Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
ESAÚ ALEJANDRO PÉREZ ROSALES

DIRECTORES DE TESIS
Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

PUEBLA, PUE. 24 de junio de 2022.

Agradecimientos

Escribir estas páginas representa el final de la etapa más bonita de mi vida hasta ahora. Durante estos últimos años, me he visto rodeado de personas que me han aportado un gran valor sentimental, además de numerosos aprendizajes y experiencias inolvidables. Es por ello que me gustaría agradecer, en primer lugar, a mi familia, quien siempre creyó en mí y me apoyó día a día.

Agradezco a mis amigos de la facultad, en ellos encontré la amistad verdadera. No olvidaremos las charlas en las palapas de la facultad, los chistes, los partidos de fútbol y básquetbol, los festejos de cumpleaños y las tardes de juegos de mesa.

Un agradecimiento especial a los profesores Manuel Ibarra y Agustín Contreras, quienes con su pasión por las matemáticas, logran motivarme a mí y a cientos de estudiantes más a continuar sus estudios en geometría, topología y análisis matemático.

También agradezco a mis directores de tesis David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero por darme la oportunidad de trabajar a su lado y mostrarme el bello mundo de la teoría de los continuos. Un agradecimiento especial a Leonardo Ramírez Aparicio por sus observaciones y comentarios semanales para mejorar este trabajo.

Por último y no menos importantes, a mis sinodales, Dr. Agustín Contreras, Dr. Raúl Esocobedo y M. C. Gerardo Hernández, quienes dedicaron tiempo a leer y mejorar este trabajo con sus acertadas correcciones.

Introducción

El presente trabajo se encuentra inmerso dentro de la rama de la topología conocida como teoría de los continuos e hiperespacios. Particularmente, se centra en la existencia de arcos ordenados en los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un espacio métrico X, siguiendo los resultados expuestos en 1999 por Sam B. Nadler Jr. y Alejandro Illanes en los capítulos 14 y 15 de su obra *Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances* ([9]). El propósito de esta tesis es desarrollar de manera profunda las demostraciones expuestas en estos capítulos, a fin de facilitar la consulta a futuros lectores, así como ser fuente de inspiración para posibles futuros trabajos relacionados a la teoría de los continuos y sus hiperespacios. Con tal fin se presenta este trabajo, el cual está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, se exponen las definiciones y resultados que serán útiles para el desarrollo de los capítulos siguientes. Entre otros temas, se define la métrica de Hausdorff para un hiperespacio de un espacio métrico, así como la topología de Vietoris. Además, se define una nueva convergencia en hiperespacios y se demuestra que ésta coincide con la convergencia respecto a la métrica de Hausdorff. Esto nos ayuda a estudiar la compacidad de los hiperespacios $CL(X), 2^X$ y $C(X)$ cuando X es un espacio métrico compacto. Posteriormente, se define el concepto de función de Whitney y se demuestra la existencia de una función de Whitney para cualquier hiperespacio de un compacto. Finalmente, se enuncian algunas definiciones y resultados relacionados al cubo de Hilbert y al concepto de dimensión de un espacio métrico.

El Capítulo 2 se centra en desarrollar las demostraciones del Capítulo 14 de [9]. Aquí, se define el concepto de arco ordenado en un hiperespacio y se demuestra la existencia de arcos ordenados en $C(X)$. Como consecuencia, se demuestra que 2^X y $C(X)$ son continuos arco conexos siempre que X es un continuo. Finalmente, bajo esta misma condición, se verá que el hiperespacio 2^X contiene un cubo de Hilbert.

En el Capítulo 3, que corresponde al Capítulo 15 de [9], se estudian condiciones necesarias y suficientes para asesgurar la existencia de arcos ordenados en 2^X, donde X es compacto. Como consecuencia, se tiene la arco conexidad local de 2^X y $C(X)$ en un punto particular. Posteriormente, se estudian condiciones necesarias y suficientes para que estos hiperespacios sean homogéneos y/o cubos de Hilbert. Finalmente, se involucra el concepto de grupo topológico y se relaciona con la estructura de cubo de Hilbert de estos hiperespacios.

Se espera que el lector esté familiarizado con los resultados más importantes de la teoría de espacios métricos y la topología general. De no ser el caso, se sugiere consultar [10] y [16].

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentaremos algunas definiciones y resultados útiles que se necesitarán en los capítulos siguientes. A lo largo del presente trabajo, usaremos la letra X para denotar un espacio métrico con métrica d. A la topología generada por la métrica d se le denotará por τ_d. Dado $x \in X$ y $r > 0$, se denotará por $B_d(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$ a la bola con centro en x y radio r, omitiendo la referencia a la métrica cuando esto no provoque confusión. Dado $A \subseteq X$, los símbolos $\mathrm{int}_X(A)$ y $\mathrm{fr}_X(A)$ denotarán el interior y la frontera de A en X, respectivamente. Salvo cuando sea necesario, se omitirá la referencia al espacio X. Se usarán los símbolos $\mathrm{cl}_X(A)$ y $\overline{A}$ para denotar la cerradura de A en X, omitiendo la referencia al espacio X si no hay riesgo de confusión.

De aquí en adelante, se aceptará que un espacio métrico X es compacto si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita. Equivalentemente, X es compacto si y solo si X es totalmente acotado y completo, lo cual equivale, a su vez, a que todo subconjunto infinito de X admite un punto de acumulación. Un espacio métrico X es conexo si no existen subconjuntos ajenos, abiertos y no vacíos de X que cubren a X. La condición de abiertos puede reemplazarse por cerrados o separados, según sea conveniente. Algunas definiciones y resultados sobre compacidad y conexidad en espacios métricos y topológicos pueden consultarse en [10], [16] y [17].

Por otro lado, se usarán los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ para denotar el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales, respectivamente. Dado $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ denotará el conjunto $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ se considerará con la métrica euclidiana y la topología inducida por ésta. Finalmente, en el presente trabajo se supondrá verdadero el Axioma de Elección, o equivalentemente, el Lema de Zorn (todo conjunto parcialmente ordenado L, en el que cada cadena tiene una cota superior en L, admite un elemento maximal), véase [7].

1.1. Continuos

La teoría de los continuos se encarga de estudiar espacios métricos particulares: aquellos que tienen la cualidad de ser compactos y conexos.

Definición 1.1. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Dados un continuo X y $Y \subseteq X$, diremos que Y es un* ***subcontinuo*** *de X si Y es un continuo como subespacio de X o bien, si Y tiene exactamente un punto.*

La propiedad de ser un continuo es una propiedad topológica, es decir, si X es un continuo y Y es un espacio métrico homeomorfo a X, entonces Y también es un continuo. Ejemplos de continuos son los siguientes:

(a) Cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, con $a < b$.

(b) La circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Más aún, para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos y denotamos la esfera n-dimensional por

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se puede verificar que S^n es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Cualquier continuo homeomorfo a S^1 se llama una curva cerrada simple.

(c) Cualquier bola cerrada en $\mathbb{R}^n$, $D(x, r)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

(d) El conjunto $\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$, conocido como seno del topólogo.

(e) El conjunto $I^n = \prod_{k=1}^{n} [0, 1]$ es un continuo dotado con la topología producto. Cualquier continuo homeomorfo a I^n se llama una n-celda.

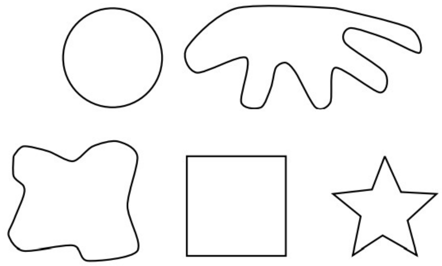


Figura 1.1: Ejemplos de curvas cerradas simples.

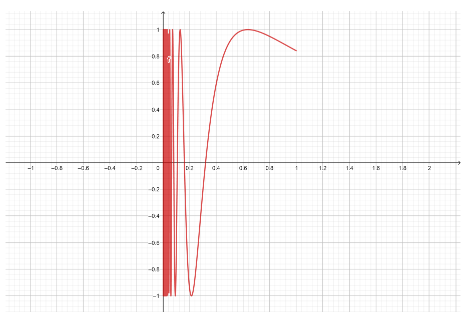


Figura 1.2: El continuo seno del topólogo.

(f) El conjunto

$$I^{\infty} = \prod_{n=1}^{\infty} [0,1]$$

es un continuo dotado con la topología producto. Cualquier continuo homeomorfo a I^{∞} es llamado cubo de Hilbert.

Definición 1.2. *Un* ***arco*** *es un espacio métrico que es homeomorfo al intervalo cerrado* $[0,1]$ *con la métrica usual de* $\mathbb{R}$*.*

Dado que $[0,1]$ es un continuo, se sigue que todo arco también es un continuo. Algunos ejemplos de arcos son:

(1) Cualquier intervalo de la forma $[a,b]$ con $a < b$. Se puede verificar que la función $h : [0,1] \to [a,b]$ definida por $h(t) = a + t(b-a)$, es un homeomorfismo.

(2) En $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclideana, dados dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el segmento de recta que une (x_1, y_1) con (x_2, y_2) es un arco.

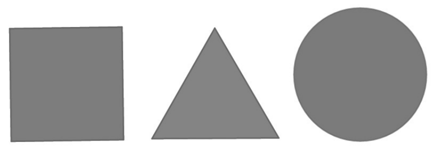


Figura 1.3: Ejemplos de 2-celdas.

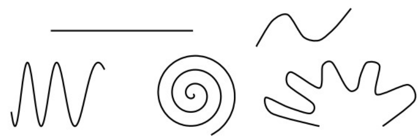


Figura 1.4: Ejemplos de arcos.

Sean C un arco, $h : [0,1] \to C$ un homeomorfismo, $p = h(0)$ y $q = h(1)$. Se puede verificar que si $g : [0,1] \to C$ es también un homeomorfismo, entonces $\{g(0), g(1)\} = \{p, q\}$. A los puntos p y q les llamaremos los puntos extremos de C.

Definición 1.3. *Un espacio métrico X es* ***arco conexo*** *si dados cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existe un arco en X cuyos puntos extremos son x y y.*

El siguiente teorema muestra la relación entre los espacios conexos y los arco conexos.

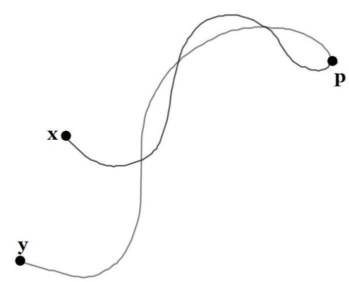
Teorema 1.4. *Todo espacio métrico arco conexo es conexo.*

Demostración. Sea X un espacio métrico arco conexo y sean $x, y \in X$ arbitrarios con $x \neq y$. Luego, existe un arco C cuyos puntos extremos son x y y. Por ser C un arco, es conexo. Así, x y y pertenecen a un subconjunto conexo de X. Esto implica que X es conexo. $\blacksquare$

En general, no todos los espacios métricos conexos son arco conexos. Como contraejemplo se tiene $X = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : 0 < x < 1\right\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, que es conexo pero no arco conexo.

El siguiente lema nos mostrará que para verificar la arco conexidad de un espacio métrico, es suficiente fijar un punto y construir arcos entre este punto fijo y los demás puntos.

Lema 1.5. *Sean X un espacio métrico y $p \in X$. Si para cualquier $x \in X \setminus \{p\}$, existe un arco con puntos extremos x y p, entonces X es arco conexo.*



Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si $x = p$ o $y = p$, por hipótesis, existe un arco con puntos extremos x y y, y termina la prueba, así que supongamos que $x \neq p \neq y$. Entonces existen arcos A_1 y A_2 tales que A_1 tiene puntos extremos x y p, y A_2 tiene puntos extremos y y p. Sean $\alpha_1 : [0,1] \to A_1$ y $\alpha_2 : [0,1] \to A_2$ homeomorfismos tales que $\alpha_1(0) = x, \alpha_1(1) = p, \alpha_2(0) = y$ y $\alpha_2(1) = p$. Definamos $A = \{t \in [0,1] : \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$. Observemos que $A \neq \emptyset$ (ya que $1 \in A$) y A está acotado inferiormente. Sea $m = \text{ínf}\, A$. Por [10, Lema 1, pág 161], A es cerrado en $\mathbb{R}$, lo que implica que $m \in A$, con lo cual $\alpha_1(m) = \alpha_2(m)$. Definamos $\beta : [0,1] \to A_1 \cup A_2$ como

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{si} \quad t \in [0,m] \\ \alpha_2\left(\frac{1-t}{1-m} m\right) & \text{si} \quad t \in [m,1] \end{cases}$$

Observemos que

- β está bien definida, ya que $\alpha_1(m) = \alpha_2(m)$.
- $\beta(0) = \alpha_1(0) = x$ y $\beta(1) = \alpha_2(0) = y$.
- β es continua por el Lema del Pegado, ya que α_1 y α_2 son continuas.
- β es inyectiva, ya que α_1 y α_2 lo son, y $\beta([0,m]) \cap \beta([m,1]) = \alpha_1([0,m]) \cap \alpha_2([0,m]) = \{\alpha_1(m)\} = \{\alpha_2(m)\}$.

Por lo tanto, $\beta([0,1])$ es un arco en X con puntos extremos x y y. Se concluye que X es arco conexo. ■

Recordemos que dado un espacio métrico X, dos subconjuntos E y F de X están **separados** si $\overline{E} \cap F = \emptyset$ y $E \cap \overline{F} = \emptyset$. Dado $Y \subseteq X$, diremos que E y F forman una **separación** de Y si $Y = E \cup F$, E y F están separados y son no vacíos. Cuando este hecho ocurra, lo denotaremos por $Y = E|F$. Observemos que $Y = E|F$ implica que Y es disconexo. Finalmente, diremos que dos subconjuntos no vacíos K y L están **separados en** X si existen E y F subconjuntos de X tales que $X = E|F, K \subseteq E$ y $L \subseteq F$. Se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.6. *Sea X un espacio métrico y sean K y L subconjuntos no vacíos de X. Se cumple que K y L están separados en X si y solo si existe G un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de X tal que $K \subseteq G$ y $G \cap L = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que K y L están separados en X, entonces existen E y F subconjuntos de X tales que $X = E|F, K \subseteq E$ y $L \subseteq F$. Sea $G = \overline{E}$. Como $X = E \cup F$ es cerrado y E y F están separados, E y F son cerrados y abiertos de X. Entonces G es cerrado, abierto (ya que $G = X \setminus F$), no vacío y $K \subseteq G$. Finalmente, dado que $G \cap F = \emptyset$ y $L \subseteq F$, entonces $G \cap L = \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que existe G subconjunto abierto, cerrado y no vacío de X tal que $K \subseteq G$ y $G \cap L = \emptyset$. Sean $E = G$ y $F = X \setminus G$. Al ser E y F cerrados y ajenos, entonces E y F están separados. Como $X = E|F, K \subseteq E$ y $L \subseteq F$, podemos concluir que K y L están separados en X. ■

Un resultado fundamental en la teoría de los continuos, conocido como el Teorema del cable cortado, enuncia lo siguiente:

Teorema 1.7 (Del cable cortado)**.** [9, Teorema 12.9] *Sea X un compacto y sean B y C subconjuntos cerrados de X. Si ningún subconjunto conexo de X intersecta tanto a B como a C, entonces B y C están separados en X.*

En los Capítulos 2 y 3, dado un continuo, con frecuencia será necesario mostrar la existencia de subcontinuos propios con más de un punto. Para demostrar este resultado, nos valdremos de un teorema muy importante en la teoría de los continuos, conocido como el Teorema de golpes en la frontera.

Teorema 1.8 (De golpes en la frontera)**.** *Sean X un continuo y U un subconjunto propio de X, abierto y no vacío. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap \mathrm{fr}(U) \neq \emptyset$. En particular, $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $K \cap \text{fr}(U) = \emptyset$. Observemos que K y $\text{fr}(U)$ son subconjuntos cerrados de $\overline{U}$. Además, $K \neq \emptyset$. Observemos también que $\text{fr}(U) \neq \emptyset$, ya que si $\text{fr}(U) = \emptyset$, entonces U es un subconjunto cerrado y abierto de X, lo que contradice la conexidad de X.

Además, si existiese un subconjunto conexo A de $\overline{U}$ tal que $A \cap K \neq \emptyset$, se tendría que $A \subseteq K$, y puesto que $K \cap \text{fr}(U) = \emptyset$, entonces $A \cap \text{fr}(U) = \emptyset$. Hemos probado que ningún subconjunto conexo de $\overline{U}$ intersecta tanto a K como a $\text{fr}(U)$. Por el Teorema 1.7, se tiene que K y $\text{fr}(U)$ están separados en $\overline{U}$. Esto significa que existen E y F subconjuntos separados de X tales que $\overline{U} = E \cup F$, $K \subseteq E$ y $\text{fr}(U) \subseteq F$.

Veamos que E y $F \cup (X \setminus U)$ forman una separación de X. Observemos que $E \neq \emptyset$ y $F \cup (X \setminus U) \neq \emptyset$. Además,

$$E \cup [F \cup (X \setminus U)] = (E \cup F) \cup (X \setminus U) = \overline{U} \cup (X \setminus U) = X.$$

Finalmente, para ver que E y $F \cup (X \setminus U)$ están separados en X, probaremos primero que $\overline{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in \overline{E} \cap (X \setminus U)$. Como $\overline{E} \subseteq \overline{U}$, entonces $x \in \overline{U} \cap (X \setminus U) = \overline{U} \cap \overline{X \setminus U} = \text{fr}(U) \subseteq F$, es decir, $x \in \overline{E} \cap F$, lo que es una contradicción ya que E y F están separados. Así, $\overline{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Por lo tanto,

$$\overline{E} \cap [F \cup (X \setminus U)] = (\overline{E} \cap F) \cup [\overline{E} \cap (X \setminus U)] = \emptyset \cup [\overline{E} \cap (X \setminus U)] = \overline{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$$

y

$$\begin{aligned} E \cap \overline{F \cup (X \setminus U)} &= E \cap \left(\overline{F} \cup \overline{X \setminus U}\right) \\ &= \left(E \cap \overline{F}\right) \cup \left(E \cap \overline{X \setminus U}\right) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Por consiguiente, E y $F \cup (X \setminus U)$ forman una separación de X. Como esto contradice la conexidad de X, se concluye que $K \cap \text{fr}(U) \neq \emptyset$.

