J-MATH
Journal of Mathematics Theory and Applications
Vol. 1, No. 1, Oktober 2022, pp. 1 – 8

Kajian Intgeral Henstock

Nugraha K. F. Dethan[1]
[1]Program Studi Matematika, Universitas Timor
Email: nugrahadethan@unimor.ac.id

ABSTRACT

A study of the properties of Henstock integral has been carried out. Henstock integral is an extension of Riemann integral. This is because the Henstock integral is built on the concept of Riemann integral, using the Riemann sum over the partition on the domain interval of a function. The difference lies in controlling the partition. On Riemann integral the control of a partition is roled by a constant positive number, whereas on Henstock integral the control of a partition is roled by possitive function. In this final project, we will learn how to construct the Henstock integral based on the concept of the Riemann integral, the properties of Henstock integral with its example and its relationship with the Riemann integral. The result of the study shows that every function that Riemann integrable is Henstock integrable, but it does not necessarily apply conversely.

Keyword: Henstock Integral, Riemann Integral, Riemann Sum.

ABSTRAK

Suatu kajian telah dilakukan terhadap sifat-siat integral Henstock. Integral Henstock merupakan perluasan dari integral Riemann. Hal ini dikarenakan integral Henstock dibangun berdasarkan konsep integral Riemann, yaitu dengan menggunakan jumlah Riemann atas partisi pada domain interval dari suatu fungsi. Perbedaannya terletak pada pengontrolan partisi. Pada integral Riemann pengontrolan partisi diperankan oleh suatu bilangan konstan positif, sedangkan pada integral Henstock pengontrolan partisi diperankan oleh suatu fungsi positif. Pada tugas akhir ini dikaji bagaimana membangun Integral Henstock berdasarkan konsep-konsep dari integral Riemann, sifat-sifat integral Henstock beserta contoh-contoh fungsi terintegral Henstock, serta keterkaitan antara integral Henstock dengan Integral Riemann. Hasil kajian menunjukan bahwa setiap fungsi yang terintegral Riemann pasti terintegral Henstock, akan tetapi sebaliknya belum tentu berlaku.

Kata Kunci: Integral Henstock, Integral Riemann, Jumlah Riemann

---

PENDAHULUAN

Salah satu konsep kalkulus yang dibahas lebih mendalam pada analisis riil adalah teori integral yang banyak digunakan baik pada bidang matematika sendiri maupun pada bidang-bidang lain. Pada akhir abad ke-17, dasar teori integral dikemukakan oleh Newton dan Leibniz secara terpisah. Mereka mendefinisikan integral kemudian menghubungkannya dengan derivatif melalui teorema dasar kalkulus (Bartle & Sherbert, 2011). Kemudian, pada tahun 1850 matematikawan asal Jerman Bernhard Riemann memberikan definisi integral yang lebih konstruktif. Setelah itu, teori integral mengalami perkembangan pesat. Hal ini ditunjukan dengan banyaknya penelitian-penelitian tentang teori integral, diantaranya, pendekatan integral yang diperkenalkan oleh Henry Lebesgue pada tahun 1902 yang saat ini dikenal dengan integral Lebesgue.

Seiring berjalannya teori integral, teori integral Riemann tidak sepenuhnya memuaskan. Diketahui bahwa integral Riemann tidak cukup untuk menyelesaikan permasalahan yang muncul terkait konsep integral tentu. Hal ini disebabkan integral Riemann hanya mampu menjelaskan keintegralan pada fungsi terbatas. Sedangkan untuk fungsi yang tidak terbatas dan juga mungkin memiliki titik-titik singular, tidak dapat dijelaskan keintegralannya oleh integral Riemann. Selain itu, ditemukan pula bahwa tidak semua fungsi terbatas teintegral Riemann. Integral Riemann menggunakan jumlah Riemann sebagai pendekatan nilai integralnya dengan mengharuskan lebar partisi kurang dari suatu konstanta δ>0. Salah satu fungsi yang tidak terintegral Riemann adalah fungsi Dirichlet yang didefinisikan dengan $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \text{irasional} \\ 0, & x \in \text{irrasional} \end{cases}$.

