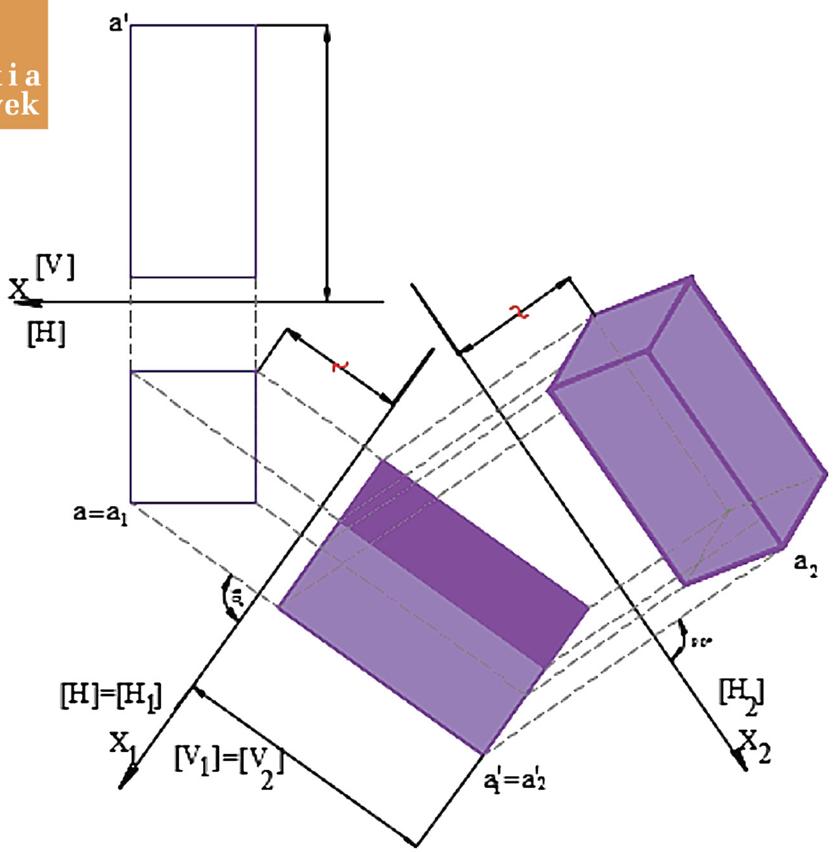
sapientia
tankönyvek



Popa-Müller Izolda

Ábrázoló geometria

Scientia Kiadó

Popa-Müller Izolda

Ábrázoló geometria

Popa-Müller Izolda

Ábrázoló geometria

Scientia Kiadó
Kolozsvár ▪ 2022

sapientia tankönyvek

műszaki tudományok

Megvalósult a Magyar Kormány támogatásával

Miniszterelnökség Nemzetpolitikai Államtitkárság

Bethlen Gábor Alap

Kiadja a
Scientia Kiadó
400112 Kolozsvár, Mátyás király (Matei Corvin) u. 4.
Tel./fax: +40-364-401454, e-mail: scientia@kpi.sapientia.ro
www.scientiakiado.ro

Felelős kiadó:
Sorbán Angella

Lektor:
Óváriné Balajti Zsuzsanna (Miskolc)

Borítóterv:
Tipotéka Kft.

Kiadói koordinátor:
Szabó Beáta

A szakmai felelősséget teljes mértékben a szerző vállalja.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
POPA-MÜLLER, IZOLDA
Ábrázoló geometria / Popa-Müller Izolda. - Cluj-Napoca : Scientia, 2022
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-975-071-1

51

Tartalomjegyzék

Contents

Cuprins

ELŐSZÓ

Jelen könyv a mérnök szakos alapképzésen részt vevő hallgatóknak készült azzal a céllal, hogy a feldolgozott témakörökkel segítséget nyújtson az ábrázoló geometria tantárgy könnyebb megértéséhez. Az ábrázoló geometria elsajátítása során a mérnöki munkához elengedhetetlenül szükséges alapgeometriai ismereteket a tantárgy tovább gyarapítja.

A műszaki rajz egyik fontos pilléreként az ábrázoló geometria segítséget biztosít a térbeli kapcsolatok közvetlen vizualizálásában, ugyanakkor az egyik legfontosabb és ezzel együtt elengedhetetlen eszköz a mérnöki tudományok közvetítésében.

A mérnökök számára nélkülözhetetlen a térbeli alakzatok belső látásának készsége, melyhez ez a tantárgy megfelelő módon segítséget nyújt, fejlesztve a térszemléletet, a térben való gondolkodást és nem utolsósorban a mérnöki kreativitást is.

A párhuzamos vetítés egyedi esete, az ortogonális ábrázolás kerül alkalmazásra a Monge-féle ábrázolás során, melynek megalkotója, Gaspard Monge tette le a műszaki rajz matematikai alapjait.

Gaspard Monge megfogalmazása szerint „Az ábrázoló geometriának két célja van: az első, hogy a rajzon olyan ábrázolási módszereket hozzon létre, amelyeknek csak két mérete van, nevezetesen a hosszúság és a szélesség, illetve az alakzat, amelynek három dimenziója van, a hosszúság, szélesség és mélység, feltéve azonban, hogy ezen alakzatok szigorúan meghatározhatók legyenek. A második cél az, hogy olyan eszközöket biztosítson, amelyek ennek megfelelően felismerhetővé tegyék az alakzatok formáinak pontos leírását, ezáltal bemutatva azt a realitást, amely formájából és helyzetéből adódik."

A tananyag elsajátítása érdekében a hallgatónak szükséges ismernie a háromdimenziós alakzatok kétdimenziós ábrázolását, illetve a kétdimenziós vetületekből az alakzatok háromdimenziós térbe történő visszaállítását, a pontok, az egyenesek, a síkok ábrázolását, illetve két vagy három képsíkon egyenesek és síkok relatív helyzeteit, amellett az ábrázoló geometriai megoldások típusait, meghatározva az egyenesek közti szögeket, új képsíkon történő ábrázolást, alakzatok valódi nagyságának meghatározását, felhasználva a transzformálás, forgatás, illetve képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatás módszerét, geometriai testek metszetét és a palástjuk kiterítését.

A tananyag megértése érdekében nélkülözhetetlen az akarat, a szorgalom és a rendszeres tanulás, amelyeknek köszönhetően a tananyag megértése nem okoz problémát.

Sok sikert kívánok a tananyag elsajátításában!

Marosvásárhely, 2022. május 3.

Dr. Popa-Müller Izolda

Jelölések

– **Képsíkok jelölése:**
- vízszintes: [H]
- függőleges: [V]
- oldalsík: [W]

– **Triéderek jelölése:**
- ha X pozitív értékű: I_1, II_1, III_1, IV_1
- ha X negatív értékű: I_2, II_2, III_2, IV_2

– **Pontok** vetületének jelölése a képsíkokon latin kisbetűvel:
- vízszintes képsíkon: pl. a, b, c, …
- függőleges képsíkon: pl. a', b', c', …
- oldalsíkon: pl. a", b", c", …

– **Egyenesek vetületének a** helyzetét a képsíkokon latin kisbetűkkel és arab számokkal jelöljük:
- vízszintes képsíkon: pl. d_1, d_2, d_3, …
- függőleges képsíkon: pl. d_1', d_2', d_3', …
- oldalsíkon: pl. d_1'', d_2'', d_3'', …

– **Egyenesek nyompontjai:**
– vízszintes nyompontja és ennek vetületei triéderben: H (h, h', h'')
– függőleges nyompontja és ennek vetületei triéderben: V (v, v', v'')
– oldal nyompontja és ennek vetületei triéderben: W (w, w', w'')

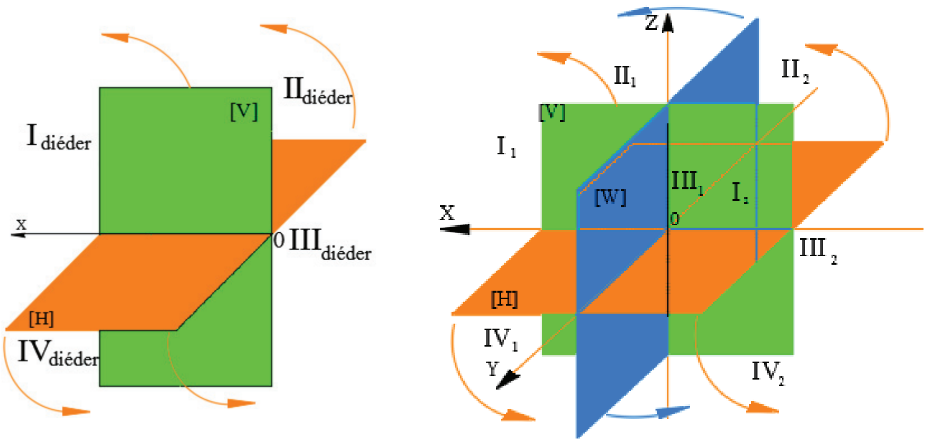
– **A síkokat** és vetületük helyzetét a képsíkokon latin nagybetűkkel jelöljük:
- vízszintes síkban: pl. P, Q, R, …
- függőleges síkban: pl. P', Q', R', …
- oldalsíkban: pl. P", Q", R", …

Szögfelezősíkok: [Sz_1], [Sz_2]
Horizontális sík (felülnézet): [H_f]
Függőleges sík (elölnézet): [V_e]

1. Térelemek ábrázolása merőleges vetületeken (Monge-féle ábrázolás)

1.1. A képsíkrendszerek

Gaspard Monge (1746–1818) az ábrázoló geometria atyjaként ismert. A tér elemeinek mérethű ábrázolására egymásra merőleges képsíkokat használt.



1.1. ábra. *A Monge-féle képsíkrendszerek diédere és triédere*

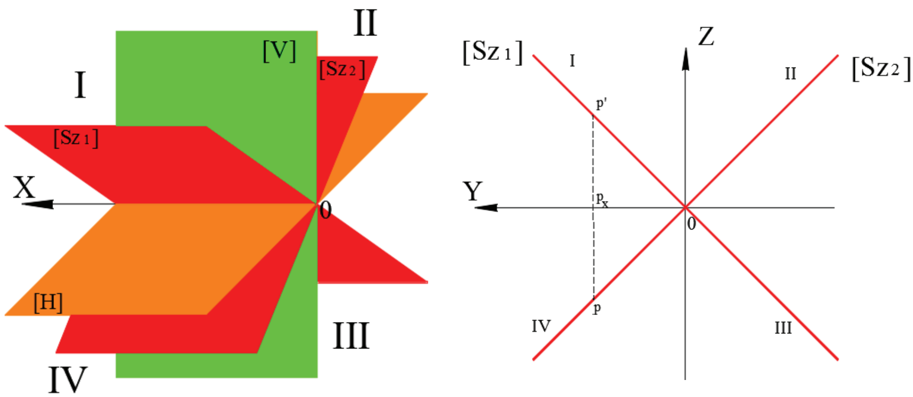
Az egymásra merőleges két képsík a teret 4 térnegyedre, míg a három képsík 8 térnyolcadra osztja.

– [H], a vízszintes (horizontális)
– [V], a függőleges (frontális)
– [W], oldalképsík (profil)

A [H] és [V] képsíkok metszésvonala az x tengely, a [H] és [W] képsíkok metszésvonala az y tengely és a [V] és [W] képsíkok metszésvonala a z tengely (1.1. ábra).

A tér leképezése a képsíkokra a következő módon történik:

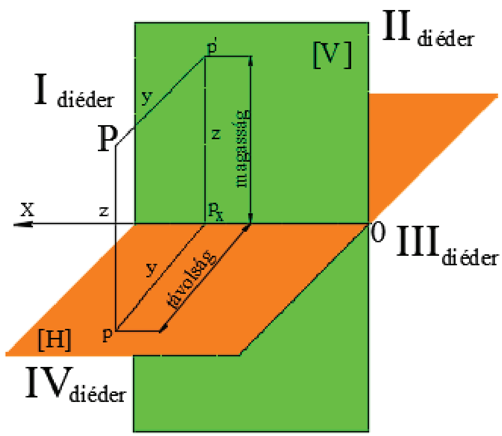
– Az alakzatok merőleges vetületeit képezzük a képsíkokon.
– A képsíkokat egyesítjük, figyelembe véve a forgatási irányra vonatkozó megállapodást. Például az I. térnegyedben lévő pontok vízszintes vetületét az x tengely alá, míg a függőleges vetületét az x tengely fölé ábrázoljuk (1.4. ábra).



1.2. ábra. *Szögfelező síkok és azokra illeszkedő pontok képei*

1.2. A pont ábrázolása

A **P** pont ábrázolása az 1.3. ábrán bemutatott módon történik:

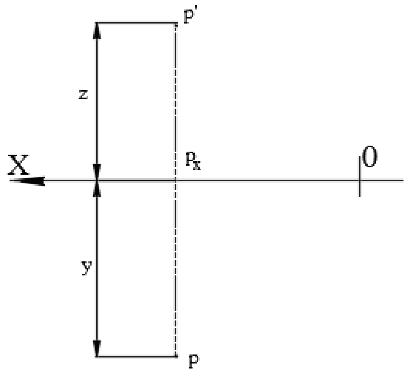


1.3. ábra. *A* **P** *pont leképezése diéderben*

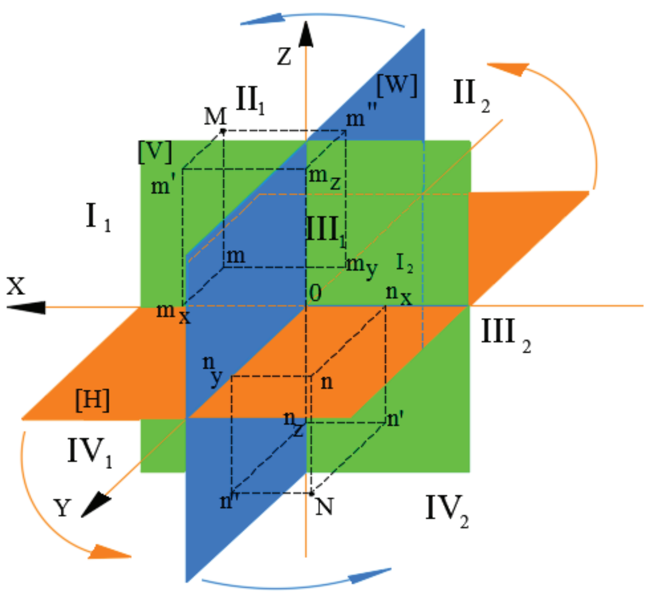
– A **P** pontra illesztett, képsíkokra merőleges vetítősugarakkal képezzük a vízszintes képsíkon a **p**-t, a függőleges képsíkon a **p'**-t.
– A **P** pont vízszintes és függőleges vetületei egy vetítő téglalapot határoznak meg, amelynek szemben levő oldalai egyenlők. A pont függőleges vetületének a függőleges képsíktól való disztanciáját távolságnak, míg a pont vízszintes vetületének a disztanciáját a vízszintes képsíktól magasságnak

nevezzük. A képsíkokat egyesítjük, figyelembe véve az 1.1. fejezetben meghatározott forgatási irányt.

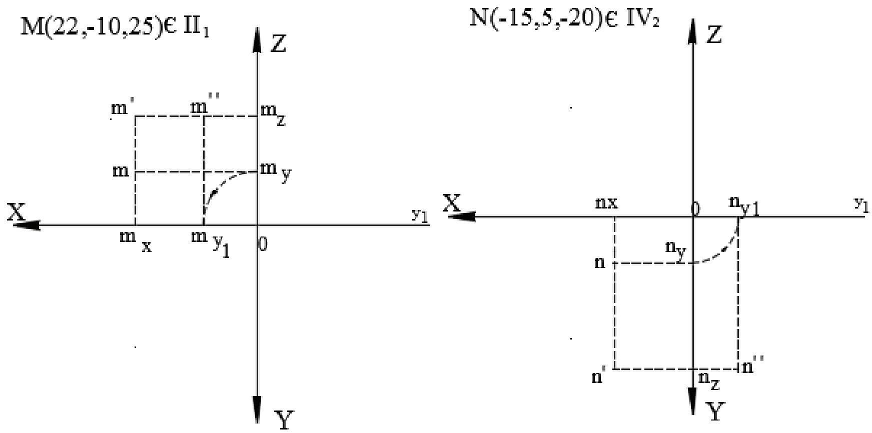
Amikor a [H] vízszintes képsíkot egyesítjük a függőleges képsíkkal, akkor a pont magasságának és távolságának egy, az x tengelyre merőleges rendezőn kell elhelyezkedniük (1.4. ábra).



1.4. ábra. *A **P** pont Monge-féle ábrázolása diéderben, pl. P(15,20,12) ∈ I*



1.5. ábra. *Az **M** és **N** pont leképezése triéderben*

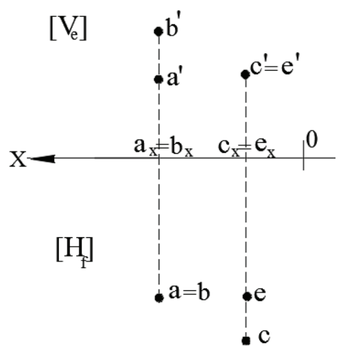


1.6. ábra. *Az* **M és N** *pont Monge-féle ábrázolása*

– Az **M, N** pontokat a képsíkokra merőleges vetítősugarakkal vetítjük a vízszintes képsíkra (**m, n**), a függőleges képsíkra (**m**', **n**'), illetve az oldal képsíkra (**m**", **n**").
– A pontok vízszintes, függőleges és oldal irányú vetületei egy-egy vetítő hasábot határoznak meg.
– A képsíkokat egyesítjük, figyelembe véve a megállapodás szerinti forgatási irányt.

1.2.1. Fedőpontok ábrázolása

Ha a pontok ugyanazon a vetítősugáron helyezkednek el, akkor fedőpontoknak nevezzük őket, komoly szerepet töltve be a láthatóság meghatározásában.



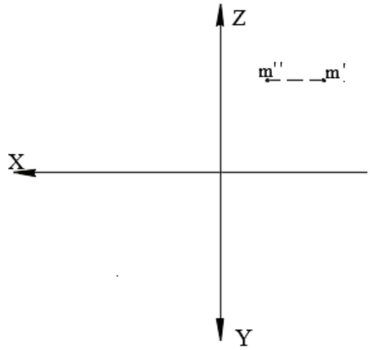
1.7. ábra. *Fedőpontok Monge-féle ábrázolása*

A horizontális [H_f] (felül) nézeten az a pont látható, amelynek a függőleges képsíkon a vetülete az X tengelytől a legtávolabb helyezkedik el, azaz a legnagyobb magassága van, tehát az 1.7. ábrán a B pont lesz a látható pont (B fedi az A pontot).

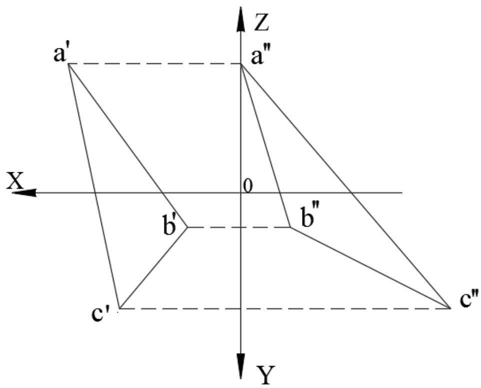
A függőleges $[V_e]$ (elöl) nézeten az látható pont, amelyiknek a vízszintes képsíkon a vetülete az X tengelytől a legtávolabb helyezkedik el, tehát a C pont lesz a látható pont (C fedi az E pontot).

1.2.2. Gyakorlófeladatok a pont ábrázolásához

1. Ábrázolja a következő pontokat diéderben:
   A(10,5,15), B(10, 0,5), C(5,15,0), E(15,−5,10), F(20,5,−10)!
2. Ábrázoljon egy pontot diéderben, amely illeszkedik az $[Sz_2]$ szögfelező síkra!
3. Ábrázoljon egy pontot diéderben, amely illeszkedik az $[Sz_1]$ szögfelező síkra!
4. Ábrázolja a következő pontokat triéderben: A(5,5,15), B(15, 0,10), C(−5,15,0), E(10,5,−10), F(−20,5,−10), G(−5,−10,−15)!
5. Ábrázolja a következő pontokat triéderben:
   a) a pont illeszkedik az X tengelyre;
   b) a pont illeszkedik az Y tengelyre;
   c) a pont illeszkedik a Z tengelyre!
6. Adott az A(10,5,−5) pont triéderben.
   a) Ábrázoljon egy B pontot, amely az A pont szimmetrikusa a vízszintes síkhoz képest!
   b) Ábrázoljon egy C pontot, amely az A pont szimmetrikusa a függőleges síkhoz képest!
   c) Ábrázoljon egy G pontot, amely az A pont szimmetrikusa az oldal síkhoz képest!
7. Ábrázoljon egy E pontot, amely az A pont szimmetrikusa az F(5, 10,−5) ponthoz képest!
8. Ábrázoljon egy A pontot triéderben, ha
   a) illeszkedik a vízszintes képsíkra;
   b) illeszkedik a függőleges képsíkra;
   c) illeszkedik az oldalnézeti képsíkra!
9. Ismerve az A pont koordinátáit a függőleges és oldalnézeti képsíkon, szerkessze meg az A pont vízszintes vetületét triéderben!



10. Határozza meg az ABCΔ háromszög vízszintes vetületét triéderben, ha ismert a függőleges és oldalnézeti vetülete!



1.3. Az egyenes ábrázolása

Az egyenes két különböző pontjával egyértelműen definiálható.

Az egyenes végtelen kiterjedésű és egy irányban elhelyezkedő pontok összessége. Az egyenes meghatározható két pont, illetve két metsző sík segítségével. A két pont által meghatározott részt szakasznak nevezzük. Az egyenes vetületeinek elkészítéséhez elegendő két pontjának merőleges vetületét meghatározni a képsíkon. A vetületpontok összekötése az egyenes vetületeit határozza meg.

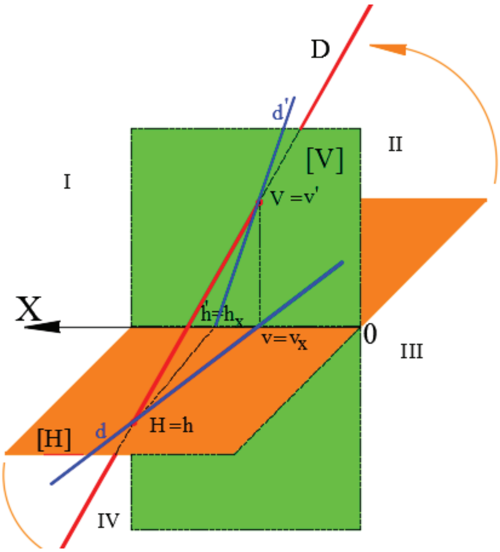
Az egyenes képsíkokkal alkotott metszéspontjait *(döféspontjait) nyompontnak* nevezzük. A megfelelő vetületükkel azonos nyompontokkal könnyedén meghatározhatók az egyenes vetületei.

Az egyenes nyompontját a vízszintes képsíkon H-val jelöljük, ami megegyezik a nyompont vízszintes h vetületével a vízszintes képsíkon, ezért H = h. A vízszintes nyompont H függőleges vetületét h'-val jelöljük, ami megegyezik a h_x-szel, $h_x = h'$.

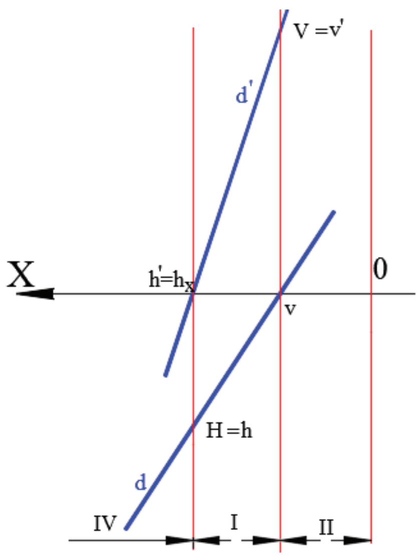
Az egyenes nyompontját a függőleges képsíkon V-vel jelöljük, ami megegyezik a nyompont függőleges v' vetületével, mivel illeszkedik a függőleges képsíkra, ezért $V = v'$. A függőleges nyompont V vízszintes vetületét v-vel jelöljük, ami megegyezik a v_x-el, $v_x = v$.

Az egyenes vízszintes vetületét megkapjuk, ha összekötjük az azonos jelölésű betűket, vagyis $h \cup v = d$, amit d-vel jelölünk, illetve ha $h' \cup v' = d'$, megkapjuk az egyenes függőleges vetületét.

Az 1.8. ábrán látható az általános helyzetű D egyenes útvonala, kiindulva a IV-es diéderből, áthaladva az I-es diéderbe, majd átjutva a II-es diéderbe.



1.8. ábra. *Általános helyzetű D egyenes leképezése diéderben*



1.9. ábra. *Általános helyzetű D egyenes Monge-féle ábrázolása diéderben*

Elemezve az egyenes útvonalát, a Monge-féle rendszerben az 1.9. ábra alapján az egyenes útvonalának meghatározásakor a H és V nyompontokban, illetve a 0 pontban függőleges vonalat húzzunk, amely következtében három részre oszthatjuk.

Az első rész vizsgálata:

– az x előjele pozitív, hiszen a 0-tól balra pozitív az x tengely irányítása;
– a távolság, vagyis az y előjele is pozitív, hiszen ezen a részen bármely pont az egyenes vízszintes d vetületén, az x tengely alatt van, vagyis a függőleges képsík előtt foglal helyet;
– a magasság, vagyis a z előjele negatív, hiszen ezen a részen bármely pont az egyenes függőleges *d*' vetületén, az x tengely alatt, vagyis a vízszintes képsík alatt foglal helyet.

A vizsgálat alapján az egyenes ezen része a IV-es diéderből indul.

A második rész vizsgálata:

– az x előjele pozitív, hiszen a 0-tól balra pozitív az x tengely irányítása;
– a távolság, vagyis az y előjele pozitív, hiszen ebben a szakaszban bármely pont az egyenes vízszintes d vetületén az x tengely alatt, vagyis a függőleges képsík előtt foglal helyet;
– a magasság, vagyis a z előjele pozitív, hiszen ebben a szakaszban bármely pont az egyenes függőleges *d*' vetületén az x tengely fölött, vagyis a vízszintes képsík fölött foglal helyet.

A vizsgálat alapján az egyenes ezen része az I-es diéderben van.

A harmadik rész vizsgálata:

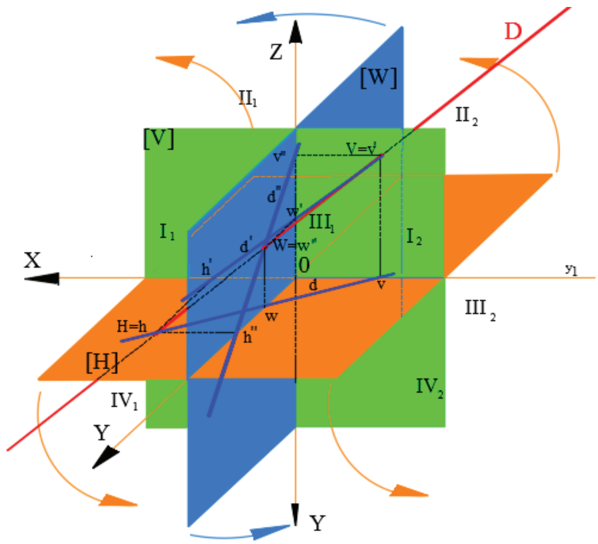
– az x előjele továbbra is pozitív, hiszen a 0-tól balra pozitív az x tengely irányítása;
– a távolság, vagyis az y előjele negatív, hiszen ezen a részen bármely pont az egyenes vízszintes d vetületén az x tengely fölött, vagyis a függőleges képsík mögött foglal helyet;
– a magasság, vagyis a z előjele pozitív, hiszen ezen a részen bármely pont az egyenes függőleges *d*' vetületén az x tengely fölött, vagyis a vízszintes kép sík fölött foglal helyet.

A vizsgálat alapján az egyenes ezen végtelen része a II-es diéderben halad tovább.

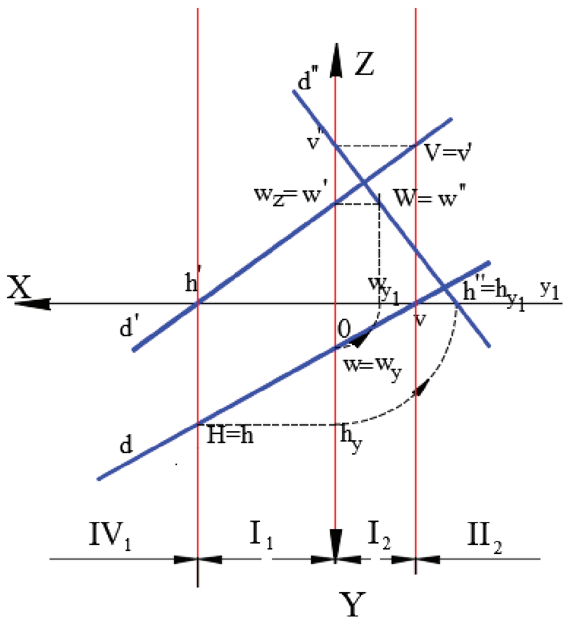
A triéderben megjelenik az oldalirányú képsík is. Az egyenes oldalnézeti vetületét kapjuk, ha összekötjük az azonos jelölésű betűket, vagyis $h'' \cup v'' \cup w'' = d''$. Az egyenes nyompontját az oldalirányú képsíkon W-vel jelöljük, ami megegyezik a nyompont oldalirányú w'' vetületével, hiszen illeszkedik az oldalirányú képsíkra, ezért $W = w''$. Az oldalnézeti W nyompont függőleges vetületének jelölése $w' = w_z$, illetve vízszintes vetületének jelölése $w = w_y$.