La segunda parte del teorema se sigue de que $\overline{K \cap (X \setminus U)} \supseteq (K \cap \overline{U}) \cap \overline{X \setminus U} = K \cap \text{fr}(U) \neq \emptyset$. ■

El teorema anterior será útil para probar el siguiente resultado:

Teorema 1.9. *Sea X un continuo.*

(a) *Si A es un subcontinuo propio de X, U un subconjunto abierto de X y $A \subseteq U$, entonces existe B subcontinuo de U tal que $A \subsetneq B$.*

(b) *Existe un subcontinuo propio de X con más de un punto.*

Demostración. (a) Sean A un subcontinuo propio de X, $U \subseteq X$ abierto y $A \subseteq U$. Si $U = X$, entonces $B = X$ es el subcontinuo buscado y termina la prueba, así que supongamos que $U \subsetneq X$. Como X es un espacio normal, existe V subconjunto abierto tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Observar que $V \neq X$, ya que $V \subseteq U \subsetneq X$. Como A es conexo y $A \subseteq \overline{V}$, existe una componente B de $\overline{V}$ tal que $A \subseteq B$. Por el Teorema 1.8, se tiene que $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, y como $A \subseteq V$, se sigue que $A \neq B$. Finalmente, observemos que B es compacto (ya que B es un cerrado de X y X es compacto), conexo y no vacío, es decir, B es un subcontinuo de U.

(b) Sean $p \in X$ y $U \subsetneq X$ abierto tal que $p \in U$. Como $\{p\}$ es un subcontinuo propio de X tal que $\{p\} \subseteq U$, por (a), existe B subcontinuo de U tal que $\{p\} \subsetneq B$. Por lo tanto, B es el subcontinuo propio de X buscado. ■

1.2. Hiperespacios y métrica de Hausdorff

Si X es un espacio métrico, entenderemos por un **hiperespacio** de X a una colección de subconjuntos de X con alguna propiedad en particular. Por ejemplo, podemos considerar

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}.$$

Otros hiperespacios que se consideran en este trabajo son:

- $CLC(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ es conexo}\}$
- $2^X = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto}\}$
- $C(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto y conexo}\}$
- $F_n(X) = \{A \in CL(X) : 1 \leq |A| \leq n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A. Al hiperespacio $F_n(X)$ se le conoce como el n-ésimo producto simétrico de X. Notar que $F_1(X) = \{A \in CL(X) : |A| = 1\}$ y se le llama espacio de singulares de X.
- $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$, que se conoce como el espacio de subconjuntos finitos de X.

Observación 1.10. *En el caso de que X sea compacto, los hiperespacios $CL(X)$ y 2^X coinciden, esto es, $CL(X) = 2^X$.*

Es posible dotar a $CL(X)$ de una métrica específica, llamada la métrica de Hausdorff, para la cual necesitaremos del siguiente concepto.

Definición 1.11. *Sea X un espacio métrico. Si $x \in X$ y $A \in CL(X)$, definimos y denotamos la distancia del punto x al conjunto A como*

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

*Para cualquier $r > 0$ y $A \in CL(X)$, denotamos la **nube** alrededor de A y radio r como*

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

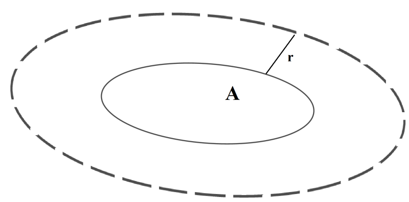


Figura 1.5: Nube de radio r alrededor de A

La siguiente proposición enlista algunas propiedades útiles de la distancia de un punto a un conjunto y de las nubes alrededor de un subconjunto de un espacio métrico.

Proposición 1.12. *Sean X un espacio métrico, $A, B \in CL(X)$ y $x, y \in X$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

(2) $x \in A$ *si y solo si* $d(x, A) = 0$.

(3) *Si* $r_1 < r_2$, *entonces* $N(r_1, A) \subseteq N(r_2, A)$.

(4) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $d(x, B) \leq d(x, A)$.

(5) $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$.

(6) *La función* $f : X \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = d(x, A)$, *es continua.*

Demostración. (1) Sea $a \in A$. Dado que $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, se tiene que $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Como $a \in A$ es arbitrario, se sigue que $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$, de donde $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Análogamente se prueba que $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$, concluyéndose que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

(2) Supongamos que $x \in A$; luego, $d(x, A) \leq d(x, x) = 0$. Por otro lado, como $d(x, a) \geq 0$ para todo $a \in A$, se cumple que $d(x, A) \geq 0$. Así, $d(x, A) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $d(x, A) = 0$. Veamos que $x \in \overline{A}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $0 = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\} < \varepsilon$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$; dado que $a \in B(x, \varepsilon) \cap A$, se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Luego, $x \in \overline{A} = A$.

(3) Sea $z \in N(r_1, A)$, entonces $d(z, A) < r_1 < r_2$, de donde $z \in N(r_2, A)$. Por consiguiente, $N(r_1, A) \subseteq N(r_2, A)$.

(4) Supongamos que $A \subseteq B$, entonces $\{d(x, a) : a \in A\} \subseteq \{d(x, a) : a \in B\}$, de donde $\text{ínf}\{d(x, a) : a \in B\} \leq \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}$, esto es, $d(x, B) \leq d(x, A)$.

(5) Sea $x \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$, supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in N(\varepsilon, A)$. Por el inciso (4), se tiene que $d(x, A \cup B) \leq d(x, A) < \varepsilon$, con lo cual $x \in N(\varepsilon, A \cup B)$. Por lo tanto, $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \subseteq N(\varepsilon, A \cup B)$. Recíprocamente, sea $x \in N(\varepsilon, A \cup B)$, entonces existe $z \in A \cup B$ tal que $d(x, z) < \varepsilon$. Si $z \in A$, entonces $x \in N(\varepsilon, A)$; y si $z \in B$, entonces $x \in N(\varepsilon, B)$. En cualquier caso, $x \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$, lo que prueba que $N(\varepsilon, A \cup B) \subseteq N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto, $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$.

(6) Sea $x_0 \in X$. Veamos que f es continua en x_0. Sea $\varepsilon > 0$. Por el inciso (1) se cumple que $|d(x, A) - d(x_0, A)| \leq d(x, x_0)$, así que tomando $\delta = \varepsilon$, se cumple que si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| = |d(x, A) - d(x_0, A)| < \varepsilon$. ■

A continuación definiremos la métrica de Hausdorff.

Definición 1.13. *Si X es un espacio métrico con métrica acotada d, la **métrica de Hausdorff** para $CL(X)$ inducida por d, denotada por H_d, para cada $A, B \in CL(X)$ es*

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}.$$

Observación 1.14. (1) *La condición de que la métrica d sea acotada nos asegura que el conjunto que define a $H_d(A, B)$ no es vacío (si $k > 0$ es una cota superior para d, entonces $A \subseteq N(k + 1, B)$ y $B \subseteq N(k + 1, A)$) y por ende su ínfimo existe, con lo cual $H_d(A, B)$ siempre está definida.*

(2) *Si* $H_d(A, B) < \varepsilon$, *entonces* $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ *y* $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. *En efecto, si* $H_d(A, B) < \varepsilon$, *entonces* ε *no es cota inferior del conjunto* $\{r > 0 : A \subseteq N(r, B)$ *y* $B \subseteq N(r, A)\}$, *por lo que existe* $\delta > 0$ *tal que* $A \subseteq N(\delta, B), B \subseteq N(\delta, A)$ *y* $\delta < \varepsilon$. *Respectivamente, por la Proposición 1.12* (3), *se tiene que* $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ *y* $B \subseteq N(\varepsilon, A)$.

(3) *El recíproco del inciso anterior se cumple cuando* A *y* B *son compactos. En efecto, supongamos que* $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ *y* $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. *Entonces* $d(a, B) < \varepsilon$ *para cada* $a \in A$, *y* $d(b, A) < \varepsilon$ *para cada* $b \in B$. *Sean* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $g : B \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = d(x, B)$ *y* $g(x) = d(x, A)$. *Como* f *y* g *son continuas (por la Proposición 1.12* (6)*) y* A *y* B *son compactos, entonces* f *y* g *alcanzan su máximo, es decir, existen puntos* $a_0 \in A$ *y* $b_0 \in B$ *tales que* $d(a_0, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\} < \varepsilon$ *y* $d(b_0, A) = \max\{d(b, A) : b \in B\} < \varepsilon$. *Sea* $\delta > 0$ *tal que* $\max\{d(a_0, B), d(b_0, A)\} < \delta < \varepsilon$, *entonces* $A \subseteq N(\delta, B)$ *y* $B \subseteq N(\delta, A)$, *con lo cual* $H_d(A, B) \leq \delta < \varepsilon$.

(4) *Se sigue del inciso* (2) *que si* $A, B \in CL(X)$ *y* $\delta > 0$, *entonces* $A \subseteq N(H_d(A, B) + \delta, B)$ *y* $B \subseteq N(H_d(A, B) + \delta, A)$.

Verifiquemos que H_d es, en efecto, una métrica en $CL(X)$. Para ello, será conveniente usar la notación

$$M(A, B) = \{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}$$

para cada $A, B \in CL(X)$.

Teorema 1.15. *Si* X *es un espacio métrico acotado, entonces* H_d *es una métrica en* $CL(X)$.

Demostración. Se tiene de la definición que $H_d(A, B) \geq 0$ y que $H_d(A, B) = H_d(B, A)$ para cualesquiera $A, B \in CL(X)$.

Supongamos que $H_d(A, B) = 0$ y veamos que $A = B$. Como $\inf M(A, B) = 0$, existe una sucesión decreciente $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $M(A, B)$ tal que $r_n \to 0$ y $A \subseteq N(r_n, B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $a \in A$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(a, B) < r_n$, luego existe $b_n \in B$ tal que $d(a, b_n) < r_n$. Por tanto, la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en B y converge al punto a. Por ser B cerrado, se concluye que $a \in B$. Esto prueba que $A \subseteq B$. Análogamente, $B \subseteq A$, concluyéndose que $A = B$.

Ahora veamos que $H_d(A,A) = 0$ para todo $A \in CL(X)$. Observar que $A \subseteq N(r,A)$ para todo $r > 0$. Así, $H_d(A,A) = \text{ínf}\, M(A,A) = \text{ínf}\, \mathbb{R}^+ = 0$.

Finalmente verifiquemos la desigualdad del triángulo, es decir, hay que probar que si $A, B, C \in CL(X)$, se cumple $H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por (4) de la Observación 1.14, se tiene que

$$A \subseteq N\left(H_d(A,B) + \frac{\varepsilon}{2}, B\right). \tag{1.1}$$

y

$$B \subseteq N\left(H_d(B,C) + \frac{\varepsilon}{2}, C\right). \tag{1.2}$$

Sea $a \in A$. Por (1.1), se tiene que $d(a,B) < H_d(A,B) + \frac{\varepsilon}{2}$, de donde existe $b \in B$ tal que

$$d(a,b) < H_d(A,B) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Por (1.2), se tiene que $d(b,C) < H_d(B,C) + \frac{\varepsilon}{2}$, con lo cual existe $c \in C$ tal que

$$d(b,c) < H_d(B,C) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(a,c) &\leq d(a,b) + d(b,c) \\ &< H_d(A,B) + \frac{\varepsilon}{2} + H_d(B,C) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= H_d(A,B) + H_d(B,C) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como a es un punto arbitrario de A, hemos probado que

$$A \subseteq N\left(H_d(A,B) + H_d(B,C) + \varepsilon, C\right). \tag{1.5}$$

Por un argumento similar, se cumple también que

$$C \subseteq N\left(H_d(A,B) + H_d(B,C) + \varepsilon, A\right). \tag{1.6}$$

Así, $H_d(A,B) + H_d(B,C) + \varepsilon \in M(A,C)$, con lo cual $H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se cumple la desigualdad $H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$, lo que concluye la demostración. ∎

Los hiperespacios $CLC(X), 2^X, C(X), F_n(X)$ y $F(X)$ adquirirán la métrica de subespacio de $CL(X)$.

La colección $CL(X)$ también puede dotarse de una topología específica, denominada la topología de Vietoris, que mencionamos a continuación:

Definición 1.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico. La* ***topología de Vietoris*** *T_V para $CL(X)$ es la topología más pequeña con las siguientes propiedades:*

(1) *Si U es un abierto de (X, τ), entonces $\{A \in CL(X) : A \subseteq U\}$ es un abierto de $(CL(X), T_V)$.*

(2) *Si B es un cerrado de (X, τ), entonces $\{A \in CL(X) : A \subseteq B\}$ es un cerrado de $(CL(X), T_V)$.*

Nuevamente, los hiperespacios $CLC(X), 2^X, C(X), F_n(X)$ y $F(X)$ tendrán la topología de subespacio heredada por la topología de Vietoris en $CL(X)$.

Así pues, resulta natural preguntarse si la métrica de Hausdorff en $CL(X)$ induce la topología de Vietoris. La respuesta es afirmativa cuando y solo cuando X es un espacio métrico compacto, como se verá más adelante.

Si $S_1, \ldots, S_n$ son subconjuntos de X, usaremos la siguiente notación:

$$\langle S_1, \ldots, S_n \rangle = \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i \text{ y } A \cap S_i \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Al conjunto $\langle S_1, \ldots, S_n \rangle$ le llamaremos vietórico. Los vietóricos nos proporcionan una base para la topología de Vietoris, tal como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.17. [9, Teorema 1.2] *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces*

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \in \tau \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\}$$

es una base para T_V.

La Proposición 1.17 será útil en los capítulos posteriores.

Proposición 1.18. *Si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos abiertos de un espacio métrico X, entonces $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ es un abierto de $(CL(X), T_V)$. Asimismo, si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos cerrados de X, entonces $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ es un cerrado de $(CL(X), T_V)$.*

Demostración. Si $A_1, \ldots, A_n$ son abiertos de X, por la Proposición 1.17, se tiene que $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ es un básico de la topología de Vietoris para $CL(X)$. En particular, $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ es abierto de $CL(X)$.

Ahora observemos lo siguiente: si K es un subconjunto cerrado de X, entonces:

(1) Por la Definición 1.16 (2), $\langle K \rangle = \{A \in CL(X) : A \subseteq K\}$ es un cerrado de $CL(X)$.

(2) $\langle X, K \rangle = \{A \in CL(X) : A \cap K \neq \emptyset\} = CL(X) \setminus \{A \in CL(X) : A \subseteq X \setminus K\}$ es un cerrado de $CL(X)$, ya que $\{A \in CL(X) : A \subseteq X \setminus K\}$ es un abierto de $CL(X)$ por la Definición 1.16 (1).

Supongamos que $A_1, \ldots, A_n$ son cerrados en X. Observemos que

$$\begin{aligned}
&\langle A_1, \ldots, A_n \rangle \\
&= \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ y } A \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \right\} \\
&= \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right\} \\
&\cap \{A \in CL(X) : A \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\} \\
&= \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \langle X, A_i \rangle \right).
\end{aligned}$$

Como $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es un cerrado de X, por (1) se sigue que $\langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i \rangle$ es un cerrado de $CL(X)$. Asimismo, (2) implica que $\langle X, A_i \rangle$ es un cerrado de $CL(X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, con lo cual $\bigcap_{i=1}^{n} \langle X, A_i \rangle$ es un cerrado de $CL(X)$. Así, se concluye que $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \langle X, A_i \rangle)$ es un cerrado de $CL(X)$. ■

Teorema 1.19. *Sea X un espacio métrico. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *X es compacto.*

(b) *La topología de Vietoris T_V y la topología inducida por la métrica de Hausdorff τ_{H_d} en $CL(X)$ coinciden.*

Demostración. [(a)$\Rightarrow$(b)] Supongamos que X es compacto. Por la Observación 1.10, $CL(X) = 2^X$. Probaremos que $T_V = \tau_{H_d}$. Veamos primero que $T_V \subseteq \tau_{H_d}$. Sea $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle \in T_V$. Dado que $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n A_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^n \langle X, A_i \rangle)$, será suficiente probar que $\langle U \rangle \in \tau_d$ y $\langle X, U \rangle \in \tau_d$ para cada $U \in \tau_d$. Para ello, sea $U \in \tau_d$ y veamos que $\langle U \rangle \in \tau_d$. Si $U = X$, entonces $\langle U \rangle = \{A \in CL(X) : A \subseteq X\} = CL(X) \in \tau_{H_d}$, así que supongamos que $U \neq X$. Sean $A \in \langle U \rangle$ y $\varepsilon = d(A, X \setminus U) = \text{ínf}\{d(a, X \setminus U) : a \in A\}$. Observemos que $\varepsilon > 0$, ya que A y $X \setminus U$ son compactos. Veamos que $B_{H_d}(A, \varepsilon) \subseteq \langle U \rangle$. Sea $B \in B_{H_d}(A, \varepsilon)$, entonces $H_d(A, B) < \varepsilon$. Luego, $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. Pero por la elección de ε, se cumple que $N(\varepsilon, A) \subseteq U$. Así que $B \subseteq U$, con lo cual $B \in \langle U \rangle$. Hemos probado que para cada $A \in \langle U \rangle$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{H_d}(A, \varepsilon) \subseteq \langle U \rangle$. Esto prueba que $\langle U \rangle \in \tau_{H_d}$. Ahora veamos que $\langle X, U \rangle \in \tau_{H_d}$. Sea $A \in \langle X, U \rangle$. Entonces $A \cap U \neq \emptyset$. Sea $p \in A \cap U$. Como $p \in U$ y $U \in \tau_d$, existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, \{p\}) = B(p, \delta) \subseteq U$. Probaremos que $B_{H_d}(A, \delta) \subseteq \langle X, U \rangle$. Para ello, sea $B \in B_{H_d}(A, \delta)$. Luego, $H_d(A, B) < \delta$. Se sigue que $A \subseteq N(\delta, B)$. Dado que $p \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(b, p) < \delta$. Como $N(\delta, \{p\}) = B(p, \delta) \subseteq U$, entonces $b \in U$. Luego, $B \cap U \neq \emptyset$, lo que muestra que $B \in \langle X, U \rangle$. Así, se concluye que $\langle X, U \rangle \in \tau_{H_d}$. Por lo tanto, $T_V \subseteq \tau_{H_d}$.