Kemudian pada tahun 1955, matematikawan Inggris Ralph Henstock dan matematikawan Rep. Ceko Jaroslav Kurzweil secara terpisah mengembangkan teori integral yang disebut integral Henstock-Kurzweil (Parmar, 2015). Integral Henstock-Kurzweil merupakan perluasan dari integral Riemann yaitu dengan menggunakan δ yang berubah-ubah, namun memberikan dampak yang besar dan menjawab kekurangan pada integral Riemann (Heikkilä, 2011). Integral Henstock-Kurzweil mempunyai beberapa nama lain, diantaranya integral Gauge, integral Henstock. Untuk mempermudah penulisan, selanjutnya integral Henstock-Kurzweil cukup ditulis dengan integral Henstock. Dengan pendefinisian integral Henstock, dapat ditunjukkan bahwa fungsi Dirichlet terintegral Henstock. Selain itu, ditemukan pula hubungan bahwa fungsi yang terintegral Riemann pasti terintegral Henstock dengan nilai integral yang sama, tetapi fungsi yang terintegral Henstock belum tentu terintegral Riemann.

Seperti disebutkan di atas, integral Henstock adalah pengembangan dari integral Riemann atau biasa disebut dengan perluasan integral Riemann. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk meneliti lebih lanjut mengenai bagaimana pendefinisian integral Henstock dan sifat-sifat apa saja dari integral Riemann yang dapat diwariskan ke integral Henstock. Kajian-kajian mengenai teori integral difokuskan pada bagaimana pendefinisian integral tersebut, sifat-sifat yang berlaku, dan perluasan dari definisi yang telah dirumuskan.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu menghimpun beberapa sumber referensi dan dibuat suatu kajian khusus mengenai sifat-sifat integral Henstock dan teorema fundamental kalkulus untuk integral Henstock. Sumber kajian dan penulisan diperoleh dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal ilmiah, dan artikel web lainnya. Kajian ini merupakan penelitian yang bersifat murni atau penelitian dasar.

Adapun langkah-langkah kajian adalah sebagai berikut: memaparkan definisi partisi, definisi gauge, integral Riemann serta konsep-konsep matematika lainnya yang menunjang kajian sifat-sifat integral Henstock, kemudian mendefinisikan dan membuktikan teorema-teorema mengenai sifat-sifat integral Henstock berdasarkan definisi dan sifat-sifat utama integral Henstock dan membandingkan sifat-sifat antara integral Henstock dan integral Riemann.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Partisi, *gauge* dan Partisi *δ-fine*

Definisi 1.1 Sebuah partisi pada interval [*a*,*b*] adalah koleksi $P = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$ di mana $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Sebuah partisi mempunyai sifat berikut:

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] = [a,b]$, dan

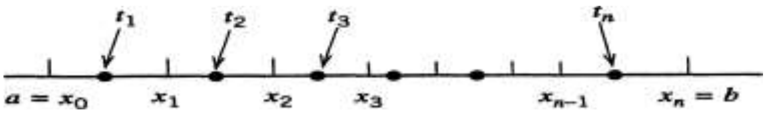
(ii) $[x_{i-1}, x_i] \cap [x_i, x_{i+1}] = x_i$.

Titik x_i; (i=0,1,2,...,n) disebut titik partisi *P*. Kemudian, jika sebuah titik $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dipilih dari tiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ untuk i = 1,2,...,n maka t_i disebut tanda dari subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ dan himpunan pasangan terurut $\dot{P} = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ disebut partisi bertanda (*tagged partition*). Untuk mempermudah penulisan atau dalam situasi tertentu, terkadang suatu partisi bertanda $\dot{P}$ sebaiknya ditulis $\dot{P} = \{[u, v], t\}$ dimana $[u, v]$ menyatakan suatu tipe selang di $\dot{P}$ katakan $[x_{i-1}, x_i]$ yang memuat t.

Dalam memilih tiap tanda t_i, dapat dipilih sebarang titik pada $[x_{i-1}, x_i]$, t_i dapat dipilih sebagai titik awal, titik tengah, titik akhir, atau sebarang titik pada $[x_{i-1}, x_i]$. Sebuah partisi *P* biasa dinotasikan dengan $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$. Kemudian didefinisikan *norm* dari partisi *P* yaitu bilangan yang memenuhi

$$\|P\| = maks\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1})\}$$

dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.