Az 1.11. ábrán látható általános helyzetű D egyenes útvonala a IV_1 térnyolcadból indul, áthalad az I_1-es, majd az I_2-es térnyolcadon átjut a II_2-es térnyolcadba.

Az egyenes útvonalának elemzése során ugyanúgy járunk el, mint a diéder esetén (1.9. ábra).



1.10. ábra. *Általános helyzetű D egyenes leképezése triéderben*

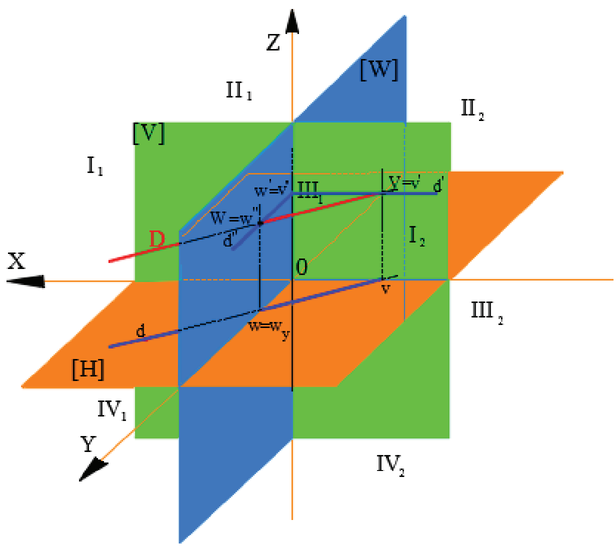


1.11. ábra. *Általános helyzetű D egyenes Monge-féle ábrázolása triéderben*

1.3.1. Különleges helyzetű egyenesek ábrázolása

A különleges helyzetű az egymásra merőleges, az egymással párhuzamos, illetve a képsíkokra illeszkedő egyenesek.

Azokat az egyeneseket, amelyek valamely képsíkkal párhuzamosak, **főegyeneseknek** nevezzük.

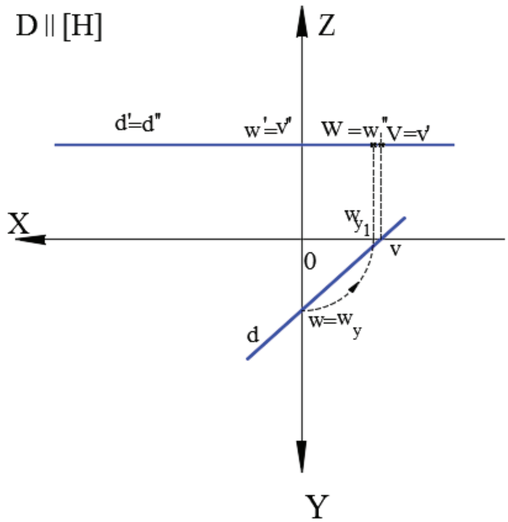


1.12. ábra Horizontális egyenes (D) ábrázolása

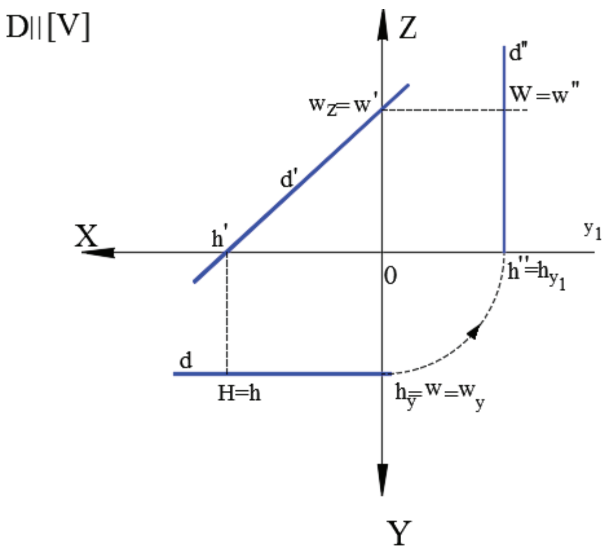
a) A D főegyenest, ha párhuzamos a vízszintes képsíkkal, **horizontális** egyenesnek nevezzük (1.12. ábra). A horizontális egyenes vízszintes képsíkra eső vetületén az egyenesre illeszkedő szakasznak a valódi nagyságát látjuk, míg a függőleges és oldalnézeti képsíkra eső vetületén a szakaszának nem a valós nagysága látható. A függőleges és oldalirányú vetülete a D főegyenesnek a Monge-féle ábrázolás szerint párhuzamos egyenes az x tengellyel (1.13. ábra).

Az egyenes *d* , *d*', *d*" vetületeit a nyompontjai segítségével tudjuk ábrázolni (1.13. ábra).

b) A D főegyenest, ha párhuzamos a függőleges képsíkkal, **frontális** egyenesnek nevezzük (14. ábra). Mivel az egyenes párhuzamos a függőleges képsíkkal, az egyenesre illeszkedő szakasz torzulásmentes nagysága ebben a síkban lesz látható, azonban a vízszintes és oldalirányú képsíkokon nem a valós nagyságát láthatjuk a vetületén. A vízszintes képsíkra eső vetülete párhuzamos egyenes az x tengellyel, az oldal képsíkra eső vetülete párhuzamos egyenes a z tengellyel (1.14. ábra).

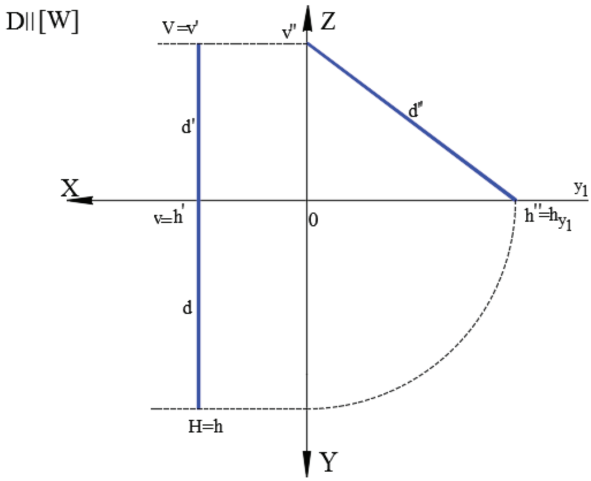


1.13. ábra. *A D horizontális egyenes Monge-féle ábrázolása triéderben*



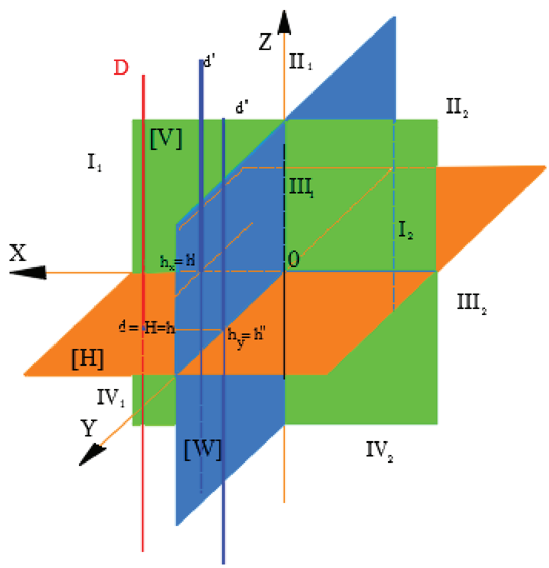
1.14. ábra. *A D frontális egyenes Monge-féle ábrázolása triéderben*

c) A D főegyenest, ha párhuzamos az oldalképsíkkal, **profilegyenes**nek nevezzük (15. ábra). Mivel az egyenes párhuzamos az oldalképsíkkal, az egyenesre illeszkedő szakasz torzulásmentes képét az oldalképsíkon kapjuk, azonban a vízszintes és függőleges vetülete a szakasznak nem a valós képét mutatja. A vízszintes és függőleges vetülete párhuzamos a z és az y tengellyel (1.15. ábra).



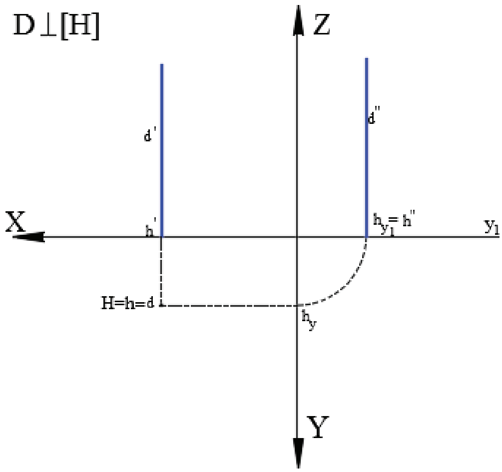
1.15. ábra. *A D profilegyenes Monge-féle ábrázolása triéderben*

Azokat az egyeneseket, amelyek merőlegesek a képsíkokra, **vetítőegyenesek**nek nevezzük (1.16. ábra).



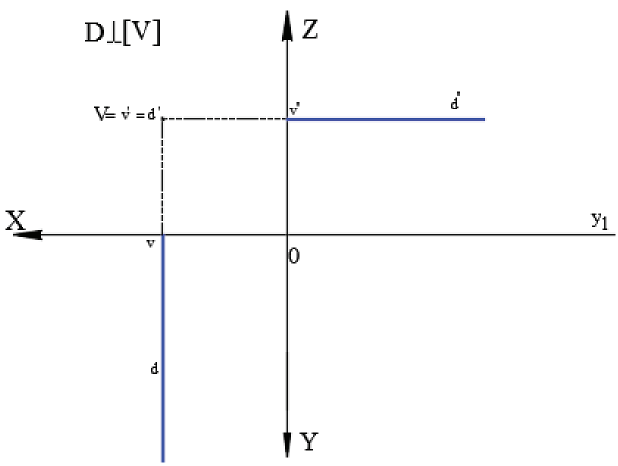
1.16. ábra. *A D vízszintes vetítőegyenes képei*

a) Ha a D egyenes merőleges a vízszintes képsíkra, a vízszintes vetülete egy pont, illetve a *d*' és *d*'' vetületei párhuzamosak a z tengellyel (1.17. ábra). Az egyenes *d*' és *d*'' képei a nyompontja segítségével könnyen meghatározhatók.



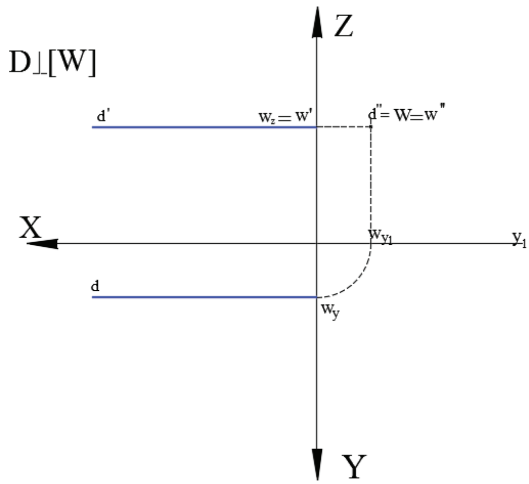
1.17. ábra. *A D vízszintes vetítőegyenes Monge-féle ábrázolása*

b) Ha a D egyenes merőleges a függőleges képsíkra, akkor párhuzamos a vízszintes és oldalképsíkkal, a függőleges vetülete egy pont, illetve a vízszintes d vetülete párhuzamos az y és z tengellyel, a *d*'' vetülete viszont párhuzamos az x tengellyel (1.18. ábra).



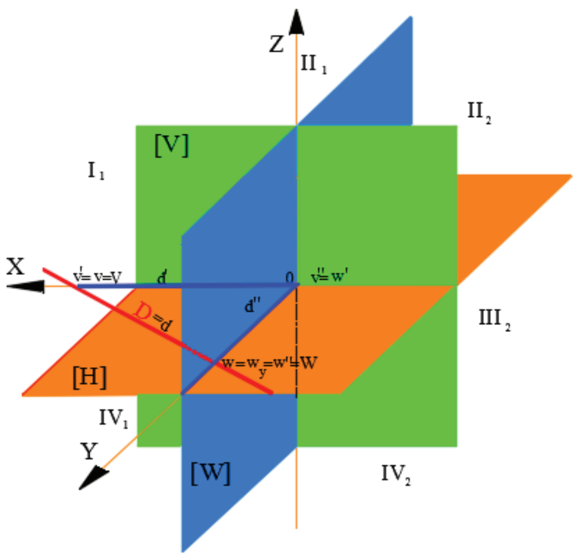
1.18.ábra. *A D függőleges vetítőegyenes Monge-féle ábrázolása*

c) Ha a D egyenes merőleges az oldalképsíkra, akkor párhuzamos a vízszintes és függőleges képsíkkal, az oldalvetülete egy pont, illetve a *d*, *d*' vetülete párhuzamos az x tengellyel (1.19. ábra). A D oldal *vetítőegyenest fronto-horizontális* egyenesnek is nevezzük.

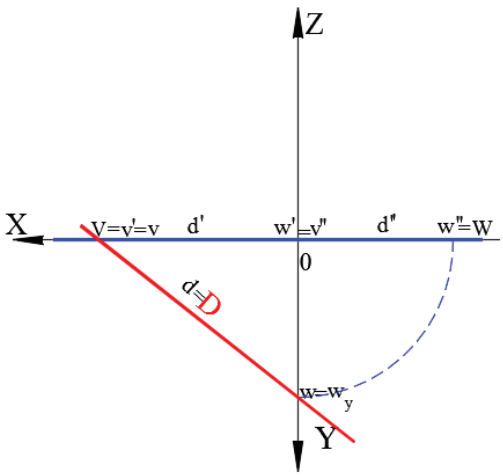


1.19. ábra. *A D fronto-horizontális vetítőegyenes Monge-féle ábrázolása*

A képsíkokra illeszkedő egyenesek.

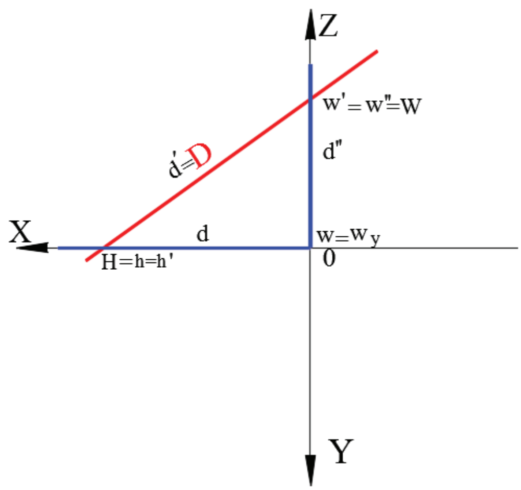


1.20. ábra. *A vízszintes képsíkra illeszkedő D egyenes*



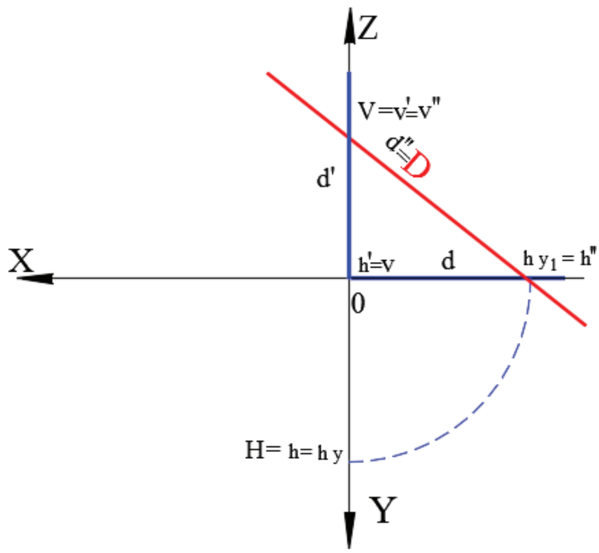
1.21. ábra. *A D∈[H] egyenes vetületei*

a) Az egyenes vetületei könnyedén meghatározhatók nyompontjai segítségével. Az egyenes függőleges és oldalvetületei az x tengelyre illeszkednek, a vízszintes vetülete azonos magával a térbeli D egyenessel (1.21. ábra).



1.22. ábra. *A D∈[H] egyenes vetületei*

b) Az egyenes vízszintes vetülete az X tengelyre, oldalvetülete az z tengelyre illeszkedik, illetve a függőleges *d*' vetülete megegyezik magával a térbeli D egyenessel (1.22. ábra).
c) Az egyenes vízszintes vetülete az X tengelyre, függőleges vetülete a z tengelyre illeszkedik, illetve a *d*'' oldal vetülete magával a térbeli D egyenessel azonos (1.23. ábra).



1.23. ábra. *A D∈[W] egyenes vetületei*

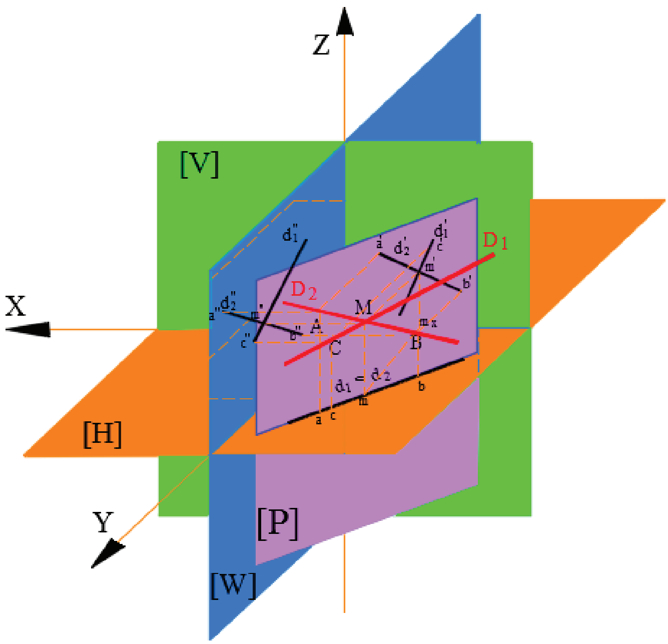
1.3.2. Egyenespárok ábrázolása

1. A fedőegyenesek

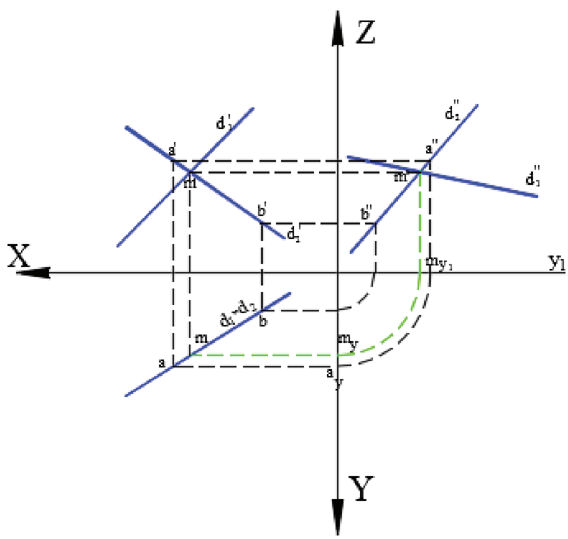
Azon egyenesek, amelyek vetületei az egyik képsíkon egybeesnek, a másik képsíkon viszont nem azonos a képük, olyan vetítősíkban vannak, amely merőleges az egybeeső képek képsíkjára.

Ezeket az egyeneseket fedőegyenesnek nevezzük (1.24. ábra).

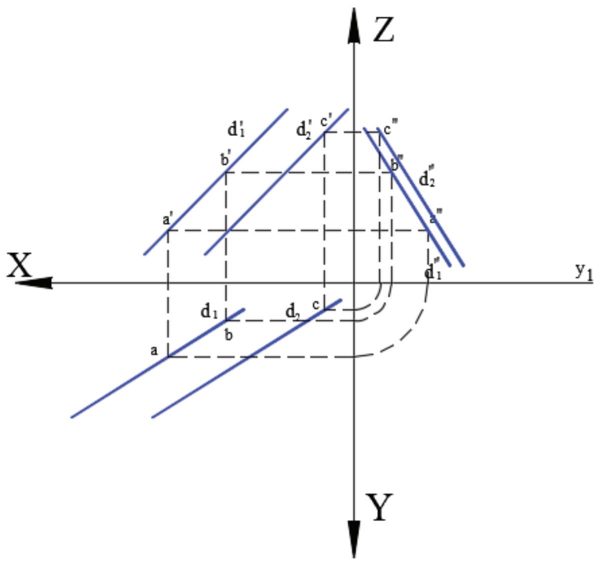
1. Két metsző egyenes vetületeinek metszéspontjai a megfelelő rendezőkre illeszkednek.
2. Két párhuzamos egyenes vetületei a képsíkokon szintén párhuzamosak (metszéspontjuk a végtelenben értelmezhető).
3. Két egyenes kitérő helyzetű, ha vetületeik metszéspontjai nem illeszkednek egy rendezőre.



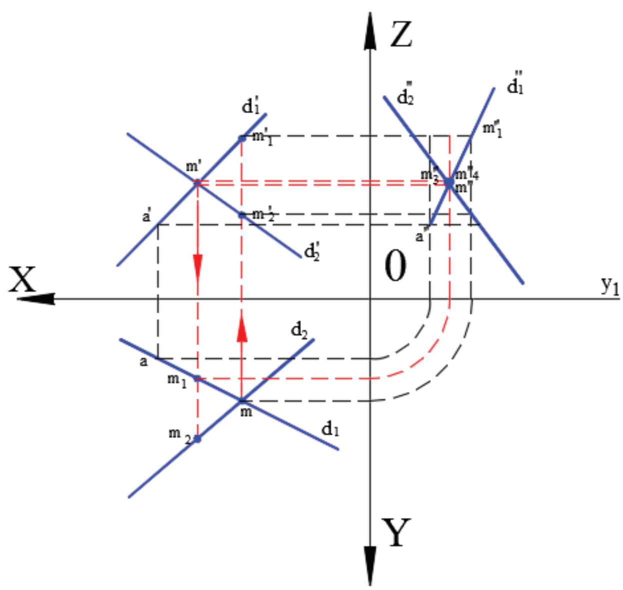
1.24. ábra. *A [P] sík merőleges a vízszintes képsíkra, amely két metsző egyenest (fedőegyenespárt) tartalmaz*



1.25. ábra. *Metsző helyzetű vízszintes fedőegyenesek vetületei*



1.26. ábra. *Párhuzamos egyenesek vetületei*



1.27. ábra. *Kitérő egyenesek vetületei*

Az egyenesek mindhárom képsíkon látszólagos metszésponttal rendelkeznek, viszont ezen pontok fedőpontok, amelyek egymás felett vagy előtt, a képsíkokra merőleges egyenesen helyezkednek el.

A vízszintes képsíkon az egyenesek vetületének m metszéspontjára rendezőt illesztve látható (1.27. ábra), hogy a D_2 egyenes d_2' vetületén levő m_2' pont alacsonyabban van, mint a D_1 egyenes d_1' vetületén levő m_1' pont. Mivel az m_1' pont magasabban van a vízszintes képsík fölött, ezért ez takarja az m_2' pontot, éppen úgy, mint a pontot tartalmazó D_1 egyenes a vízszintes síkban, vagyis látható lesz.

Ha a függőleges képsíkban az egyenesek m' metszéspontjára rendezőt illesztünk, látható (1.27. ábra), hogy a D_2 egyenes d_2 vetületén levő m_2 pont távolabb van a függőleges képsíktól, mint a d_1 vetület egyenesen levő m_1 pont, vagyis az m_1 pont közelebb van a függőleges képsíkhoz, mint az m_2 pont, így az m_2 látható pont lesz a függőleges képsíkon, tehát a pontot tartalmazó D_2 egyenes a függőleges síkon (elölnézetben) szintén látható lesz.

1.3.3. Gyakorlófeladatok az egyenes ábrázolásához

1. Ábrázolja a következő pontok segítségével az egyenest diéderben!

$$D \begin{cases} A(10,-5,15) \\ B(20,10,-10) \end{cases}$$

2. Ábrázolja a következő pontok segítségével az egyenest diéderben!

$$D \begin{cases} A(10,5,-15) \\ B(5,-10,-10) \end{cases}$$

b) Határozza meg az egyenes H (h, h') és V (v, v') nyompontjait!
c) Határozza meg az egyenes útvonalát diéderben!

3. Ábrázolja azt az egyenest diéderben, amely áthalad a II. diéderen!
Határozza meg az egyenes H (h, h') és V (v, v') nyompontjait!

4. Ábrázoljon két metsző egyenest diéderben!
Határozza meg az egyenes H (h, h') és V (v, v') nyompontjait!

5. Ábrázolja azt az egyenest diéderben, amely áthalad a IV. diéderen!
Határozza meg az egyenes H (h, h') és V (v, v') nyompontjait!

$$D \begin{cases} A(-10,5,-20) \\ B(15,10,-10) \end{cases}$$

6. Ábrázolja a következő pontok segítségével az egyenest triéderben!
   a) Határozza meg az egyenes H (h, h', h''), V (v, v', v'') és W (w, w, w', w'') nyompontjait!
   b) Határozza meg az egyenes útvonalát triéderben!

7. Ábrázolja a következő pontok segítségével az egyenest triéderben!

$$D\begin{cases} A(-10,0,-20) \\ B(-5,-10,0) \end{cases}$$

   a) Határozza meg az egyenes H (h, h', h''), V (v, v', v'') és W (w, w', w'') nyompontjait!
   b) Határozza meg az egyenes útvonalát triéderben!

8. Ábrázolja az A és B pontok segítségével a D egyenest triéderben!

$$D\begin{cases} A(10,-10,-20) \\ B(-5,-10,0) \end{cases}$$

   a) Határozza meg az egyenes nyompontjait triéderben!
   b) Határozza meg az egyenes útvonalát!

9. Ábrázoljon egy egyenest triéderben, amely áthalad a III_2 triéderen! Határozza meg az egyenes H (h, h', h''), V (v, v', v'') és W(w, w', w'') nyompontjait!

10. Ábrázoljon egy egyenest triéderben, amely áthalad a IV_2 triéderen! Határozza meg az egyenes H (h, h', h''), V (v, v', v'') és W(w, w', w'') nyompontjait!

11. Adott három nemkollineáris pont a következők szerint: A(25, 10, 10), B(15, 20, 25), C(5, 5, 5).
    a) Ezen pontok segítségével ábrázoljon két párhuzamos egyenest triéderben!
    b) Határozza meg az egyenesek H (h, h', h''), V(v, v', v'') és W (w, w', w'') nyompontjait!

12. Adott három nemkollineáris pont a következő adatokkal: A(20, 15, 5), B(5, −5, 15), C(10, 10, 10).
    a) Ezen pontok segítségével ábrázoljon két metsző egyenest triéderben!
    b) Határozza meg az egyenesek H (h, h', h''), V(v, v', v'') és W(w, w', w'') nyompontjait!

13. Adott egy D egyenes, amelyet az A és B pontok határoznak meg, valamint az M(10, 15, 10) pont.

$$D\begin{cases} A(15,10,15) \\ B(25,15,5) \end{cases}$$

a) Ábrázolja az M pontra illeszkedő és a D egyenessel párhuzamos egyenest!
b) Ábrázoljon egy M ponton keresztül áthaladó metsző egyenest!
c) Ábrázoljon egy M pontra illeszkedő egyenest, amely nem párhuzamos a D egyenessel!
d) Ábrázoljon egy M pontra illeszkedő, a D egyenest nem metsző egyenest!

14. Ábrázoljon két párhuzamos D_1, D_2 egyenest diéderben úgy, hogy a D_1 egyenes az I., IV., III., illetve a D_2 egyenes az I., II., III. diéderen keresztül haladjon!

15. Adott egy D egyenes, amelyet az A és B pontok határoznak meg a következők szerint:

$$D\begin{cases} A(15,15,10) \\ B(5,5,20) \end{cases}$$

és a rá illeszkedő M (10, y_M, z_M) pont.
Ábrázoljon egy, az M pontra illeszkedő, D-re merőleges egyenest triéderben!

16. Adott egy D egyenes, amelyet az A és B pontok határoznak meg a következők szerint:

$$D\begin{cases} A(10,5,5) \\ B(25,15,25) \end{cases}$$

Egy D-re nem illeszkedő M ponton keresztül ábrázoljon triéderben egy D-t metsző D_1 egyenest, és határozza meg a D_1 egyenes oldal nyompontját!

17. Ábrázoljon egy D horizontális egyenest diéderben, amely illeszkedik az A(35,15,20) pontra, és a függőleges nyompontja ebben a képsíkban x = 15 mm távolságra helyezkedik el a B (20,0,10) ponttól!

18. Adott egy D egyenes és egy A(10, 20, 5) pont diéderben a következők szerint:

$$D\begin{cases} B(30,10,10) \\ C(25,20,25) \end{cases}$$

a) Ábrázoljon az A ponton keresztül egy D egyenest metsző egyenest!
b) Illesszen az A pontra egy, a D egyenesre merőleges egyenest!

19. Adottak a D_1, D_2 egyenesek:

$$D_1 \begin{cases} A(25,10,5) \\ B(5,10,20) \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} E(25,5,15) \\ F(10,5,5) \end{cases}$$

Ábrázolja azt a horizontális D_3 egyenest diéderben, amelynek hossza $x = 22$ mm hosszúságú és a két frontális egyenes D_1, D_2 között helyezkedik el!