Probaremos ahora que $\tau_{H_d} \subseteq T_V$. Sea $A \in CL(X) = 2^X$ y $r > 0$. Como A es compacto y $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B_d(a, \frac{r}{2})$, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \frac{r}{2})$. Luego, $A \in \left\langle B_d(a_1, \frac{r}{2}), \ldots B_d(a_n, \frac{r}{2}) \right\rangle$. Veamos que $\left\langle B_d(a_1, \frac{r}{2}), \ldots B_d(a_n, \frac{r}{2}) \right\rangle \subseteq B_{H_d}(A, r)$. Sea $K \in \left\langle B_d(a_1, \frac{r}{2}), \ldots B_d(a_n, \frac{r}{2}) \right\rangle$. Veamos que $K \subseteq N(r, A)$. Sea $x \in K$. Dado que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \frac{r}{2})$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in B_d(a_j, \frac{r}{2})$, luego, $d(x, A) < \frac{r}{2} < r$, esto es, $x \in N(r, A)$. Así,

$$K \subseteq N(r, A).$$

Ahora veamos que $A \subseteq N(r, K)$. Sea $x \in A$. Dado que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \frac{r}{2})$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in B_d(a_j, \frac{r}{2})$. Como $K \cap B_d(a_j, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$, sea $y \in K \cap B_d(a_j, \frac{r}{2})$. Se sigue que $d(x, y) \leq d(x, a_j) + d(a_j, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, con lo cual $d(x, K) < r$, esto es, $x \in N(r, K)$. Así,

$$A \subseteq N(r, K).$$

Por la Observación 1.14 (3), $H_d(A, K) < r$, es decir, $K \in B_{H_d}(A, r)$. Hemos probado que para todo $A \in CL(X)$ y todo $r > 0$, existe un vietórico $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ tal que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq B_{H_d}(A, r)$. Esto prueba que $\tau_{H_d} \subseteq T_V$.

[(b)⇒(a)] Supongamos que $T_V = \tau_{H_d}$. Esto implica que T_V es metrizable. Para probar que X es compacto veremos que todo subconjunto infinito numerable de X admite un punto de acumulación. Sea $A \subseteq X$ infinito numerable. Luego, $\overline{A}$ es separable. Luego, $CL(\overline{A})$ es separable. Como $CL(\overline{A})$ es un subespacio de $CL(X)$ se sigue que $CL(\overline{A})$ es metrizable, y por ser separable, es segundo numerable. Luego, por [4, Proposición 3.6], $\overline{A}$ no es un espacio discreto, con lo cual $\overline{A}$ tiene un punto de acumulación, el cual es también un punto de acumulación de A en X. Por lo tanto, X es compacto. ■

1.3. Convergencia en hiperespacios

Habiendo definido una métrica en $CL(X)$ (a saber, la métrica de Hausdorff), es posible hablar de sucesiones en $CL(X)$. Más aún, una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $A \in CL(X)$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n, A) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$. Sin embargo, la definición que daremos a continuación resultará útil en los capítulos posteriores. En la Proposición 1.23, veremos que ambas definiciones son equivalentes cuando el espacio métrico X es compacto.

Definición 1.20. *Sean X un espacio métrico y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $CL(X)$. Se define el **límite inferior** y el **límite superior** de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, como*

$$\liminf A_n = \{x \in X : \textit{ si } U \textit{ es un entorno de } x, \textit{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \\ \textit{para cada } n \in \mathbb{N} \textit{ salvo para un número finito}\}$$

y

$$\limsup A_n = \{x \in X : \textit{ si } U \textit{ es un entorno de } x, \textit{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \\ \textit{para una cantidad infinita de } n's, \textit{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, decimos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A y este hecho se denotará por $\lim A_n = A$.

Observación 1.21. *Si X es un espacio métrico, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $CL(X)$ y $x \in X$, se cumplen:*

(1) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. *Como consecuencia, la sucesión converge a A si y solo si $A \subseteq \liminf A_n$ y $\limsup A_n \subseteq A$.*

(2) $x \in \liminf A_n$ *si y solo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ *para cada* $n \geq N$.

(3) $x \in \limsup A_n$ *si y solo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $J \subseteq \mathbb{N}$ *infinito tal que* $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ *para cada* $n \in J$.

(4) $\limsup A_n$ *puede escribirse como*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i}.$$

Como consecuencia, $\limsup A_n$ *es cerrado de* X*, ya que es intersección de conjuntos cerrados.*

(5) *Si para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $B_n \subseteq A_n$*, entonces* $\liminf B_n \subseteq \liminf A_n$ *y* $\limsup B_n \subseteq \limsup A_n$*. En consecuencia,* $\lim B_n \subseteq \lim A_n$ *cuando* $\lim A_n$ *y* $\lim B_n$ *existan.*

Lema 1.22. *Si* X *es un espacio métrico compacto y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $CL(X)$*, entonces* $\limsup A_n \neq \emptyset$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n$ (ya que $A_n \neq \emptyset$) y consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como X es compacto, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a algún $z \in X$. Veamos que $z \in \limsup A_n$. Sea U un entorno de z. Como $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in U$ para cada $k \geq N$. Dado que $x_{n_k} \in A_{n_k}$, se tiene que $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$. Esto implica que $z \in \limsup A_n$. Por lo tanto, $\limsup A_n \neq \emptyset$. ■

Proposición 1.23. *Sean* X *un espacio métrico compacto y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $CL(X)$*. Si* $\lim A_n = A$*, entonces* $A \in CL(X)$ *y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* A *en* $CL(X)$ *con respecto a la métrica de Hausdorff. Recíprocamente, si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* A *en* $CL(X)$ *con respecto a la métrica de Hausdorff, entonces* $\lim A_n = A$.

Demostración. Supongamos que $\lim A_n = A$. Por la Observación 1.21 (4) y el Lema 1.22, se tiene que $A = \limsup A_n \in CL(X) = 2^X$. Veamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en $CL(X)$ con respecto a la métrica de Hausdorff. Sea $\varepsilon > 0$. Como $A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A) = \bigcup_{a\in A} B(a, \frac{\varepsilon}{2})$, entonces $\{B(a, \frac{\varepsilon}{2}) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A en X. Como A es compacto, existen $a_1, \ldots, a_k \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Como $a_1, \ldots, a_k \in A = \text{lím inf}\, A_n$, por la Observación 1.21 (2), existen $M_1, \ldots, M_k$ tales que

$$\begin{aligned} A_n \cap B\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) &\neq \emptyset \text{ siempre que } n \geq M_1, \\ A_n \cap B\left(a_2, \frac{\varepsilon}{2}\right) &\neq \emptyset \text{ siempre que } n \geq M_2, \\ &\vdots \\ A_n \cap B\left(a_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) &\neq \emptyset \text{ siempre que } n \geq M_k. \end{aligned}$$

Sea $N_1 = \text{máx}\{M_1, \ldots, M_k\}$ y consideremos $n \geq N_1$. Veamos que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$. Sea $a \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $a \in B(a_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Como $A_n \cap B\left(a_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset$, sea $b \in A_n \cap B\left(a_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$; observemos que $d(a, b) \leq d(a, a_j) + d(a_j, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, con lo cual $d(a, A_n) < \varepsilon$, es decir, $a \in N(\varepsilon, A_n)$. Esto prueba que

$$A \subseteq N(\varepsilon, A_n) \text{ para todo } n \geq N_1. \tag{1.7}$$

Afirmación: Existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$. En efecto, supongamos lo contrario. Entonces existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que para cada $n \in J$, $A_n \not\subseteq N(\varepsilon, A)$. Para cada $n \in J$, sea $x_n \in A_n \cap (X \setminus N(\varepsilon, A))$. Entonces $\{x_n\}_{n \in J}$ es una sucesión en $X \setminus N(\varepsilon, A)$. Como $X \setminus N(\varepsilon, A)$ es un cerrado del compacto X, entonces también $X \setminus N(\varepsilon, A)$ es compacto, así que existe $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n \in J}$ convergente a algún punto $z \in X \setminus N(\varepsilon, A)$. Veamos que $z \in \text{lím sup}\, A_n$. Sea U un entorno de z. Como $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a z, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in U$ para cada $k \geq M$. Dado que $x_{n_k} \in A_{n_k}$, se tiene que $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$ para cada $k \geq M$. Esto implica que $z \in \text{lím sup}\, A_n$. Pero $\text{lím sup}\, A_n = A \subseteq N(\varepsilon, A)$, con lo cual $z \in N(\varepsilon, A)$, lo que es una contradicción. Esto prueba la afirmación.

Finalmente, sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, por (1.7) y la afirmación anterior, se tiene que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$ para todo $n \geq N$. Esto nos permite concluir que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A en $CL(X)$ respecto a la métrica de Hausdorff.

Supongamos ahora que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A respecto a la métrica de Hausdorff.

Probaremos primero que $\text{lím sup}\, A_n \subseteq A$. Sea $x \in \text{lím sup}\, A_n$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A respecto a la métrica de Hausdorff, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N$. Esto implica que $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$

para todo $n \geq N$. Como $x \in \limsup A_n$, existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J$. Sea $m \in J$ tal que $m \geq N$. Luego, $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_m \neq \emptyset$. Sea $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_m$. Como $A_m \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$, se sigue que $d(y, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por (1) de la Proposición 1.12, se tiene que $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbritrario, se concluye que $d(x, A) = 0$, es decir, $x \in A$.

Ahora probaremos que $A \subseteq \liminf A_n$. Sean $x \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A respecto a la métrica de Hausdorff, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n, A) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto implica que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ para todo $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Como $x \in A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$, se tiene que $d(x, A_n) < \varepsilon$. Entonces existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$, con lo cual $a_n \in B(x, \varepsilon) \cap A_n$. Hemos probado que $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Esto implica que $x \in \liminf A_n$.

De lo anterior, se sigue que $A \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq A$. Por la Observación 1.21 (1), se concluye que $\lim A_n = A$. ■

Proposición 1.24. *Sea X un espacio métrico acotado. Entonces la función $u : CL(X) \times CL(X) \to CL(X)$, dada por $u(A, B) = A \cup B$, es continua.*

Demostración. Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $CL(X)$ que convergen a A y B en $CL(X)$, respectivamente. Probemos que la sucesión $\{u(A_n, B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u(A, B) = A \cup B$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n \cup B_n, A \cup B) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$. Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces $H_d(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. De igual forma, como $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $H_d(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y consideremos $n \geq N$. Se sigue que $H_d(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H_d(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$, con lo cual $A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n), A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A), B \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, B_n)$ y $B_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$. Esto implica, por (5) de la Proposición 1.12, que $A \cup B \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, B_n) = N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n \cup B_n)$ y $A_n \cup B_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, B) = N(\frac{\varepsilon}{2}, A \cup B)$. Por lo tanto, $H_d(A_n \cup B_n, A \cup B) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Así, la sucesión $\{u(A_n, B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u(A, B)$, lo que prueba que u es continua. ■

1.4. Propiedades de los hiperespacios

Nuestro interés ahora es probar que $CL(X)$ con la métrica de Hausforff es compacto cuando X es un compacto. Para ello necesitaremos los siguientes lemas.

Recordemos que un espacio métrico X es totalmente acotado (o precompacto) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n$ en X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Lema 1.25. *Sea X un espacio métrico acotado. Entonces X es totalmente acotado si y solo si $(CL(X), H_d)$ es totalmente acotado.*

Demostración. Supongamos que X es totalmente acotado y veamos que $CL(X)$ también lo es. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Definamos $\mathcal{A} = \wp(\{x_1, \ldots, x_n\}) \setminus \{\emptyset\}$. Observemos que $\mathcal{A}$ es finito y $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$. Probaremos que $CL(X) \subseteq \bigcup\{B_{H_d}(D, \varepsilon) : D \in \mathcal{A}\}$. Sea $A \in CL(X)$. Definamos $J = \{i \in \{1, \ldots, n\} : B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset\}$. Observemos que $J \neq \emptyset$ (ya que A es no vacío) y que J es finito. Definamos $D = \{x_i : i \in J\}$ y notemos que $D \in \mathcal{A}$. Veamos que $H_d(A, D) < \varepsilon$. Sea $a \in A$. Como $A \subseteq X = \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a \in B_d(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Luego, $x_j \in D$, con lo cual $d(a, D) \leq d(a, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como a es un punto arbitrario de A, se tiene que $A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, D)$. Ahora veamos que $D \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Sea $x_i \in D$. Luego, $B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$, lo que implica que $x_i \in N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Esto prueba que $D \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Por lo tanto, $\frac{\varepsilon}{2} \in M(A, D)$ y en consecuencia, $H_d(A, D) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Se concluye que $A \in \bigcup\{B_{H_d}(D, \varepsilon) : D \in \mathcal{A}\}$. Por lo tanto, $CL(X) \subseteq \bigcup\{B_{H_d}(D, \varepsilon) : D \in \mathcal{A}\}$ y así $CL(X)$ es totalmente acotado.

Ahora supongamos que $CL(X)$ es totalmente acotado. Para probar que X también lo es, sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen $A_1, \ldots, A_n \in CL(X)$ tales que $CL(X) = \bigcup_{i=1}^{n} B_{H_d}(A_i, \varepsilon)$. Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $a_i \in A_i$. Veamos que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_d(a_i, \varepsilon)$. Sea $x \in X$. Luego, $\{x\} \in CL(X) = \bigcup_{i=1}^{n} B_{H_d}(A_i, \varepsilon)$, por lo que existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\{x\} \in B_{H_d}(A_j, \varepsilon)$. Se sigue que $H_d(\{x\}, A_j) < \varepsilon$, y el inciso (3) la Observación 1.14 implica que $A_j \subseteq N(\varepsilon, \{x\})$. Como $a_j \in A_j$, entonces $d(a_j, x) < \varepsilon$, es decir, $x \in B_d(a_j, \varepsilon)$. Esto implica que $x \in \bigcup_{i=1}^{n} B_d(a_i, \varepsilon)$. Así, $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_d(a_i, \varepsilon)$. Se concluye que X es totalmente acotado. ■

Lema 1.26. [1, Lema 4.2] *Sean X un espacio métrico, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $CL(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$, entonces existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $m = n_1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$n_k < n_{k+1} \text{ y } H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

También recordemos que un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Lema 1.27. *Sea X un espacio métrico acotado. Se cumple que X es completo si y solo si $(CL(X), H_d)$ es completo.*

Demostración. Supongamos que X es completo. Para ver que $CL(X)$ también lo es, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $CL(X)$. Demostraremos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\limsup A_n$ en $CL(X)$ respecto a la métrica de Hausdorff, así que la prueba se hará en dos partes. Primero veamos que $\limsup A_n \in CL(X)$. Por la Observación 1.21 (4), se tiene que $\limsup A_n$ es un cerrado de X, así que para ver que $\limsup \in CL(X)$, solo resta verificar que $\limsup A_n \neq \emptyset$. Por el Lema 1.26, existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$n_k < n_{k+1} \text{ y } H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}.$$

Por la Observación 1.14 (2), para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$A_{n_k} \subseteq N\left(\frac{1}{2^k}, A_{n_{k+1}}\right).$$

Sea $x_{n_1} \in A_{n_1}$, entonces existe $x_{n_2} \in A_{n_2}$ tal que $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$. Luego, existe $x_{n_3} \in A_{n_3}$ tal que $d(x_{n_2}, x_{n_3}) < \frac{1}{2^2}$. Continuando recursivamente este proceso, obtenemos la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$. Veamos que esta sucesión es una sucesión de Cauchy en X. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Observemos que si $j, l \in \mathbb{N}$ con $j < l$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_{n_j}, x_{n_l}) &\leq d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) + d(x_{n_{j+1}}, x_{n_{j+2}}) + \cdots + d(x_{n_{l-1}}, x_{n_l}) \\ &< \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}}. \end{aligned}$$

Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, es posible elegir $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $j, l \geq M_1$ con $j < l$, entonces $d(x_{n_j}, x_{n_l}) < \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}} < \varepsilon$. Esto implica que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Por ser X completo, existe $x \in X$ tal que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x. Veamos que $x \in \limsup A_n$. Sea $r > 0$. Como $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in B_d(x, r)$ para cada $k \geq M_2$. Así, $x_{n_k} \in B_d(x, r) \cap A_{n_k}$ para todo $k \geq M_2$. Esto implica que $x \in \limsup A_n$ y así $\limsup A_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\limsup A_n \in CL(X)$.

La segunda parte de la prueba consiste en verificar que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\limsup A_n$ respecto a la métrica de Hausdorff. Para ello, sean $\varepsilon > 0$ y $r = \frac{\varepsilon}{4}$. Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $CL(X)$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$, se tiene que $H_d(A_{N_1}, A_n) < \frac{r}{4}$. Por otro lado, el Lema 1.26 garantiza la existencia de $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_2$, entonces existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $m = n_1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$n_k < n_{k+1} \text{ y } H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{r}{2^k}.$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Veamos que para cada $m \geq N$ se cumple que $H_d(A_m, \limsup A_n) < \varepsilon$. Sea $m \geq N$. Notar que si $n \geq m$, se sigue que $H_d(A_m, A_n) \leq H_d(A_m, A_N) + H_d(A_N, A_n) < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}$. Esto implica que para cada $n \geq m$, $A_n \subseteq N(\frac{r}{2}, A_m)$.