Gambar 1.1 Suatu partisi bertanda pada $[a,b]$

Kemudian, jika $\dot{P}$ adalah sebarang partisi bertanda, maka didefinisikan Jumlah Riemann fungsi f yang bersesuaian dengan partisi $\dot{P}$, dinotasikan $S(f;\dot{P})$ dengan

$$S(f,\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definisi 1.2 Misalkan $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Fungsi $\delta: [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan fungsi positif apabila $\delta(t) > 0$ untuk setiap $t \in [a,b]$.

Definisi 1.3 (Bartle, 2001) Diberikan fungsi positif $\delta: [a,b] \to \mathbb{R}$. Suatu partisi bertanda $\dot{P}$ dikatakan δ-*fine* apabila $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$.
Sebuah fungsi positif δ pada $[a,b]$ memberikan $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$ untuk setiap $t \in [a,b]$. Perhatikan bahwa tiap partisi $\dot{P}$ yang δ-*fine* termuat dalam interval $[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Contoh 1.4 (a) Jika $\delta > 0$ adalah suatu bilangan konstan, dapat didefinisikan fungsi positif $\delta: [a,b] \to \mathbb{R}$ dengan $\delta(t) = \delta$ untuk setiap $t \in [a,b]$.

(b) Didefinisikan fungsi positif δ pada [0,1] dengan

$$\delta(t) = \begin{cases} t & untuk\ 0 < t \leq 1, \\ 1/2 & untuk\ t = 0. \end{cases}$$

Maka partisi $\dot{P} = \left\{\left(\left[0,\frac{1}{3}\right],0\right),\left(\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right],\frac{1}{2}\right),\left(\left[\frac{1}{2},1\right],1\right)\right\}$ adalah partisi yang δ-*fine* pada [0,1], sebab $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ untuk setiap i.

(c) Misalkan $a < c < b$ dan $\delta: [a,b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi positif. Jika $\dot{P}_1$ partisi pada $[a,c]$ yang δ-*fine* dan $\dot{P}_2$ partisi pada $[c,b]$ yang δ-*fine*, maka $\dot{P}_1 \cup \dot{P}_2$ adalah partisi δ-*fine* pada $[a,b]$.
Berikut adalah teorema mengenai hubungan antara partisi $\dot{P}$ yang δ-*fine* dengan titik tanda dan fungsi positif.

Teorema 1.5 Jika $\dot{P}$ adalah partisi pada $[a,b]$ yang δ-*fine* dan $x \in [a,b]$, maka ada tanda t_i pada $\dot{P}$ sehingga $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$.

2. Integral Riemann

Sebagai integral yang pertama kali didefinisikan secara konstruktif, integral Riemann layak dijadikan pembanding. Berikut ini definisi integral Riemann.

Definisi 2.1 (Bartle & Sherbert, 2011) Fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Rieman pada $[a,b]$ jika dan hanya jika ada bilangan $L \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $\dot{P}$ adalah sebarang partisi bertanda pada $[a,b]$ dengan $\|\dot{P}\| < \delta$ maka berlaku $|S(f;\dot{P}) - L| < \varepsilon$.
Koleksi semua fungsi yang terintegral Riemann pada $[a,b]$ dinotasikan dengan $R[a,b]$. Jika fungsi f pada $[a,b]$ terintegral Riemann dengan nilai L, maka L dikatakan limit dari jumlah Riemann $S(f;\dot{P})$ dengan $\|\dot{P}\| \to 0$. Kemudian jika fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan mempunyai nilai integral L, dinotasikan dengan

$$L = \int_a^b f \quad atau \;\; L = \int_a^b f(x)dx$$

Contoh 2.2 Setiap fungsi konstan pada $[a,b]$ termuat dalam $R[a,b]$.
Misalkan $f(x) = k$, $\forall\, x \in [a,b]$. Jika $\dot{P} = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah sebarang partisi bertanda pada $[a,b]$, maka $S(f; \dot{P}) = k\,(b-a)$. Kemudian, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat dipilih $\delta = 1$ sehingga jika $\|\dot{P}\| < \delta$ maka berlaku $|\, S(f;P) - k\,(b-a)\,| = 0 < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $f \in R[a,b]$ dan $\int_a^b f = k\,(b-a)$.