15. Adott a D_1, D_2 horizontális és D_3 általános helyzetű egyenes, a

$$D_1 \begin{cases} A(10,15,15) \\ B(25,5,15) \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} E(25,15,5) \\ F(15,5,5) \end{cases}$$

$$D_3 \begin{cases} G(-5,10,0) \\ K(30,25,20) \end{cases}$$

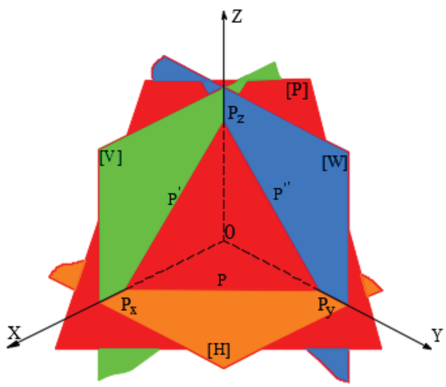
Ábrázolja azt az MN szakaszt diéderben, amely a D_1, D_2 egyenesekre támaszkodik, és a szakasz Q felezőpontja a D_3 egyenesen van!

1.4. A sík ábrázolása

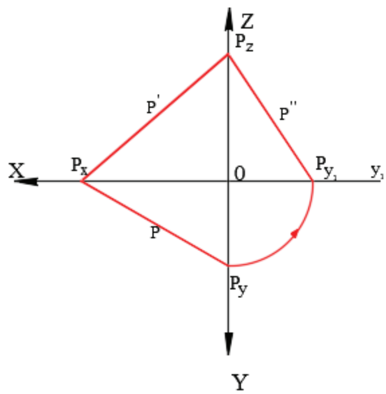
A sík egy végtelen kiterjedésű térelem, amit egy pontjával és két nem párhuzamos irányával határozunk meg. A síkot nyomvonalai segítségével is ábrázolhatjuk, amelyek a síknak a képsíkokkal való metszésvonalai.

A síkot meghatározza:

- egy egyenes és egy rajta kívül levő pont;
- három, nem egy egyenesen illeszkedő pont;
- két metsző egyenes;
- két párhuzamos egyenes.



1.28. ábra. *A sík térben történő ábrázolása*

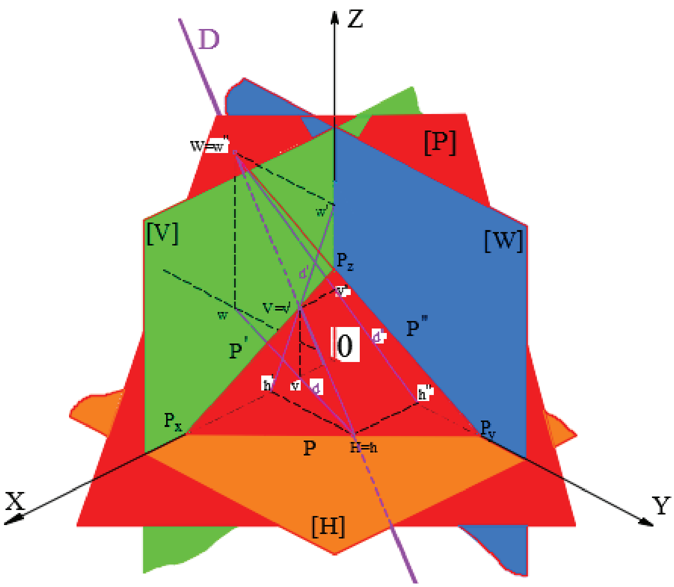


1.29. ábra. *A sík Monge-féle ábrázolása triéderben*

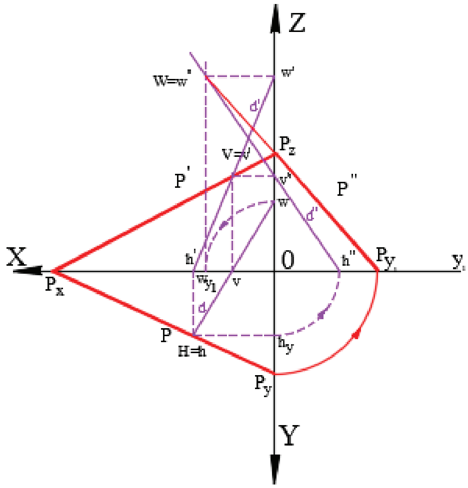
1.4.1. A sík felépítése sajátos egyenesei által

Definíció:

Az egyenes benne van a síkban, ha minden pontja illeszkedik a síkra. Ekkor a síkbeli egyenes nyompontjai a sík és a képsík metszésvonalán (nyomvonalán) helyezkednek el.



1.30. ábra. *A síkban levő általános helyzetű egyenes ábrázolása*

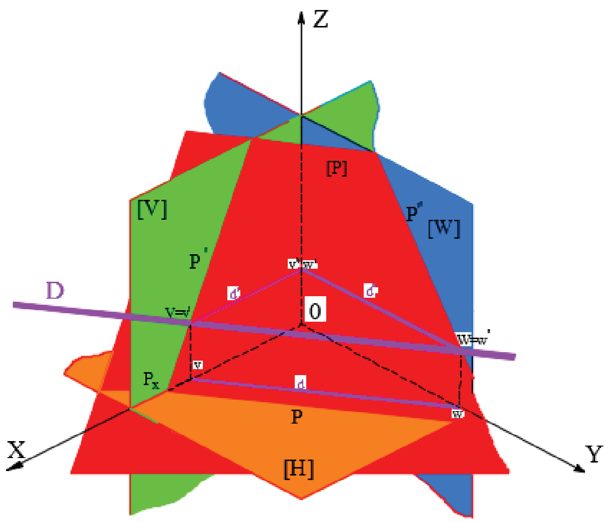


1.31. ábra. *A síkra illeszkedő általános egyenes ábrázolása triéderben*

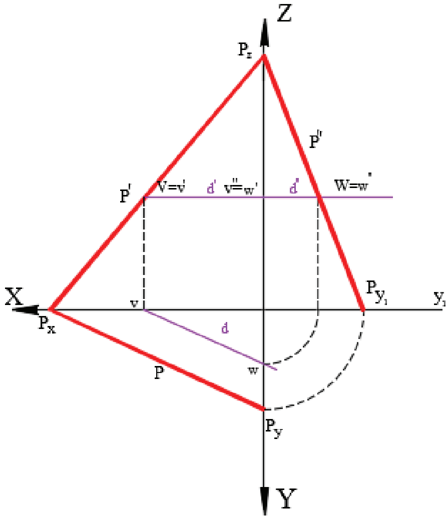
1. A sík általános egyenese

Az egyenes H = *h* nyompontja a sík vízszintes P' nyomvonalán van (1.31. ábra), függőleges nyompontja V = *v*' a sík függőleges *P*' nyomvonalán, míg az oldal nyompontja W = *w*'' a sík oldal *P*'' nyomvonalán helyezkedik el.

2. Horizontális egyenes a síkban



1.32. ábra. *A síkra illeszkedő horizontális egyenes ábrázolása*

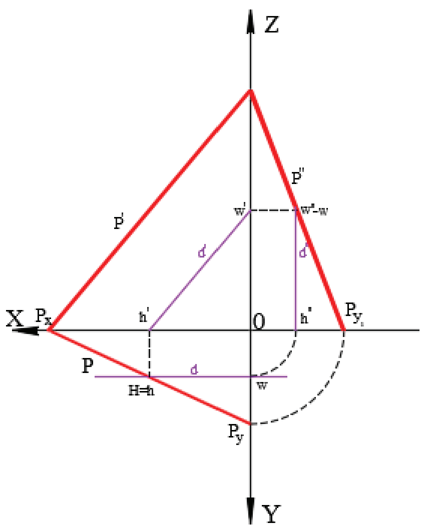


1.33. ábra. *A síkban levő horizontális egyenes ábrázolása triéderben*

Az egyenes *d*' függőleges és *d*'' oldal vetülete párhuzamos az x tengellyel, vízszintes vetülete, *d* párhuzamos a P sík vízszintes nyomvonalával.

Az egyenes V∈*P*' függőleges nyompontja rajta van a sík függőleges nyomvonalán, míg a W∈*P*'' oldal nyompontja rajta van a sík oldal nyomvonalán.

3. Frontális egyenes a síkban

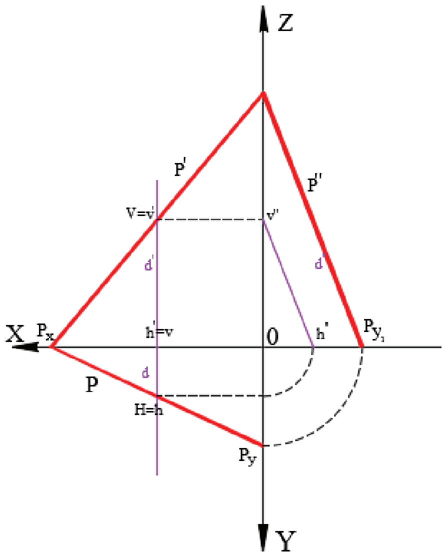


1.34. ábra. *Sík frontális egyenesének ábrázolása triéderben*

Az egyenes *d* vízszintes vetülete párhuzamos az x tengellyel, a *d*'' oldal vetülete párhuzamos az z tengellyel, függőleges vetülete párhuzamos a sík függőleges *P*' nyomvonalával.

Az egyenes vízszintes nyompontja rajta van a sík vízszintes H nyomvonalán, azaz *h*∈*P*, az oldal nyompontja pedig a sík oldal nyomvonalán van, azaz W∈*P*''.

4. Profilegyenes a síkban



1.35. ábra. *A síkban levő profilegyenes ábrázolása triéderben*

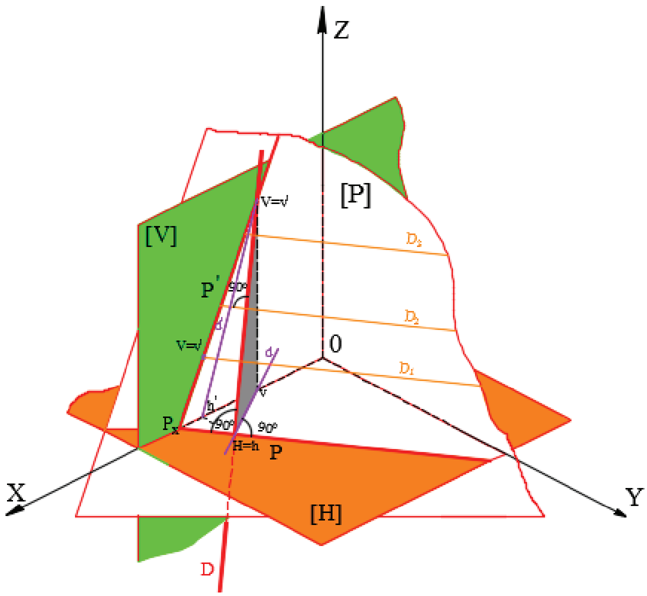
Az egyenes *d* vízszintes és *d*' függőleges vetülete párhuzamos a z tengellyel, míg a *d*'' oldal vetülete párhuzamos a sík *P*'' oldal nyomvonalával.

Az egyenes vízszintes nyompontja rajta van a sík H vízszintes nyomvonalán, azaz *h*∈*P*, míg a függőleges nyompontja rajta van a sík függőleges nyomvonalán, azaz V∈*P*'.

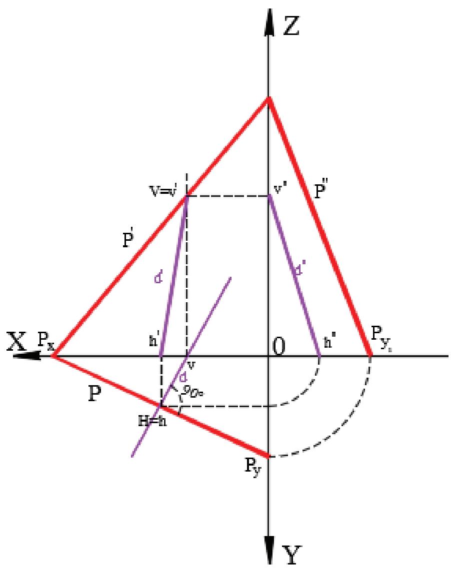
5. Sík legnagyobb lejtőjű egyenese

5.1. A D egyenes a P sík legnagyobb lejtőjű egyenese (l.l.e) a vízszintes képsíkhoz viszonyítva, amely merőleges a P sík összes horizontális egyenesére, beleértve a P sík vízszintes nyomvonalát is.

A vízszintes képsíkhoz viszonyított legnagyobb lejtőjű D egyenes (l.l.e) szerkesztése (1.37. ábra) az egyenes vízszintes d vetületéből indul ki.



1.36. ábra. *A sík legnagyobb lejtőjű D egyenese (l.l.e) a vízszintes képsíkhoz viszonyítva*



1.37. ábra. *A sík vízszintes képsíkhoz viszonyított legnagyobb lejtőjű D egyenesének (l.l.e) ábrázolása*

Az egyenes vízszintes vetületének H = h nyompontjából merőlegest húzunk az egyenes vízszintes vetületére, mivel a legnagyobb lejtő D egyenes (l.l.e) 90°-os szöget zár be a P sík összes horizontális egyenesével, amit a vízszintes képsíkban valódi nagyságban szerkeszthetünk meg, ily módon megkapjuk a sík vízszintes P nyomvonalát.

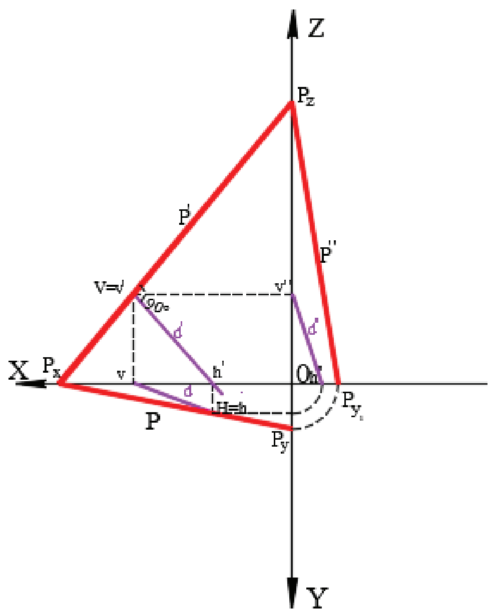
Az egyenes vízszintes és függőleges vetületének nyompontjait levetítjük az oldalképsíkra, ezáltal megkapjuk az egyenes *d*" vetületét.

A sík vízszintes P nyomvonala metszi az x tengelyt a P_x pontban, illetve az y tengelyt a P_y pontban. Felhasználva az illeszkedés definícióját, a sík P_x koordinátáját összekötjük az egyenes V nyompontjával, így ábrázoljuk a sík függőleges *P*' nyomvonalát.

A sík függőleges nyomvonala, *P*' metszi a z tengelyt egy P_z pontban. Mivel a sík P_y koordinátája az oldal képsíkban van, a Monge-féle vetítés szerint elfordítjuk trigonometriai irányba, megszerkesztve a sík P_{y1} koordinátáját.

Összekötve a P_{y1} és P_z koordinátákat kapjuk a sík *P*" oldal nyomvonalát.

5.2. A D egyenes a P sík legnagyobb lejtőjű egyenese (l.l.e) a függőleges képsíkhoz viszonyítva, amely merőleges a P sík összes frontális egyenesére, beleértve a sík *P*' függőleges nyomvonalát is.



1.38. ábra. *A függőleges képsíkhoz viszonyított legnagyobb lejtőjű D egyenes ábrázolása (l.l.e)*

A függőleges képsíkhoz viszonyított legnagyobb lejtőjű D egyenes (l.l.e) szerkesztése (1.38. ábra) az egyenes függőleges *d*' vetületéből indul ki.

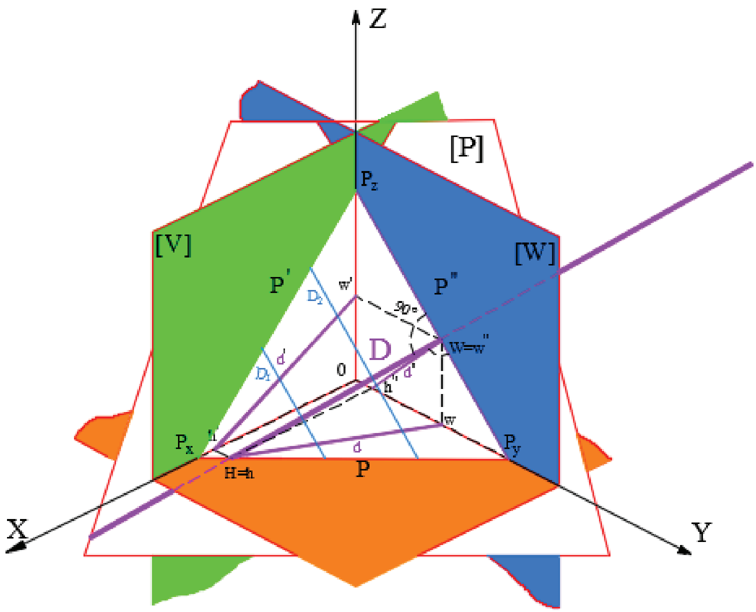
Az egyenes függőleges vetületének V = *v*' nyompontján keresztül merőlegest húzunk az egyenes függőleges vetületére, mivel a legnagyobb lejtőjű D egyenes (l.l.e) 90°-os szöget zár be a P sík összes frontális egyenesével, ami a függőleges képsíkon valódi nagyságban látszik, és ily módon kapjuk meg a sík függőleges *P*' nyomvonalát. Az egyenes függőleges V nyompontját levetítjük a vízszintes és oldalképsíkra, ezáltal megkapjuk az egyenesek *d*, *d*'' vetületeit.

A sík függőleges *P*' nyomvonala metszi az x tengelyt a P_x pontban, illetve az y tengelyt a P_z pontban. Felhasználva az illeszkedés definícióját, a sík P_x koordinátáját összekötjük az egyenes H nyompontjával, így ábrázoljuk a sík vízszintes P nyomvonalát.

A sík vízszintes nyomvonala, P metszi az y tengelyt a P_y pontban. Mivel a sík P_y koordinátája az oldalképsíkban van, a Monge-féle vetítés szerint elfordítjuk trigonometriai irányba, megszerkesztve a sík P_{y1} koordinátáját.

Összekötve a P_{y1}, és P_z koordinátákat kapjuk a sík oldal *P*'' nyomvonalát.

5.3. A D egyenes a P sík legnagyobb lejtő egyenese (l.l.e) az oldalképsíkhoz, amely merőleges a P sík összes profil egyenesére, beleértve a sík *P*'' oldal nyomvonalát is.



1.39. ábra. *A sík legnagyobb lejtőjű D egyenese (l.l.e) az oldal képsíkhoz viszonyítva*

Az oldal képsíkhoz viszonyított legnagyobb lejtőjű D egyenes (l.l.e) szerkesztése (1.40. ábra) az egyenes oldal d'' vetületéből indul ki.

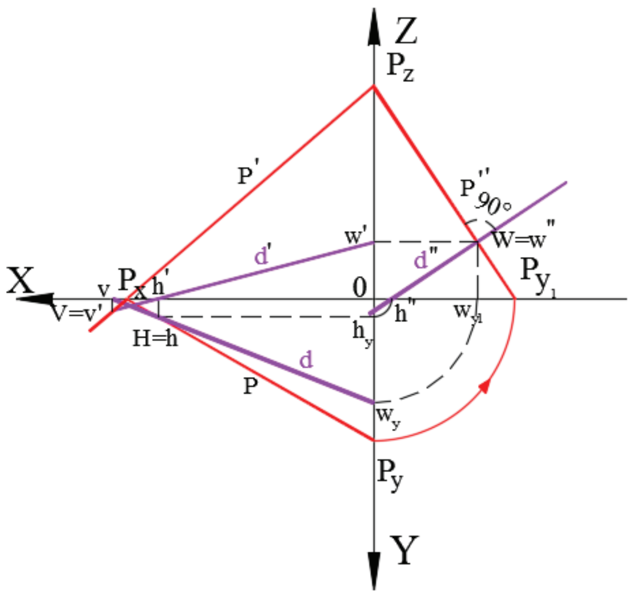
Az egyenes oldal $W = w''$ nyompontjából merőlegest húzunk az egyenes oldal vetületére, mivel a legnagyobb lejtő D egyenes (l.l.e) 90°-os szöget zár be a P sík összes profilegyenesével, amit az oldal képsíkban valódi nagyságban szerkeszthetünk meg, ily módon megkapjuk a sík oldal P'' nyomvonalát.

Az egyenes oldal W nyompontját levetítjük a vízszintes és függőleges képsíkra, ezáltal megkapjuk az egyenesek d, d' vetületeit.

A sík oldal P'' nyomvonala metszi az x tengelyt a P_{y1} pontban, illetve a z tengelyt a P_z pontban.

Felhasználva az illeszkedés definícióját, a sík P_z koordinátáját összekötjük az egyenes V nyompontjával, így ábrázoljuk a sík függőleges P' nyomvonalát. Mivel a w_{y1} koordináta az oldalképsíkban van, a Monge-féle vetítés szerint elfordítjuk az y tengelyre, így megkapjuk a w koordinátát, illetve a h' koordinátát levetítjük a vízszintes képsíkra és meghatározzuk a H = h nyompontot. Összekötve a H = h és w nyompontokat, ábrázoljuk az egyenes d vízszintes vetületét.

A sík függőleges P' nyomvonala metszi az x tengelyt a P_x pontban. A sík P_x koordinátáját összekötjük az egyenes H = h nyompontjával, megszerkesztve a sík vízszintes P nyomvonalát.



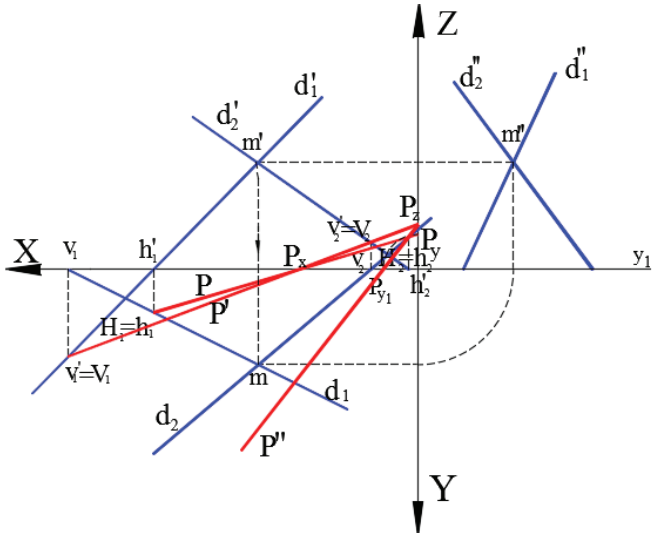
1.40. ábra. *A sík oldalképsíkhoz viszonyított legnagyobb lejtőjű D egyenesének (l.l.e) ábrázolása*

6. A sík nyomvonalának meghatározása metsző ($D_{1,}$ D_2) egyenesek által

Két metsző egyenes meghatároz egy síkot, vagyis benne van a síkban.

Meghatározzuk a D_1 egyenes $H_1 = h_1$ és $V_1 = v_1'$ nyompontjait (1.41. ábra), ezt követően a D_2 egyenes $H_2 = h_2$ és $V_2 = v_2'$ nyompontjait.

Ahhoz, hogy megkapjuk a sík vízszintes P nyomvonalát, összekötjük $H_1 = h_1$ és $H_2 = h_2$ nyompontokat. A sík függőleges nyomvonalának meghatározására a $V_1 = v_1'$ és $V_2 = v_2'$ nyompontokat kötjük össze. A sík oldalnyomvonalának P'' definiálását megkapjuk, ha összekötjük a sík P_{y1} és P_z koordinátáit.

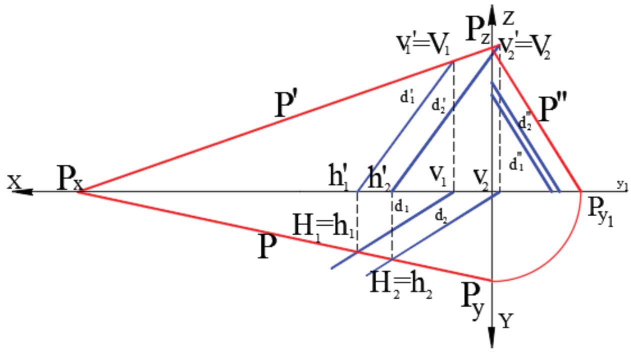


1.41. ábra. *A D_1, D_2 metsző egyenespárjával adott sík nyomvonalainak szerkesztése*

7. A D_1, D_2 párhuzamos egyeneseivel adott sík nyomvonalainak meghatározása

Két párhuzamos egyenes meghatároz egy síkot, vagyis benne van a síkban.

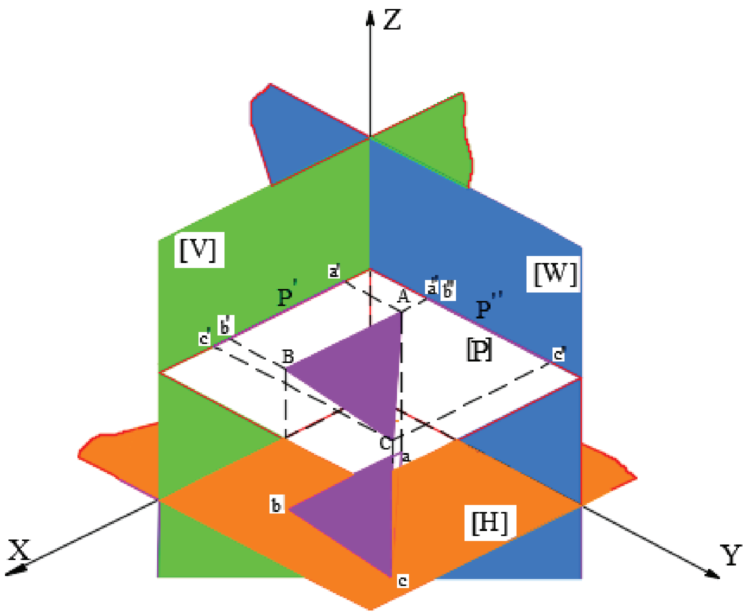
Meghatározzuk a D_1 egyenes $H_1 = h_1$ és $V_1 = v_1'$ nyompontjait (1.42. ábra), és ezt követően a D_2 egyenes $H_2 = h_2$ és $V_2 = v_2'$ nyompontjait. Ahhoz, hogy megkapjuk a sík vízszintes nyomvonalát, P, összekötjük a $H_1 = h_1$ és $H_2 = h_2$ nyompontokat. A sík függőleges nyomvonalának meghatározására a $V_1 = v_1'$ és $V_2 = v_2'$ nyompontokat kötjük össze. A sík oldalnyomvonalának P'' definiálását megkapjuk, ha összekötjük a sík P_{y1} és P_z koordinátáit.



1.42. ábra. *A sík nyomvonalának megszerkesztése párhuzamos D_1, D_2 egyenesek segítségével*

1.4.2. Sajátos helyzetű síkok ábrázolása

Azokat a síkokat, amelyek merőlegesek a képsíkokra, **vetítősíkok**nak nevezzük. Vetítősík az, amely merőleges a képsíkra, vetülete ebben a képsíkban egy egyenes lesz.



1.43.ábra. *A horizontális vetítősík és a benne levő háromszög ábrázolása*

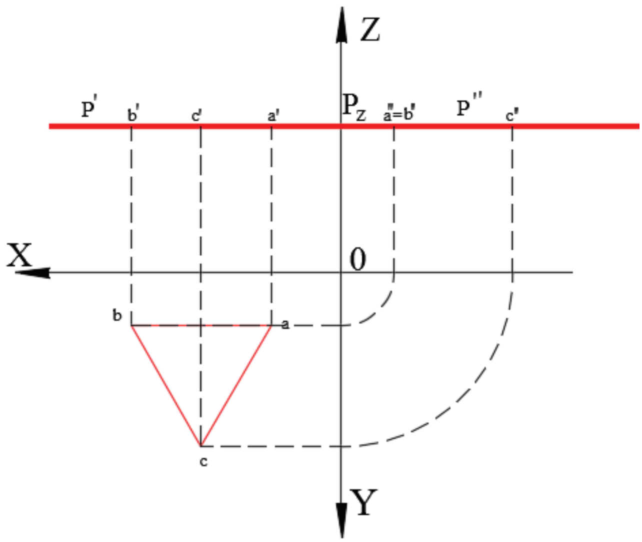
1. A horizontális vetítősík (1.43. ábra) párhuzamos a vízszintes képsíkkal (merőleges a függőleges és oldalképsíkra).

Definíció: A síkban levő alakzatot valódi nagyságban kapjuk meg abban a képsíkban, amellyel az adott sík párhuzamos.

A síkban levő háromszöget a vízszintes képsíkban, valódi nagyságban kapjuk meg, hiszen a sík párhuzamos vele.

A sík és a háromszög vetülete a függőleges képsíkban egy egyenes, ami párhuzamos az x tengellyel.

A sík és a háromszög vetülete az oldalképsíkban szintén egy egyenes lesz, ami párhuzamos az x tengellyel (1.44. ábra).