Afirmación 1: $\overline{N(\frac{r}{2}, A_m)} \subseteq N(r, A_m)$. En efecto, sea $y \in \overline{N(\frac{r}{2}, A_m)}$. Luego, $B_d(y, \frac{r}{2}) \cap N(\frac{r}{2}, A_m) \neq \emptyset$. Sea $z \in B_d(y, \frac{r}{2}) \cap N(\frac{r}{2}, A_m)$. Entonces existe $a \in A_m$ tal que $d(z, a) < \frac{r}{2}$. Luego, $d(y, a) \leq d(y, z) + d(z, a) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, lo que implica que $y \in N(r, A_m)$. Por lo tanto, $\overline{N(\frac{r}{2}, A_m)} \subseteq N(r, A_m)$.

Afirmación 2: $\limsup A_n \subseteq N(r, A_m)$. En efecto, dado que $A_n \subseteq N(\frac{r}{2}, A_m)$ para cada $n \geq m$, se tiene que $\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \subseteq N(\frac{r}{2}, A_m)$, de modo que $\overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} \subseteq \overline{N(\frac{r}{2}, A_m)}$. Por la Afirmación 1, se sigue que $\overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} \subseteq N(r, A_m)$, así que será suficiente probar que $\limsup A_n \subseteq \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n}$. Para ello, sea $y \in \limsup A_n$ y supongamos que $y \notin \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_d(y, \delta) \cap (\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \emptyset$. Esto implica que para todo $n \geq m$, $B_d(y, \delta) \cap A_n = \emptyset$. Se sigue que $B_d(y, \delta)$ intersecta a lo más a una cantidad finita de términos de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, lo que contradice que $y \in \limsup A_n$. Por lo tanto, $\limsup A_n \subseteq \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n}$ y así $\limsup A_n \subseteq N(r, A_m)$.

La Afirmación 2 implica que

$$\limsup A_n \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_m\right). \tag{1.8}$$

Veamos ahora que $A_m \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, \limsup A_n)$. Por la elección de m, existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $m = n_1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$n_k < n_{k+1} \text{ y } H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{r}{2^k}.$$

Por la Observación 1.14 (2), para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$A_{n_k} \subseteq N\left(\frac{r}{2^k}, A_{n_{k+1}}\right).$$

Sea $x_{n_1} \in A_{n_1}$, entonces existe $x_{n_2} \in A_{n_2}$ tal que $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{r}{2}$. Luego, existe $x_{n_3} \in A_{n_3}$ tal que $d(x_{n_2}, x_{n_3}) < \frac{r}{2^2}$. Continuando recursivamente este proceso, obtenemos la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{r}{2^k}$. Veamos que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Para ello, sea $s > 0$. Observemos que si $j, l \in \mathbb{N}$ con $j < l$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_{n_j}, x_{n_l}) &\leq d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) + d(x_{n_{j+1}}, x_{n_{j+2}}) + \cdots + d(x_{n_{l-1}}, x_{n_l}) \\ &< \frac{r}{2^j} + \frac{r}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{r}{2^{l-1}}. \end{aligned}$$

Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, es posible elegir $M_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $j, l \geq M_3$ con $j < l$, entonces $\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}} < \frac{s}{r}$, con lo cual $d(x_{n_j}, x_{n_l}) < \frac{r}{2^j} + \frac{r}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{r}{2^{l-1}} < s$. Esto prueba que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Por ser X completo, existe $y \in X$ tal que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y. Observemos que $y \in \limsup A_n$ y que $d(x_{n_1}, x_{n_k}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2^2} + \cdots + \frac{r}{2^{k-1}} < r$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y, existe $M_4 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq M_4$, $d(x_{n_k}, y) < r$. Sea $k \geq M_4$. Se sigue que $d(x_{n_1}, y) \leq d(x_{n_1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < r + r = \frac{\varepsilon}{2}$, con lo cual $x_{n_1} \in N(\frac{\varepsilon}{2}, \limsup A_n)$. Por ser $x_{n_1} \in A_{n_1}$ arbitrario, se concluye que

$$A_m = A_{n_1} \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \limsup A_n\right). \tag{1.9}$$

En resumen, de (1.8) y (1.9) se tiene que $\limsup A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_m)$ y $A_m \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, \limsup A_n)$ para cada $m \geq N$. Luego,

$$H_d(A_m, \limsup A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

siempre que $m \geq N$. Esto prueba que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\limsup A_n$ en $CL(X)$, concluyéndose que $CL(X)$ es completo.

Recíprocamente, supongamos que $CL(X)$ es completo.

Afirmación 3: $F_1(X)$ es un cerrado de $CL(X)$. En efecto, sea $C \in \overline{F_1(X)}$. Entonces existe una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $F_1(X)$ que converge a C con respecto a la métrica de Hausdorff. Supongamos que $C \notin F_1(X)$. Sean

$x_1, x_2 \in C$ con $x_1 \neq x_2$, y $r = d(x_1, x_2) > 0$. Como $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a C, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(C_n, C) < \frac{r}{2}$ para cada $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Como $C_n \in F_1(X)$, pongamos $C_n = \{c\}$. Dado que $H_d(C_n, C) < \frac{r}{2}$, entonces $C \subseteq N(\frac{r}{2}, C_n) = B_d(c, \frac{r}{2})$. Por lo tanto,

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, c) + d(c, x_2) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $C \in F_1(X)$, de donde $\overline{F_1(X)} \subseteq F_1(X)$, concluyéndose que $F_1(X)$ es un cerrado de $CL(X)$.

Como $F_1(X)$ es un cerrado de $CL(X)$ y $CL(X)$ es completo, por [10, Teorema 3, pág 118], $F_1(X)$ es completo. Pero $F_1(X)$ es homeomorfo a X (ya que $h : X \to F_1(X)$ dado por $h(x) = \{x\}$ es un homeomorfismo). Por lo tanto, X es completo. ■

Teorema 1.28. *Si X es un espacio métrico, se cumple que X es compacto si y solo si $(CL(X), H_d)$ es compacto.*

Demostración. Como X es compacto si y solo si X es totalmente acotado y completo, por los lemas 1.25 y 1.27, esto es equivalente a que $(CL(X), H_d)$ es totalmente acotado y completo, es decir, equivale a que $(CL(X), H_d)$ es compacto. ■

Corolario 1.29. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces $(2^X, H_d)$ es compacto.*

Demostración. Si X es compacto, por la Observación 1.10, $2^X = CL(X)$. En virtud del Teorema 1.28, se concluye que $(2^X, H_d)$ es compacto. ■

También $CLC(X)$ con la métrica de Hausdorff es un hiperespacio compacto, como se verá en el siguiente teorema:

Teorema 1.30. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces el hiperespacio $(CLC(X), H_d)$ también es compacto.*

Demostración. Como $CLC(X) \subseteq CL(X)$ y $CL(X)$ es compacto (por el Teorema 1.28), bastará demostrar que $CLC(X)$ es un cerrado de $CL(X)$. Para ello, sea $A \in \overline{CLC(X)}$. Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $CLC(X)$ que converge a A. Notemos que $A \in CL(X)$, así que para ver que $A \in CLC(X)$, solo resta verificar que A es conexo. Supongamos por contradicción que A es disconexo, entonces existen U y V subconjuntos no vacíos de X, ajenos, cerrados en A y tales que $A = U \cup V$. Notemos que U y V son cerrados en X; luego, U y V son compactos. Como $U \cap V = \emptyset$, entonces $d(U,V) = \text{ínf}\{d(u,V) : u \in U\} > 0$. Sea $\varepsilon = d(U,V)$. Dado que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Por (2) de la Observación 1.14, se tiene que $A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Pero $A = U \cup V$; luego, $N(\frac{\varepsilon}{2}, A) = N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$, con lo cual $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$. Observemos que $N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$ y $N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$ son subconjuntos abiertos de X. Veamos que $N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cap N(\frac{\varepsilon}{2}, V) = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cap N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$, se sigue que $d(x,U) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x,V) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces existe $u \in U$ tal que $d(x,u) < \frac{\varepsilon}{2}$; luego,

$$\varepsilon = d(U,V) \leq d(u,V) \leq d(u,x) + d(x,V) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cap N(\frac{\varepsilon}{2}, V) = \emptyset$. Así, $N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$ y $N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$ son abiertos ajenos tales que $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$. Por ser A_n conexo, $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$ o $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, V)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$. Afirmamos que $N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \subseteq N(\varepsilon, U)$. En efecto, sea $z \in N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$, entonces existe $a \in A_n$ tal que $d(z,a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pero $A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, U)$, así que existe $u \in U$ tal que $d(a,u) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, $d(z,u) \leq d(z,a) + d(a,u) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, $z \in N(\varepsilon, U)$. Observemos que $\varepsilon = \text{ínf}\{d(u,V) : u \in U\}$ implica que $V \cap N(\varepsilon, U) = \emptyset$. En efecto, si existiese $z \in V \cap N(\varepsilon, U)$, entonces $d(z,U) < \varepsilon$, por lo que existe $u \in U$ tal que $d(z,u) < \varepsilon$, de donde $d(u,V) < \varepsilon$, lo que es una contradicción. Así, $V \cap N(\varepsilon, U) = \emptyset$.

Como $V \subseteq A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \subseteq N(\varepsilon, U)$, se tiene que $V = V \cap N(\varepsilon, U) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, se concluye que A es conexo. Así, $CLC(X)$ es un cerrado de $CL(X)$ y, por ende, es compacto. ■

Corolario 1.31. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces $(C(X), H_d)$ es compacto.*

Demostración. Si X es compacto, por la Observación 1.10, se tiene que $C(X) = 2^X \cap CLC(X) = CL(X) \cap CLC(X) = CLC(X)$. En virtud del Teorema 1.30, se concluye que $(C(X), H_d)$ es compacto. ■

Lema 1.32. *Sean X y Y compactos y $f : X \to Y$. Entonces la función $f^* : 2^X \to 2^Y$, dada por $f^*(A) = f(A)$, es continua.*

Demostración. Observemos que si $A \in 2^X$, dado que f es continua, se tiene que $f(A) \in 2^Y$. Así, f^* está bien definida.

Ahora sea $\langle W_1, \ldots, W_n \rangle$ un vietórico en $2^Y = CL(Y)$. De la Proposición 1.17 sabemos que $\langle W_1, \ldots, W_n \rangle$ es un básico de la topología de Vietoris para 2^X, así que para ver que f^* es continua, bastará probar que $(f^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle)$ es un abierto de $2^X = CL(X)$. Como $W_1, \ldots, W_n$ son abiertos en Y y f es continua, se tiene que $f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n)$ son abiertos en X, de donde $\langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle$ es un abierto de 2^X. Así que para terminar la prueba, demostraremos que

$$(f^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle) = \left\langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \right\rangle .$$

Sea $A \in (f^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle)$, entonces $f(A) = f^*(A) \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle$. Esto implica que $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i$ y $f(A) \cap W_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Como $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i$, se sigue que

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n W_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i).$$

- Veamos que $A \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $f(A) \cap W_i \neq \emptyset$, sea $y_i \in f(A) \cap W_i$, entonces existe $x_i \in A$ tal que $f(x_i) = y_i$; luego, $x_i \in A \cap f^{-1}(W_i)$, con esto, $A \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$.

De ambos incisos concluimos que $A \in \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle$, lo que prueba que $(f^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle) \subseteq \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle$. Ahora sea $A \in \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle$. Entonces $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$ y $A \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Veamos que $f^*(A) = f(A) \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle$.

- Dado que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$, se sigue que

$$f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(W_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i.$$

- Veamos que $f(A) \cap W_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $A \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$, sea $x_i \in A \cap f^{-1}(W_i)$, entonces $f(x_i) \in f(A) \cap W_i$, con esto, $f(A) \cap W_i \neq \emptyset$.

De los incisos anteriores se concluye que $f^*(A) = f(A) \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle$, con lo cual $A \in (f^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle)$, lo que demuestra que

$$\left\langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \right\rangle \subseteq (f^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle)$$

y así,

$$(f^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle) = \left\langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \right\rangle.$$

■

Los siguientes dos lemas nos proporcionan una idea geométrica del hiperespacio de subcontinuos de un arco y de una curva cerrada simple. Ambos lemas serán útiles en el Capítulo 3.

Lema 1.33. *Si X es un arco, entonces $C(X)$ es una 2-celda.*

Demostración. Supongamos primero que $X = [0, 1]$. Observemos que $C([0, 1])$ consta de los intervalos de la forma $[a, b]$ con $0 \leq a \leq b \leq 1$. Sea $h : C([0, 1]) \to \mathbb{R}^2$ dada por $h([a, b]) = (a, b)$. Observemos que h es inyectiva y que $h(C([0, 1]))$ es el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices $(0, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$.

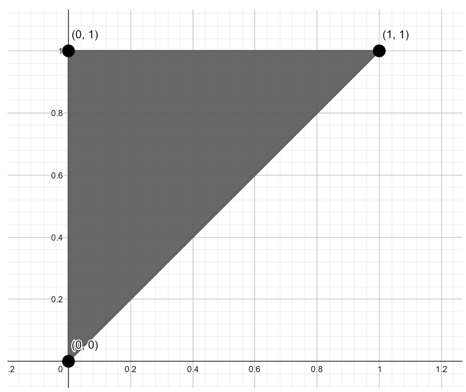


Figura 1.6: Imagen del homeomorfismo h, la cual es una 2-celda.

Para verificar que h es continua, sea $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C([0, 1])$ que converge a $[a, b]$ en $C([0, 1])$. Para ver que $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (a, b) en $\mathbb{R}^2$, sea $\varepsilon > 0$. Como $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $[a, b]$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $H_d([a_n, b_n], [a, b]) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ (aquí d es la métrica euclidiana en $[0, 1]$). Sea $n \geq N$. Por la Observación 1.14 (2), se tiene que

$$[a_n, b_n] \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, [a, b]\right) = \left(a - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, b + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \text{ y}$$
$$[a, b] \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, [a_n, b_n]\right) = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, b_n + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

Se sigue que

$$a_n - a < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad b_n - b < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$
$$a - a_n < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad b - b_n < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\|(a_n, b_n) - (a, b)\| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon,$$

de donde concluimos que h es continua. Además, $C([0,1])$ es compacto por el Corolario 1.31. Así, h es un homeomorfismo sobre su imagen, la cual es una 2-celda. Esto prueba que $C([0,1])$ es una 2-celda.

Ahora supongamos que X es un arco arbitrario. Veamos que $C(X)$ es homeomorfo a $C([0,1])$. Para ello, sea $h : X \to [0,1]$ un homeomorfismo. Sea $k : C(X) \to C([0,1])$ como $k(A) = h(A)$. Veamos que k es inyectiva: sean $A, B \in C(X)$ tales que $k(A) = k(B)$, esto es, $h(A) = h(B)$. Por ser h biyectiva, se tiene que $A = h^{-1}(h(A)) = h^{-1}(h(B)) = B$. Ahora veamos que k es sobreyectiva: sea $J \in C([0,1])$. Como J es compacto y conexo en $[0,1]$ y h^{-1} es continua, se sigue que $h^{-1}(J) \in C(X)$. Luego, $k(h^{-1}(J)) = h(h^{-1}(J)) = J$. Así, k es biyectiva. Para ver que k es continua, observemos que $k = h^* \restriction_{C(X)}$ y que h^* es continua por el Lema 1.32. Finalmente, observemos que $C(X)$ es compacto por el Corolario 1.31. Así, dado que k es biyectiva, continua y su dominio es compacto, se concluye que k es un homeomorfismo, esto es, $C(X)$ es homeomorfo a $C([0,1])$ y es, por tanto, una 2-celda. ■

Lema 1.34. *Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(X)$ es una 2-celda.*

Demostración. Supongamos primero que $X = S^1$. Por el Corolario 1.31, $C(S^1)$ es compacto. Observemos que cualquier subcontinuo de S^1 solo puede ser un conjunto singular, un arco o el mismo S^1. Sean

$$F = \{A \subseteq S^1 : A \text{ es un arco}\} \text{ y}$$
$$G = \{\{(x,y)\} : (x,y) \in S^1\}.$$

Luego, $C(S^1) = F \cup G \cup \{S_1\}$. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Definamos $k : C(S^1) \to D$ por

- $k(A) = \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A)$ si $A \in F$, donde $l(A)$ denota la longitud del arco A y $m(A)$ denota el punto medio del arco A que divide a A en dos subarcos de igual longitud.
- $k(\{(x, y)\}) = (x, y)$ si $(x, y) \in S^1$.
- $k(S^1) = (0, 0)$.

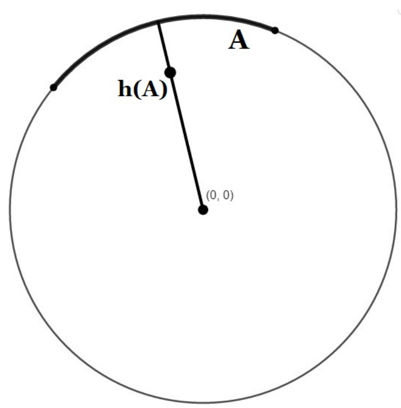


Figura 1.7: Imagen del homeomorfismo k, la cual es una 2-celda.

Por construcción, k es biyectiva y continua con dominio compacto. Así, k es un homeomorfismo. Luego, $C(S^1)$ es homeomorfo a D, que es una 2-celda, así que $C(S^1)$ es también una 2-celda.