Teorema 2.3 Jika $f \in R[a,b]$, maka nilai integralnya tunggal.

Teorema 2.4 Jika fungsi f dan g termuat dalam $R[a,b]$, maka
(a) Jika $k \in \mathbb{R}$ sebarang, maka fungsi $kf \in R[a,b]$, dan

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f$$

(b) Fungsi $(f+g) \in R[a,b]$ dan

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

(c) Jika $f(x) \le g(x)$, untuk setiap $x \in [a,b]$, maka

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Berikut ini akan disajikan kriteria Cauchy yang menyatakan bahwa jika ada dua partisi dari fungsi f di $[a,b]$ yang normnya kurang dari sebuah bilangan $\delta > 0$ dan nilai mutlak selisihnya kurang dari suatu bilangan $\varepsilon > 0$, maka $f \in R[a,b]$.

Teorema 2.5 (Kriteria Cauchy) *F*ungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral Riemann jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\eta_\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga apabila $\dot{P}$ dan $\dot{Q}$ adalah partisi bertanda pada $[a,b]$ dengan $\|\dot{P}\| < \eta_\varepsilon$ dan $\|\dot{Q}\| < \eta_\varepsilon$, maka berlaku

$$|\, S(f; \dot{P}) - S(f; \dot{Q})\,| < \varepsilon.$$

Kriteria Cauchy dapat digunakan untuk menunjukan suatu fungsi tidak terintegral Riemann, harus ditujukan negasi dari kriteria Cauchy, yaitu : terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\eta_\varepsilon > 0$ ada partisi bertanda $\dot{P}$ dan $\dot{Q}$ pada $[a,b]$ dengan $\|\dot{P}\| < \eta_\varepsilon$ dan $\|\dot{Q}\| < \eta_\varepsilon$ sehingga berlaku

$$|\, S(f; \dot{P}) - S(f; \dot{Q})\,| \ge \varepsilon_0.$$

Contoh 2.6 Misalkan fungsi Dirichlet yang didefinisikan $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan aturan $f(x) = 1$, untuk x rasional dan $f(x) = 0$, untuk x irrasional.
Ambil $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Untuk setiap $\delta > 0$ misalkan $\dot{P}$ dan $\dot{Q}$ partisi bertanda pada $[0,1]$ dengan $\|\dot{P}\| < \delta$ dan $\|\dot{Q}\| < \delta$. Jika $\dot{P}$ partisi dengan tanda pada bilangan rasional, maka $S(f,\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = b - a = 1$ dan jika $\dot{Q}$ partisi dengan tanda bilangan irrasional, maka $S(f,\dot{Q}) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0$. Akibatnya $|S(f,\dot{P}) - S(f,\dot{Q})| = |1-0| = 1 > \varepsilon_0$. Artinya, $f \notin R[0,1]$.

3. Integral Henstock

Definisi 3.1 (Ostaszewski & Sochacki, 1987) Suatu fungsi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Henstock ke A ∈ ℝ pada interval [*a*,*b*] jika untuk setiap bilangan ε > 0 terdapat fungsi positif δ:[*a*,*b*] → ℝ sedemikian sehingga jika $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi bertanda yang memenuhi $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (t_i - \delta(t_i), t_i - \delta(t_i))$ untuk *i* = 1,2,..., *n* maka berlaku

$$\left|S(f, \dot{P}) - A\right| < \varepsilon.$$

Koleksi dari semua fungsi yang terintegral Henstock pada [*a*,*b*] dinotasikan dengan $R^*[a,b]$, kemudian A disebut nilai integral Henstock fungsi f pada interval [*a*,*b*], dinotasikan dengan

$$A = (H)\int_a^b f \quad atau \quad A = (H)\int_a^b f(x)\, dx.$$

Definisi di atas berbeda dengan definisi pada integral Riemann dalam dua hal. Pertama, δ > 0 bukan lagi konstan melainkan fungsi positif. Kedua, dalam pengambilan partisi, terlebih dahulu ditentukan tanda $t_1, t_2, \dots, t_n$ baru kemudian ditentukan titik partisi $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$. Hal ini berbeda dengan integral Riemann yang terlebih dahulu metentukan titik partisi $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, kemudian $t_1, t_2, \dots, t_n$ ditentukan sebarang dalam masing-masing subinterval.
Partisi $\dot{P}$ pada Definisi 4.1.1, memenuhi syarat partisi δ-*fine* pada [*a*,*b*]. Dengan demikian Definisi 4.1.1 dapat ditulis sebagai berikut.