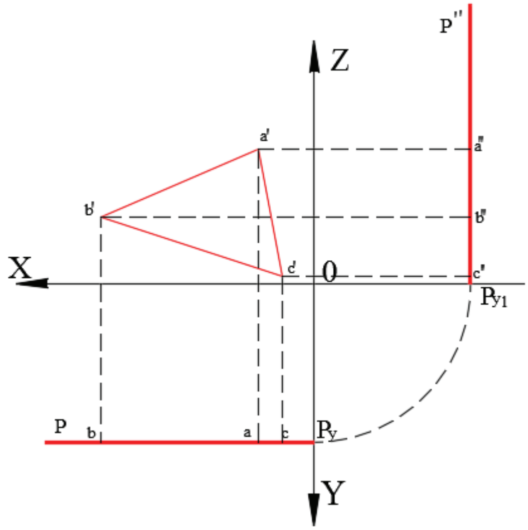
1.44. ábra. *A horizontális vetítősík és a benne levő háromszög ábrázolása triéderben*

2. A frontális vetítősík (1.45. ábra) párhuzamos a függőleges képsíkkal (merőleges a vízszintes és oldalképsíkra).

A síkban levő háromszöget a függőleges képsíkban valódi nagyságban kapjuk meg, hiszen a sík párhuzamos vele.

A sík és a háromszög vetülete a vízszintes síkban egy egyenes lesz, amely párhuzamos az x tengellyel.

A sík és a háromszög vetülete az oldalsíkban egy egyenes lesz, amely párhuzamos az z tengellyel.

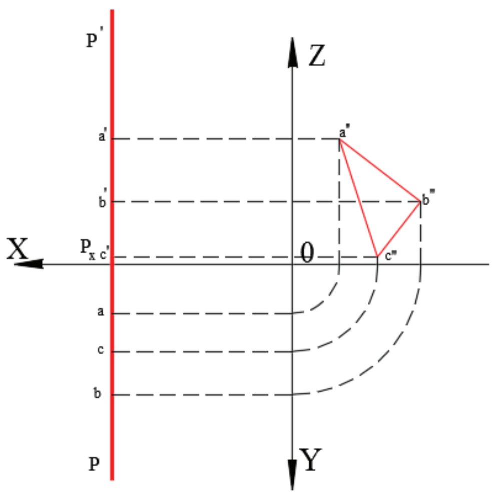


1.45. ábra. *A frontális vetítősík és a benne levő háromszög ábrázolása triéderben*

3. A profilvetítősík (1.46. ábra) párhuzamos az oldalképsíkkal (merőleges a vízszintes és a függőleges képsíkra.

A síkban levő háromszöget az oldalképsíkban valódi nagyságban kapjuk meg, hiszen a sík párhuzamos vele

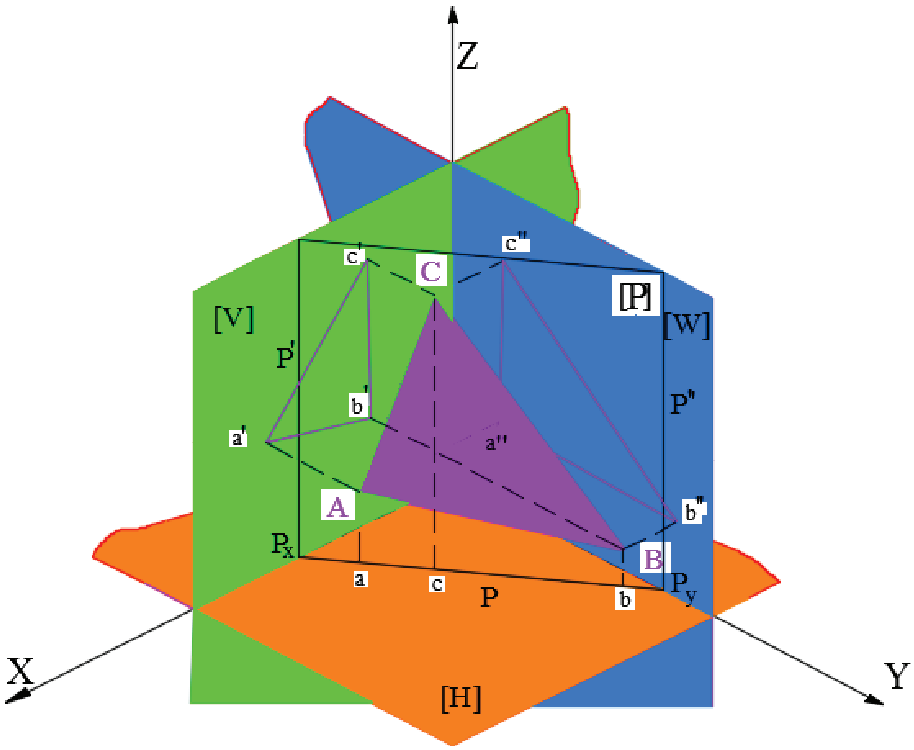
A sík és a háromszög vetülete a vízszintes és a függőleges síkban egy egyenes, amely merőleges az x tengelyre.



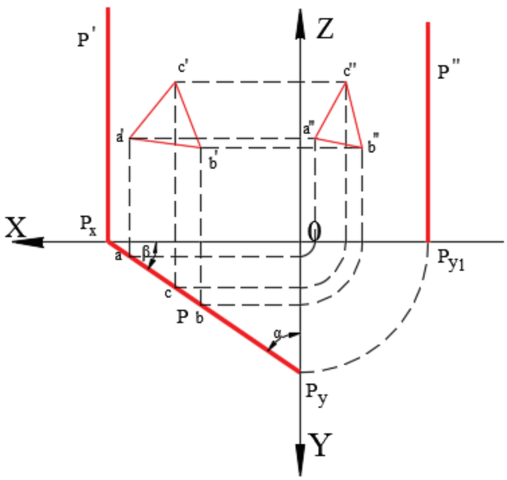
1.46. ábra. *A profilvetítősík és a benne levő háromszög ábrázolása triéderben*

4. Merőleges vetítősík a vízszintes képsíkra és a benne levő háromszög ábrázolásánál, a háromszög vetületeit torz képként láthatjuk a függőleges és oldalvetületben (1.47, 1.48. ábra), míg a vízszintes vetületben a háromszög képe egy egyenes.

A P sík függőleges és oldalvetülete merőleges az x tengelyre (1.48. ábra), és vízszintes vetülete α és β szöget zár be a merőleges oldal és függőleges képsíkkal, amelyet valódi nagyságban kapunk meg.



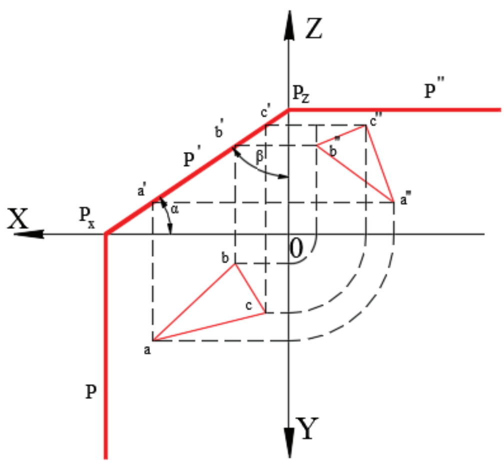
1.47. ábra. *Merőleges P vetítősík a vízszintes képsíkra és a benne levő háromszög ábrázolása*



1.48. ábra. *Merőleges vetítősík a vízszintes képsíkra és a benne levő háromszög szerkesztése*

5. Merőleges vetítősík a függőleges képsíkra és a benne levő háromszög ábrázolásánál a háromszög vetületeit torz képként láthatjuk a vízszintes és oldalvetületben (1.49. ábra), míg a függőleges vetületben a háromszög képe egy egyenes.

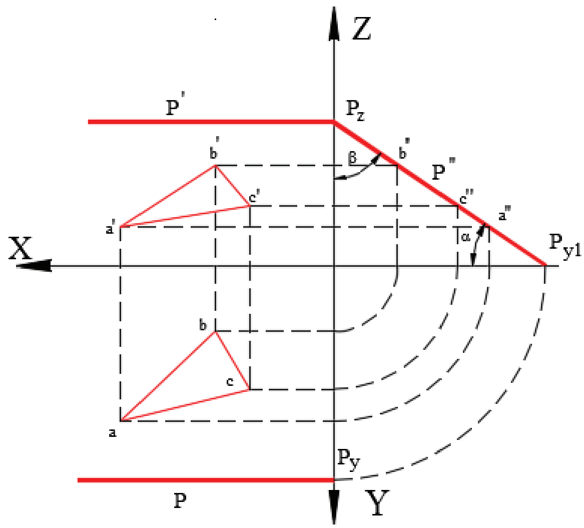
A P sík vízszintes és oldalvetülete merőleges az x, illetve a z tengelyre (1.49. ábra), és függőleges vetülete α és β szöget zár be a merőleges vízszintes és oldalképsíkkal, amelyet valódi nagyságban kapunk meg.



1.49. ábra. *Merőleges vetítősík a függőleges képsíkra és a benne levő háromszög szerkesztése*

6. Merőleges vetítősík az oldalképsíkra és a benne levő háromszög ábrázolásánál a háromszög vetületeit torz képként láthatjuk a vízszintes és függőleges vetületben (1.50. ábra), míg az oldalvetületben a háromszög képe egy egyenes.

A P sík vízszintes és függőleges vetülete párhuzamos az x tengellyel, (1.50. ábra), és oldalvetülete α és β szöget zár be a merőleges vízszintes és függőleges képsíkkal, amelyet valódi nagyságban szerkesztünk meg.



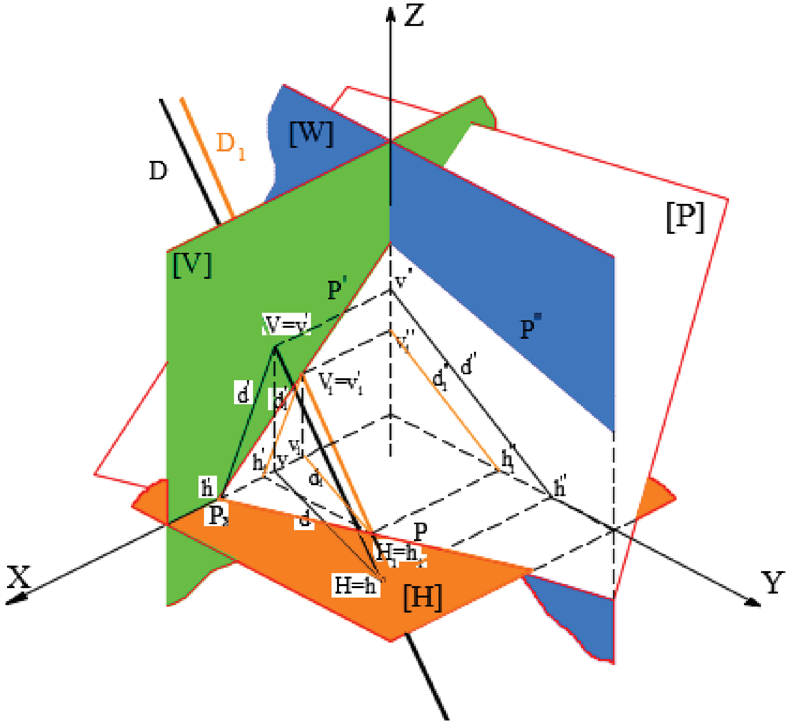
1.50. ábra. *Merőleges vetítősík az oldalképsíkra és a benne levő háromszög szerkesztése*

1.5. Az egyenes és sík relatív helyzetei

Egy egyenes helyzete a síkhoz képest lehet:
– párhuzamos a síkkal
– metsző egyenes a síkra
 • (sajátos eset) merőleges egyenes a síkra
– síkban levő egyenes

1. A síkkal párhuzamos egyenes

Definíció: Egy egyenes párhuzamos a síkkal, ha párhuzamos egy olyan egyenessel, amely benne van a síkban.



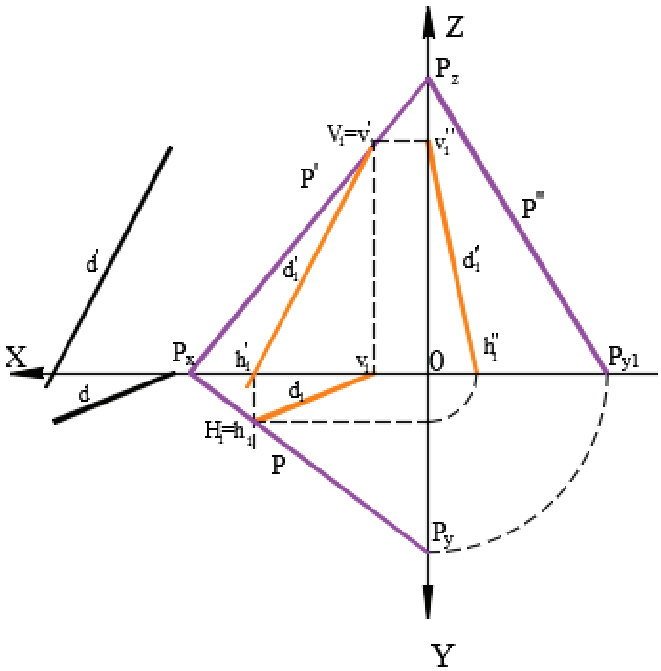
1.51. ábra. *A (D) egyenes párhuzamos a [P] síkkal*

A szerkesztés kivitelezésekor a definíciót vesszük alapul, és egy olyan egyenest ábrázolunk, amely benne van a síkban, ezt követően megrajzolunk egy külső egyenest, amely párhuzamos a síkban levő egyenessel.

Triéderben a szerkesztési menet az alábbi lépéseket tartalmazza (1.52. ábra):

– adott az egyenes vízszintes d és függőleges *d*' vetülete;
– megrajzoljuk a segéd D_1 egyenes d_1, d_1'vetületeit, párhuzamosan a megadott *D* egyenessel;
– meghatározzuk a D_1 egyenes H_1, V_1 nyompontjait;
– az x tengely valamely pontját, P_x-et összekötjük a D_1 egyenes H_1 nyompontjával, megrajzolva a sík vízszintes nyomvonalát, P, hiszen az egyenes benne van a síkban;
– P_x-et összekötjük a D_1 egyenes V_1 nyompontjával, megrajzolva a sík függőleges nyomvonalát;
– a sík oldalnyomvonalát meghatározzuk, ha összekötjük a sík P_{x1} és P_x koordinátáit.

Megjegyzés: Mivel a sík P_x koordinátáját tetszőlegesen választottuk meg, a feladatnak végtelen megoldása van, ugyanis a térben egy egyenesen keresztül D_1 végtelen síkot ábrázolhatunk!



1.52. ábra. *A (D) párhuzamos egyenes szerkesztése a [P] síkkal*

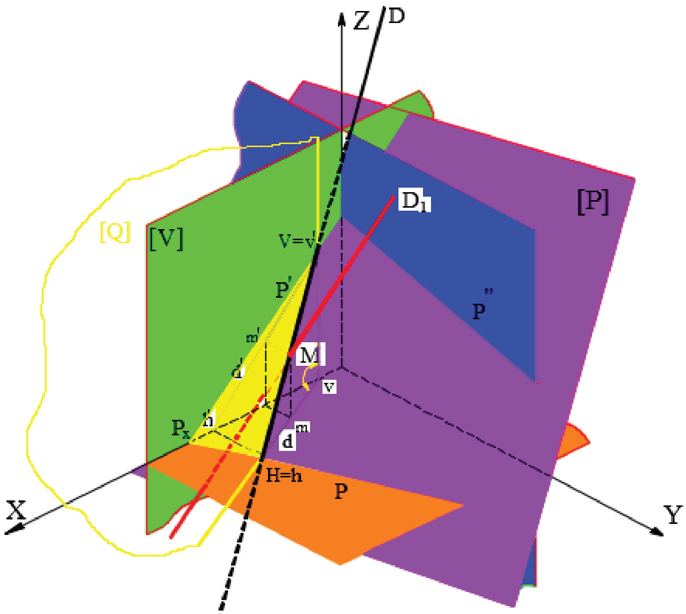
2. A síkot metsző egyenes

Definíció: Ahhoz, hogy egy egyenes metssze a síkot, szükséges, hogy a síkban levő egyenessel, közös pontjuk legyen.

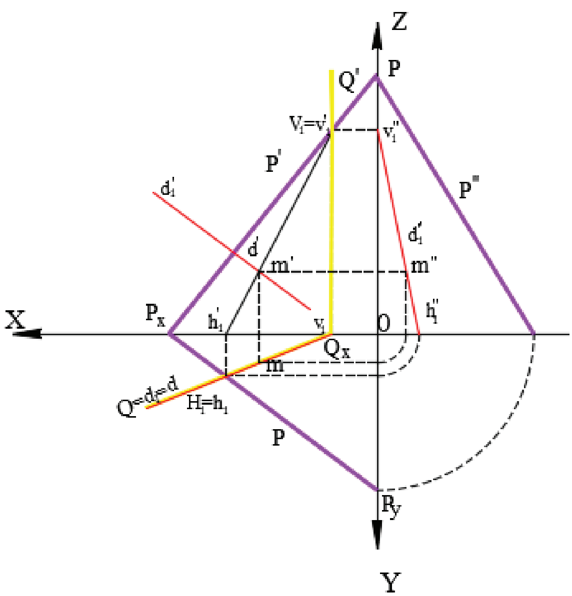
Metszési pont szerkesztése egyenes és sík esetében két egyenes metszésére egyszerűsödik le. Egyenes és sík metszőpontjának szerkesztése a következő lépéseket tartalmazza (1.54. ábra):

– A szerkesztés leegyszerűsítése érdekében egy segéd Q vetítősíkot használunk, amely tartalmazza a metsző D_1 egyenes valamelyik vetületét.

A mellékelt szerkesztésben (1.54. ábra) a Q merőleges vetítősík a vízszintes képsíkra, rajta van az egyenes vízszintes d_1 vetületén (bármely térelem, amely ebben a merőleges vetítősíkban van, vízszintes vetülete a Q sík vízszintes nyomvonalára kerül).



1.53. ábra. *A (D_1) metsző egyenes a [P] síkkal*



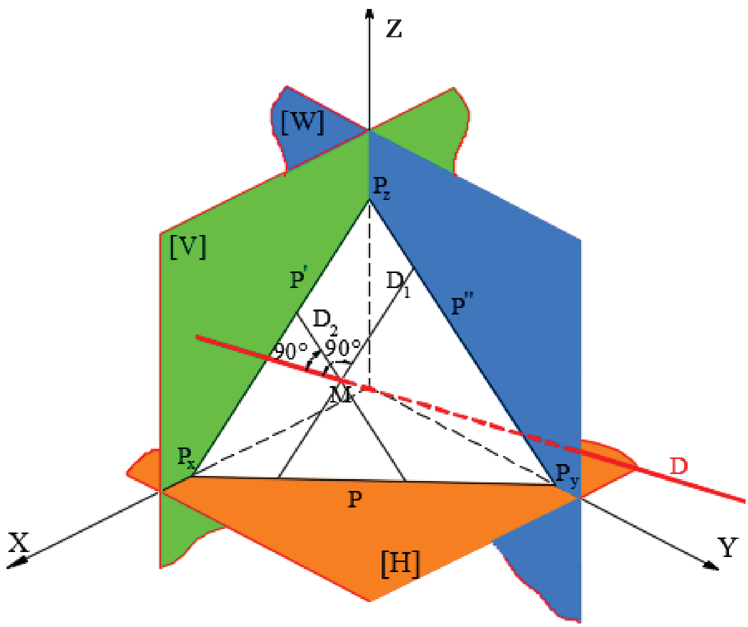
1.54. ábra. *A (D) metsző egyenes szerkesztése a [P] síkkal*

A feladat leegyszerűsödik két metsző P, Q síkra, így megkapjuk a metsző D egyenes vetületét d, d' (az egyenes vetületei az azonos jelű nyompontok összekötéséből adódik).

A metsző D egyenes függőleges h' vetülete metszi az adott D_1 egyenes függőleges vetületét a keresett m' metszőpontban, ahonnan rendező segítségével visszavetítjük az egyenes vízszintes vetületére, $d = d_1$, ami egyben a segédsík Q vízszintes nyomvonala is, megkapva a metszőpont m vízszintes képét. Rendező segítségével megszerkesztjük az oldal vetületét is, m''.

2.1. Síkra merőleges egyenes

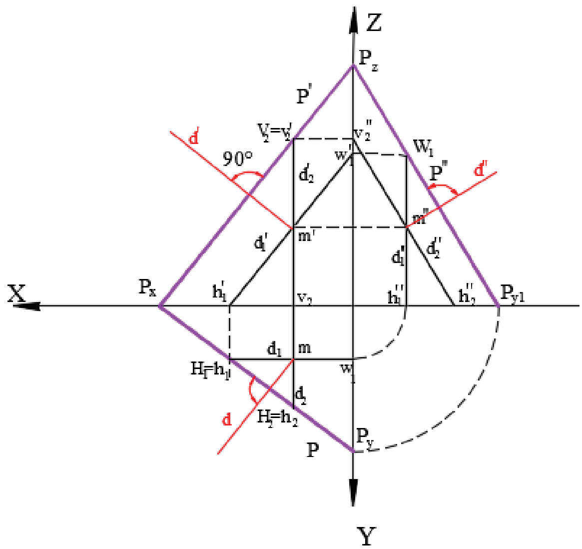
Definíció: Egy egyenes merőleges a síkra, ha merőleges a síkban levő két egyenesre.



1.55. ábra. *A (D) egyenes merőleges a [P] síkra*

Az egyenes merőleges az M ponton keresztül a P síkra (1.55. ábra), így merőleges a síkban levő D_1 frontális és D_2 profil egyenesre is.

Következésképpen a D egyenes függőleges vetülete merőleges a sík függőleges nyomvonalára, P', és az egyenes oldal vetülete merőleges a sík oldal nyomvonalára, P''.



1.56. ábra. *A (D) egyenes merőleges szerkesztése a [P] síkra*

Az M pont benne van a síkban, hiszen rajta van a síkban levő D_1 frontális és profil D_2 egyeneseken. Merőlegest bocsátunk, *d*', az *m*' pontból a sík függőleges *P*' nyomvonalára, az *m* pontból *d* merőlegest húzunk a sík vízszintes P nyomvonalára, és az *m*'' pontból *d*'' merőlegest húzunk a sík oldal *P*'' nyomvonalára.

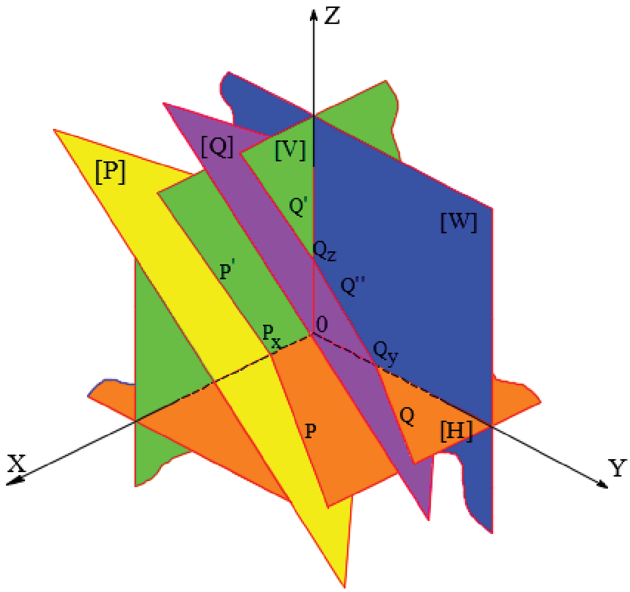
1.6. Két sík relatív helyzete

Két sík egymáshoz képest lehet párhuzamos vagy metsző.

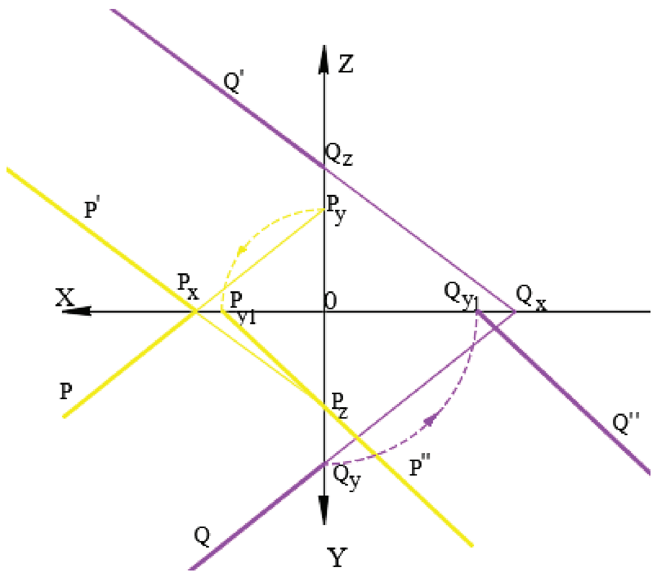
1. Párhuzamos síkok

Definíció: Ha a térben két sík párhuzamos, akkor triéderben az azonos elnevezésű nyomvonalai is párhuzamosak egymással.

A síkok vízszintes *P*, *Q*, függőleges *P*', *Q*' és oldal-*P*'', *Q*'' nyomvonalaik egymással párhuzamosak.



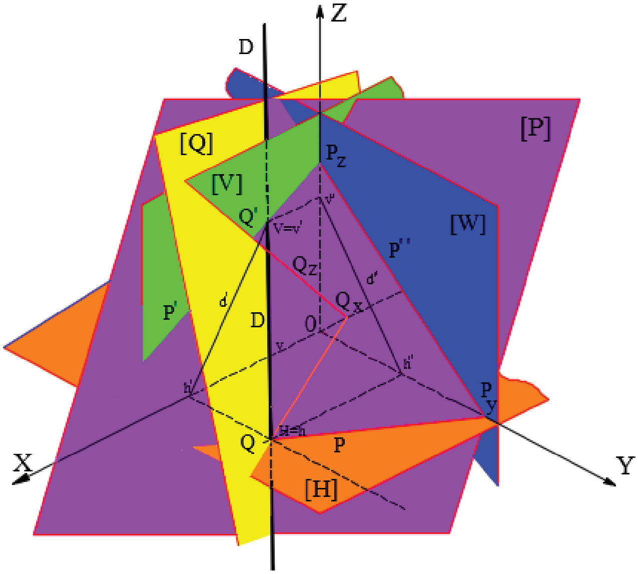
1.57. ábra. *Két párhuzamos [P], [Q] sík ábrázolása*



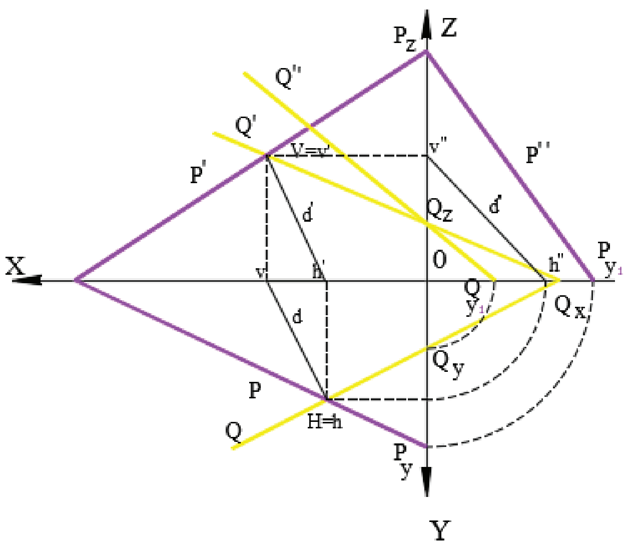
1.58. ábra. *Párhuzamos [P], [Q] síkok szerkesztése triéderben*

2. Metsző síkok

Definíció: Két sík metszi egymást egy egyenesben.



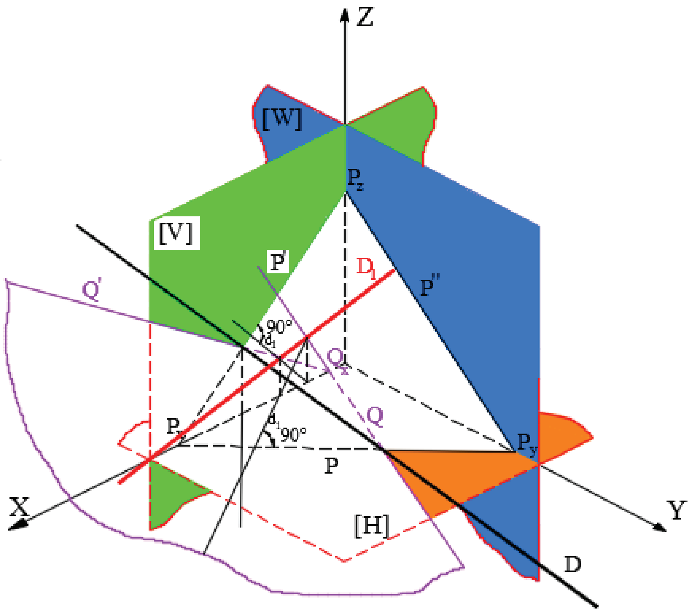
1.59. ábra. *Metsző síkok [P], [Q] ábrázolása*



1.60. ábra. *Metsző síkok [P], [Q] szerkesztése triéderben*

A metsző egyenes vetületeinek meghatározásához kiindulunk a síkok nyomvonalainak ismeretéből. A síkok vízszintes nyomvonalának metszőpontját, $H=h$ levetítjük a függőleges képsíkra, így megkapva a h' pontot. A síkok függőleges nyomvonalának metszőpontját, $V=v'$ levetítjük a vízszintes képsíkra, megkapjuk a v pontot, illetve ezen pontok vetületei az oldalképsíkra megadják a h'',v'' pontokat. Az azonos jelölésű pontok egyesítése adja meg a metsző egyenes vetületeit: d, d', d''.