Ahora supongamos que X es una curva cerrada simple arbitraria. Veamos que $C(X)$ es homeomorfo a $C(S^1)$. Para ello, sea $h : X \to S^1$ un homeomorfismo. Definamos $k : C(X) \to C(S^1)$ como $k(A) = h(A)$. Veamos que k es inyectiva: sean $A, B \in C(X)$ tales que $k(A) = k(B)$, esto es, $h(A) = h(B)$. Por ser h biyectiva, se tiene que $A = h^{-1}(h(A)) = h^{-1}(h(B)) = B$. Ahora veamos que k es sobreyectiva: sea $J \in C(S^1)$. Como J es compacto y conexo en S^1 y h^{-1} es continua, se sigue que $h^{-1}(J) \in C(X)$. Luego, $k(h^{-1}(J)) = h(h^{-1}(J)) = J$. Así, se tiene que k es biyectiva. Para ver que k es continua, observemos que $k = h^* \restriction_{C(X)}$ y que h^* es continua por el Lema 1.32. Finalmente, observemos que $C(X)$ es compacto por el Corolario 1.31. Así, dado que k es biyectiva, continua y su dominio es compacto, se concluye que k es un homeomorfismo, esto es, $C(X)$ es homeomorfo a $C(S^1)$ y es, por tanto, una 2-celda. ■

1.5. Funciones de Whitney

Nombradas en honor al matemático estadounidense Hassler Whitney, las funciones de Whitney están estrechamente relacionadas con la estructura de arco en los hiperespacios, y su importancia radica en que siempre es posible construir una de estas funciones en cualquier hiperespacio de un compacto. Por otro lado, las funciones de Whitney conservan cierto parecido con el concepto de medida de un conjunto.

Definición 1.35. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Una **función de Whitney** para $\mathcal{H}$ es una función continua $\omega : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(1) *Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$ con $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se tiene que $\omega(A) < \omega(B)$.*

(2) *$\omega(A) = 0$ si y solo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.*

Observación 1.36. (1) *El primer inciso de la definición anterior es equivalente a que $\omega : (\mathcal{H}, \subseteq) \to ([0, \infty), \leq)$ como función entre conjuntos parcialmente ordenados sea estrictamente creciente.*

(2) *Si $\omega : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ es una función de Whitney para $\mathcal{H}$ y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es una función de Whitney para $\mathcal{N}$.*

Definición 1.37. *Sea X un espacio métrico compacto. Definimos la función **diámetro** como la función $\operatorname{diam} : 2^X \to [0, \infty)$ dada por*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Ejemplo 1.38. *En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, dado $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado y no vacío, el diámetro de A es $\operatorname{diam}(A) = \sup A - \operatorname{ínf} A$.*

Lema 1.39. *Si X es un compacto, entonces la función diámetro $\operatorname{diam} : 2^X \to [0, \infty)$ es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sean $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ y $A, B \in 2^X$ tales que $H_d(A, B) < \delta$. Veamos que $|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)| < \varepsilon$. Como A es compacto, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $\operatorname{diam}(A) = d(a_1, a_2)$. Por (2) de la Observación 1.14, se tiene que

$A \subseteq N(\delta, B)$, así que $a_1, a_2 \in N(\delta, B)$, es decir, $d(a_1, B) < \delta$ y $d(a_2, B) < \delta$, por lo que existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \delta$ y $d(a_2, b_2) < \delta$. Luego,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(A) = d(a_1, a_2) &\leq d(a_1, b_1) + d(b_1, b_2) + d(b_2, a_2) \\ &< \delta + d(b_1, b_2) + \delta = d(b_1, b_2) + \varepsilon \\ &\leq \operatorname{diam}(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B) < \varepsilon$. Análogamente, se prueba que $\operatorname{diam}(B) - \operatorname{diam}(A) < \varepsilon$. Por lo tanto, $|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)| < \varepsilon$, lo que concluye la demostración. ■

Recordemos que un espacio topológico X es separable si contiene un subconjunto A numerable y denso en X.

Lema 1.40. *Todo espacio métrico compacto es separable.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto.

Afirmación: Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \subseteq X$ finito tal que $X \subseteq \bigcup_{x \in A_n} B(x, \frac{1}{n})$.

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$. Como X es compacto y $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, \frac{1}{n})$, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n})$. Definiendo $A_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, se prueba la afirmación.

Sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Observemos que A es numerable. Veamos ahora que A es denso en X, es decir, que $\overline{A} = X$. Sean $p \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Por la afirmación, existe $A_m \subseteq X$ finito tal que $p \in X \subseteq \bigcup_{x \in A_m} B(x, \frac{1}{m})$. Luego, existe $a \in A_m$ tal que $p \in B(a, \frac{1}{m})$. Como $d(p, a) < \frac{1}{m} < \varepsilon$, se sigue que $a \in B(p, \varepsilon)$. Además, $a \in A_m \subseteq A$, con lo cual $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, se concluye que $p \in \overline{A}$. Esto prueba que A es denso en X, concluyéndose que X es separable. ■

Teorema 1.41. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces cualquier hiperespacio de X tiene una función de Whitney.*

Demostración. Si ω es una función de Whitney para $CL(X)$ y $\mathcal{H} \subseteq CL(X)$, por (2) de la Observación 1.36, $\omega \restriction_{\mathcal{H}}$ será una función de Whitney para $\mathcal{H}$. Así que bastará probar que existe una función de Whitney para $CL(X)$. Para ello, observemos que X es separable (por el Lema 1.40), así que tomemos $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : X \to [0, 1]$ como $f_n(x) = \frac{1}{1 + d(z_n, x)}$. Ahora defínase para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\omega_n : CL(X) \to [0,1]$ como $\omega_n(A) = \operatorname{diam}(f_n(A))$. Finalmente, definamos $\omega : CL(X) \to [0,1]$ como

$$\omega(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\omega_n(A).$$

Observemos que para todo $A \in CL(X)$, $0 \leq \omega_n(A) \leq 1$, con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\omega_n(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\omega_n(A)$ converge por el criterio de comparación, por lo que ω está bien definida.

Veamos que ω es una función de Whitney para $CL(X)$. Observemos que $\omega_n = \operatorname{diam} \circ f_n^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que los lemas 1.39 y 1.32 implican que ω_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Criterio M de Weierstrass, se tiene que ω es continua.

Ahora sean $A, B \in CL(X)$ con $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Como $A \subseteq B$, se tiene que $f_n(A) \subseteq f_n(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $\omega_n(A) = \operatorname{diam} f_n(A) \leq \operatorname{diam} f_n(B) = \omega_n(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para comprobar que $\omega(A) < \omega(B)$, será suficiente probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\omega_m(A) < \omega_m(B)$. Para ello, sean $p \in B \setminus A$ y $r = \frac{1}{2}d(p, A)$. Notemos que $r > 0$, ya que A es cerrado y $p \notin A$. Como $p \in X = \overline{Z}$, entonces $B(p, r) \cap Z \neq \emptyset$. Sea $z_m \in B(p, r) \cap Z$. Dado que $d(z_m, p) < r$, se tiene que

$$f_m(p) = \frac{1}{1 + d(z_m, p)} > \frac{1}{1 + r}. \tag{1.10}$$

Ahora, como $d(p, A) - d(z_m, A) \leq d(p, z_m) < r$, se tiene que $r + d(z_m, A) > d(p, A) = 2r$, lo que implica que $d(z_m, A) > r$, con lo cual

$$f_m(a) = \frac{1}{1 + d(z_m, a)} < \frac{1}{1 + r}. \tag{1.11}$$

para todo $a \in A$. Combinando (1.10) y (1.11), se tiene que

$$\sup f_m(A) \leq \frac{1}{1 + r} < f_m(p). \tag{1.12}$$

Pero como $p \in B$, se deduce que

$$\sup f_m(A) < \sup f_m(B). \tag{1.13}$$

Por otro lado, como $A \subseteq B$, se cumple que $f_m(A) \subseteq f_m(B)$, con lo cual

$$\text{ínf } f_m(B) \leq \text{ínf } f_m(A). \tag{1.14}$$

Se sigue de (1.13), (1.14) y del Ejemplo 1.38 que $\omega_m(A) = \operatorname{diam} f_m(A) < \operatorname{diam} f_m(B) = \omega_m(B)$, lo que prueba que $\omega(A) < \omega(B)$.

Finalmente, veamos que ω satisface que $\omega(A) = 0$ si y solo si $A \in F_1(X)$. Así pues, sea $A \in CL(X)$. Supongamos que $A \in F_1(X)$, digamos, $A = \{x\}$. Luego, $\omega_n(A) = \operatorname{diam} f_n(A) = \operatorname{diam}\{f_n(x)\} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\omega(A) = 0$. Ahora supongamos que $A \notin F_1(X)$. Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$, y sea $r = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Como Z es denso en X, existe $z_m \in B(x, r) \cap Z$. Notemos que $z_m \notin B(y, r)$ (de lo contrario, $d(x, y) < 2r$, lo que es una contradicción), lo que implica que $f_m(x) \neq f_m(y)$. Con esto, $\omega_m(A) = \operatorname{diam} f_m(A) > 0$, luego, $\omega(A) > 0$.

De todo lo anterior, se concluye que ω es una función de Whitney, lo que prueba el teorema. ■

1.6. El cubo de Hilbert

El cubo de Hilbert I^∞ está estrechamente relacionado con la estructura topológica de un continuo. En particular, un resultado conocido en topología general (y que se demostrará en esta sección) es que todo continuo puede ser encajado en el cubo de Hilbert. Más aún, 2^X tiene encajado un cubo de Hilbert cuando X es un continuo (este resultado se demostrará en el Capítulo 2). Es por eso que dedicaremos esta sección a enunciar algunas propiedades del cubo de Hilbert que utilizaremos en los capítulos posteriores.

El conjunto I^∞ puede dotarse de la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - y_n|,$$

la cual induce la topología producto en I^∞, es decir, el cubo de Hilbert es metrizable.

Una propiedad muy importante de los continuos es que el cubo de Hilbert contiene una copia de cualquier continuo, es decir, todo continuo es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.

Teorema 1.42. *Todo continuo se puede encajar en un cubo de Hilbert, es decir, todo continuo es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea X un continuo y d una métrica para X. Por ser X separable (Lema 1.40), existe $D = \{p_1, p_2, \ldots\}$ un subconjunto denso y numerable de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $h_n : X \to [0,1]$ por $h_n(x) = \frac{1}{1+d(x,p_n)}$. Observemos que h_n está bien definida y es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora definamos $h : X \to I^\infty$ por

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots)\,.$$

Dado que $h_n : X \to [0,1]$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $h : X \to I^\infty$ es continua. Veamos que h es inyectiva. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Para ver que $h(x) \neq h(y)$, será suficiente probar que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $h_j(x) \neq h_j(y)$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,y) > 0$. Como D es denso en X, entonces $x \in \overline{D}$, de donde $B(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Sea $p_j \in B(x,\varepsilon) \cap D$. Por la elección de ε, se tiene que $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$, con lo cual $d(y,p_j) \geq \varepsilon > d(x,p_j)$, lo que implica que $h_j(y) = \frac{1}{1+d(y,p_j)} < \frac{1}{1+d(x,p_j)} = h_j(x)$. Así, $h_j(x) \neq h_j(y)$, lo que prueba la inyectividad de h.

Así, se tiene que h es inyectiva y continua cuyo dominio es compacto y cuyo codominio es de Hausdorff. Luego, X es homeomorfo a $h(X)$, es decir, h es un encaje de X en I^∞. ■

Definición 1.43. *Un espacio topológico X es **homogéneo** si para cualesquiera $p, q \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(p) = q$.*

De manera intuitiva, un espacio topológico es homogéneo si su estructura topológica es la misma en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 1.44. (1) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la esfera n-dimensional S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$ es homogénea, ya que para cada par de sus puntos existe una rotación de S^n, la cual es un homeomorfismo, que lleva uno de estos puntos en el otro.*

(2) *El intervalo cerrado $[0,1]$ no es homogéneo. En efecto, supongamos que existe $f : [0,1] \to [0,1]$ homeomorfismo tal que $f(1) = \frac{1}{2}$. Como $[0,1] \setminus \{1\}$ es conexo, se tiene que $f([0,1] \setminus \{1\})$ es conexo. Pero $f([0,1] \setminus \{1\}) = f([0,1]) \setminus \{f(1)\} = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, el cual es disconexo, teniéndose una contradicción. Con esto, se asegura que $[0,1]$ no es homogéneo.*

Nuestro interés ahora es probar que el cubo de Hilbert I^∞ es homogéneo, para lo cual usaremos la siguiente notación: sea $S = \{x \in I^\infty : \pi_n(x) \in (0,1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$, donde $\pi_n : I^\infty \to [0,1]$ denota la n-ésima proyección de I^∞ en $[0,1]$. Denotemos también por $Hom(I^\infty) = \{f : I^\infty \to I^\infty \mid f \text{ es un homeomorfismo}\}$.

Lema 1.45. *Si $x, y \in S$, entonces existe $f \in Hom(I^\infty)$ tal que $f(x) = y$.*

Demostración. Sean $x, y \in S$, entonces $\pi_n(x), \pi_n(y) \in (0,1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0,1] \to [0,1]$ como

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{\pi_n(x)}\pi_n(y) & \text{si} \quad t \in [0, \pi_n(x)] \\ \pi_n(y) + \frac{t-\pi_n(x)}{1-\pi_n(x)}(1-\pi_n(y)) & \text{si} \quad t \in [\pi_n(x), 1]. \end{cases}$$

Notemos que f_n es un homeomorfismo y $f_n(\pi_n(x)) = \pi_n(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : I^\infty \to I^\infty$ dada por $f((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (f_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Observemos que $f \in Hom(I^\infty)$ y f cumple que $f(x) = y$. ■

Lema 1.46. [13, Lema 3.4] *Si $x \in I^\infty$, entonces existe $h \in Hom(I^\infty)$ tal que $h(x) \in S$.*

Teorema 1.47. *El cubo de Hilbert es homogéneo.*

Demostración. Sean $x, y \in I^\infty$. Por el Lema 1.46, existen $h_1, h_2 \in Hom(I^\infty)$ tales que $h_1(x), h_2(y) \in S$. Luego, por el Lema 1.45, existe $h_3 \in Hom(I^\infty)$ tal que $h_3(h_1(x)) = h_2(y)$. Sea $h = h_2^{-1} \circ h_3 \circ h_1$. Entonces $h \in Hom(I^\infty)$ y cumple que $h(x) = y$. Esto demuestra la homogeneidad de I^∞. ■

1.7. Dimensión de un espacio métrico

Algunos teoremas de los capítulos posteriores requieren del concepto de dimensión. Por esa razón, definiremos dicho concepto a continuación.

Definición 1.48. *Sean X un espacio métrico separable y $p \in X$. Definiremos la* ***dimensión*** *de X, denotada por $\dim(X)$; y la dimensión de X en p, denotada por $\dim_p(X)$, de manera recursiva:*

- *Definimos $\dim(X) = -1$ si y solo si $X = \emptyset$.*
- *Definimos $\dim(X) = 0$ si y solo si $X \neq \emptyset$ y para todo $p \in X$ y todo entorno U de p, existe G un subconjunto cerrado y abierto de X tal que $p \in G \subseteq U$.*
- *Supongamos que ya hemos definido $\dim_p(X) \leq n-1$ y $\dim(X) \leq n-1$, para algún entero $n \geq 0$. Entonces diremos que $\dim_p(X) \leq n$ si y solo si cada vecindad de p en X contiene una vecindad de p en X cuya frontera tienen dimensión a lo más $n-1$. Diremos que $\dim(X) \leq n$ si y solo si $\dim_p(X) \leq n$ para todo $p \in X$.*

- *Diremos que* $\dim_p(X) = n$ *si* $\dim_p(X) \leq n$ *y* $\dim_p(X) \nleq n-1$. *Asimismo, diremos que* $\dim(X) = n$ *si* $\dim(X) \leq n$ *y* $\dim(X) \nleq n-1$.

- *Finalmente, diremos que* $\dim(X) = \infty$ *si* $\dim(X) \nleq n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Observación 1.49. *Si τ_d es la topología inducida por la métrica d de un espacio métrico separable X, se cumple que* $\dim(X) = 0$ *si y solo si τ_d tiene una base que consta de subconjuntos cerrados y abiertos de X.*

Proposición 1.50. *Si A es un subespacio del espacio métrico separable X, entonces* $\dim(A) \leq \dim(X)$.

Demostración. Si $\dim(X) = \infty$, se satisface la desigualdad de manera inmediata, así que supongamos que la dimensión de X es finita. Haremos la prueba por inducción sobre una cota superior para $\dim(X)$. Si $\dim(X) \leq -1$, entonces $X = \emptyset$ y por ende $A = \emptyset$, con lo cual $\dim(A) = -1$ y así $\dim(A) \leq \dim(X)$. Ahora supongamos que el resultado se cumple para cualquier espacio métrico de dimensión no mayor a $n-1$. Supongamos que $\dim(X) \leq n$. Sea $a \in A$ y U una vecindad de a en A. Entonces existe V vecindad de a en X tal que $U = V \cap A$. Como $a \in V$ y $\dim(X) \leq \dim(X)$, se sigue que a tiene una vecindad W en X tal que $a \in W \subseteq V$ y $\dim[\mathrm{fr}_X(W)] \leq \dim(X)-1$.

Afirmación: $\mathrm{fr}_A(W \cap A) \subseteq \mathrm{fr}_X(W)$. En efecto, sabemos que $\mathrm{fr}_A(W \cap A) = \mathrm{cl}_A(W \cap A) \cap \mathrm{cl}_A(A \setminus W)$. Como $\mathrm{cl}_A(W \cap A) \subseteq \mathrm{cl}_X(W)$ y $\mathrm{cl}_A(A \setminus W) \subseteq \mathrm{cl}_X(X \setminus W)$, entonces $\mathrm{fr}_A(W \cap A) \subseteq \mathrm{cl}_X(W) \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus W) = \mathrm{fr}_X(W)$.

Ahora, por hipótesis inductiva,

$$\dim[\mathrm{fr}_A(W \cap A)] \leq \dim[\mathrm{fr}_X(W)] \leq \dim(X) - 1.$$

Como $W \cap A \subseteq V \cap A = U$ y $W \cap A$ es una vecindad de a en A cuya frontera en A tienen dimensión a lo más $\dim(X)-1$, se sigue que $\dim_a(A) \leq \dim(X)$. Como $a \in A$ fue arbitrario, se concluye que $\dim(A) \leq \dim(X)$. ■

Recordemos que un espacio métrico X se dice totalmente disconexo si $X \neq \emptyset$ y para todo $x \in X$, la componente conexa de X es $\{x\}$.