Definisi 3.2 Suatu fungsi f: [*a*,*b*] → ℝ dikatakan terintegral Henstock ke A∈ℝ pada [*a*,*b*] jika untuk setiap ε > 0 terdapat fungsi positif δ:[*a*,*b*]→ℝ sedemikian sehingga jika $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi yang δ-fine pada [*a*,b] maka berlaku

$$\left|S(f, \dot{P}) - A\right| < \varepsilon.$$

Teorema 3.3 (Teorema Ketunggalan) jika $f \in R^*[a,b]$, maka nilai integralnya tunggal .
Bukti: Diambil sebarang ε > 0. Misalkan f terintegral Henstock ke A dan B, maka terdapat fungsi positif $\delta_1: [a,b] \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}_1$ partisi yang δ_1-*fine* pada [*a*,*b*] maka berlaku

$$\left|S(f, \dot{P}_1) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Juga terdapat fungsi positif $\delta_2: [a,b] \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}_2$ partisi yang δ_2-*fine* pada [*a*,*b*] maka berlaku

$$\left|S(f, \dot{P}_2) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih fungsi positif δ dengan $\delta(t) = \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$ untuk t∈[*a*,*b*]. Artinya δ adalah fungsi positif pada [*a*,*b*] sehingga jika $\dot{P}$ partisi yang δ-*fine* pada [*a*,*b*] maka diperoleh

$$\begin{aligned} |A - B| &= \left|A - S(f, \dot{P}) + S(f, \dot{P}) - B\right| \\ &\leq \left|A - S(f, \dot{P})\right| + \left|S(f, \dot{P}) - B\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena ε > 0 sebarang, maka A = B.

Contoh 3.4: (a) Dari Definisi 4.1.1 terlihat bahwa integral Riemann merupakan kasus khusus dari integral Henstock, yaitu apabila fungsi positif $\delta: [a,b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi konstan positif. Berikut ini diberikan salah satu contohnya Misalkan fungsi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan aturan $f(x) = x$ untuk $x \in [0,1]$. Tunjukkan $f \in R^*[a,b]$.

Bukti: Diambil sebarang ε > 0. Didefinisikan fungsi positif $\delta: [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $\delta(t) = \delta_n$ untuk setiap $t \in [0,1]$. Diambil partisi $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ yang δ-*fine* pada [*a*,*b*] dengan $t_i = x_i$ dan panjang subinterval sama panjang yaitu $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$. Maka diperoleh jumlah Riemann

$$\begin{aligned} S(f,\dot{P}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(^{i}/_{n}) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}. \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$(H)\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} S(f,\dot{P}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

Akibatnya

$$\left|S(f,\dot{P}) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n}.$$

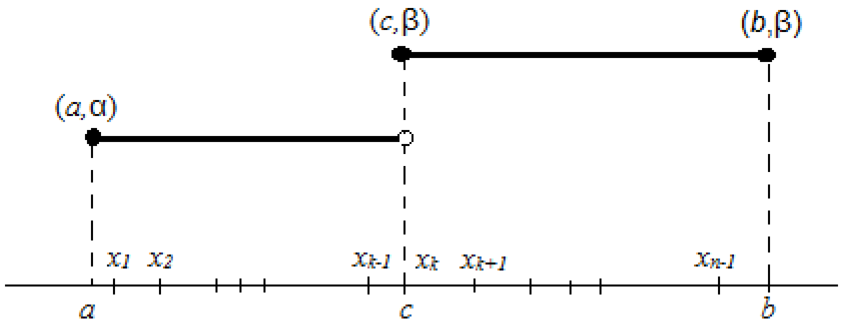
Jadi, untuk ε > 0 di atas pilih $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. untuk itu berlaku