2.1. Merőleges síkok



1.61. ábra. *[P], [Q] merőleges síkok ábrázolása*

A metsző síkok egyedi esete, amikor merőlegesek egymásra (1.61. ábra).

Definíció: Két sík merőleges egymásra, ha az egyik síkban [Q] fekvő egyenes, D_1 merőleges a másik síkra [P].

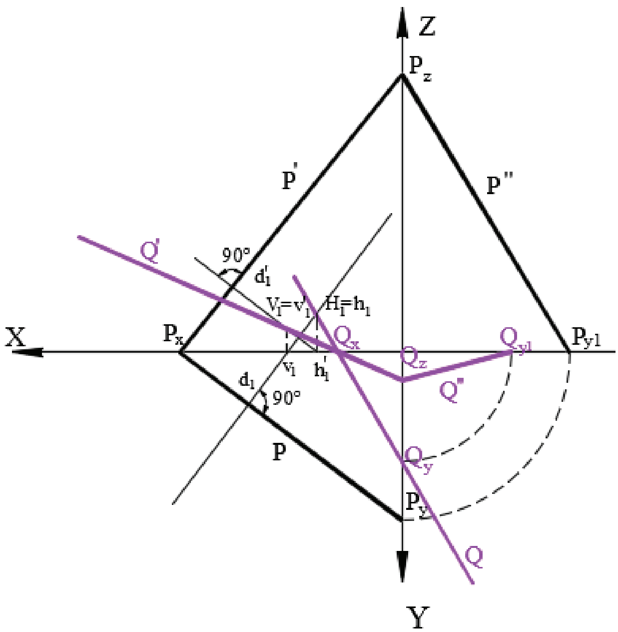
A D_1 egyenes vízszintes vetülete, d_1 merőleges a P sík vízszintes nyomvonalára.

Meghatározzuk a D_1 egyenes H_1 nyompontját, amely rajta kell legyen a Q sík vízszintes nyomvonalán, hiszen benne van a Q síkban. Ezt levetítjük a képsíkra, meghatározva a h_1' vetületét (1.62. ábra).

A D_1 egyenes vízszintes vetülete, d_1 metszi a függőleges képsíkot v_1 pontban, amit visszavetítünk a Q sík függőleges nyomvonalára, meghatározva a V_1 nyompontot a Q' sík függőleges nyomvonalán.

Ezt követően a h_1' és v_1' pontok összekötése megadja a D_1 egyenes függőleges vetületét, d_1'.

A d_1', az egyenes függőleges vetülete merőleges kell legyen a P sík függőleges nyomvonalára, P'.



1.62. ábra. *A [P] síkra merőleges [Q] sík szerkesztése triéderben*

1.7. Gyakorlófeladatok a sík ábrázolásához

1. Ábrázolja a sík nyomvonalait triéderben, ha ismerjük:

a) a sík horizontális $D_1 \begin{cases} A(10,10,5) \\ B(20,5,5) \end{cases}$ egyenesét és egy rá nem illeszkedő C(5,5,15) pontját!

b) a sík frontális $D_1 \begin{cases} A(-5,15,15) \\ B(15,15,5) \end{cases}$ egyenesét és egy rá nem illeszkedő C(5,5,15) pontját!

c) Határozza meg:
- a síknak a vízszintes képsíkhoz képest legnagyobb lejtő szögű egyenesét az a) pont esetén!
- a síknak a függőleges képsíkhoz képest legnagyobb lejtő szögű egyenesét a b) pont esetén!

2. Adott három nem kollineáris pont, az A(35,5,30), a B (10,20,5) és a C(20,10,20).
a) Ábrázolja a három pontra illeszkedő sík nyomvonalait triéderben!
b) Ábrázolja a síknak a vízszintes képsíkhoz képest legnagyobb lejtőjű D egyenesét!

3. Adott egy sík $D \begin{cases} A(20,20,-5) \\ B(10,10,10) \end{cases}$ legnagyobb lejtőjű egyenese a vízszintes képsíkhoz képest.
A D egyenes segítségével ábrázolja a sík nyomvonalait triéderben!

4. Adott egy $D \begin{cases} A(10,10,5) \\ B(20,-5,15) \end{cases}$ legnagyobb lejtőjű egyenes a függőleges képsíkhoz képest!
Az egyenes segítségével ábrázolja a sík nyomvonalait triéderben!

5. Adott egy $D \begin{cases} A(5,15,10) \\ B(20,10,5) \end{cases}$ legnagyobb lejtőjű egyenes az oldalnézeti képsíkhoz képest.
Az egyenes segítségével ábrázolja a sík nyomvonalait triéderben!

6. Ábrázolja két párhuzamos egyenes által meghatározott sík nyomvonalait triéderben!

7. Ábrázolja két metsző egyenes által meghatározott sík nyomvonalait triéderben!

8. Adott egy P sík $OP_xP = -55°$, $OP_xP' = 60°$ $P_x(50,0,0)$.
a) Ábrázolja a síkot triéderben;
b) Ábrázolja a sík z = 10[mm] magasságban elhelyezkedő D_1 horizontális egyenesét!
c) Ábrázoljon egy merőleges egyenest triéderben az $M(10,y_M,z_M)$ ponton keresztül, amely rajta van a D_1 horizontális főegyenesen és a D_2 merőleges egyenesen, és amely szintén benne van a síkban.

9. Adott az M(15,10,15) pont, amelyre illesszen egy D_1 egyenest, ami merőlegesen metszi az x tengelyt és egy olyan D_2 egyenest, ami a B(10,30,5) ponton átmenő D_3 profilegyenest metszi merőlegesen!
Ábrázolja a D_1, D_2 egyenesek által meghatározott sík nyomvonalait triéderben!

10. Ábrázoljon egy adott x magasságban egy olyan D_1 horizontális egyenest, amely a 9. pontban meghatározott D_2, D_3 metsző egyenesekre támaszkodik (merőlegesen metszi őket)!

11. Adottak a $D_1 \begin{cases} A(40,10,5) \\ B(15,5,20) \end{cases}$, $D_2 \begin{cases} E(10,20,5) \\ F(30,15,25) \end{cases}$ kitérő egyenesek. Ábrázoljon egy $x = 15$[mm] hosszúságú szakaszt, amely párhuzamos a vízszintes síkkal és metszi a D_1, D_2 egyeneseket!

12. Adott egy P és Q sík az $OP_xP = -125°$, $OP_xP' = 130°$és $P_x(10,0,0)$, valamint a $OQ_xQ = -90°$, $OQ_xQ' = 60°$ és $Q_x(60,0,0)$ adatokkal.
Ábrázolja a két sík metszésvonalát triéderben!

13. Adott egy P és Q sík az $OP_xP = -45°$, $OP_xP' = 90°$, $P_x(10,0,0)$ és a $OQ_xQ = -90°$, $OQ_xQ' = 45°$, $Q_x(45,0,0)$ adatokkal.
Ábrázolja a két sík metszésvonalát triéderben!

14. Adott egy P és Q sík az $OP_xP = -135°$, $OP_xP' = 120°$, $P_x(10,0,0)$ és az $OQ_xQ = -50°$, $OP_xP' = 120°$, $Q_x(30,0,0)$ adatokkal.
Ábrázolja a két sík metszésvonalát triéderben!

15. Adott egy P és Q sík az $OP_xP = -90°$, $OP_xP' = 30°$, $P_x(10,0,0)$ és az $OQ_xQ = -90°$, $OQ_xQ' = 60°$, $Q_x(40,0,0)$ adatokkal.
Ábrázolja a két sík metszésvonalát triéderben!

16. Ábrázolja azon [P] sík nyomvonalát, amely átmegy a D egyenesen és párhuzamos az x tengellyel, ha $D \begin{cases} A(5,25,25) \\ B(20,5,10) \end{cases}$.

Határozza meg a [P] és [Q] síkok D_1 metszésvonalát, ha a Q síkot egy D_2 a függőleges képsíkra merőleges egyenes és a C(15, 0, 0) pont határozza meg!

17. Ábrázolja a P és Q sík metszésvonalát a horizontális és frontális segédsíkok felhasználása nélkül, ha a síkok vízszintes nyomvonalai a triéderben nem metszik egymást!

18. Ábrázolja a P és Q sík metszésvonalát, ha $OP_xP = -30°$, $OP_xP' = 45°$, $P_x(50,0,0)$, a Q síkot pedig a D a vízszintes képsíkhoz képest legnagyobb lejtőjű egyenese (esésvonala) határozza meg a $D \begin{cases} A(20,5,25) \\ B(10,10,5) \end{cases}$ esetén!

19. Adott egy P és Q sík az $OP_xP = -45°$, $OP_xP' = 35°$, $P_x(50,0,0)$ és az $OQ_xQ = -130°$, $OQ_xQ' = 120°$, $Q_x(5,0,0)$ adatokkal, valamint az $A(30,10,10) \in P$ pont. Ábrázolja az A pontra illeszkedő, Q síkkal párhuzamos D egyenest!

20. Ábrázolja az ABC háromszög és az EFGH négyszög metszetét, majd határozza meg a láthatóságukat a képsíkokra vonatkozóan!

$$\begin{cases} A(30,5,5) \\ B(15,20,20) \\ C(65,45,20) \end{cases} \quad \begin{cases} E(30,5,5) \\ F(15,20,20) \\ G(65,45,20) \\ H(65,45,20) \end{cases}$$

21. Adott egy P sík, az $OP_xP' = -45°$, $OP_xP' = 50°$, $P_x(55,0,0)$ és egy D egyenes.

$$D \begin{cases} A(15,10,5) \\ B(35,15,15) \end{cases}$$

Határozza meg a P sík és a D egyenes M metszéspontját!

22. Adott egy P sík az $OP_xP = -55°$, $OP_xP' = 60°$, $P_x(55,0,0)$ és egy D horizontális egyenes a V(10,0,10) függőleges nyompontjával és a rá illeszkedő $A(35, 25, z_A)$ pontjával.

Határozza meg a P sík és a D egyenes M metszéspontját!

23. Adott egy P sík a $OP_xP = -60°$, $OP_xP' = 50°$, $P_x(50,0,0)$ adatokkal és egy D egyenes, amelynek ismert a H(10,25,0) vízszintes és V(40,0,25) függőleges nyompontja.

Határozza meg a P sík és a D egyenes M metszéspontját!

24. Adott egy P sík az $OP_xP = -130°$, $OP_xP' = 130°$, $P_x(5,0,0)$ és egy D egyenes a

$D \begin{cases} A(15,10,10) \\ B(25,5,5) \end{cases}$ adatokkal.

Határozza meg a P sík és a D egyenes M metszéspontját!

25. A P illeszkedik az A(20,20,15) pontra és az x tengelyre. A D egyenesnek ismert a H(55, 20, 0) vízszintes és a V(10, 0, 35) függőleges nyompontja. Határozza meg a D egyenes és a P sík M metszéspontát!

26. Adott a $D \begin{cases} A(5,15,-5) \\ B(40,10,20) \end{cases}$ és a $D_1 \begin{cases} C(15,10,15) \\ E(35,0,0) \end{cases}$ egyenes. A P sík illeszkedik az x tengelyre és a D_1 egyenesre.

Határozza meg a P sík és a D egyenes M metszéspontját!

27. Adottak a D_1, D_2 egyenesek: $D_1 \begin{cases} B(20,10,10) \\ C(25,5,15) \end{cases}$, $D_2 \begin{cases} E(35,10,10) \\ F(45,15,-5) \end{cases}$.

Szerkessze meg az A(10,20,10) pontra és a D_2 egyenesre illeszkedő P sík és D_1 egyenes M metszéspontját, a sík nyomvonalainak felhasználása nélkül!

28. Adott egy ABC háromszög $\begin{cases} A(40,15,15) \\ B(10,5,5) \\ C(25,35,25) \end{cases}$ és egy $D \begin{cases} E(5,-10,35) \\ F(30,30,5) \end{cases}$ egyenes.

Határozza meg a D egyenes és az ABC háromszög M metszéspontját!

29. Határozza meg a P sík és a D egyenes M metszéspontját, felhasználva Monge ábrázolási módszerét, ha $D \begin{cases} A(10,10,-5) \\ B(25,20,15) \end{cases}$, $P_x(35,0,0)$, $OP_xP = -45°$, $OP_xP' = 45°$!

30. Adott egy D egyenes a $\begin{cases} B(5,10,-5) \\ C(30,20,15) \end{cases}$ pontjaival és az A(25, 10, 5) pont, illetve egy P sík az $OP_xP = -35°$, $OP_xP' = 45°$, $P_x(45,0,0)$ adatokkal.

Határozza meg azon D_1 egyenes vetületeit, amely átmegy az A ponton, metszi az adott D egyenest és párhuzamos a P síkkal!

2. Megoldástípusok az ábrázoló geometriában

Definíció: Az ábrázoló geometria módszerei segítségével átalakítjuk, megváltoztatjuk a már meglévő vetületet, célként tekintve a geometriai alakzatok és távolságok valódi nagyságának meghatározását.

Megoldási módszerek az ábrázoló geometriában:

1. transzformálás,
2. forgatás,
3. képsíkba forgatás.

2.1. Transzformálás

A transzformálás egy olyan eljárás, amely segítségével új képet szerkesztünk az alakzatról egy másik képsíkrendszerben. Az eljárás módszere, hogy a vetítésre használt képsíkokat változtatjuk. A vetítési képsíkok változtatásánál az egyik képsík mindig fix marad, míg az ábrázolt elemet egy új képsíkra vetítjük.

A két képsíkos ábrázolás mellett egy új képsíkot vezetünk be, amelyet valamelyik adott képsíkra merőlegesen kell felvenni (2.1. ábra).

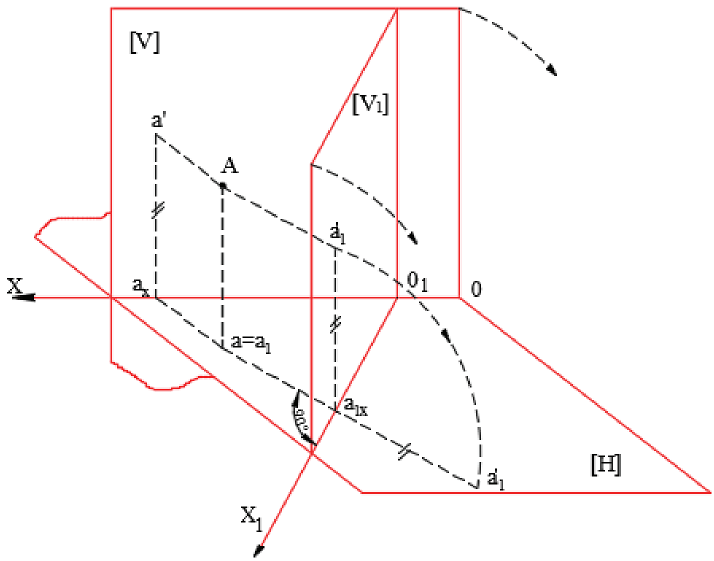
Szükséges és elégséges feltétel, hogy az új képsík legalább az egyik képsíkra legyen merőleges.

2.1.1. A függőleges képsíkról transzformálás

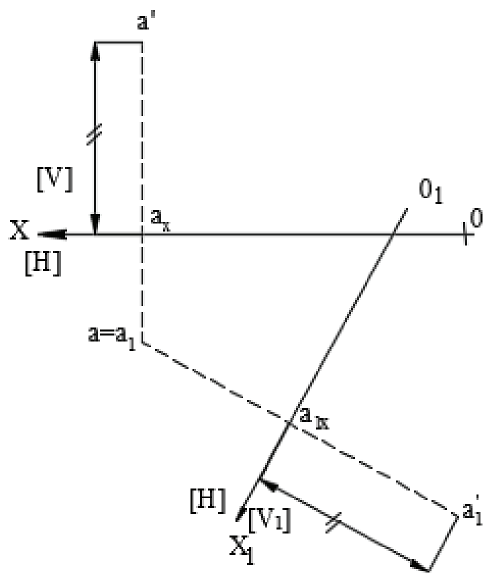
2.1.1.1. A pont függőleges transzformálása

Az A pont transzformációjánál egy új képsíkot vezetünk be, így a HV képsíkrendszerről áttérünk a HV_1 képsíkrendszerre. Az új V_1 képsík merőleges a meglévő H képsíkra, metszésvonaluk az új O_1X_1 képsíktengely. Az A pont vetülete az új V_1 függőleges képsíkon az a_1' pont, míg a vízszintes vetülete nem változik, azaz $a = a_1$. Megfigyelhető, hogy a függőleges transzformáláskor a pont vízszintes vetülete és a pont magassága állandó marad, míg a pont távolsága és függőleges vetülete változik az új képsíkrendszerben.

A képsíkok egyesítése az ismert forgatásnak megfelelően történik. Az új V_1 képsíkot az O_1X_1 tengely körül beforgatjuk a vele képsíkrendszert alkotó H képsíkba (2.2. ábra). Az új képsík O_1X_1 tengelyéhez képest a pont vízszintes vetülete, $a = a_1$ ugyanazon a rendezőn van, mint az a_1', tehát $a_1 a_{1x} \perp O_1X_1$ és $a_{1x} a_1' = a_x a'$, vagyis az új kép rendezőjének nagysága megegyezik az elmaradó kép rendezőjével.

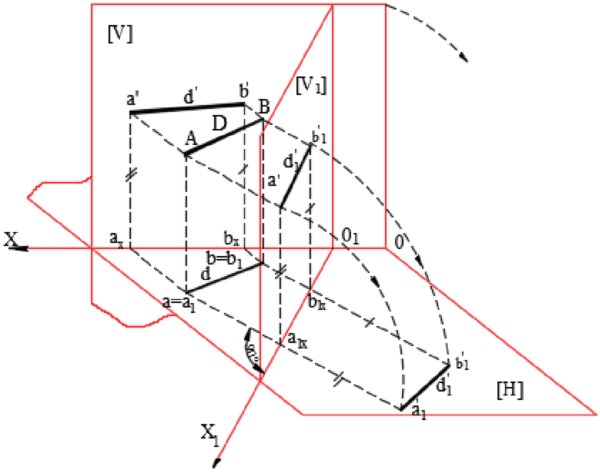


2.1. ábra. *A pont transzformálása*



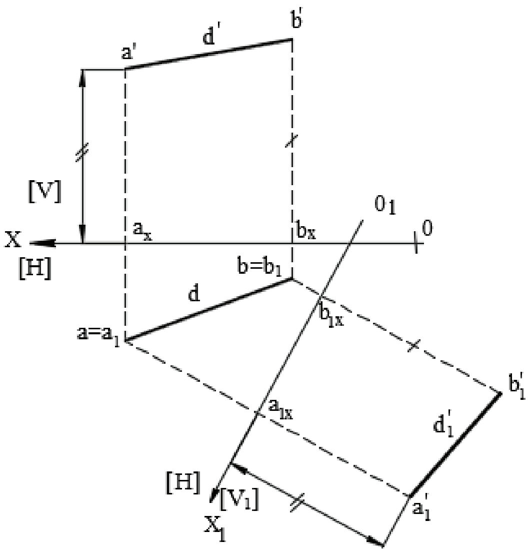
2.2. ábra. *A pont függőleges transzformálása diéderben*

2.1.1.2. Az egyenes függőleges transzformálása



2.3. ábra. *Az egyenes transzformálása*

Az egyenes transzformálása két pontjának segítségével történik. Az egyenes transzformációja kiindul (2.3. ábra) az egyenes H képsíkra eső vetületéből. A H vízszintes képsíkra V_1 merőleges képsík helyzetét az új O_1X_1 tengely segítségével jelöljük meg. Az általános helyzetű egyenest egy másik szemszögből ábrázoljuk (2.4. ábra).



2.4. ábra. *Az egyenes függőleges transzformálása diéderben*

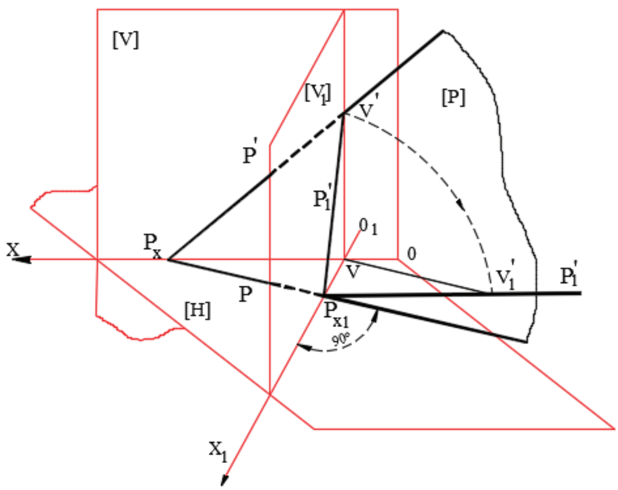
Az egyenes $a_1'b_1'$ vetületét az új V_1 függőleges képsíkban úgy kapjuk meg (2.4. ábra), hogy az egyenes vízszintes vetületéből, amely fix marad, rendezőt bocsátunk az új képsík tengelyére. Ismerve, hogy a függőleges képsík transzformálásakor a pontok magasságértéke állandó marad az új képsíkban is, ennek következtében az új vetület $a_1'b_1'$ képe ugyanakkora magasságban lesz ábrázolva az új tengelytől, mint az $a'b'$ pontok képei a régi tengelytől.

A pontok szerkesztett $a_1'b_1'$ képeinek összekötése által kapjuk meg az új képsíkra eső d_1'vetületét.

2.1.1.3. *A sík függőleges transzformálása*

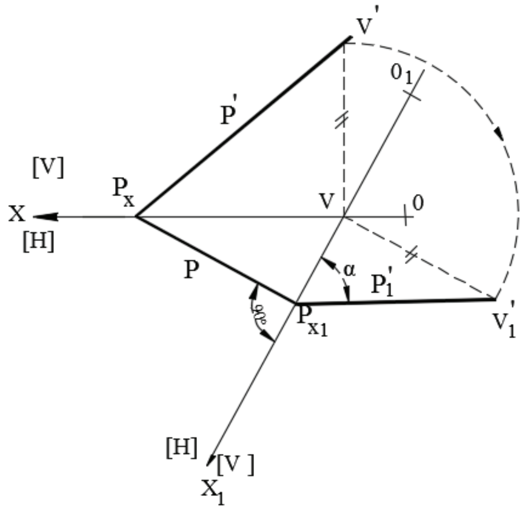
A sík transzformálásának célja, hogy általános helyzetű síkokat vetítősíkká alakítsunk, ezzel meghatározva a képsíkkal bezárt szögének valódi nagyságát, de két párhuzamos sík közti távolság meghatározására is alkalmazzuk stb.

A sík függőleges transzformálása által a V képsíkról térünk át a V_1 képsíkra, amelynek eredményeképpen az új HV_1 képsíkrendszerben a P sík a V_1-re merőleges vetítősíkká alakul, így az új V_1 képsíkot egy P_1' nyomvonalban P_1' metszi.



2.5. ábra. *A sík transzformálása*

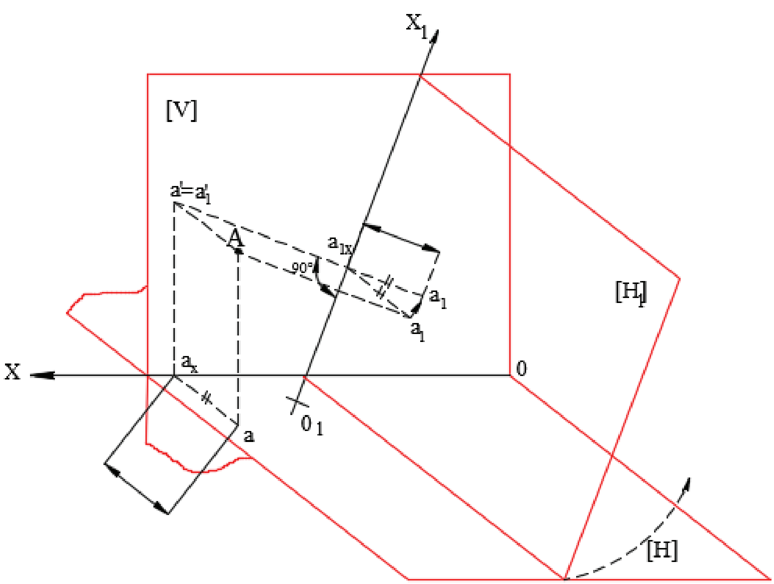
Az új képsík O_1X_1 tengelyét a vízszintes P nyomvonalra merőlegesen rajzoljuk meg (2.5. ábra). Az új tengely metszi az 0x tengelyt egy v pontban, és ebből a pontból rendezőt bocsátunk az x tengelyre, így megkapjuk a sík függőleges nyomvonalán levő v' pontot. A v' pont függőleges transzformálása által meghatározzuk a v_1' pont függőleges vetületét az új képsíkban. Az új képsík tengelye metszi a sík vízszintes nyomvonalát egy P_{x1} pontban. A P sík merőleges vetítősíkká alakult az új képsíkban.



2.6. ábra. *A sík függőleges transzformálása diéderben*

2.1.2. A vízszintes képsíkról transzformálás

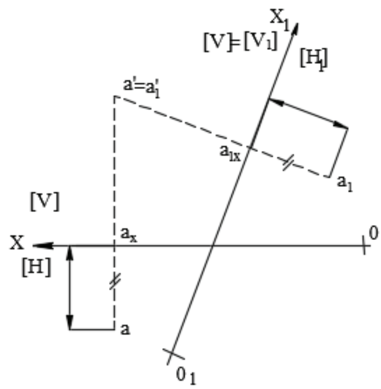
2.1.2.1. A pont vízszintes transzformálása



2.7. ábra. *A pont transzformálása*

Az A pont transzformációjánál egy új képsíkot vezetünk be, így a HV képsíkrendszerről áttérünk a H_1V képsíkrendszerre (2.7. ábra). Az új H_1 képsík merőleges a meglévő V képsíkra, amely metszete az új O_1X_1 képsík tengely. Az A pont vetülete az új H_1 vízszintes képsíkra az a_1 pont, függőleges vetülete nem változik: $a' = a_1$. Megfigyelhető, hogy a vízszintes transzformáláskor a pont függőleges vetülete és a pont távolsága állandó marad, míg a pont magassága és vízszintes vetülete változik az új képsíkrendszerben.

A képsíkok egyesítése az ismert forgatásnak megfelelően történik. Az új képsíkot, H_1 az O_1X_1 tengely körül beforgatjuk a vele képsíkrendszert alkotó V képsíkba (2.8. ábra). Az új képsík tengelyéhez, O_1X_1 képest a pont függőleges vetülete $a' = a_1$ ugyanazon a rendezőn van, mint az a_1, tehát $a_1'a_{1x} \perp O_1X_1$ és $a_{1x}a_1 = a_xa$, vagyis az új kép rendezője megfelel az elmaradó kép rendezőjének.

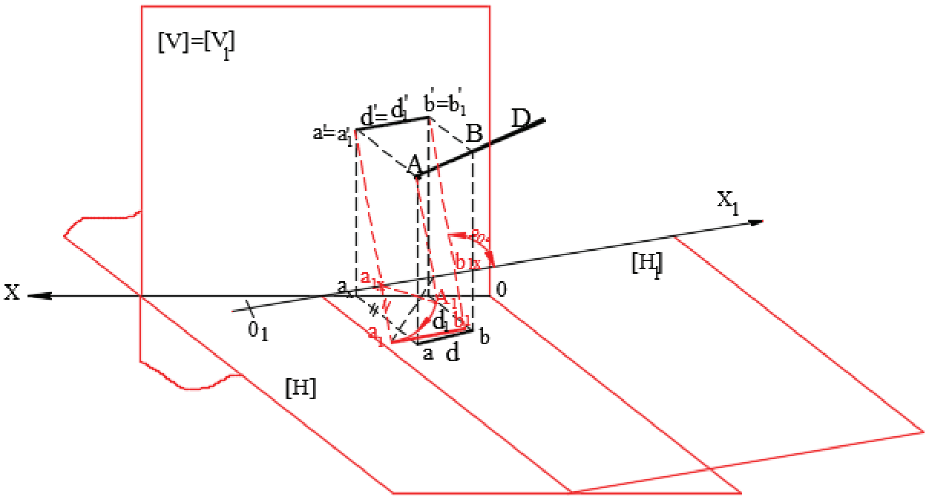


2.8. ábra. *A pont vízszintes transzformálása diéderben*

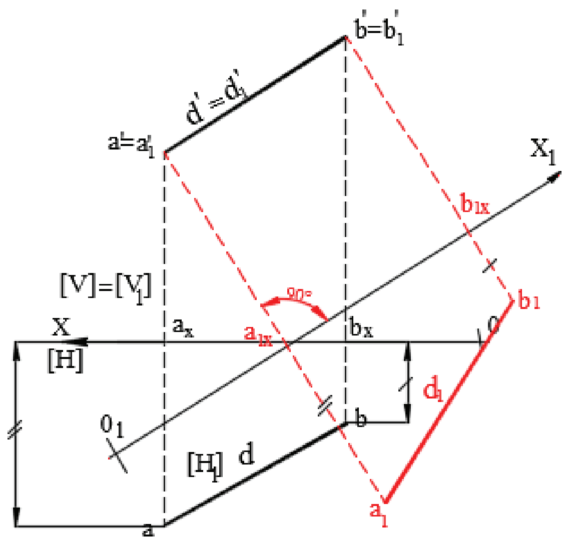
2.1.2.2. Az egyenes vízszintes transzformálása

Az egyenes transzformálása két pontjának segítségével történik. Az egyenes transzformációja kiindul (2.9. ábra) az egyenes V képsíkra eső vetületéből. A V függőleges képsíkra H_1 merőleges képsík helyzetét az új O_1X_1 tengely segítségével jelöljük meg. Az általános helyzetű D egyenest transzformáljuk át egy horizontális főegyenessé (2.9. ábra, 2.10. ábra).