Teorema 1.51. *Sea X un espacio métrico compacto. Se cumple que* $\dim(X) = 0$ *si y solo si X es totalmente disconexo.*

Demostración. Supongamos que $\dim(X) = 0$ (luego, $X \neq \emptyset$) y que X no es totalmente disconexo. Entonces existe un subconjunto conexo C de X que tiene al menos dos puntos distintos p y q. Sea $r = d(p,q) > 0$. Como $\dim(X) = 0$, existe N un subconjunto cerrado y abierto de X tal que $p \in N \subseteq B(p,r)$. Se sigue que $q \notin N$, de donde $N \cap C \subsetneq C$. También se tiene que $N \cap C$ es cerrado y abierto en C. Esto contradice que C es conexo. Por consiguiente, se concluye que X es totalmente disconexo.

Recíprocamente, supongamos que X es totalmente disconexo. Para demostrar que $\dim(X) = 0$, sea $p \in X$ y U un entorno de p. Si $U = X$, definimos $G = X$ y la prueba termina, así que supongamos que $U \neq X$. Entonces $\{p\}$ y $X \setminus U$ son subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Además, dado que X es totalmente disconexo, ningún subconjunto conexo de X intersecta tanto a $\{p\}$ como a $X \setminus U$. Así, por el Teorema 1.7, $\{p\}$ y $X \setminus U$ están separados en X. Por la Proposición 1.6, existe $G \subseteq X$ cerrado y abierto de X tal que $p \in G \subseteq U$. Esto prueba que $\dim(X) = 0$. ■

Lema 1.52. *La dimensión es una propiedad topológica, es decir, si X y Y son espacios métricos separables homeomorfos, entonces* $\dim(X) = \dim(Y)$.

Demostración. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Probemos que $\dim(X) \leq \dim(Y)$. Si $\dim(Y) = \infty$, se satisface la desigualdad, así que supongamos que la dimensión de Y es finita. Haremos la prueba por inducción sobre una cota superior para $\dim(Y)$. Si $\dim(Y) \leq -1$, entonces $Y = \emptyset$ y por ende $X = \emptyset$, con lo cual $\dim(X) = -1$ y así $\dim(X) \leq \dim(Y)$. Ahora supongamos que el resultado se cumple para cualquier espacio métrico de dimensión no mayor a $n-1$. Supongamos que $\dim(Y) \leq n$. Sea $p \in X$ y U una vecindad de p en X. Entonces $h(U)$ es una vecindad de $h(p)$ en Y. Como $\dim(Y) \leq \dim(Y)$, existe una vecindad W de $h(p)$ en Y tal que $h(p) \in W \subseteq h(U)$ y $\dim[\mathrm{fr}(W)] \leq \dim(Y)-1$. Así, $h^{-1}(W)$ es una vecindad de p en X tal que $p \in h^{-1}(W) \subseteq U$. Además, $\mathrm{fr}_X(h^{-1}(W))$ es homeomorfa a $\mathrm{fr}_Y(W)$. Por hipótesis inductiva, se cumple que $\dim[\mathrm{fr}_X(h^{-1}(W))] \leq \dim[\mathrm{fr}_Y(W)] \leq \dim(Y)-1$. Hemos probado que $\dim_p(X) \leq \dim(Y)$. Como $p \in X$ fue arbitrario, se sigue que $\dim(X) \leq \dim(Y)$. Análogamente se prueba que $\dim(Y) \leq \dim(X)$, concluyéndose que $\dim(X) = \dim(Y)$. ■

Teorema 1.53. *Sea X un espacio métrico separable. Se cumple que* $\dim(X) = 0$ *si y solo si* $\dim(2^X) = 0$.

Demostración. Supongamos que $\dim(X) = 0$. Por la Observación 1.49, existe $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j\in J}$ una base para τ_d que consta de subconjuntos cerrados y abiertos de X. Definamos

$$\Omega = \{\langle W_{j_1}, \ldots, W_{j_n}\rangle \cap 2^X : n \in \mathbb{N} \text{ y } W_{j_i} \in \mathcal{W} \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\}.$$

Como los elementos de $\mathcal{W}$ son cerrados y abiertos en X, se sigue por la Proposición 1.18 que los elementos de Ω son cerrados y abiertos en 2^X. Además, observemos que Ω es una base para 2^X. Por lo tanto, $\dim(2^X) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\dim(2^X) = 0$. Luego, $2^X \neq \emptyset$ y por consiguiente $X \neq \emptyset$ y $F_1(X) \neq \emptyset$. Como $F_1(X) \subseteq 2^X$, por la Proposición 1.50, se tiene que $\dim(F_1(X)) = 0$. Y dado que X es homeomorfo a $F_1(X)$, se concluye por el Lema 1.52 que $\dim(X) = 0$. ∎

Capítulo 2

Arcos ordenados y arco conexidad de 2^X y $C(X)$

En este capítulo demostraremos la existencia de arcos ordenados en $C(X)$ cuando X es un continuo. Posteriormente, probaremos que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son arco conexos si X es un continuo. Como consecuencia, se tendrá que 2^X contiene un cubo de Hilbert siempre que X sea un continuo.

2.1. Existencia de arcos ordenados en $C(X)$

Gracias a la estructura de $\mathbb{R}$, se sabe que $([0,1], \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. En un arco C, es natural preguntarse si los homeomorfismos del intervalo $[0,1]$ con C preservan el orden, y de ser así el caso, podríamos "ordenar" a los elementos de un arco. La respuesta es afirmativa, basta definir el siguiente orden en C: si $h : [0,1] \to C$ es un homeomorfismo, defínase

$$h(p) \leq h(q) \text{ si y solo si } p \leq q.$$

En el caso de los hiperespacios, la relación de contención "$\subseteq$" es de orden parcial. Sin embargo, cuando hablamos de un arco α en un hiperespacio $\mathcal{H}$, entenderemos que el orden parcial en $\mathcal{H}$ restringido a α coincide con el orden total del arco α. Esto queda establecido en la Definición 2.2, pero antes definamos el concepto de red:

Definición 2.1. *Una colección $\mathcal{N}$ de conjuntos es una **red** o nido si para cualesquiera $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ se cumple que $N_1 \subseteq N_2$ o bien $N_2 \subseteq N_1$.*

Una red desde A_0 hasta A_1 es una red $\mathcal{N}$ tal que $A_0, A_1 \in \mathcal{N}$ y $A_0 \subseteq N \subseteq A_1$ para cualquier $N \in \mathcal{N}$.

Definición 2.2. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Un **arco ordenado** en $\mathcal{H}$ es un arco en $\mathcal{H}$ que es también una red.*

Una red compacta $\mathcal{N} \subseteq 2^X$ es una red que es también un subconjunto compacto de 2^X.

Lema 2.3. *Sean X un espacio métrico compacto, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ y ω una función de Whitney para $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{N}$ es una red compacta en $\mathcal{H}$, entonces $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Veamos que $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es inyectiva: sean $F, G \in \mathcal{N}$ con $F \neq G$. Por ser $\mathcal{N}$ una red, se tiene que $F \subseteq G$ o bien $G \subseteq F$, lo que implica que $\omega(F) < \omega(G)$ o bien $\omega(G) < \omega(F)$. En cualquier caso, $\omega(F) \neq \omega(G)$. Así, $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es inyectiva. Luego, es posible restringir el codominio de $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ a $\omega(\mathcal{N})$ para tener una función biyectiva. Además, $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es continua, ya que ω lo es, y como $\mathcal{N}$ es compacto, concluimos que $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es un homeomorfismo. ■

Una red $\mathcal{M}$ desde A_0 hasta A_1 es maximal si no existe $\mathcal{N}$ red desde A_0 hasta A_1 tal que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N}$.

Lema 2.4. *Sea X un espacio métrico compacto y sean $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \subseteq A_1$. Si $\mathcal{M}$ es una red maximal en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1, entonces $\mathcal{M}$ es compacto.*

Demostración. Dado que $\mathcal{M} \subseteq C(X)$ y $C(X)$ es compacto, bastará probar que $\mathcal{M}$ es un cerrado de $C(X)$. Para ello, sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}$ que converge a $A \in C(X)$. Probaremos que $A \in \mathcal{M}$. Veamos primero que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red. Como $\mathcal{M}$ es una red, solo resta verificar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq A$ o $A \subseteq M$. Así pues, sea $M \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es una red y $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{M}$, se tienen dos casos:

- **Caso 1:** $M \subseteq M_n$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$: en este caso, veamos que $K = \{B \in CL(X) : M \subseteq B\}$ es cerrado en $CL(X)$. Para ello, sea $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en K que converge a $L \in CL(X)$; veamos que $L \in K$, es decir, que $M \subseteq L$. Por la Proposición 1.23, bastará probar que $M \subseteq \limsup L_n$. Sea $x \in M$. Como $M \subseteq L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, si U es un entorno de x, entonces $U \cap L_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $x \in \limsup L_n = L$.

Esto prueba que K es cerrado en $CL(X)$. Ahora bien, como la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, se cumple que $A \in K$, es decir, $M \subseteq A$.

- **Caso 2:** $M_n \subseteq M$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$: en este caso, observemos que el Corolario 1.31 implica que $C(M)$ es compacto, y como la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, se tiene que $A \in C(M)$, en particular, $A \subseteq M$.

De ambos casos, se concluye que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red. Ahora observemos que $A_0 \subseteq M_n \subseteq A_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$. Así, hemos probado que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red desde A_0 hasta A_1. Por la maximalidad de $\mathcal{M}$, se concluye que $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{A\}$, es decir, $A \in \mathcal{M}$. ■

Lema 2.5. *Sea X un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Si $\mathcal{M}$ es una red maximal en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1, entonces $\mathcal{M}$ es un arco desde A_0 hasta A_1.*

Demostración. Sea ω una función de Whitney para $C(X)$ (la cual existe por el Teorema 1.41). Sean $t_0 = \omega(A_0)$ y $t_1 = \omega(A_1)$. Como $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $t_0 < t_1$. Además, como $\mathcal{M}$ es una red desde A_0 hasta A_1 y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $\omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$. Más aún, por el Lema 2.4 se sabe que $\mathcal{M}$ es compacto, y por el Lema 2.3, se tiene que $\mathcal{M}$ es homeomorfo a $\omega(\mathcal{M})$. Así que para demostrar que $\mathcal{M}$ es un arco, será suficiente demostrar que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$. Para ello, supongamos que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Entonces existe $x \in [t_0, t_1] \setminus \omega(\mathcal{M})$. Observar que $t_0 \neq x \neq t_1$, ya que $t_0, t_1 \in \omega(\mathcal{M})$. Definamos

$$S_0 = [t_0, x] \cap \omega(\mathcal{M}) \text{ y } S_1 = [x, t_1] \cap \omega(\mathcal{M}).$$

Notar que $S_0 \neq \emptyset$, ya que $t_0 \in S_0$. Sea $s_0 = \sup S_0$. Como S_0 es un cerrado de $\mathbb{R}$, entonces $s_0 \in S_0$, esto es, $s_0 \in \omega(\mathcal{M})$ y $t_0 \leq s_0 < x$. De igual forma, $S_1 \neq \emptyset$, ya que $t_1 \in S_1$. Sea $s_1 = \text{ínf}\, S_1$. Como S_1 es un cerrado de $\mathbb{R}$, entonces $s_1 \in S_1$, esto es, $s_1 \in \omega(\mathcal{M})$ y $x < s_1 \leq t_1$. Observemos que $s_0 < s_1$ y $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Sean $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ tales que $\omega(M_0) = s_0$ y $\omega(M_1) = s_1$. Dado que $\mathcal{M}$ es una red, $\omega(M_0) < \omega(M_1)$ y ω es una función de Whitney, se sigue que $M_0 \subsetneq M_1$. Además, $\mathcal{M} \subseteq C(X)$, lo que quiere decir que M_0 y M_1 son continuos. Como M_0 es un subcontinuo propio de M_1, por el Teorema 1.9 (a), existe un subcontinuo propio B de M_1 tal que $M_0 \subsetneq B$.

Veamos ahora que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red. Como $\mathcal{M}$ es una red, solo resta verificar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq B$ o $B \subseteq M$. Así pues, sea $M \in \mathcal{M}$. Dado que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$, se tiene que $\omega(M) \leq s_0$ o $\omega(M) \geq s_1$.

- Si $\omega(M) \leq s_0 = \omega(M_0)$, dado que $\mathcal{M}$ es una red, se sigue que $M \subseteq M_0$; y como $M_0 \subseteq B$, se tiene que $M \subseteq B$.

- Si $\omega(M) \geq s_1 = \omega(M_1)$, usando nuevamente que $\mathcal{M}$ es una red, se tiene que $M_1 \subseteq M$; pero $B \subseteq M_1$, por lo que $B \subseteq M$.

De ambos incisos se concluye que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red. Pero $B \in C(X)$, con lo cual $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red en $C(X)$. En suma, el hecho de que $s_0, s_1 \in \omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$ implica que $A_0 \subseteq M_0 \subseteq B \subseteq M_1 \subseteq A_1$. Hemos probado que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1. Por la maximalidad de $\mathcal{M}$, se concluye que $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{B\}$, es decir, $B \in \mathcal{M}$. Sin embargo, dado que $M_0 \subsetneq B \subsetneq M_1$, se tiene que $s_0 < \omega(B) < s_1$, lo que contradice el hecho de que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Esta contradicción proviene de suponer que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Por lo tanto, se concluye que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$, lo que prueba el lema. ■

Lema 2.6. *Si X es un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ son tales que $A_0 \subseteq A_1$, entonces existe una red maximal en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1.*

Demostración. Defínase

$$\Lambda = \{\mathcal{N} \subseteq C(X) : \mathcal{N} \text{ es una red desde } A_0 \text{ hasta } A_1\}.$$

Observar que $\Lambda \neq \emptyset$, ya que $\{A_0, A_1\} \in \Lambda$. Además, $(\Lambda, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Veamos que toda cadena en Λ tiene una cota superior en Λ. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en Λ. Verifiquemos que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$ en Λ.

- Veamos primero que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red. Sean $E, F \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tales que $E \in C_1$ y $F \in C_2$. Por ser $\mathcal{C}$ una cadena, se cumple que $C_1 \subseteq C_2$ o $C_2 \subseteq C_1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $C_1 \subseteq C_2$, entonces $E, F \in C_2$. Por ser C_2 una red, se tiene que $E \subseteq F$ o $F \subseteq E$. Así, hemos probado que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red.

- Además, para cada $C \in \mathcal{C}$ se cumple que $A_0 \subseteq C \subseteq A_1$, por lo que $A_0 \subseteq \bigcup \mathcal{C} \subseteq A_1$.

- Finalmente, es claro que $C \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{C} \in \Lambda$ y $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$. Así, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $\mathcal{M}$ en Λ. Finalmente, observar que $\mathcal{M}$ es una red maximal en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1. ■

Los lemas anteriores son útiles para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.7. *Sea X un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1.*

Demostración. Por el Lema 2.6, existe una red maximal $\mathcal{M}$ en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1. Ahora, por el Lema 2.5, $\mathcal{M}$ es un arco desde A_0 hasta A_1. Por la Definición 2.2, se concluye que $\mathcal{M}$ es un arco ordenado en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1. ■

2.2. Arco conexidad de 2^X y $C(X)$

Lema 2.8. *Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{A}$ un subcontinuo de 2^X con más de un punto. Si $\mathcal{A}$ es una red, entonces $\mathcal{A}$ es también un arco ordenado.*

Demostración. Sea ω una función de Whitney para 2^X (la cual existe por el Teorema 1.41). Como $\mathcal{A}$ es una red compacta en 2^X, por el Lema 2.3, se tiene que $\omega\restriction_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo. Así, $\omega(\mathcal{A})$ es un continuo, que resulta ser un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ con más de un punto. Por consiguiente, $\mathcal{A}$ es un arco, y por ser $\mathcal{A}$ una red, se concluye que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado. ■

Teorema 2.9. *Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son arco conexos.*

Demostración. Primero probaremos la arco conexidad de 2^X: sea $K \in 2^X$ con $K \neq X$ y sea A_0 una componente de K. Como $A_0, X \in C(X)$ y $A_0 \neq X$, el Teorema 2.7 nos asegura la existencia de un arco ordenado α en $C(X)$ desde A_0 hasta X. Sea h un homeomorfismo de $[0,1]$ sobre α tal que $h(0) = A_0$ y $h(1) = X$. Definamos $f : [0,1] \to 2^X$ como $f(t) = K \cup h(t)$. Notar que f es continua por la Proposición 1.24, $f(0) = K$ y $f(1) = X$. Luego, $f([0,1])$ es un subcontinuo de 2^X con más de un punto. Más aún, el hecho de que α sea un arco ordenado implica que $f([0,1])$ es una red desde K hasta X. Así, por el Lema 2.8, $f([0,1])$ es un arco ordenado en 2^X desde K hasta X.

Hemos probado que para cualquier $K \in 2^X$ con $K \neq X$, existe un arco en 2^X entre K y X. Por el Lema 1.5, se concluye que 2^X es arco conexo.

Finalmente, probaremos que $C(X)$ es arco conexo. Si $A_0 \in C(X)$ con $A_0 \neq X$, por el Teorema 2.7, existe un arco en $C(X)$ desde A_0 hasta X. Nuevamente, el Lema 1.5 nos permite concluir que $C(X)$ es arco conexo. ■

Corolario 2.10. *Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son continuos arco conexos.*

Demostración. Como X es compacto, por los corolarios 1.29 y 1.31, se tiene que 2^X y $C(X)$ son compactos. Por el Teorema 2.9, también son arco conexos, lo que implica, en virtud del Teorema 1.4, que son conexos. Por lo tanto, 2^X y $C(X)$ son continuos arco conexos. ■

Notemos que 2^X y $C(X)$ son arco conexos aun cuando el continuo X puede no ser arco conexo, como es el caso del continuo seno del topólogo.