$$\left|S(f,\dot{P}) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

(b) misalkan [*a*,*b*] adalah suatu interval, dan c ∈ (*a*,*b*) dan α,β ∈ ℝ dengan α ≠ β. Misalkan fungsi f: [*a*,*b*] → ℝ didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\ ; & a \le x < c \\ \beta\ ; & c \le x \le b, \end{cases}$$

akan ditunjukan bahwa $f \in R^*[a,b]$, dan $(H)\int_a^b f = \alpha(c-a) + \beta(b-c)$.



Gambar 3.4

Ambil sebarang ε > 0. Perhatikan bahwa f kontinu kecuali di titik *x* = *c*, untuk itu lebih baik bila mengharuskan *c* sebagai tanda dari dua subinterval yang bersebelahan dengan lebar < δ. Didefinisikan fungsi positif δ pada [*a*,*b*] dengan

$$\delta(t) = \begin{cases} ^{1}/_{2}\,|t-c| & ; \ t \ne c \\ \delta & ; \ t = c \end{cases}$$

Misalkan $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ partisi yang δ-*fine* pada [*a,b*], pendefinisian fungsi positif δ di atas mengharuskan *c* menjadi tanda dari subinterval partisi $\dot{P}$ yang memuat *c.* Asumsikan *c* adalah tanda dari dua subinterval yang bersebelahan $[x_{k-1}, x_k]$ dan $[x_k, x_{k+1}]$ dengan x_k= c. Karena $f(t_i)$ = α untuk *i* = 1, . . ., *k*-1, maka jumlah sampai *k-1* dalam $S(f, \dot{P})$ adalah $\alpha(x_{k-1} - a)$, kemudian karena $f(t_i)$ = β untuk *i* = *k,...,n*, maka sisa dari jumlahan pada $S(f, \dot{P})$ adalah $\beta(b - x_{k-1})$ sehingga diperoleh

$$S(f, \dot{P}) = \alpha(x_{k-1} - a) + \beta(b - x_{k-1})$$

Tetapi, oleh karena $x_{k-1} - a = (c - a) - (c - x_{k-1})$ dan $b - x_{k-1} = (b - c) + (c - x_{k-1})$, maka diperoleh

$$S(f, \dot{P}) = \alpha(c - a) + \beta(b - c) + (\beta - \alpha)(c - x_{k-1}).$$

Karena $\dot{P}$ δ-*fine,* maka *c* - δ ≤ x_{k-1}< *c* jadi 0 < *c* - x_{k-1} ≤ δ, untuk itu

$$\left|S(f, \dot{P}) - [\alpha(c - a) + \beta(b - c)]\right| \le |\beta - \alpha|(c - x_{k-1}) < |\beta - \alpha|\delta.$$

Karena itu kita pilih δ(*c*) = $\varepsilon / |\beta - \alpha|$ pada pendefinisian δ di atas. Karena ε > 0 sebarang, maka $f \in R^*[a, b]$ dan

$$(H)\int_a^b f = \alpha(c - a) + \beta(b - c).$$

Teorema 3.5 (Teorema Konsistensi) (Bartle, 2001) Jika *f* ∈ *R*[*a,b*] dengan nilai integral A, maka $f \in R^*[a, b]$ dengan nilai integral A.
Bukti: Diambil sebarang ε > 0. Misalkan *f* ∈ *R*[*a,b*] dengan nilai integral A, maka ada δ > 0 sedemikian sehingga jika $\dot{P}$ partisi bertanda pada [*a,b*] dengan $\|\dot{P}\| < \delta$ berlaku

$$\left|S(f, \dot{P}) - A\right| < \varepsilon.$$

Kemudian didefinisikan $\delta^*(t) = \frac{1}{4}\delta$ untuk *t* ∈ [*a,b*], jadi δ^* adalah fungsi positif pada [*a,b*].
Jika $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi yang δ^*-*fine*, maka

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta^*(t_i), t_i + \delta^*(t_i)] = [t_i - \frac{1}{4}\delta, t_i + \frac{1}{4}\delta]$$