Az egyenes vízszintes vetületét, a_1b_1 az új H_1 függőleges képsíkban megkapjuk (2.10. ábra), ha az egyenes függőleges vetületéből, amely fix marad, rendezőt bocsátunk az új képsík tengelyére. Az új képsík tengelyét úgy ábrázoljuk, hogy párhuzamos legyen az egyenes függőleges vetületéhez képest, hiszen egy partikuláris horizontális egyenessé transzformáljuk át az új képsíkban. Ismerve, hogy a vízszintes képsík transzformálásakor a pontok távolságértéke állandó marad az új képsíkban is, ennek következtében az új vetület a_1b_1 képe ugyanakkora távolságban lesz ábrázolva, mint az ab pontok képei a tengelytől. A pontok szerkesztett a_1b_1 képeinek összekötése által kapjuk meg az új képsíkra eső d_1 vetületét.



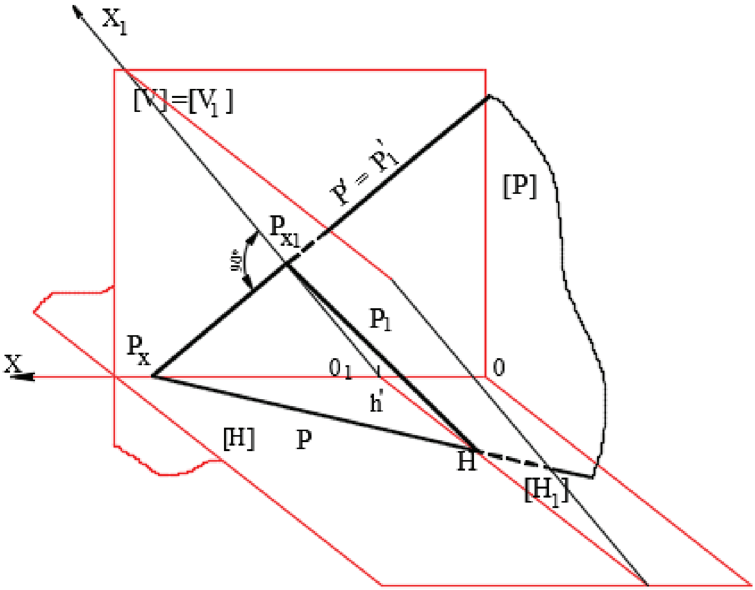
2.9. ábra. *Az egyenes vízszintes transzformálása*



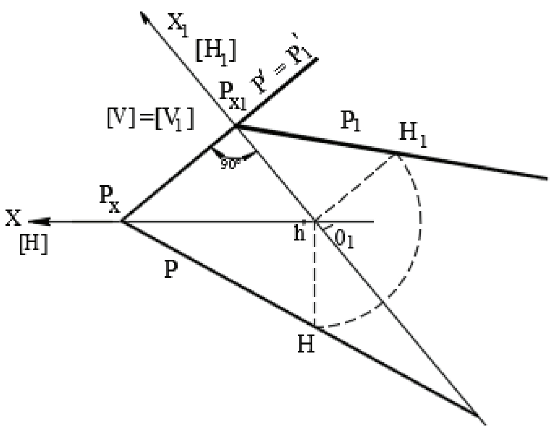
2.10. ábra. *Az általános egyenes vízszintes transzformálása horizontális főegyenessé*

2.1.2.3. A sík vízszintes transzformálása

A sík vízszintes transzformálása által a H képsíkból térünk át a H_1 képsíkba, amelynek eredményeképpen az új H_1V képsíkrendszerben a P sík merőleges vetítősíkká alakul, így az új H_1 képsíkot egy P_1 vízszintes nyomvonalban metszi.



2.11. ábra. *A sík vízszintes transzformálása*



2.12. ábra. *A sík vízszintes transzformálása diéderben*

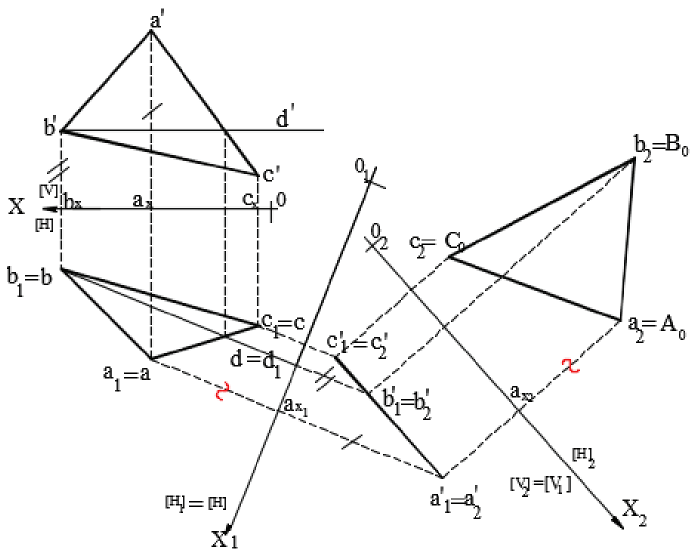
Az új képsík O_1X_1 tengelyét a függőleges P' nyomvonalra merőlegesen rajzoljuk meg (2.11. ábra, 2.12. ábra). Az új tengely metszi az 0x tengelyt egy h' pontban, és ebből a pontból rendezőt bocsátunk az x tengelyre, így megkapjuk a sík vízszintes nyomvonalán levő H nyompontot. A H pont vízszintes transzformálása által meghatározzuk a H_1 pont (2.12. ábra) vízszintes vetületét az új képsíkban. Az új képsík tengelye metszi a sík függőleges nyomvonalát egy P_{x1} pontban. Az új képsík tengelye metszi a P sík vízszintes nyomvonalát egy P_{x1} pontban. A P sík merőleges vetítősíkká alakul az új vízszintes képsíkra.

2.1.2.4. Példák

a) A síkidom valódi nagyságának szerkesztése

Ahhoz, hogy a síkidomot valódi nagyságban lássuk, szükséges feltétel, hogy valamelyik képsíkkal párhuzamos síkba transzformáljuk.

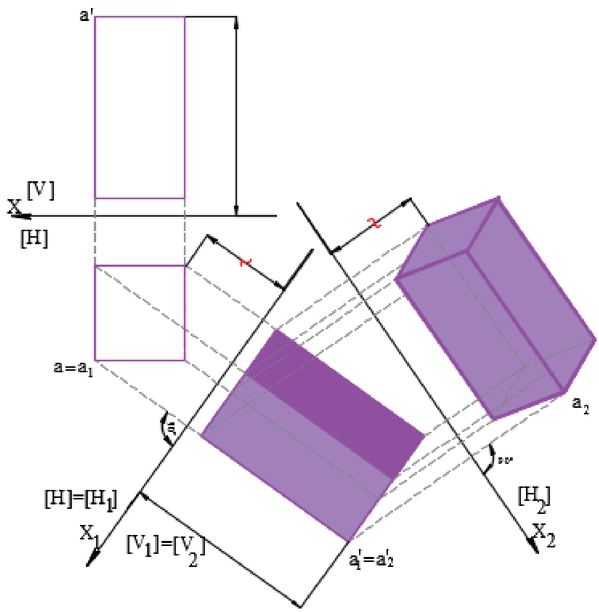
Ennek a célnak az érdekében első lépésként, az egyik képsíkban a síkidomot vetítősíkban egyenes szakaszként kell ábrázolni. Az egyenes szakasz elérése céljából szükséges, hogy az új képsík merőleges legyen a síkidom síkjára.



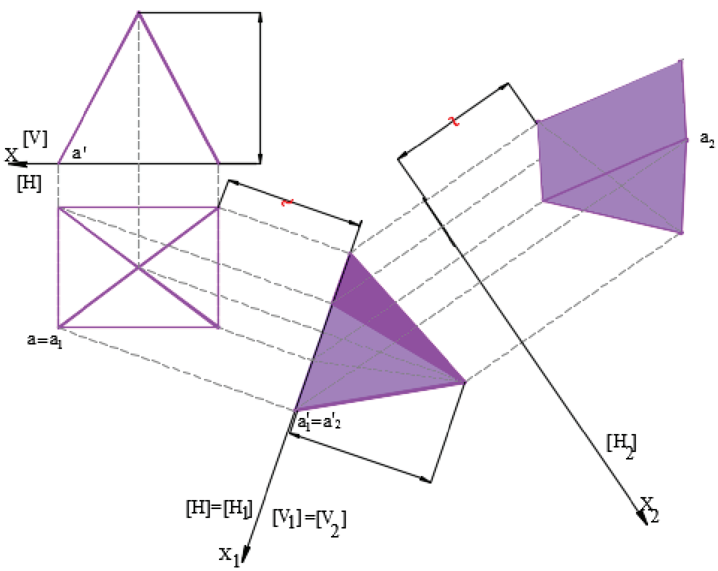
2.13. ábra. *Síkidom valódi nagyságának szerkesztése*

A síkidom síkjára merőleges képsík merőleges a síkidom síkjában levő összes egyenesre. A szerkesztés céljának elérése érdekében, egy partikuláris D (horizontális) főegyenest ábrázolunk a síkidom síkjában (2.13. ábra). Végül a síkidomszakasz képével párhuzamosan vesszük fel az új, O_2-ből kiinduló x_2 tengelyt.

b) Hasáb, gúla térbeliségének a szemléltetése transzformáció segítségével



2.14. ábra. *Hasáb térbeliségének szerkesztése*



2.15. ábra. *Gúla térbeliségének szerkesztése*

2.2. Forgatás

Forgatás módszerével a térelem vetülete egy sajátos (partikuláris) helyzetbe kerül a képsíkhoz viszonyítva.

A térelem minden pontja körpályát ír le a forgatás tengelyére merőleges síkban.

A leírt körívpálya középpontja a forgástengely és a forgatás síkjának a metszéspontjában van, amelynek sugara megegyezik a forgatni kívánt pont és a forgástengely közti távolság nagyságával. Ajánlott, hogy a forgástengely merőleges legyen az egyik vetítősíkra.

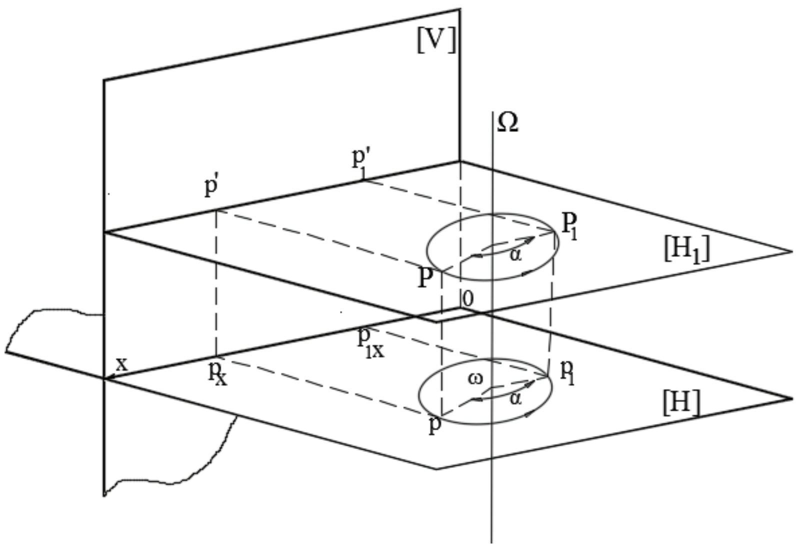
Diéderben kétféle forgástengelyt alkalmazunk:

1. Horizontális tengely, amely merőleges a vízszintes képsíkra, és a forgatásban levő térelem minden pontjának magasságértéke állandó marad.

2. Frontális tengely, amely merőleges a függőleges képsíkra, és a forgatásban levő térelem minden pontjának távolságértéke állandó marad.

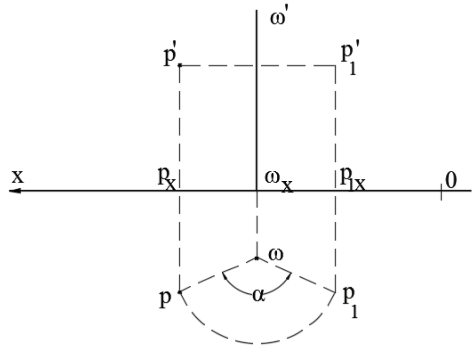
2.2.1. Horizontális forgatás

2.2.1.1. A pont horizontális forgatása



2.16. ábra. *A pont horizontális forgatása*

Az Ω forgástengely merőleges a vízszintes képsíkra. A P pontot az α szögnek megfelelően a tengely, Ω körül elforgatjuk a [H_1] || [H] síkban (2.16. ábra). A P pont által leírt körív síkja egy [H_1] horizontális sík, és a leírt α szöget a vízszintes [H] képsíkban valódi nagyságban kapjuk meg. A pont függőleges vetülete a [H_1] síknak a [V]-re eső nyomvonalán helyezkedik el. Diéderben a P pont függőleges vetülete, p' párhuzamosan mozog az 0X tengellyel, és vízszintes vetülete, p, α szöggel egy körívet ír le a vízszintes képsíkban (2.17. ábra).

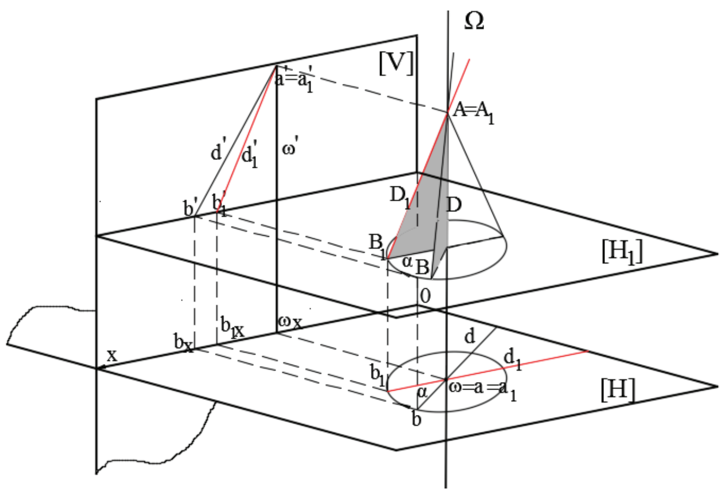


2.17. ábra. *A pont horizontális forgatásának ábrázolása diéderben*

2.2.1.2. Az egyenes horizontális forgatása

Az egyenes forgatása két pontjának segítségével történik. Két esetet különböztetünk meg:

a) Az egyenes metszi a forgatás tengelyét

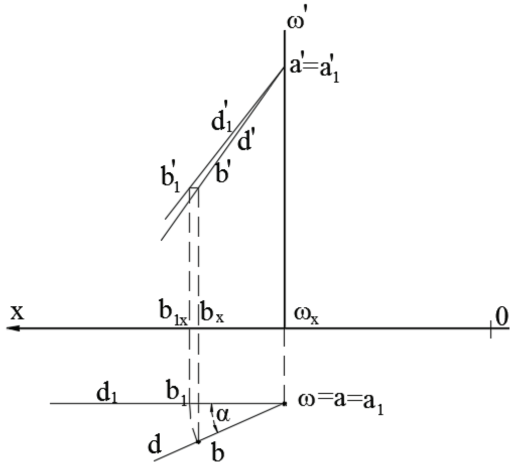


2.18. ábra. *Az egyenes horizontális forgatásának ábrázolása a forgástengelyt metsző esetben*

Adott egy általános helyzetű egyenes, amelyet forgatás módszerével frontális egyenessé alakítunk. A függőleges képsíkhoz párhuzamos helyzetbe forgatjuk, így megkapjuk a függőleges képsíkon az egyenesre illeszkedő bármely szakasz valódi nagyságát (2.18. ábra).

A 2.19. ábrán látható, hogy a forgástengely az egyenes A pontján keresztül van felvéve. Ennek következtében az A pont forgatás után is ugyanabban a helyzetben marad, mint a forgatás előtt, vagyis $A = A_1$ ($a = a_1$, $a' = a_1'$).

Az egyenes B pontját elforgatjuk a tengely körül, egészen addig, amíg a vízszintes vetülete b pontból a b_1 pontba kerül, vagyis az egyenes vízszintes vetülete párhuzamos lesz az OX tengellyel. A pont vízszintes vetülete, b az OX tengelyhez képest párhuzamosan mozdul el a b_1' pontba. Az AB szakasz függőleges vetületét, d_1'-et valódi nagyságban kapjuk meg a függőleges síkban.



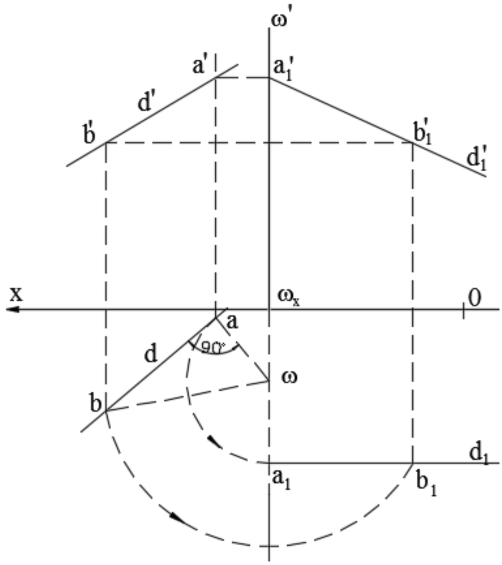
2.19. ábra. *Az egyenes horizontális forgatása diéderben a forgástengelyt metsző esetben*

b) Az egyenes nem metszi a forgatás tengelyét

Ebben az esetben ahhoz, hogy az általános helyzetű egyenest frontális helyzetbe forgassuk, szükséges felvennünk két pontot. A vízszintes képsíkban az ω pontból (2.20. ábra) megrajzoljuk az egyenes és a forgástengely közös $\omega a \perp d$ merőlegesét. Az a pontot elforgatjuk a térben a közös merőleges függőleges vetítősugár helyzetéig, így $\omega a_1 \perp d_1$.

Az egyenes vízszintes vetületét megkapjuk, ha az a_1 pontból d_1 párhuzamos egyenest húzunk az OX tengellyel.

Az egyenesen felvett másik pontot, a B-t elforgatjuk a vízszintes síkban, amíg a pont vetülete, b az elforgatott egyenes d_1 vízszintes vetületére esik d_1. A pontok függőleges *a*' és *b*' képe az OX tengellyel párhuzamosan mozdul el, és ezek a_1' és b_1' vetületeit forgatás után a rendezők segítségével kapjuk meg.

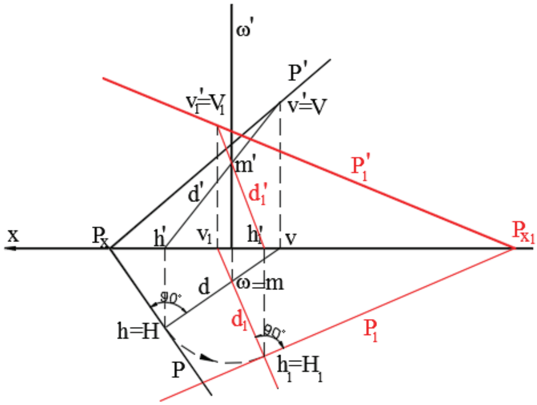


2.20. ábra. *Az egyenes horizontális forgatása a forgástengelyt nem metsző esetben*

2.2.1.3. A sík horizontális forgatása

A sík horizontális forgatásának szerkesztéséhez felveszünk egy forgástengelyt, amely metszi a P síkot. Ebben a síkban ábrázolunk egy legnagyobb lejtőjű egyenest (l.l. e.) a vízszintes képsíkhoz viszonyítva, amely átmegy a sík és a forgástengely metszéspontján. Az egyenes forgatásának a segítségével a síkot egy másik helyzetbe forgatva ábrázoljuk.

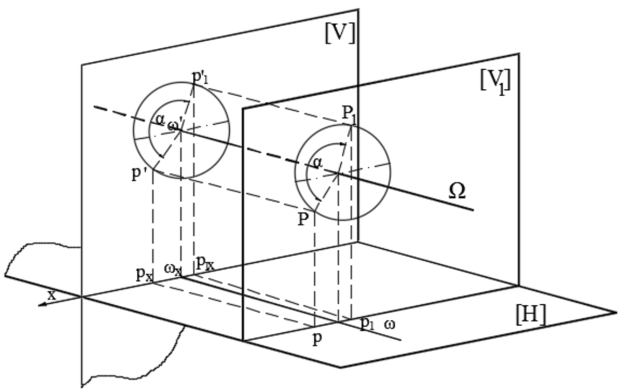
Az általános helyzetű P síkot az Ω tengely az M pontban metszi (2.21. ábra). A P síkot a D legnagyobb lejtő egyenes segítségével forgatjuk el egy α szöggel. A forgatás a vízszintes síkban történik. A D egyenes vízszintes H nyompontját elforgatjuk α szöggel az ω tengely körül, egészen a H_1 pontig. Az elforgatott vízszintes sík nyomvonalát megkapjuk, ha a H_1 és az $\omega = m$ pontokat összekötjük, és az elforgatott d_1 (l.l.e.) vízszintes vetületének a H_1 pontjából merőlegest állítunk. A vízszintes nyomvonal metszi az OX tengelyt egy P_{x1} pontban. Az elforgatott sík függőleges nyomvonalát, P_1'-et megkapjuk, ha összekötjük a P_{x1} pontot az elforgatott legnagyobb lejtő egyenes D_1 függőleges V_1 nyompontjával.



2.21. ábra. *A sík horizontális forgatása*

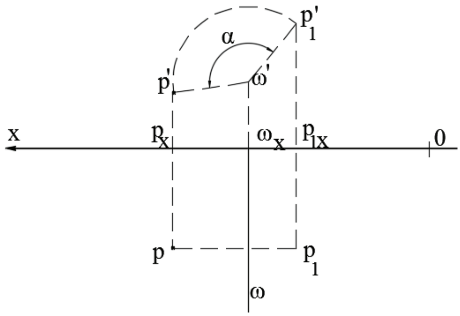
2.2.2. Frontális forgatás

2.2.2.1. A pont frontális forgatása



2.22. ábra. *A pont frontális forgatása*

Az Ω forgástengely merőleges a függőleges képsíkra. A P pontot az α szögnek megfelelően a tengely, Ω körül elforgatjuk a [V_1] || [V] síkban (2.22. ábra). A P pont által leírt körív síkja egy frontális [V_1] síkban forog, és a leírt α szöget a függőleges [V] képsíkban valódi nagyságban kapjuk meg. A pont vízszintes vetülete a [H] síknak és a [V_1]-re eső sík nyomvonalán helyezkedik el. Diéderben a P pont vízszintes vetülete, p párhuzamosan mozog az 0X tengellyel, és függőleges vetülete, p' α szöggel egy körívet ír le a függőleges képsíkban (2.23. ábra).



2.23. ábra. *A pont frontális forgatásának ábrázolása diéderben*

2.2.2.2. Az egyenes frontális forgatása

Az egyenes forgatását két pontjának segítségével ábrázoljuk. Két esetet különböztetünk meg:

a) Az egyenes metszi a forgatás tengelyét

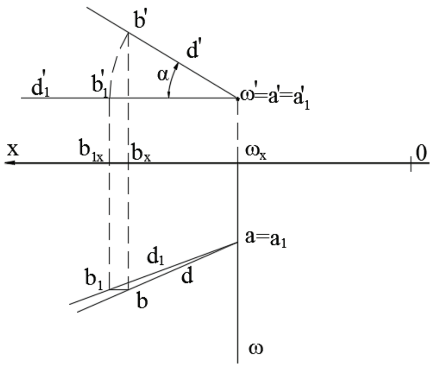
Adott egy általános helyzetű egyenes, amit forgatás módszerével horizontális egyenessé alakítunk. A vízszintes képsíkhoz párhuzamos helyzetbe forgatjuk, így megkapjuk a vízszintes képsíkon az egyenesre illeszkedő bármely szakasz valódi nagyságát A 2.24. ábrán látható, hogy a forgástengely az egyenes A pontján keresztül van felvéve. Ennek következtében az A pont forgatás után is ugyanabban a helyzetben marad, mint a forgatás előtt: $A = A_1$, ($a = a_1$, $a' = a_1'$).

Az egyenes B pontját elforgatjuk a tengely körül, egészen addig, amíg a függőleges vetülete b' pontból a b_1' pontba kerül, vagyis az egyenes függőleges vetülete párhuzamos lesz az OX tengellyel. A pont függőleges vetülete, b' az OX tengelyhez képest párhuzamosan mozdul el a b_1' pontba. Az egyenes vízszintes vetületét, d_1-et valódi nagyságban kapjuk meg a vízszintes képsíkban.

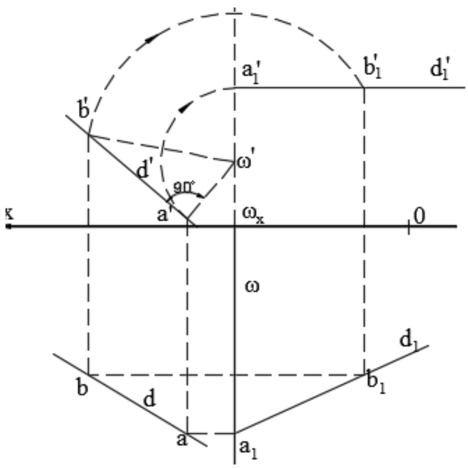
b) Az egyenes nem metszi a forgatás tengelyét

Ebben az esetben, ahhoz, hogy az általános helyzetű egyenest horizontális helyzetbe forgassuk, szükséges felvennünk két pontot. A függőleges képsíkban az ω' pontból (2.25. ábra) megrajzoljuk az egyenes és a forgástengely közös $\omega a' \perp d'$ merőlegesét. Az a' pontot elforgatjuk a térben a közös merőleges vízszintes vetítősugár helyzetéig, így $\omega' a_1' \perp d_1'$. Az egyenes függőleges d_1' vetületét megkapjuk, ha az a_1' pontból párhuzamos egyenest húzunk az OX tengellyel.

Az egyenesen felvett második B pontot elforgatjuk a függőleges síkban, amíg a pont vetülete, b' az elforgatott egyenes függőleges d_1' vetületére esik. A pont vízszintes b képe az OX tengelyhez képest párhuzamosan mozdul el, és ennek forgatás után a b_1 vetületét rendező segítségével kapjuk meg.



2.24. ábra. *Az egyenes frontális forgatása a forgástengelyt nem metsző esetben*

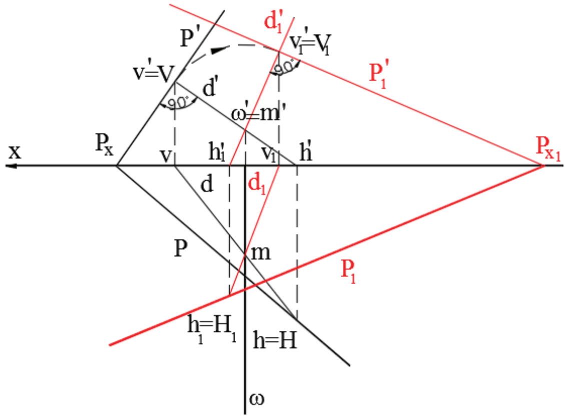


2.25. ábra. *Az egyenes frontális forgatása a forgástengelyt nem metsző esetben*

2.2.2.3. A sík frontális forgatása

A sík frontális forgatásának szerkesztéséhez felveszünk egy forgástengelyt, amely metszi a P síkot. Ebben a síkban ábrázolunk egy legnagyobb lejtő egyenest (l.l.e.) a függőleges képsíkra, amely átmegy a sík és a forgástengely metszőpontján. Az egyenes forgatásának a segítségével a síkot egy α szöggel forgatjuk el.

Az általános helyzetű P síkot az Ω tengely az M pontban metszi (2.26. ábra). A P síkot a D legnagyobb lejtő egyenes segítségével forgatjuk el egy α szöggel. A forgatás a függőleges síkban történik. A D egyenes függőleges V nyompontját elforgatjuk α szöggel az ω' tengely körül, egészen a V_1 pontig. Az elforgatott függőleges sík nyomvonalát megkapjuk, ha a V_1 és az $\omega' = m'$ pontokat összekötjük, és az elforgatott d_1' (l.l.e.) függőleges vetületének a V_1 pontjából merőlegest állítunk. A függőleges nyomvonal metszi az OX tengelyt egy P_{x1} pontban. Az elforgatott sík vízszintes nyomvonalát, P_1-et megkapjuk, ha összekötjük a P_{x1} pontot az elforgatott legnagyobb lejtő egyenes D_1 vízszintes H_1 nyompontjával.



2.26. ábra. *A sík frontális forgatása*

2.3. Képsíkba forgatás

A képsíkba, illetve képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatás művelete a sík forgatásaként határozható meg, ahol a forgatás tengelyeként a sík nyomvonalát, illetve fővonalait használjuk. A fővonalat alkalmazzuk, ha a képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatunk, illetve a nyomvonalat használjuk, ha az adott síkot a képsíkba forgatjuk. A forgatás módszerét a síkgeometriai idomok valódi nagyságának meghatározására alkalmazzuk.

