Weinberg, *The Discovery of Subatomic Particles Revised Edition*, Cambridge University Press, 2003.

[25] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, CRC press, 2nd ed., 2003.

[26] J. J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*, Princeton University Press, 2015.

[27] J. L. Lopes, *Gauge Field Theories: An Introduction*, Elsevier, 1st ed., 2013.

[28] B. Hatfield, *Quantum field theory of point particles and strings*, CRC Press, v. 75, 2018.

[29] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Cambridge university press, v.1, 1995.

[30] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Cambridge university press, v.2, 1995.

[31] J. Furtado and J. A. Helaÿel-Neto, Rev. Bras. Ens. Fis., v. 43, 2020.