Karena $[x_{i-1}, x_i]$ termuat dalam $[t_i - \frac{1}{4}\delta, t_i + \frac{1}{4}\delta]$, akibatnya panjang selang dari $[x_{i-1}, x_i]$ kurang dari atau sama dengan panjang selang dari $[t_i - \frac{1}{4}\delta, t_i + \frac{1}{4}\delta]$, dengan kata lain

$$0 < x_i - x_{i-1} < \frac{1}{2}\delta < \delta \ \ untuk\ semua\ i = 1,2,..,n.$$

Untuk itu partisi $\dot{P}$ juga memenuhi $\|\dot{P}\| < \delta$ sehingga berlaku $\left|S(f, \dot{P}) - A\right| < \varepsilon$. Akibatnya partisi $\dot{P}$ yang δ^*-*fine* juga memenuhi $\left|S(f, \dot{P}) - A\right| < \varepsilon$. Karena ε > 0 sebarang, maka $f \in R^*[a, b]$ dengan nilai integral A.

Konvers dari Teorema di atas (Teorema 4.1.4) tidak berlaku. Artinya ada fungsi yang terintegral Henstock tetapi tidak terintegral Riemann pada interval [*a,b*]. Berikut ini diberikan contoh penyangkalnya.

Contoh 3.6 Fungsi Dirichlet (Contoh 2.6) yang didefinisikan f: [0,1] →ℝ dengan aturan $f(x) = 1$, untuk x rasional dan $f(x) = 0$, untuk x irrasional. Telah ditunjukan pada Contoh 2.4 bahwa $f \notin R$ [0,1]. Dalam contoh ini akan dibuktikan bahwa $f \in R^*[0,1]$ ke 0.
Bukti: Didefinisikan fungsi positif (gauge) δ: [0,1] → ℝ dengan

$$\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}} & ; untuk\ t\ rasional \\ 1 & ;\ untuk\ t\ irrasional \end{cases}$$

Ambil partisi $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ yang δ-*fine* pada [0,1]. Karena $\dot{P}$ partisi δ-*fine*, maka berlaku $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta(t_i)$ untuk semua i = 1,...,n, Sehingga

$$|\,S(f, \dot{P}) - 0| \leq \Big|\sum_{(t_i \text{ rasional})} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\Big| + \Big|\sum_{(t_i \text{ irrasional})} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{\infty} 2\delta(t_i)$$

$$< \sum_{i=1}^{\infty} 2\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon$$

Karena ε > 0 sebarang, maka $f \in R^*[0,1]$ dan $(H)\int_0^1 f = 0$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pada pembahasan bab-bab sebelumnya maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Integral Henstock didefinisikan dengan menggunakan fungsi positif, yaitu fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Henstock ke A ∊ ℝ jika untuk setiap bilangan ε > 0 terdapat fungsi positif (gauge) pada [a,b] sedemikian sehingga jika $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^{n}$ partisi yang δ-*fine* pada [a,b] maka berlaku
$$\big|S(f, \dot{P}) - A\big| < \varepsilon.$$
2. Kelas fungsi terintegral Henstock lebih besar dari dan memuat kelas fungsi terintegral Riemann.
3. Sifat-sifat yang ada di integral Riemann, dapat diwariskan kembali ke integral Henstock.

Saran: Dalam tulisan ini, telah dibahas pendefinisian dan sifat-sifat utama Integral Henstock. Oleh karena itu, perlu adanya pembahasan mengenai kekonvergenan integral Henstock.

REFERENCES

Bartle, R. G. (2001). *A Modern Theory of Integration* (1st ed., Vol. 32). American Mathematical Society.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). John Wiley & Sons.

Heikkilä, S. (2011). Differential and integral equations with Henstock–Kurzweil integrable functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *379*(1), 171–179. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.12.050

Ostaszewski, K., & Sochacki, J. (1987). Cronwall's inequality and the Henstock integral. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *128*(2), 370–374. https://doi.org/10.1016/0022-247X(87)90189-2

Parmar, K. (2015). Study of Henstock-Kurzweil integrals. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, *19*(2), 130–135. https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V19P517