A képsíkba forgatásnál kétféle eljárást alkalmazhatunk:

1. a helyzeti háromszög módszere:

A forgatásnak ezt a módszerét a pont vetületéből kiinduló, a forgástengelylyel húzott párhuzamos egyenes és szintén a pont vetületéből a forgástengelyre állított merőleges határozza meg. A leforgatott kép ezen a forgástengelyre állított merőlegesen helyezkedik el, a pont és a forgástengely valódi távolságban a forgástengelytől. Ez a távolság megegyezik azon derékszögű háromszög átfogójával, melynek egyik befogója egyenlő a pont vetületének a forgástengelytől mért magasságával, a másik befogója a pont és a forgástengely ellenkező képének a rendezőkülönbsége.

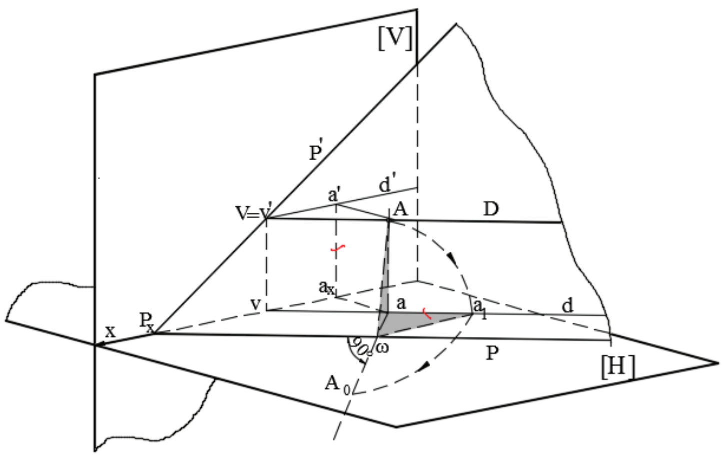
2. a sík nyomvonalán levő nyompont képsíkba forgatása:

A sík fővonalának a nyomvonalán levő nyompontja az X tengelytől a vetületen valódi nagyságban van. A leforgatott kép a sík nyomvonalára merőleges vetítősík nyomvonalán van, ennek a sík nyomvonalával mint forgástengelyével közös pontja körül forog a pont, a pont és a forgástengely távolságának megfelelő sugarú köríven.

2.3.1. Forgatás a vízszintes képsíkba

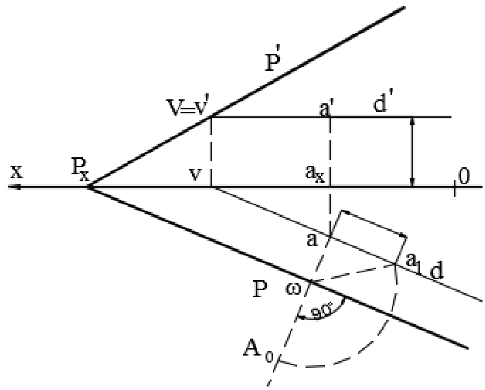
1. A helyzeti háromszög módszere

Adott egy P sík egy rá illeszkedő A ponttal, a sík horizontális fővonalán. Mivel a pont forgatását a vízszintes képsíkba végezzük, a forgástengely a P sík vízszintes nyomvonala lesz (2.27. ábra). Az A pont a képsíkba való forgatása során egy körívet ír le, amely benne van egy forgástengelyre merőleges vetítősíkban, ezért a pont leforgatott képe, A_0 a vízszintes képsíkban a pont vízszintes vetületéből a P sík vízszintes nyomvonalára húzott merőlegesen helyezkedik el.



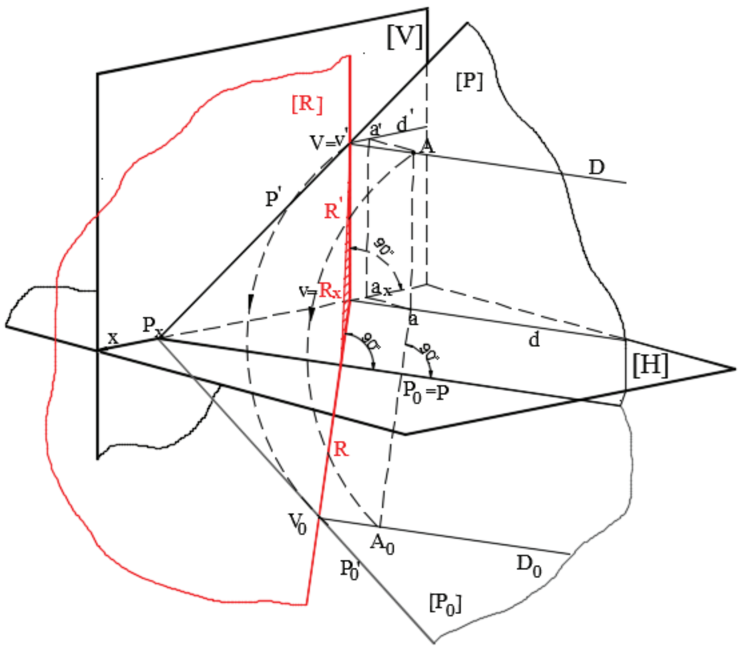
2.27. ábra. *A D egyenesen levő A pont képsíkba forgatása*

A 2.28. ábra bemutatja a pont forgatását a vízszintes képsíkba a *helyzeti háromszög módszer*ével. Az A pont benne van a síkban, ugyanis rajta van a síkban levő horizontális egyenesen. A forgás tengelye a sík vízszintes nyomvonala, a leforgatás ω középpontja ω rajta van a pont vízszintes vetületéből a sík vízszintes nyomvonalára húzott merőlegesnek és a sík vízszintes nyomvonalának metszéspontjában. Az A pont vízszintes vetületéből húzott horizontális egyenesen, d, amely párhuzamos a sík P vízszintes nyomvonalával (forgástengely), felmérjük a pont magasságát, a_1 ($aa_1 = a_xa'$). A kialakult helyzeti háromszög az ωaa_1. Az A pont leforgatott képét, A_0-t megkapjuk, ha az ωa_1 sugarú körívet, amely a háromszög átfogója, elforgatjuk egészen addig, amíg metszi az ωa a pontból húzott merőlegest.



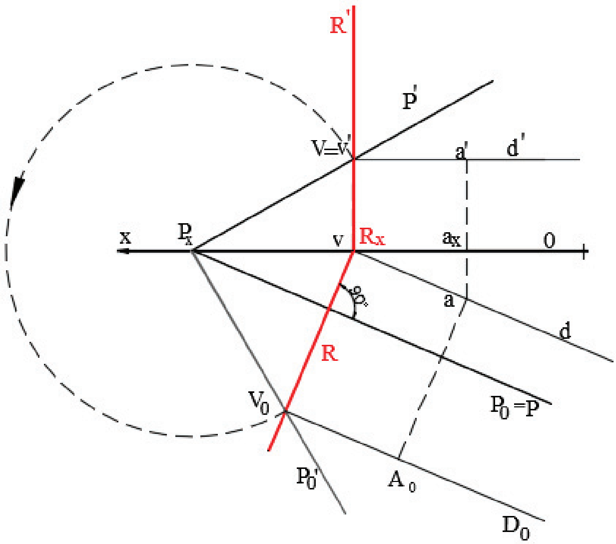
2.28. ábra. *A pont leforgatása diéderben*

2. A sík nyomvonalán levő nyompontjának a forgatása



2.29. ábra. *A pont, egyenes és sík forgatása a vízszintes képsíkba*

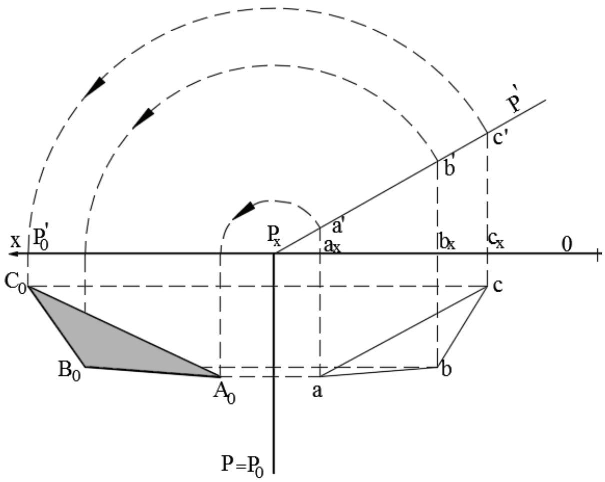
Az általános helyzetű P sík forgatásánál a vízszintes képsíkba a forgástengelynek a sík vízszintes nyomvonalát és a függőleges nyomvonalon levő V nyompontját alkalmazzuk (2.29. ábra). A V nyompont forgatását egy, a vízszintes nyomvonalra merőleges vetítősíkban ábrázoljuk. A forgástengely a sík vízszintes nyomvonala. Az R síkban a V pont leír egy körívet a P_x középpont körül. A VP_x sugarú körív pedig metszi az R sík vízszintes nyomvonalát a leforgatott V_0 pontban. A P sík leforgatott függőleges nyomvonalát megkapjuk, ha összekötjük a sík P_x pontját a V_0 ponttal. A sík vízszintes nyomvonala a kezdeti pozícióban marad: $P = P_0$.



2.30. ábra. *A pont, egyenes és a sík forgatása a P_x középpont körül, amelynek VP_x a sugara*

A síkban levő horizontális fővonal tartalmazza az A pontot. A horizontális egyenes vízszintes képsíkba leforgatottja párhuzamos a sík nyomvonalával, az A_0 pont leforgatott kép rajta van az őt tartalmazó egyenes leforgatott vetületén és a pont vízszintes vetületéből a forgástengelyre állított merőlegesen. A P sík függőleges nyomvonalát a leforgatott és összekötött pontok V_0 és P_x egyesítése határozza meg (2.30. ábra).

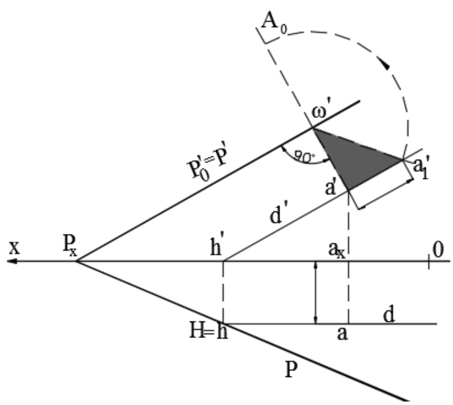
A forgatás a sík vízszintes nyomvonala körül történik. A vetítősík függőleges nyomvonalának leforgatott képe a P_x pontból merőleges a sík vízszintes nyomvonalára. A háromszög valódi nagyságának meghatározásához alkalmazzuk a nyomvonalon levő vetületek képeinek leforgatását (2.31. ábra). A háromszög minden pontja a sík függőleges nyomvonalával együtt forog, leírva egy körívet egészen az 0X tengelyig. Az 0X tengelyen levő vetületekből húzott rendezők és a pontok vízszintes vetületéből az 0X tengellyel húzott párhuzamosak meghatározzák a háromszög valódi nagyságát.



2.31. ábra. *A vetítősík képsíkba forgatása és a benne lévő háromszög valódi nagyságának ábrázolása*

2.3.2. Forgatás a függőleges képsíkba

1. A helyzeti háromszög módszere

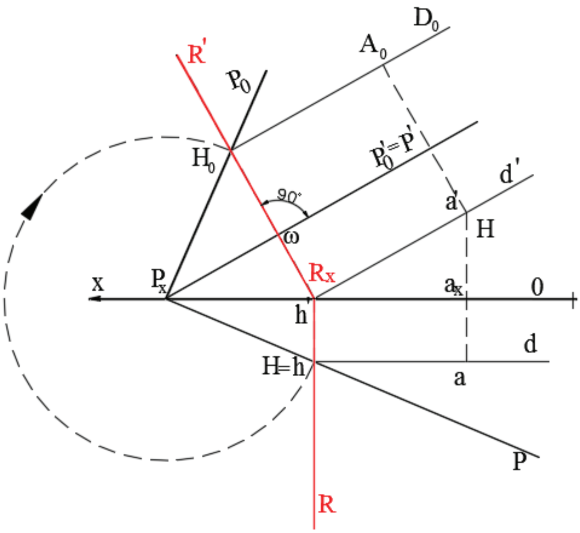


2.32. ábra. *A pont forgatása diéderben a síkjának függőleges nyomvonala körül*

Az A pont benne van a síkban, ugyanis rajta van a síkban levő frontális egyenesen. A forgatás tengelye a sík függőleges nyomvonala, középpontja, ω' rajta van a pont függőleges vetületéből a sík függőleges nyomvonalára húzott merőlegesen. Az A pont függőleges vetületéből húzott síkbeli d' frontális egyenesen, amely párhuzamos a sík P függőleges nyomvonalával (forgástengely), felmérjük a pont és a függőleges képsík a_1', ($a'a_1' = a_x a$) távolságát. A meghatározásra került helyzeti háromszög az $\omega'a'a_1'$. Az A pont leforgatott A_0 képét megkapjuk, ha az $\omega' a_1'$ sugarú körívet, amely a háromszög átfogója, megrajzoljuk egészen addig, amíg metszi az $\omega' a'$ pontból húzott merőlegest (2.32. ábra).

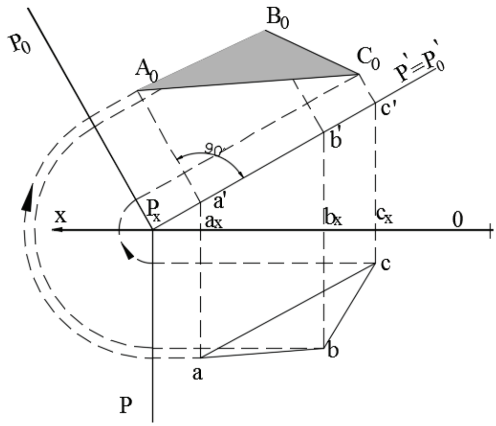
2. A sík nyomvonalán levő egyenes nyompontjának a képsíkba forgatása

A síkban levő frontális fővonal tartalmazza az A pontot. A frontális egyenes forgatott képe a függőleges képsíban párhuzamos a sík nyomvonalával. A pont leforgatott képe, A_0 rajta van az őt tartalmazó frontális egyenes forgatott képén és a pont függőleges vetületéből a forgástengelyre állított merőlegesen. A P sík vízszintes nyomvonalát a H_0 és P_x pontok összekötése határozza meg (2.33. ábra).



2.33. ábra. *A pont, egyenes és a sík forgatása a* P_x *középpont körül, amelynek* HP_x *a sugara*

A leforgatás a sík függőleges nyomvonala körül történik. A vetítősík vízszintes nyomvonalának leforgatott képe a P_x pontból merőleges a sík függőleges nyomvonalára. A háromszög valódi nagyságának meghatározásához alkalmazzuk a nyomvonalon levő vetületek képeinek leforgatását (2.34. ábra). A háromszög pontjainak távolsága, ($a_x a, b_x b, c_x c$) megegyezik a sík függőleges nyomvonalától mért távolsággal, ($a'A_0, b'B_0, b'B_0$,). A pontok függőleges vetületéből húzott rendező és a leforgatott pontok távolságainak ($a_x a = a'A_0$, stb.) metszőpontjában ábrázoljuk a háromszöget valódi nagyságban.

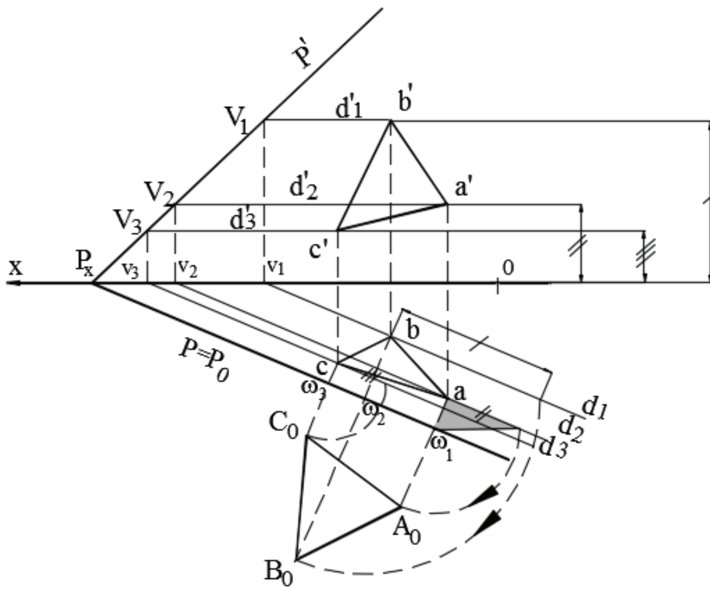


2.34. ábra. *A vetítősík képsíkba forgatása és a rá illeszkedő háromszög valódi nagyságának ábrázolása*

Példa:

Adott általános háromszög: $\begin{cases} A(10, y_A, 15) \\ B(10, y_B, 15) \\ C(10, y_C, 15) \end{cases}$

Határozza meg a háromszög valódi nagyságát a képsíkba forgatás módszerével!



2.35. ábra. *A háromszög valódi nagyságának meghatározása*

Megoldás:

Az első lépésben meghatározzuk a háromszög vízszintes nyomvonalát (2.35. ábra). A háromszög függőleges vetületén keresztül felveszünk három segédegyenest.

Ezek a segédegyenesek horizontális fővonalak, amelyek benne vannak a síkban.

Az egyenesek függőleges vetülete metszi a sík függőleges nyomvonalát a V_1, V_2, V_3 nyompontokban. Ezeket a pontokat lerendezzük a vízszintes képsíkba. A horizontális egyenes vízszintes vetületét megkapjuk, ha a lerendezett v_1, v_2, v_3 pontokból párhuzamosakat húzunk a sík vízszintes nyomvonalával.

A háromszög vízszintes vetületét megkapjuk, ha a háromszög függőleges vetületéből bocsátott rendezőket elmetsszük a segédegyenesek vízszintes vetületével.

Alkalmazzuk a helyzeti háromszög módszerét, ahol a leforgatás tengelye a sík vízszintes nyomvonala.

A pontok vízszintes vetületéből kiindulva a segédegyeneseken felmérjük a pontok magasságát, majd a vetületből merőlegest bocsátunk a sík vízszintes nyomvonalára. A forgástengelyen levő ω metszéspont és a felmért magasság összekötéséből adódik a helyzeti háromszög sugara.

A háromszög valódi nagyságát megkapjuk, ha a meghatározott sugárral leforgatjuk a pontot az a, b, c pontokból a forgástengelyre bocsátott merőlegesekre.

2.4. Gyakorlófeladatok a megoldástípusok ábrázolásához

1. Adott egy D egyenes, amelyet az A, B pontok határoznak meg.

$$D\begin{cases} A(60,10,10) \\ B(20,25,20) \end{cases}$$

a) Határozza meg az egyenesnek a vízszintes képsíkkal bezárt α szögének valódi nagyságát a transzformálás módszerével!
b) Határozza meg az egyenesnek a függőleges képsíkkal bezárt β szögének valódi nagyságát a transzformálás módszerével!

2. Adott egy D egyenes, amelyet az A, B pontok határoznak meg.

$$D\begin{cases} A(45,20,10) \\ B(20,10,20) \end{cases}$$

a) Transzformálja az egyenest a függőleges képsík vetítő egyenesévé!
b) Transzformálja az egyenest a vízszintes képsík vetítő egyenesévé!

3. Határozza meg a D_1 és D_2 párhuzamos egyenesek közötti távolság valódi nagyságát a transzformálás módszerével!

$$D_1 \begin{cases} A(55,15,20) \\ B(20,30,35) \end{cases}, C \in D_2, C(35,10,15)$$

4. Alkalmazva a függőleges vetítősíkká transzformálást, határozza meg a D egyenes és M pont közötti távolságot!

$$D \begin{cases} A(30,10,10) \\ B(10,15,20) \end{cases}, M(25,5,25)$$

5. Adottak a D_1 és D_2 kitérő egyenesek. Függőleges vetítősík-transzformálást alkalmazva ábrázolja a két egyenes azon két függőleges vetületét, amelyek párhuzamosak!

$$D_1 \begin{cases} A(30,5,10) \\ B(5,20,25) \end{cases}, D_2 \begin{cases} E(35,25,30) \\ F(10,10,5) \end{cases}.$$

6. Határozza meg az A pont és a P sík közötti távolságot, alkalmazva a függőleges vetítősíkká transzformálást!

$A(10,20,30)$, $P_x(35,0,0)$, $OP_xP = -30°$, $0P_xP' = 45°$

7. Adottak a D_1 és D_2 metsző egyenesek:

$$D_1 \begin{cases} A(20,10,15) \\ B(40,30,5) \end{cases}, D_2 \begin{cases} E(35,10,25) \\ F(25,y_F,5) \end{cases}.$$

Alkalmazva a vízszintes vetítősík-transzformálást, anélkül, hogy felhasználja a metsző egyenesek által meghatározott sík nyomvonalait, határozza meg azt az α szöget, amelyet a két egyenes által meghatározott sík és a függőleges képsík alkot!

8. Határozza meg transzformálással a metsző egyenesek közötti α szöget!

$$D_1 \begin{cases} A(65,5,10) \\ B(35,25,30) \end{cases}, C \in D_2, C(15,10,10)$$

9. Adottak a D_1 és D_2 kitérő egyenesek.

$$D_1 \begin{cases} A(25,30,20) \\ B(45,15,5) \end{cases}, D_2 \begin{cases} E(20,-5,10) \\ F(35,15,35) \end{cases}.$$

Transzformálás módszerével határozza meg az egyenesesek közös merőlegesének (normáltranszverzálisának) vetületeit!

10. Adott egy ABCΔ háromszög:

$$\begin{cases} A(55,10,30) \\ B(30,35,10) \\ C(10,20,20) \end{cases}$$

a) Határozza meg transzformálással a háromszög és a vízszintes sík közötti α szög valódi nagyságát!
b) Határozza meg transzformálással a háromszög és a függőleges sík közötti β szög valódi nagyságát!

11. Transzformálás módszerével határozza meg a háromszög valódi nagyságát!

$$ABC\Delta \begin{cases} A(60,20,30) \\ B(35,5,10) \\ C(10,35,40) \end{cases}$$

12. Transzformálást alkalmazva határozza meg a két párhuzamos sík közötti távolság valódi nagyságát!

$P_x(30,0,0)$, $0P_x\mathrm{P} = -45°$, $0P_x P' = 45°$
$Q_x(50,0,0)$, $0Q_x\mathrm{Q} = -45°$, $0Q_x Q' = 45°$

13. Határozza meg transzformálással a két háromszög metszésvonalát, feltüntetve az élek láthatóságát!

$$ABC\Delta \begin{cases} A(50,15,0) \\ B(10,20,10), \\ C(40,40,35) \end{cases} MNQ\Delta \begin{cases} M(5,25,20) \\ N(70,5,30) \\ Q(60,30,5) \end{cases}$$

14. Adott egy D egyenes, amelyet az A és B pontok határoznak meg.

$$\begin{cases} A(60,10,10) \\ B(20,25,20) \end{cases}$$

a) Határozza meg az egyenesnek és a vízszintes képsíkkal bezárt α szögének a valódi nagyságát a forgatás módszerével!
b) Határozza meg az egyenesnek a függőleges képsíkkal bezárt β szögének valódi nagyságát a forgatás módszerével!

15. Adott egy D egyenes, amelyet az A és B pontok határoznak meg.
a) Forgassa át az egyenest a függőleges képsík vetítő egyenesévé!
b) Forgassa át az egyenest a vízszintes képsík vetítő egyenesévé!

$$\begin{cases} A(45,20,10) \\ B(20,10,20) \end{cases}$$

16. Adott egy D egyenes, amelyet az A és B pontok határoznak meg.

$$\begin{cases} A(25,10,10) \\ B(10,20,20) \end{cases}$$

Forgassa át a D egyenest az 0X tengellyel párhuzamos helyzetbe!

17. Adott egy általános helyzetű $P_x(50,0,0)$, $0P_xP = -50°$, $0P_xP' = 50°$ sík. Horizontális forgatás során a sík nyomvonalait ábrázolja egymás meghosszabbításában!

18. Adott egy általános helyzetű $P_x(50,0,0)$, $0P_xP = -50°$, $0P_xP' = 50°$ sík.
a) Határozza meg a P sík és a vízszintes képsík közötti α szög valódi nagyságát a forgatás módszerével!
b) Határozza meg a P sík és a függőleges képsík közötti β szög valódi nagyságát a forgatás módszerével!

19. Határozza meg forgatás módszerével az E pontnak a D egyenestől mért távolságát!

$$D\begin{cases} A(60,20,30) \\ B(25,10,10) \end{cases}, E(35,30,40)$$

20. Határozza meg két párhuzamos egyenes közötti távolság valódi nagyságát a forgatás módszerével!

21. Adott egy P sík és egy rajta kívül eső A pont. A forgatás módszerével határozza meg a pont és a sík távolságának valódi nagyságát!
$P_x(20,0,0)$, $0P_xP = -120°$, $0P_xP' = 120°$, A(30,10, 5)

22. Határozza meg két párhuzamos P, Q sík közötti távolság valódi nagyságát a forgatás módszerével!
$P_x(50,0,0)$, $0P_xP = -50°$, $0P_xP' = 50°$, $Q_x(30,0,0)$

23. Adott egy P sík a $P_x(50,0,0)$, $0P_xP = -50°$, $0P_xP' = 50°$, adatokkal. Az 0X tengely körüli forgást alkalmazva alakítsa át a vízszintes képsík vetítősíkjává!

24. Adott egy P és Q sík.
$P_x(50,0,0)$, $0P_xP = -50°$, $0P_xP' = 50°$
$Q_x(10,0,0)$, $0Q_xQ = -120°$, $0Q_xQ' = 120°$.
A forgatás módszerével alakítsa át a Q síkot a P síkkal párhuzamos síkká!

25. Forgatás módszerével határozza meg a háromszög valódi nagyságát!

$$ABC\Delta \begin{cases} A(60,20,30) \\ B(35,5,10) \\ C(10,35,40) \end{cases}$$

26. A képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatás módszerével ábrázolja a C pontból a D egyenesre bocsátott merőleges vetületeit!

$$D \begin{cases} A(30,10,5) \\ B(15,5,15) \end{cases}, C(10,20,5)$$

27. Határozza meg a D_1 és D_2 metsző egyenesek által bezárt α szög valódi nagyságát a képsíkba forgatás módszerével!

$$D_1 \begin{cases} A(35,15,5) \\ B(20,10,25) \end{cases}, D_2 \begin{cases} E(15,20,5) \\ F(40,y_F,25) \end{cases}.$$

28. Határozza meg a D_1 és D_2 párhuzamos egyenesek közötti távolság valódi nagyságát a képsíkba forgatás módszerével!

$$D_1 \begin{cases} A(30,15,15) \\ B(20,10,20) \end{cases}, C \in D_2, C(5,25,25)$$

29. Adottak a P és Q síkok úgy, hogy vízszintes nyomvonalai egymással párhuzamosak. Határozza meg a két sík közötti α szög valódi nagyságát a forgatás módszerével!

$P_x(40,0,0)$, $0P_xP = -30°$, $0P_xP' = 25°$
$Q_x(30,0,0)$, $0Q_xQ = -30°$, $0Q_xQ' = 50°$.

30. Határozza meg a P sík nyomvonalait, ismerve a síkban levő A pontot és a sík vízszintes nyomvonala körül leforgatott A_0 képét!
$A(15,10,5)$, $A_0(30,20,z_A)$

31. Határozza meg a P sík vízszintes nyomvonalát a képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatás módszerével a $P_x(30,0,0)$, $0P_xP' = 45°$ ismeretében, ha az $A(x_A,y_A,5)$ pont benne van a síkban, és a leforgatott képe $A_0(25,20,z_A)$!

32. Határozza meg a sík P' függőleges nyomvonalát a képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatás módszerével a $P_x(35,0,0)$, $0P_xP = -30°$ ismeretében, valamint a síkban levő frontális egyenes, az $A_0(30,100,z_A)$, $B_0(25,20,z_B)$ pontjainak forgatott képeit a vízszintes képsíkban!

33. Határozza meg a C pont és a D egyenes távolságának valódi nagyságát képsíkba forgatás módszerével!

$$D \begin{cases} A(30,15,40) \\ B(70,20,10) \end{cases}, \ C(40,25,15)$$

34. Határozza meg a háromszög valódi nagyságát a forgatás módszerével síkjának vízszintes nyomvonala körül!

$$ABC\Delta \begin{cases} A(35,10,30) \\ B(50,25,5) \\ C(20,30,10) \end{cases}$$

35. Határozza meg a háromszög valódi nagyságát a forgatás módszerével síkjának függőleges nyomvonala körül!

$$ABC\Delta \begin{cases} A(35,25,0) \\ B(60,10,20) \\ C(15,5,30) \end{cases}$$

36. Ábrázoljon egy 30 mm oldal hosszúságú négyzetet, amely benne van a P síkban!
$P_x(70,0,0)$, $0P_xP = -45°$, $0P_xP' = 45°$

37. Ábrázoljon egy 30 mm oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszöget, amely benne van a P síkban!
$P_x(45,0,0)$, $0P_xP = -45°$, $0P_xP' = 90°$

38. Ábrázoljon egy 30 mm oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszöget, amely benne van a P síkban!
$P_x(45,0,0)$, $0P_xP = -90°$, $0P_xP' = 45°$

39. Ábrázoljon egy 25 mm átmérőjű kört, amely benne van a P síkban!
$P_x(50,0,0)$, $0P_xP = -45°$, $0P_xP' = 90°$

40. Ábrázoljon egy 25 mm átmérőjű kört, amely benne van a P síkban!
$P_x(60,0,0)$, $0P_xP = -90°$, $0P_xP' = 45°$

3. Geometriai testek ábrázolása

3.1. A poliéderek ábrázolása

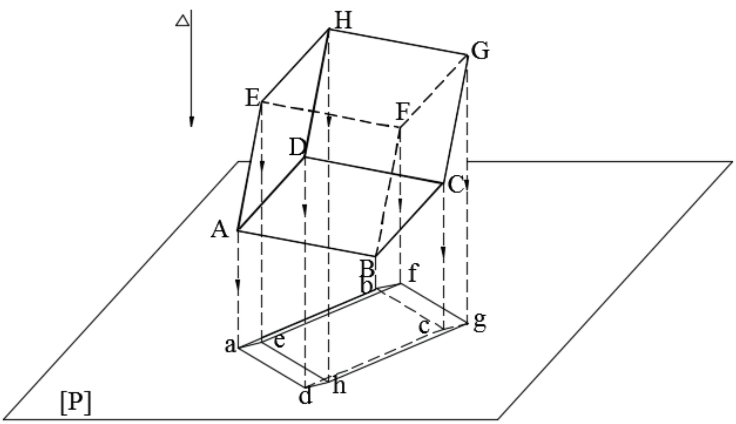
A síkfelülettel határolt geometriai testet poliédernek nevezzük. Egymás mellett levő síkfelületek a poliéder éleit határozzák meg. Három vagy több síkfelület a poliéder csúcsát alkotja. A poliéderek (hasáb, gúla) ábrázolásánál a csúcspontjaik vetületének célszerű összekötése adja meg az élek képét.