2.3. El cubo de Hilbert encajado en 2^X

Como consecuencia de la arco conexidad de 2^X, asegurada por el Teorema 2.9, veremos que 2^X contiene un cubo de Hilbert siempre que X sea un continuo. La prueba de este hecho se basa en la existencia de arcos en 2^X. Para enunciar y probar este resultado, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2.11. [9, Lema 14.11] *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de $X \setminus \{p\}$ tales que:*

(a) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, A_n tiene más de un punto.*

(b) $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$.

(c) $\lim A_n = \{p\}$.

Teorema 2.12. *Si X es un continuo, entonces 2^X contiene un cubo de Hilbert. Como consecuencia, 2^X es de dimensión infinita.*

Demostración. Sea $p \in X$. Por el Lema 2.11, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de $X \setminus \{p\}$ que cumplen (a), (b) y (c) de dicho lema. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que A_n es un continuo; por el Teorema 2.9, existe un arco α_n en 2^{A_n}. Notar que $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es un cubo de Hilbert. Encajaremos $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ en 2^X de la siguiente manera: sea $(B_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Notar que $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica por (5) de la Observación 1.21 que $\lim B_n \subseteq \lim A_n = \{p\}$. Pero $\lim B_n \neq \emptyset$ por el Lema 1.22, con lo cual la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\}$ en 2^X. Definamos $h : \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n \to 2^X$ como

$$h\left((B_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup \{p\}.$$

Veamos que h es continua e inyectiva.

Primero verificaremos que h es continua: para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $B^k = (B_n^k)_{n=1}^{\infty}$; sea $B = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ y supongamos que la sucesión $\{B^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ a B. Veamos que $\{h(B^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en 2^X a $h(B)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de la función diámetro (Lema 1.39), se tiene que $\text{lím}_{n\to\infty} \text{diam}(A_n) = \text{diam}(\text{lím}\, A_n) = \text{diam}(\{p\}) = 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diam}(A_n) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$.

Como $\{B^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ a B y la convergencia en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es coordenada a coordenada, se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} B_1^k &= B_1, \\ \lim_{k\to\infty} B_2^k &= B_2, \\ &\vdots \\ \lim_{k\to\infty} B_{N-1}^k &= B_{N-1}. \end{aligned}$$

Entonces existen $K_1, \ldots, K_{N-1}$ tales que:

$$\begin{aligned} \text{si } k \geq K_1, &\text{ entonces } H_d(B_1^k, B_1) < \varepsilon; \\ \text{si } k \geq K_2, &\text{ entonces } H_d(B_2^k, B_2) < \varepsilon; \\ &\vdots \\ \text{si } k \geq K_{N-1}, &\text{ entonces } H_d(B_{N-1}^k, B_{N-1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Defínase $K = \text{máx}\{K_1, \ldots, K_{N-1}\}$. Sea $n \geq N$.

Afirmación: $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$: en efecto, sea $k \in \mathbb{N}$. Como $B_n, B_n^k \in 2^{A_n}$, por (3) de la Observación 1.14 bastará verificar que $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$ y $B_n \subseteq N(\varepsilon, B_n^k)$. Veamos que $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$. Sean $x \in B_n^k$ y $b \in B_n$. Como $B_n^k \subseteq A_n$ y $B_n \subseteq A_n$, entonces $x, b \in A_n$, de donde $d(x, B_n) \leq d(x, b) \leq \text{diam}(A_n) < \varepsilon$, con lo cual $x \in N(\varepsilon, B_n)$. Luego, $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$. Análogamente se prueba que $B_n \subseteq N(\varepsilon, B_n^k)$, lo que concluye que $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$.

Hemos probado que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $k \geq K$, se cumple que $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$. Veamos que $H_d(h(B^k), h(B)) < \varepsilon$ para todo $k \geq K$.

Sea $k \geq K$. Por (3) de la Observación 1.14, bastará probar que $h(B^k) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$ y $h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B^k))$. Sea $x \in h(B^k) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^k\right) \cup \{p\}$. Si $x = p$, entonces $x \in h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$, así que supongamos que $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^k$; entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n^k$. Como $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$, se cumple que $d(x, B_n) < \varepsilon$. Pero $B_n \subseteq h(B)$; por (4) de la Proposición 1.12, se sigue que $d(x, h(B)) < \varepsilon$, es decir, $x \in N(\varepsilon, B_n)$. Esto prueba que $h(B^k) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$. Análogamente se prueba que $h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B^k))$. Por lo tanto, $H_d(h(B^k), h(B)) < \varepsilon$ siempre que $k \geq K$. Esto prueba la continuidad de h.

Ahora veamos que h es inyectiva: sean $(B_n)_{n=1}^{\infty}, (C_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ con $(B_n)_{n=1}^{\infty} \neq (C_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \neq C_m$. Como $B_m \subseteq A_m, C_m \subseteq A_m$ y $A_m \cap A_n = \emptyset$ si $n \neq m$, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Ahora, como $p \notin A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $p \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, con lo cual $(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \cup \{p\} \neq (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cup \{p\}$, es decir, $h((B_n)_{n=1}^{\infty}) \neq h((C_n)_{n=1}^{\infty})$. Esto prueba que h es inyectiva.

De lo anterior, se concluye que $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ está encajado en 2^X. Finalmente, dado que los cubos de Hilbert son de dimensión infinita, concluimos por la Proposición 1.50 que 2^X tiene dimensión infinita. ■

Corolario 2.13. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) $\dim(X) \neq 0$.

(b) $\dim(2^X) = \infty$.

(c) 2^X *contiene un cubo de Hilbert.*

Demostración. [(a)⇒(c)] Supongamos que $\dim(X) \neq 0$. Por el Teorema 1.51, X no es totalmente disconexo. Luego, existe una componente C de X con más de un punto. Notemos que C es un continuo; por el Teorema 2.12, 2^C contiene un cubo de Hilbert. Pero $2^C \subseteq 2^X$; luego, 2^X contiene un cubo de Hilbert.

[(c)⇒(b)] Supongamos que 2^X contiene un cubo de Hilbert. Dado que los cubos de Hilbert son de dimensión infinita, concluimos por la Proposición 1.50 que 2^X tiene dimensión infinita.

[(b)⇒(a)] Supongamos que $\dim(2^X) = \infty$. En particular, $\dim(2^X) \neq 0$. En virtud del Teorema 1.53, se concluye que $\dim(X) \neq 0$. ■

Capítulo 3

Existencia de arcos ordenados en 2^X

En el Teorema 2.7 del capítulo anterior, dados $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \neq A_1$, vimos una condición suficiente para la existencia de arcos ordenados entre A_0 y A_1. La condición era simplemente que $A_0 \subseteq A_1$. Sin embargo, si ahora $A_0, A_1 \in 2^X$, la condición no siempre es suficiente para asegurar la existencia de arcos ordenados en 2^X desde A_0 hasta A_1. Por ejemplo, consideremos $X = [0,1], A_0 = \{0\}$ y $A_1 = \{0,1\}$. Aquí, $A_0, A_1 \in 2^X$ y $A_0 \subseteq A_1$, pero la única red desde A_0 hasta A_1 es $\{\{0\}, \{0,1\}\}$, la cual no es homeomorfa a $[0,1]$ y por tanto, no es un arco. Luego, no existe arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1.

A partir de ahora, cuando digamos que α es un arco ordenado desde A_0 hasta A_1, entenderemos que $A_0 \subseteq A_1$ y que A_0 y A_1 son los puntos extremos de α. Hay que notar que un arco ordenado desde A_0 hasta A_1 no necesariamente es un arco ordenado desde A_1 hasta A_0.

3.1. Arcos ordenados en 2^X

El Teorema 3.2 nos muestra una condición suficiente y necesaria para la existencia de un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1. Para enunciarlo y demostrarlo, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 3.1. *Sea X un espacio métrico compacto y sean $M_0, M_1 \in 2^X$ tales que $M_0 \subseteq M_1, M_0 \neq M_1$ y cada componente de M_1 intersecta a M_0. Entonces* *existe $C \in 2^X$ tal que $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$ y cada componente de C intersecta a M_0.*

Demostración. Dado que $M_0 \subsetneq M_1$, tomemos $p \in M_1 \setminus M_0$. Sea K_1 la componente de M_1 que contiene a p. Por hipótesis, $K_1 \cap M_0 \neq \emptyset$. Sea $q \in K_1 \cap M_0$ y sea K_0 la componente de M_0 que tiene a q. Como K_0 es conexo, $q \in K_0 \cap K_1$ y $K_0 \subseteq M_1$, entonces $K_0 \subseteq K_1$. Más aún, $K_0 \subseteq K_1 \setminus \{p\}$, ya que $K_0 \subseteq M_0$ y $p \notin M_0$. Notemos que K_0 es compacto, ya que $K_0 \subseteq X$, X es compacto y K_0 es cerrado en X. Así, K_0 es un subcontinuo propio de K_1. Por el Teorema 1.9 (a), existe B subcontinuo de $K_1 \setminus \{p\}$ tal que $K_0 \subsetneq B$. Sea $C = M_0 \cup B$. Obsérvese que C es un compacto no vacío de X, es decir, $C \in 2^X$. Además, $M_0 \subseteq C \subseteq M_1$. Como $K_0 \subsetneq B$, entonces $B \nsubseteq M_0$, lo que implica que $M_0 \subsetneq M_0 \cup B$, es decir, $M_0 \neq C$. Para ver que $C \neq M_1$, simplemente notemos que $p \in M_1$ y $p \notin C$. Solo resta verificar que cada componente de C intersecta a M_0. Para ello, sea L una componente de C. Se tienen dos casos:

(1) Si $L \cap B = \emptyset$, entonces $L \subseteq M_0$, y como $L \neq \emptyset$, se tiene que $L \cap M_0 \neq \emptyset$.

(2) Si $L \cap B \neq \emptyset$, dado que $B \subseteq C$ y B es conexo, se tiene que $B \subseteq L$. Pero $K_0 \subseteq B$, así que $K_0 \subseteq L$. Como $K_0 \neq \emptyset$ y $K_0 \subseteq M_0$, se sigue que $L \cap M_0 \neq \emptyset$.

En ambos casos se concluye que $L \cap M_0 \neq \emptyset$, lo que completa la prueba. ■

Teorema 3.2. *Sean X un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in 2^X$ con $A_0 \neq A_1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Existe un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1.*

(b) *$A_0 \subseteq A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.*

Demostración. [(a)⇒(b)] Supongamos que existe α un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1. Entonces $A_0 \subseteq A_1$, así que solo resta verificar que todas las componentes de A_1 intersectan a A_0. Supongamos por contradicción que existe una componente K de A_1 tal que $K \cap A_0 = \emptyset$. Como $A_0 \subseteq A_1$, por el Teorema del cable cortado (Teorema 1.7), se tiene que K y A_0 están separados en A_1. Entonces existen E y F subconjuntos de X tales que $A_1 = E|F$, $A_0 \subseteq E$ y $K \subseteq F$. Definamos $\mathcal{E} = \{A \in \alpha : A \subseteq E\}$ y $\mathcal{F} = \{A \in \alpha : A \cap F \neq \emptyset\}$. Observemos lo siguiente:

- $\mathcal{E} \neq \emptyset$, ya que $A_0 \in \mathcal{E}$. También $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que $A_1 \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} = \alpha$. En efecto, si $A \in \alpha$, entonces $A \subseteq A_1 = E \cup F$. Si $A \subseteq E$, entonces $A \in \mathcal{E}$. Si $A \not\subseteq E$, entonces $A \cap F \neq \emptyset$, de donde $A \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset$, ya que $E \cap F = \emptyset$.

- $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son cerrados en α. En efecto, como $E \cup F = A_1$ es cerrado y E y F están separados, entonces E y F son cerrados. Luego, $\mathcal{E}$ es cerrado en α (por la Definición 1.16). Por otro lado, $X \setminus F$ es abierto en X, de donde $\{A \in \alpha : A \subseteq X \setminus F\}$ es abierto en α, con lo cual $\mathcal{F} = \alpha \setminus \{A \in \alpha : A \subseteq X \setminus F\}$ es cerrado en α.

Los incisos anteriores implican que α es disconexo. Pero esto contradice el hecho de que α es un arco. Por lo tanto, concluimos que toda componente de A_1 intersecta a A_0.

[(b)⇒(a)] Supongamos (b) y definamos

$$\Lambda = \{\mathcal{N} \subseteq 2^X : \mathcal{N} \text{ es una red compacta desde } A_0 \text{ hasta } A_1 \text{ y para cada } N \in \mathcal{N}, \text{ cada componente de } N \text{ intersecta a } A_0\}.$$

Observar que $\Lambda \neq \emptyset$, ya que $\{A_0, A_1\} \in \Lambda$. Además, $(\Lambda, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Veamos que toda cadena en Λ tiene una cota superior en Λ. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en Λ. De la misma forma que en el Lema 2.6, se verifica que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red desde A_0 hasta A_1 y es una cota superior para $\mathcal{C}$. Para ver que $\bigcup \mathcal{C} \in \Lambda$, solo resta demostrar que para todo $N \in \bigcup \mathcal{C}$, cada componente de N intersecta a A_0. Sea $N \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$ tal que $N \in \mathcal{N}$. Como $\mathcal{N} \in \Lambda$, se cumple que cada componente de N intersecta a A_0.

Luego, por el Lema de Zorn, Λ tiene un elemento maximal $\mathcal{M}$. Observar que $\mathcal{M}$ es una red compacta desde A_0 hasta A_1. Para ver que $\mathcal{M}$ es un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1, solo resta probar que $\mathcal{M}$ es un arco. Para ello, sea ω una función de Whitney para 2^X (la cual existe por el Teorema 1.41). Sean $t_0 = \omega(A_0)$ y $t_1 = \omega(A_1)$. Como $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $t_0 < t_1$. Además, como $\mathcal{M}$ es una red desde A_0 hasta A_1 y $A_0 \neq A_1$, se tiene que $\omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$. Más aún, $\mathcal{M}$ es compacto. Por el Lema 2.3, se tiene que $\mathcal{M}$ es homeomorfo a $\omega(\mathcal{M})$. Así que para demostrar que $\mathcal{M}$ es un arco, será suficiente demostrar que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$. Para ello, supongamos que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Entonces existe $x \in [t_0, t_1] \setminus \omega(\mathcal{M})$. Observar que $t_0 \neq x \neq t_1$, ya que $t_0, t_1 \in \omega(\mathcal{M})$. Definamos

$$S_0 = [t_0, x] \cap \omega(\mathcal{M}) \text{ y } S_1 = [x, t_1] \cap \omega(\mathcal{M}).$$

Notemos que $S_0 \neq \emptyset$, ya que $t_0 \in S_0$. Sea $s_0 = \sup S_0$. Como S_0 es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $s_0 \in S_0$, esto es, $s_0 \in \omega(\mathcal{M})$ y $t_0 \leq s_0 < x$. De igual forma, $S_1 \neq \emptyset$, ya que $t_1 \in S_1$. Sea $s_1 = \operatorname{ínf} S_1$. Como S_1 es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $s_1 \in S_1$, esto es, $s_1 \in \omega(\mathcal{M})$ y $x < s_1 \leq t_1$. Observemos que $s_0 < s_1$ y $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Sean $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ tales que $\omega(M_0) = s_0$ y $\omega(M_1) = s_1$. Dado que $\mathcal{M}$ es una red, $\omega(M_0) < \omega(M_1)$ y ω es una función de Whitney, se sigue que $M_0 \subsetneq M_1$. Veamos que cada componente de M_1 intersecta a M_0. Sea L una componente de M_1. Como $M_1 \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \in \Lambda$, se tiene que $L \cap A_0 \neq \emptyset$. Además, dado que $M_0 \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es una red desde A_0 hasta A_1, se sigue que $A_0 \subseteq M_0$. Luego, $L \cap M_0 \neq \emptyset$. Por el Lema 3.1, existe $C \in 2^X$ tal que $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$ y cada componente de C intersecta a M_0. Veamos que $C \in \mathcal{M}$; si probamos que $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Lambda$, por la maximalidad de $\mathcal{M}$, concluiremos lo deseado.

Afirmación 1: $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red: en efecto, como $\mathcal{M}$ es una red, solo queda probar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq C$ o $C \subseteq M$. Sea $M \in \mathcal{M}$. Como $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$, entonces $\omega(\mathcal{M}) \leq s_0$ o $\omega(\mathcal{M}) \geq s_1$. Dado que $\mathcal{M}$ es una red y ω una función de Whitney, en el primer caso se concluye que $M \subseteq M_0 \subseteq C$, mientras que en el segundo caso se concluye que $C \subseteq M_1 \subseteq M$.

Afirmación 2: $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red compacta: en efecto, $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red por la Afirmación 1, y es compacta por ser unión finita de compactos.

Afirmación 3: $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red desde A_0 hasta A_1. Esto se sigue del hecho de que $\mathcal{M}$ es una red desde A_0 hasta A_1 y de que $A_0 \subseteq M_0 \subseteq C \subseteq M_1 \subseteq A_1$.

Afirmación 4: Cada componente de C intersecta a A_0: en efecto, sea Q una componente de C, luego, $Q \cap M_0 \neq \emptyset$. Sea $z \in Q \cap M_0$ y sea Q_0 la componente de M_0 que tiene a z. Como Q_0 es un subconjunto conexo de M_1 que tiene a z, entonces $Q_0 \subseteq Q$. Ahora, como $M_0 \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \in \Lambda$, se tiene que $Q_0 \cap A_0 \neq \emptyset$. Luego, $Q \cap A_0 \neq \emptyset$.

De las cuatro afirmaciones anteriores, concluimos que $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Lambda$, de donde $C \in \mathcal{M}$. Pero $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$, lo que implica que $s_0 < \omega(C) < s_1$.

Esto contradice el hecho de que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Esta contradicción vino de suponer que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Por lo tanto, $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$, lo que prueba que $\mathcal{M}$ es un arco. Esto demuestra (a). ■

Si α es un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1 y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, diremos que α empieza en $\mathcal{H}$ si $A_0 \in \mathcal{H}$. Cuando esto ocurra, diremos que α se queda en $\mathcal{H}$ si $\alpha \subseteq \mathcal{H}$.

Corolario 3.3. *Sean X un espacio métrico compacto y α un arco ordenado en 2^X. Si α empieza en $C(X)$, entonces α se queda en $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que α es un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1, donde $A_0 \in C(X)$. Veamos que $\alpha \subseteq C(X)$. Para ello, sea $B \in \alpha$ con $B \neq A_0$. Notemos que $A_0 \subseteq B$. Sea β el subarco de α desde A_0 hasta B. Como $\beta \subseteq \alpha$, entonces β es una red, es decir, β es un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta B. Por el Teorema 3.2, cada componente de B intersecta a A_0. Pero A_0 es un subconjunto conexo de B, con lo cual B tiene solo una componente. Esto quiere decir que B es conexo, es decir, $B \in C(X)$. Esto prueba que $\alpha \subseteq C(X)$, como queríamos. ■

3.2. Arco conexidad local de 2^X y $C(X)$

Definición 3.4. *Un espacio topológico Y es **localmente arco conexo en un punto** $p \in Y$ si para todo entorno U de p existe V un subconjunto abierto arco conexo de Y tal que $p \in V \subseteq U$. Decimos que un espacio topológico es **localmente arco conexo** si es localmente arco conexo en cada uno de sus puntos.*

Definición 3.5. *Un espacio topológico Y es **localmente conexo en un punto** $p \in Y$ si para todo entorno U de p, existe $V \subseteq Y$ abierto y conexo tal que $p \in V \subseteq U$. Decimos que Y es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

*Un continuo localmente conexo es llamado un **continuo de Peano**.*

Observación 3.6. *Si un espacio topológico Y es localmente arco conexo en un punto $p \in Y$, entonces Y es localmente conexo en p. Como consecuencia, Y es localmente conexo siempre que Y sea localmente arco conexo.*

Observación 3.7. *La arco conexidad local y la conexidad local son propiedades topológicas.*

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 3.2 y del Corolario 3.3.

Corolario 3.8. *Si X es un continuo, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son localmente arco conexos en X.*

Demostración. Verifiquemos primero la arco conexidad local de 2^X en X. Sea $U \subseteq 2^X$ un entorno de X. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \in B_{H_d}(X, \varepsilon) \subseteq U$. Veamos que $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ es un subespacio arco conexo de 2^X. Para ello, sea $A_0 \in B_{H_d}(X, \varepsilon)$ con $A_0 \neq X$. Por ser X conexo, se satisface (b) del Teorema 3.2 (con $A_1 = X$); luego, existe α un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta X. Veamos que $\alpha \subseteq B_{H_d}(X, \varepsilon)$. Sea $A \in \alpha$, entonces $A_0 \subseteq A$. Como $H_d(A_0, X) < \varepsilon$, se sigue que $X \subseteq N(A_0, \varepsilon) \subseteq N(A, \varepsilon)$. Por otro lado, $A \subseteq X \subseteq N(X, \varepsilon)$. Por (3) de la Observación 1.14, se tiene que $H_d(A, X) < \varepsilon$, es decir, $A \in B_{H_d}(X, \varepsilon)$.

Hemos probado que para todo $A_0 \in B_{H_d}(X, \varepsilon) \setminus \{X\}$ existe un arco en $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ con puntos extremos A_0 y X. Por el Lema 1.5, se concluye que $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ es arco conexa. Esto prueba la arco conexidad local de 2^X en X.

La prueba de la arco conexidad local de $C(X)$ en X se realiza de manera análoga al caso anterior, observando que ahora $A_0 \in C(X)$ y el Corolario 3.3 nos asegura que $\alpha \subseteq C(X)$. ■

Corolario 3.9. *Si X es un continuo, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son localmente conexos en X.*

Demostración. Es consecuencia del Corolario 3.8 y la Observación 3.6. ■

3.3. Hiperespacios homogéneos

En esta sección, dado un continuo X, estudiaremos la homogeneidad de los hiperespacios 2^X y $C(X)$. Es conveniente recordar que un espacio topológico X es homogéneo si para cada $x, y \in X$ existe $h : X \to X$ homeomorfismo tal que $h(x) = y$.

Lema 3.10. [12, Teorema 2.67] *Sea X un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *X es un continuo de Peano.*

(b) *2^X es un continuo de Peano.*

(c) *$C(X)$ es un continuo de Peano.*

Los siguientes teoremas caracterizan la homogeneidad de 2^X y de $C(X)$ cuando X es un continuo.

Teorema 3.11. *Sea X un continuo. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) *2^X es homogéneo.*

(b) *X es un continuo de Peano.*

(c) *2^X es un cubo de Hilbert.*

Demostración. [(a)⇒(b)] Supongamos que 2^X es homogéneo. Como X es un continuo, por el Corolario 2.9, 2^X es un continuo. Además, por el Corolario 3.9, 2^X es localmente conexo en X. Como 2^X es homogéneo, para cada $A \in 2^X$ existe un homeomorfismo que envía X en A. Luego, 2^X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, es decir, 2^X es localmente conexo y, por ende, es un continuo de Peano. Luego, por el Lema 3.10, X es un continuo de Peano.

[(b)⇒(c)] Es consecuencia del Teorema de Curtis-Schori (véase [9, Teorema 11.3]).

[(c)⇒(a)] Por el Teorema 1.47, los cubos de Hilbert son homogéneos. ■

Definición 3.12. *Un triodo simple es la unión de tres arcos que únicamente se intersectan en un punto extremo v de dichos arcos, el cual es llamado el vértice del triodo.*

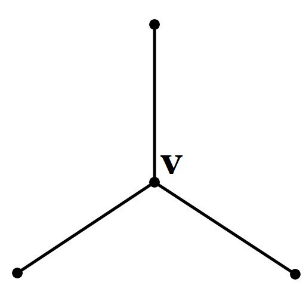


Figura 3.1: Triodo simple

Todo triodo simple es un continuo. En efecto, sea T es un triodo simple que es unión de los arcos A_1, A_2 y A_3 tal que la intersección de ellos es $\{v\}$.

Como la unión finita de compactos es compacto y $T = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, se tiene que T es compacto. Por otro lado, como A_1, A_2 y A_3 son conexos y $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{v\} \neq \emptyset$, se sigue que T es conexo.

En el siguiente lema, se demostrará que los únicos continuos de Peano que no contienen triodos simples son el arco y la curva cerrada simple.

Lema 3.13. *Si X es un continuo de Peano sin triodos simples, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. Supongamos que X no es un arco. Por [8, Teorema 6.2], X contiene una curva cerrada C. Si $X = C$, entonces X es una curva cerrada simple, así que supongamos que $X \neq C$. Sea $p \in X \setminus C$ y $a \in C$. Por ser X un continuo de Peano, se tiene que X es arco conexo (véase [14, Teorema 8.23]). Sea A un arco que une p y a, y sea $\alpha : [0,1] \to A$ un homeomorfismo sobre A tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = a$. Definamos $F = \{t \in [0,1] : \alpha(t) \in C\}$. Observemos que $F \neq \emptyset$ (ya que $1 \in F$) y que $F = \alpha^{-1}(A \cap C)$. Como $A \cap C$ es un cerrado de X y α es continua, se sigue que F es cerrado. Sean $t_0 = \min F$ y $q = \alpha(t_0)$. Observemos que $p \neq q$, ya que $p \notin C$ mientras que $q \in C$. Luego, $t_0 \neq 0$. Sea $A_1 = \alpha([0, t_0])$ el subarco de A que une p y q. Notemos que $A_1 \cap C = \{q\}$. Como C es una curva cerrada simple, existen arcos A_2 y A_3 tales que $A_2 \cap A_3 = \{q\}$. Luego, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un triodo simple contenido en X, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $X = C$, es decir, X es una curva cerrada simple. ■

Para el siguiente teorema, diremos que un arco A contenido en X es un arco libre si $A \setminus \{p, q\}$ es abierto de X, donde p y q son los puntos extremos de A.

Teorema 3.14. *Sea X un continuo. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) *$C(X)$ es homogéneo.*

(b) *X es un continuo de Peano sin arcos libres.*

(c) *$C(X)$ es un cubo de Hilbert.*

Demostración. [(a)⇒(b)] Supongamos que $C(X)$ es homogéneo. Como X es un continuo, por el Corolario 2.9, $C(X)$ es un continuo. Además, por el Corolario 3.9, $C(X)$ es localmente conexo en X. Como $C(X)$ es homogéneo, para cada $A \in C(X)$ existe un homeomorfismo que envía X en A. Luego, $C(X)$ es localmente conexo en cada uno de sus puntos, es decir, $C(X)$ es localmente conexo y, por ende, es un continuo de Peano. Luego, por el Lema 3.10, X es un continuo de Peano. Veamos ahora que X no tiene arcos libres. Supongamos que existe A un arco libre en X. Por el Lema 1.33, $C(A)$ es una 2-celda con interior no vacío. Sea $G \in \text{int}_{C(X)}(C(A))$. Entonces $C(A)$ es una vecindad de G en $C(X)$. Como $C(X)$ es homogéneo, se sigue que todo punto de $C(X)$ tiene una vecindad en $C(X)$ que es una 2-celda.

Afirmación: X no contiene un triodo simple. En efecto, si X contuviera un triodo simple, por [9, Ejemplo 5.4], $C(X)$ contendría una 3-celda. Luego, los puntos de la 3-celda no tendrían una vecindad en $C(X)$ que es una 2-celda, lo cual es una contradicción. Así, X no contiene un triodo simple.

Hemos probado que X es un continuo de Peano que no contiene triodos simples. Por el Lema 3.13, se sigue que X es un arco o una curva cerrada simple. En cualquier caso, los lemas 1.33 y 1.34 implican que $C(X)$ es una 2-celda. Así, $C(X)$ no es homogéneo. Esto es una contradicción, de la que se concluye que X no tiene arcos libres.

[(b)$\Rightarrow$(c)] Es consecuencia del Teorema de Curtis-Schori (véase [9, Teorema 11.3]).

[(c)$\Rightarrow$(a)] Por el Teorema 1.47, los cubos de Hilbert son homogéneos. ■

3.4. Grupos topológicos

En esta última sección, abordaremos el concepto de grupo topológico y concluiremos que el cubo de Hilbert no es un grupo topológico y por ende, 2^X y $C(X)$ tampoco lo son.

Definición 3.15. *Sea $(G, *)$ un grupo. Decimos que G es un **grupo topológico** si existe una topología τ que hace que la operación $* : G \times G \to G$ y la inversión $\xi : G \to G$ que envía cada elemento de G a su inverso, sean continuas.*

La siguiente proposición resume dos propiedades importantes de los grupos topológicos.

Proposición 3.16. *Sea $(G, *)$ un grupo topológico. Se cumplen:*

(a) *Dado $a \in G$, las funciones $\varphi_a, \psi_a : G \to G$ dadas por $\varphi_a(g) = g * a$ y $\psi_a(g) = a * g$, son homeomorfismos.*

(b) *G es un espacio topológico homogéneo.*

Demostración. (a) Observemos que $\varphi_a = * \restriction_{G\times\{a\}}$ y $\psi_a = * \restriction_{\{a\}\times G}$. Luego, φ_a y ψ_a son continuas. Por un argumento similar, $\varphi_{a^{-1}}$ y $\psi_{a^{-1}}$ son continuas. Finalmente, observemos que $\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a = 1_G$ y $\psi_a \circ \psi_{a^{-1}} = \psi_{a^{-1}} \circ \psi_a = 1_G$. Por lo tanto, φ_a y ψ_a son homeomorfismos.

(b) Sean $g_1, g_2 \in G$. Definamos $h : G \to G$ dada por $h(g) = g * g_1^{-1} * g_2$. Como $h = \varphi_{g_1^{-1} * g_2}$, por (a) se cumple que h es un homeomorfismo. Además, $h(g_1) = g_2$. Luego, se concluye que G es un espacio topológico homogéneo. ■

Definición 3.17. *Dados X un espacio topológico, $p \in X$ y $f : X \to X$, se dice que p es un **punto fijo** de f si $f(p) = p$. Diremos que X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua $h : X \to X$ tiene un punto fijo.*

Ejemplo 3.18. (1) *Cualquier n-celda tiene la propiedad del punto fijo. Este resultado se conoce como el Teorema del Punto Fijo de Brouwer (véase* [5]*).*

(2) *Un grupo topológico no trivial G no tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, sea $a \in G$ distinto del elemento neutro; entonces $\varphi_a : G \to G$ es una función continua tal que $\varphi_a(g) = g * a \neq g$ para todo $g \in G$.*

Recordemos que, dados A un subespacio de un espacio topológico X y $r : X \to A$, se dice que r es una retracción de X en A si r es continua y es tal que $r \restriction_A = 1_A$. Cuando existe una retracción de X en A, se dice que A es un retracto de X. Dado $\varepsilon > 0$, se dice que $r : X \to A$ es una ε-retracción si r es una retracción y para todo $z \in r(X)$ se cumple que $\operatorname{diam}(r^{-1}(z)) < \varepsilon$.

Lema 3.19. *Sea X un espacio métrico compacto.*

(1) *Si X tiene la propiedad del punto fijo, entonces cualquier retracto de X tiene la propiedad del punto fijo.*

(2) *Si para cada $n \in \mathbb{N}$ existen un subconjunto $X_n \subseteq X$ y una función continua $f_n : X \to X_n$ tales que X_n tiene la propiedad del punto fijo y f_n es una $\frac{1}{2^n}$-retracción, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. (1) Sean Z un retracto de X y $r : X \to Z$ una retracción de X en Z. Sea $f : Z \to Z$ continua. Como $f \circ r : X \to X$ es continua, entonces

$f \circ r$ tiene un punto fijo p en X. Dado que $(f \circ r)(p) = p$ y $(f \circ r)(X) \subseteq Z$, se tiene que $p \in Z$, con lo cual $r(p) = p$. Esto implica que $p = f(r(p)) = f(p)$. Así, hemos probado que Z tiene la propiedad del punto fijo.

(2) Sean $f : X \to X$ continua y $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $f_n \circ f \restriction_{X_n} : X_n \to X_n$ es continua. Luego, $f_n \circ f \restriction_{X_n}$ tiene un punto fijo, digamos, p_n. Ahora, como f_n es una $\frac{1}{2^n}$-retracción, se cumple que

$$d(f(p_n), p_n) = d(f(p_n), f_n(f(p_n))) \leq \operatorname{diam}[f_n^{-1}(f_n(f(p_n)))] < \frac{1}{2^n}.$$

Hemos probado que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $d(f(p_n), p_n) < \frac{1}{2^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ser X compacto, existe una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $p \in X$. Del hecho de que $d(f(p_n), p_n) < \frac{1}{2^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se concluye que $f(p) = p$. ■

Teorema 3.20. *Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ no son grupos topológicos.*

Demostración. Supongamos por contradicción que 2^X y $C(X)$ son grupos topológicos. Por la Proposición 3.16, 2^X y $C(X)$ son homogéneos. Por los teoremas 3.11 y 3.14, 2^X y $C(X)$ son cubos de Hilbert. Demostremos que un cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$I_n = \{(t_i)_{i=1}^{\infty} \in I^{\infty} : t_i = 0 \text{ para cada } i \geq n+1\}.$$

y sea $r_n : I^{\infty} \to I_n$ la retracción natural de I^{∞} en I_n dada por

$$r_n((t_i)_{i=1}^{\infty}) = (t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots)$$

para todo $(t_i)_{i=1}^{\infty} \in I^{\infty}$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, r_n es una $\frac{1}{2^n}$-retracción para I^{∞} respecto a la métrica d_{∞}. Notemos también que I_n es una n-celda, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, I_n tiene la propiedad del punto fijo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando (2) del Lema 3.19, se concluye que I^{∞} tiene la propiedad del punto fijo. Esto contradice (2) del Ejemplo 3.18. Así, 2^X y $C(X)$ no son grupos topológicos. ■

Referencias

[1] Barragán, Franco; Romero, Armando; Sánchez, Salvador; Grijalva, Víctor, *Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, Capítulo 3 en *Topología y sus aplicaciones 3* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[2] Chaves, Levent Arturo, *Estudio del n-ésimo hiperespacio de un continuo*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 2 de febrero de 2018.

[3] Córdova, Vianey, *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 26 de agosto de 2011.

[4] Escobedo, Raúl; López, María de Jesús; Serapio, Iván, *Una breve introducción a los hiperespacios de conjuntos*, Capítulo 8 en *Topología y sus aplicaciones 3* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[5] García, Daniel, *Teoremas del punto fijo y aplicaciones*, trabajo final de grado de matemáticas, Facultat de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, presentado el 19 de enero de 2020.

[6] Grijalva, Víctor, *Métrica de Hausdorff*, tesis de licenciatura en matemáticas aplicadas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, presentada en diciembre de 2013.

[7] Hernández, Fernando, *Teoría de Conjuntos. Una introducción* (3a ed.), Sociedad Matemática Mexicana, México, 2011.

[8] Herrera, David; Libreros, Antonio de Jesús; Macías, Fernando, *El arco y la curva cerrada simple, únicos continuos localmente conexos sin triodos simples*, Capítulo 6 en *Matemáticas y sus aplicaciones 12* (Editores: Herrera, H., Macías, M.) Colección Manuales y textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2019.

[9] Illanes, Alejandro; Nadler, Sam B. Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recents Advances*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[10] Iribarren, Ignacio, *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, 2008.

[11] Macías, Sergio, *Topics on Continua* (2da ed.). Ciudad de México: Springer, 2018.

[12] Márquez, Nancy, *Introducción a los continuos de Peano*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada en julio de 2017.

[13] Maya, David; van Mill, Jan, *Continuos homogéneos*, Capítulo 10 en *Topología y sus aplicaciones 4* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016.

[14] Nadler, Sam B. Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

[15] Nadler, Sam B. Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math, Vol.49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[16] Salicrup, Graciela, *Introducción a la topología*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1997.

[17] Willard, Stephen, *General Topology*, Addison-Wesley Series in Mathematics, USA, 1968.

Índice alfabético