3.1.1. Poliéder láthatóságának törvényei

A poliéder vetületét megkapjuk, ha a Δ vetítési irányt figyelembe vesszük, és ezáltal megkapjuk a [P] síkban az (abcdefgh) poliéder látszólagos kontúrvonalát.

A látható éleket folytonos, a láthatatlan éleket szaggatott vonallal ábrázoljuk.

A felület pontjainak láthatósága függ a Δ vetítés irányától.

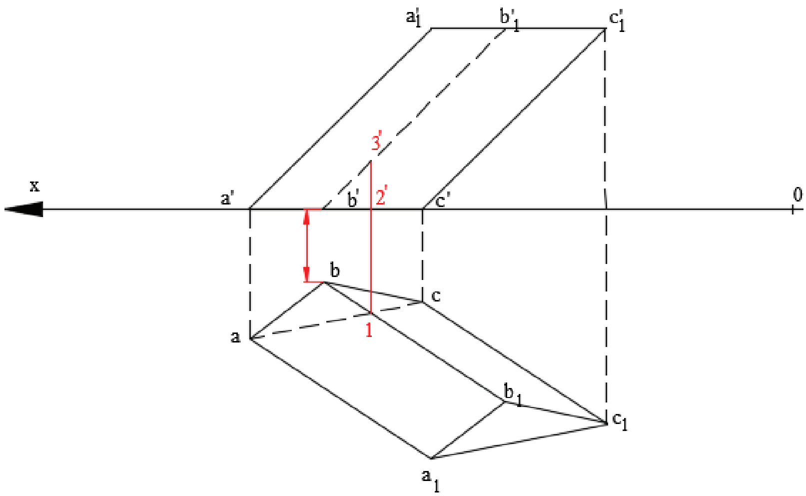


3.1. ábra. *Poliéder vetülete a P síkban*

Ahhoz, hogy a poliéder láthatóságát felismerjük, a következő feltételeket kell figyelembe venni (3.1. ábra):

– a látszólagos kontúrvonal, abfghda mindig látható;
– a vizsgált felületrész látható lesz, ha látható pontot tartalmaz;
– ha két felület metszi egymást egy élben (efgh, cdhg), amely él a látszólagos kontúrvonal, akkor az egyik látható (efgh), a másik egy nem látható felület (cdhg);
– ha két felület metszi egymást egy élben (abfe, hgfe), amely él nem a látszólagos kontúrvonal (fe), mindkét felület látható, ha az él látható, illetve láthatatlan felületek lesznek (ehcb, fgcb), ha az él (cb) láthatatlan;

– ha két él vetülete a térben nem metszi egymást (bc, ef), viszont a síkban metsző egyenesnek látjuk, akkor az egyik él (ef) látható, míg a másik nem látható (bc);
– ha a poliéder egyik csúcsa a látszólagos kontúrvonal belsejébe esik, az élek, amelyek ebben a csúcspontban találkoznak, látható élek lesznek (ae, eh, ef), ha a csúcspont látható (e), illetve láthatatlan élek lesznek (bc, hc, cg), ha a csúcspont láthatatlan (c);



3.2. ábra. *Láthatóság hasáb ábrázolásakor*

– ha két kitérő élnek a (2', 3') pontjának vízszintes (1) vetülete egybeesik (3.2. ábra), az lesz a vízszintes képsíkban a látható él, amelyik élen levő pontnak nagyobb a magassága, vagyis a $2' \in a'c'$ pontnak zéró értékű a magassága, tehát az (ac) él láthatatlan, míg a bb_1 él lesz látható;
– fordítva is érvényes ez a törvény, vagyis ha két pont függőleges vetülete egybeesik, a függőleges képsíkban az lesz a látható él, amelyik élen levő pontnak nagyobb a távolsága;
– a poliéder alapját tanulmányozva (3.2. ábra) a (b) pontnak a legkisebb az 0X tengelytől mért távolsága, tehát a függőleges képsíkban a (*b*') pontot tartalmazó él lesz láthatatlan él;

3.1.1.1. Hasáb ábrázolása

A hasábok lehetnek:
– egyenes hasábok: a hasáb élei merőlegesek az alapra;
– ferde hasábok: a hasáb élei nem merőlegesek az alapra.

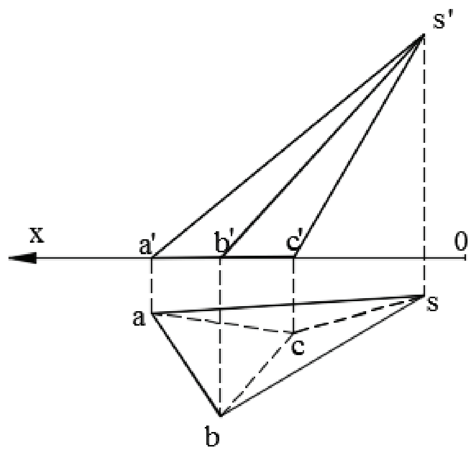
A hasáb ábrázolásához szükséges adatok:
- a csúcspontok koordinátáinak megadása;
- az alappontok koordinátái és a másik alapjának egyik csúcspontja;
- az alap csúcspontjai, illetve a magasság és az élekkel párhuzamos irány megadása.

A 3.2. ábra szemlélteti a hasáb csúcspontjait, és ezek pontjainak összekötése megadja a hasáb vetületét diéderben. Az ábra egy háromszög alapú ferde hasábot ábrázol, amelynek alapja (abc) a vízszintes képsíkban helyezkedik el. Ismerve a hasáb magasságát és az AA_1 élét, az ábrázolás lépései a következők:
- felvesszük a hasáb alapjának mindkét vetületét;
- felvesszük az ismert magasság értékét, és párhuzamost húzunk az X tengellyel;
- ábrázoljuk az ismert AA_1 él mindkét vetületét;
- a hasáb alapjának vetületéből párhuzamost húzunk az ismert éllel;
- az élek végpontjainak pontos helyét rendezők segítségével határozzuk meg.

Az élek láthatóságának meghatározásához a már említett láthatósági törvényeket alkalmazzuk (3.2. ábra).

3.1.1.2. Gúla ábrázolása

A gúla lehet egyenes és ferde gúla. A gúla ábrázolásához szükséges ismerni a csúcspontok koordinátáit. Az élek láthatósságának meghatározására a láthatóság törvényeit vesszük figyelembe (3.3. ábra).



3.3. ábra. *Gúla ábrázolása és láthatósága diéderben*

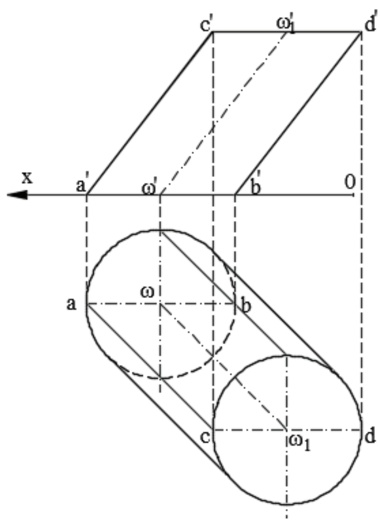
3.2. Görbe felületű testek ábrázolása

A görbe felületű forgástestek ábrázolásához szükséges ismernünk a forgás középpontját, tengelyét (gömb, körgyűrű, henger, kúp), az alkotó meghatározó elemeit, vagyis az ábrázolt test alkotórészeit.

3.2.1. Henger

A henger felületét a vezérkört érintő és a forgástengellyel párhuzamos generáló egyenes írja le. A henger forgástengelyére merőleges metszet képe a vezérkörrel megegyező nagyságú kör.

A henger lehet egyenes és ferde henger.

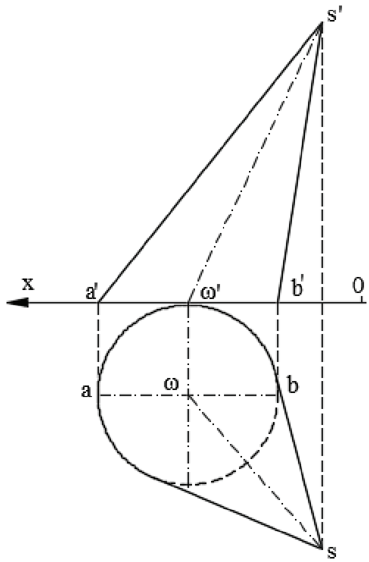


3.4. ábra. *Henger ábrázolása és láthatósága diéderben*

3.2.2. Forgáskúp

A forgáskúp felületét a forgástengelyt metsző generáló egyenes írja le, amelyet a forgáskúp forgástengelye körül forgatunk.

A forgáskúp ábrázolásához (egyenes, ferde) szükséges ismerni a csúcspont koordinátáit és az alapjának meghatározó elemeit.

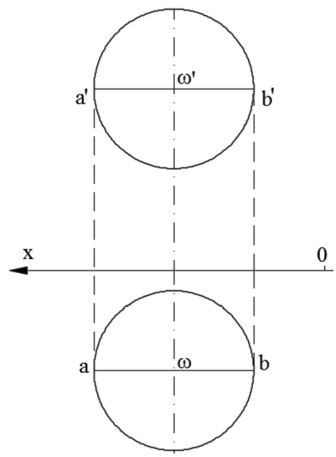


3.5. ábra. *Forgáskúp ábrázolása és láthatósága diéderben*

3.2.3. Gömb

A gömb felülete leírható a generáló kör által, amelyet körbeforgatunk az egyik átmérője körül.

A gömböt a képsíkokban körként azok átmérőivel ábrázoljuk, vagyis az AB pontokon átmenő egyenlítő *a'b'* és hosszúsági ab körével.



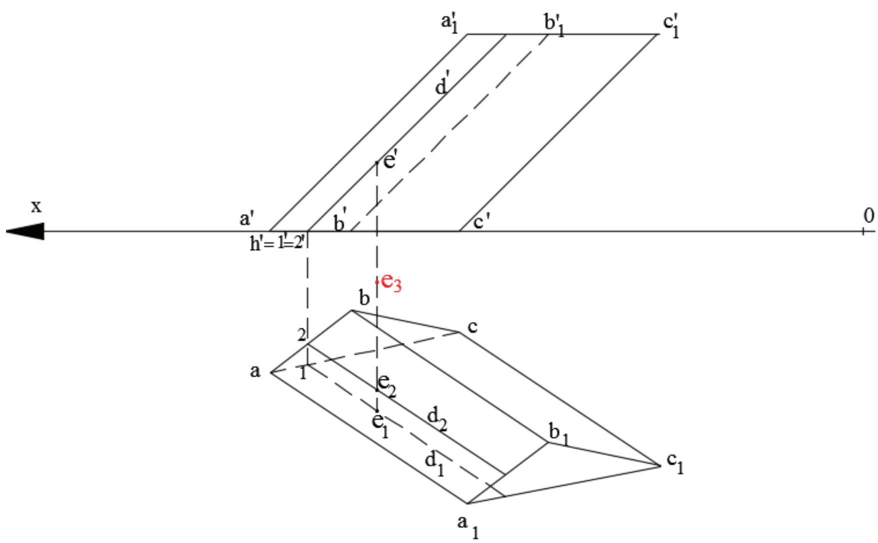
3.6. ábra. *Gömb ábrázolása*

3.3. Pont ábrázolása a geometriai test felületén

Egy pont rajta van a geometriai test felületén, ha a látszólagos kontúrvonalon vagy ezen belül helyezkedik el, ugyanakkor rajta van egy olyan partikuláris (alkotó) egyenesen, amely a test felületén helyezkedik el, párhuzamos a felület élével, alkotójával hasáb, illetve henger esetén, valamint a partikuláris (alkotó) egyenes tartalmazza a test csúcspontját és az alapjának egyik pontját a gúla, illetve kúp esetében.

3.3.1. Pont ábrázolása a hasáb felületén

Adott az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb és egy E pont (3.7. ábra). Ahhoz, hogy az E pont rajta legyen a hasáb felületén a hasáb élén, illetve a hasáb élével párhuzamos egyenesen kell lennie.



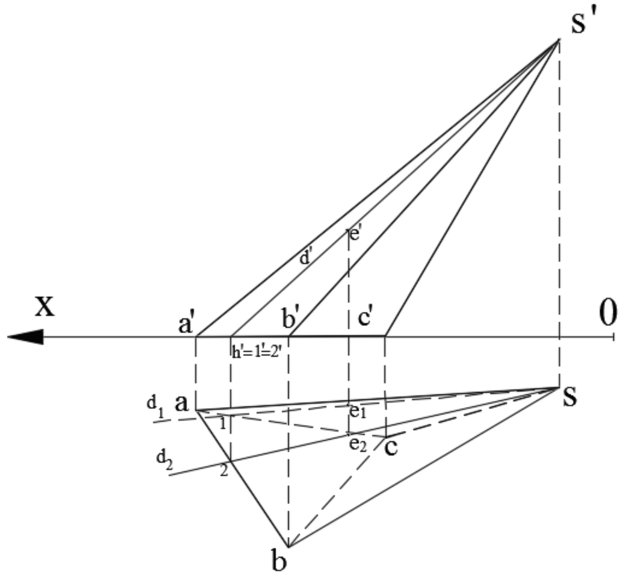
3.7. ábra. *Pont ábrázolása a hasáb felületén*

Az E pont függőleges vetületéből párhuzamost húzunk a hasáb élén, ez a *d*'. Az egyenes *d*' vetülete metszi a vízszintes képsíkot az 0X tengely *h*' pontjában, ami rajta van a látszólagos *a*'*b*'*c*' kontúrvonalon. Ebből a *h*' pontból rendezőt húzunk, ami metszi a hasáb alapéleit az 1, 2 pontokban. Az 1 és 2 pontokból párhuzamost húzunk a hasáb élével, és megkapjuk a D fedő egyenes d_1 és d_2 vetületeit a vízszintes képsíkban.

Ha az *e*' pontból rendezőt húzunk, az metszi az egyenes d_1 és d_2 vetületeit az e_1 és e_2 pontokban. Az E_1 pont rajta van az ACC_1A_1A felületen, illetve az E_2 pont rajta van az ABB_1A_1A felületen. Minden más pont (pl. E_3) nincs rajta a hasáb felületén. Ha a pont rajta van a hasáb látszólagos kontúrvonalán, akkor a pont rajta van a hasáb felületén.

3.3.2. Pont ábrázolása a gúla felületén

Adott az SABC gúla és egy E pont (3.8. ábra). Ahhoz, hogy az E pont rajta legyen a gúla felületén, rajta kell legyen a gúla felületén levő egyenesen, amely tartalmazza a gúla S csúcspontját. Ha a pont rajta van a gúla látszólagos kontúrvonalán, akkor a pont rajta van a gúla felületén.



3.8. ábra. *Pont ábrázolása a gúla felületén*

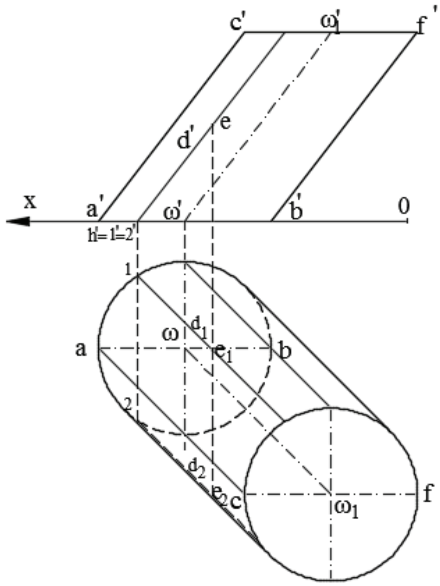
Az E pont függőleges vetületét összekötjük a gúla S csúcspontjának függőleges vetületével, ezáltal megkapjuk a D egyenes függőleges vetületét. Az egyenes *d*' vetülete metszi a vízszintes képsíkot az 0X tengely *h*' pontjában, ami rajta van az *a*'*b*'*c*' látszólagos kontúrvonalon. Ebből a *h*' pontból rendezőt húzunk, ami metszi a gúla alap éleit az 1 és 2 pontokban. Az 1, 2 pontokat összekötjük a gúla S csúcspontjával, és megkapjuk a D tartóegyenes d_1 és d_2 vetületeit a vízszintes képsíkban.

Ha az *e*' pontra rendezőt illesztünk, az metszi az egyenes d_1 és d_2 vetületeit e_1 és e_2 pontokban. Következésképpen az E_1 pont rajta van az SAC felületen, illetve az E_2 pont rajta van az SAB felületen.

3.3.3. Pont ábrázolása a henger felületén

Egy pont rajta van a henger felületén, ha illeszkedik a henger alkotójára.

A felületi pont meghatározásához hasonló a szerkesztési eljárásunk, mint az előző fejezetben a hasáb esetén, 3.9. ábra.



3.9. ábra. *Pont ábrázolása a henger felületén*

3.3.4. Pont ábrázolása a kúp felületén

Egy pont rajta van a kúp felületén, ha rajta van a kúp alkotóján.

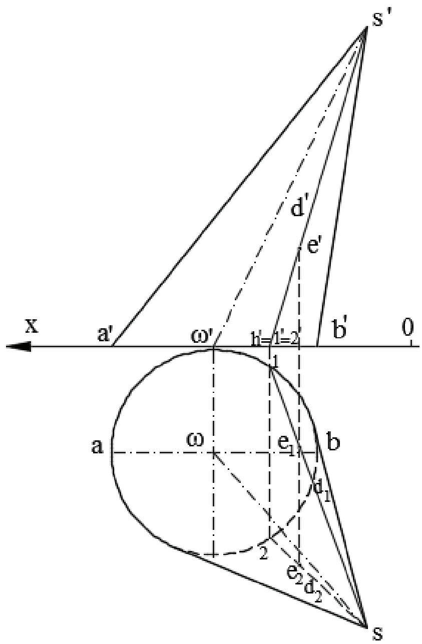
A pont meghatározása céljából hasonló a szerkesztési eljárás, mint a gúla esetén, 3.10. ábra.

3.3.5. Pont ábrázolása a gömb felületén

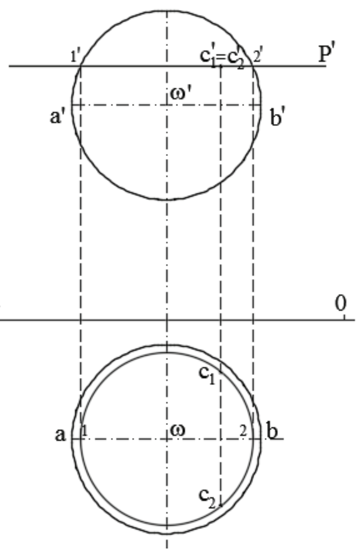
Egy pont rajta van a gömb felületén, ha rajta van a gömbnek egy körén, 3.11. ábra.

A gömb felületét egy horizontális P síkkal elmetsszük. A vízszintes síkban a metszeti kép egy kör. A *c*' ponton keresztül felvesszük a horizontális sík függőleges vetületi nyomvonalát. A metszet vízszintes vetülete egy kör lesz, amelynek átmérője 12.

A C pont rajta van a gömb felületén, ha a *c*' pontból húzott rendező rajta van a metszeti kör 1ω2 vízszintes vetületén.



3.10. ábra. *Pont ábrázolása a kúp felületén*



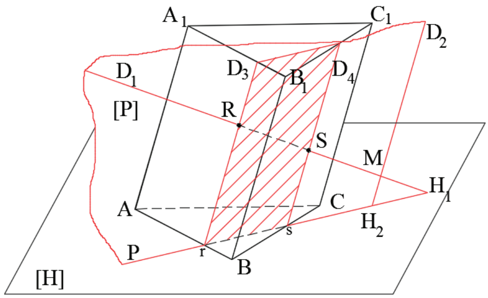
3.11. ábra. *Pont ábrázolása a gömb felületén*

3.4. A geometriai testek metszése egyenessel

Az egyenes két pontban metszi az itt vizsgált geometriai testeket. A metszéspontokat az egyenesen átmenő segédsík alkalmazásával lehet megszerkeszteni. A szerkesztés megkönnyítése érdekében olyan segédsíkot használunk, amelyik párhuzamos a hasáb, illetve henger éleivel, vagy átmegy a gúla, illetve kúp csúcspontján.

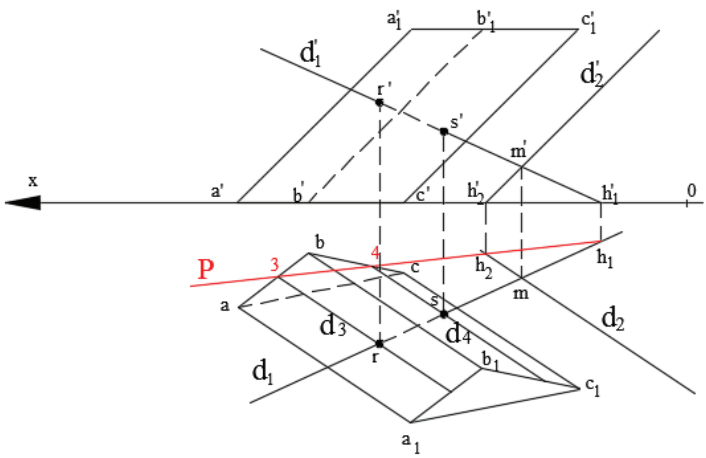
3.4.1. A hasáb metszése egyenessel

A hasáb és az általános helyzetű D_1 egyenes döféspontjainak a térbeli szerkesztése a 3.12. ábrán látható. A D_1 egyenes M pontjában megrajzoljuk a hasáb élével párhuzamos D_2 egyenest, ezzel meghatározva a P síkot.



3.12. ábra. *A hasáb egyenessel való metszése a térben*

Megszerkesztjük az egyenesek vízszintes H_1, H_2 nyompontjai által a sík vízszintes P nyomvonalát (3.13. ábra).



3.13. ábra. *A hasáb metszése egyenessel*

A sík P nyomvonala metszi a hasáb alapját a 3, 4 pontokban.

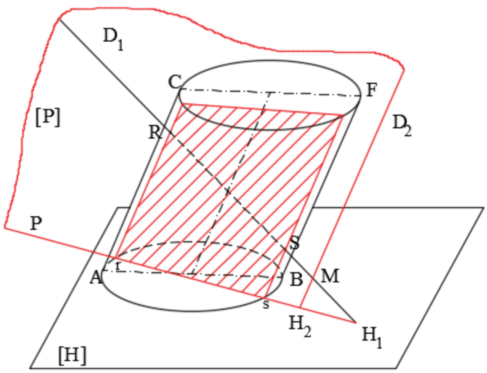
Ezekből a pontokból, ha párhuzamost húzunk a hasáb élével, megkapjuk a vízszintes képsíkban az egyenes r, s döféspontjait.

Az egyenes és a hasáb *r'*, *s'* döféspontját a függőleges képsíkban megkapjuk, ha az r, s pontok rendezőivel elmetsszük az egyenes D_1 vízszintes vetületét.

Az RS döféspontok között az egyenes láthatatlan, hiszen benne van a hasábban.

3.4.2. A henger metszése egyenessel

Az egyenes és henger döféspontjának szerkesztéséhez szükséges egy segédsík, amely tartalmazza az egyenest és az őt metsző, henger alkotójával húzott párhuzamost (3.14. ábra).



3.14. ábra. *A henger döfése egyenessel a térben*

Megszerkesztjük az egyenesek vízszintes H_1, H_2 nyompontjai által a segédsík vízszintes P nyomvonalát (3.15. ábra).

A sík P nyomvonala metszi a hasáb alapját a 3, 4 pontokban.

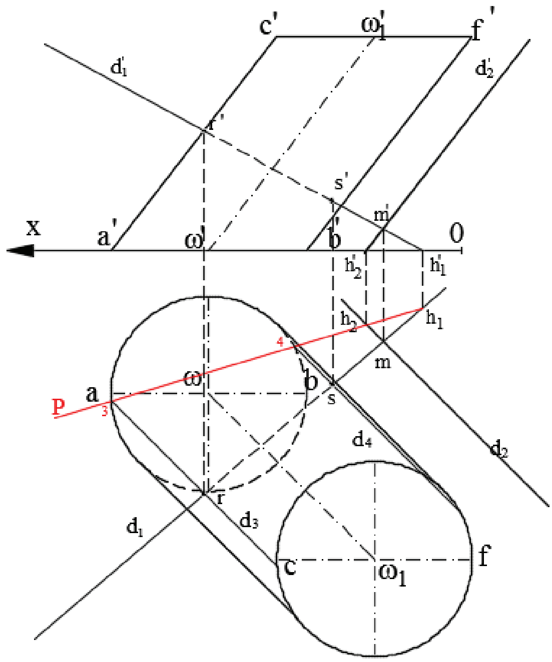
Ezekből a pontokból, ha párhuzamost húzunk a henger alkotójával, megkapjuk a vízszintes képsíkban az egyenes és a henger r, s döféspontjait.

Az egyenes döféspontjainak *r'*, *s'* képeit a függőleges képsíkban *r'*, *s'* megkapjuk, ha az r, s pontokból rendezőt illesztünk az egyenes d_1 vízszintes vetületére.

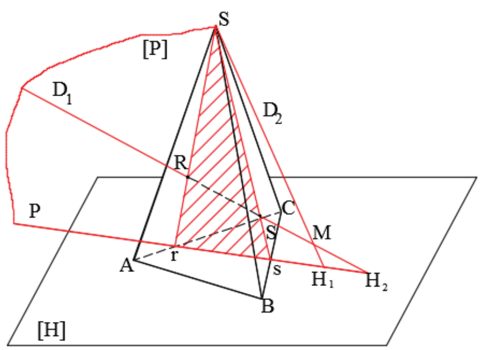
Az RS döféspontok között az egyenes láthatatlan, hiszen benne van a hengerben.

3.4.3. A gúla metszése egyenessel

A gúla és az általános helyzetű D_1 egyenes döféspontjának szerkesztéséhez szükséges egy P segédsík, amely tartalmazza a D_1 egyenest és az őt M pontjában metsző D_2 egyenest, mely átmegy a gúla S csúcspontján (3.16. ábra).



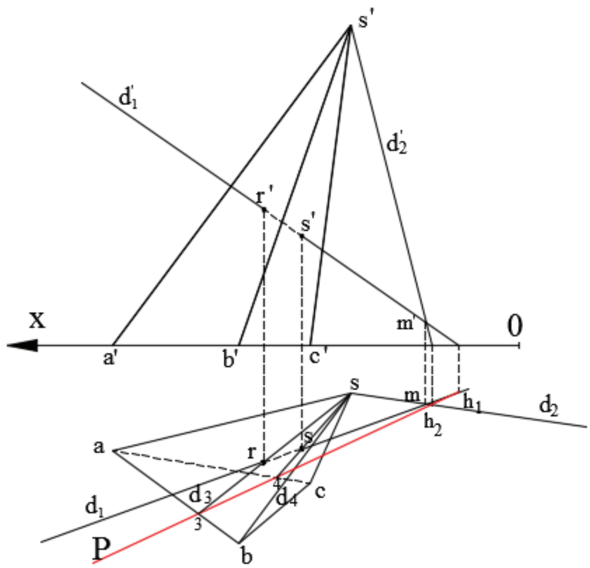
3.15. ábra. *A henger metszete egyenessel*



3.16. ábra. *A gúla metszete egyenessel a térben*

A D_1, D_2 egyenesek által meghatározott P segédsík vízszintes nyomvonalának szerkesztéséhez meghatározzuk az egyenesek h_1, h_2 vízszintes nyompontjait (3.17. ábra).

A h_1, h_2 nyompontok összekötése által kapjuk meg a P segédsík vízszintes nyomvonalát, mely metszi a gúla alapját a 3, 4 pontokban.



3.17. ábra. *A gúla metszete egyenessel*

Ezeket a pontokat összekötjük a gúla s csúcspontjával, amely metszi az egyenes vízszintes d_1 vetületét a keresett r, s döféspontokban.

Az r, s metszéspontokból rendezőt húzunk az egyenes d_1' függőleges vetületéig, és megkapjuk a döféspontok *r*', *s*' függőleges vetületét.

Az egyenes látható egészen a döféspontig, és az r, s döféspontok között, illetve az *r*', *s*' között láthatatlan lesz.

3.4.4. A kúp metszése egyenessel

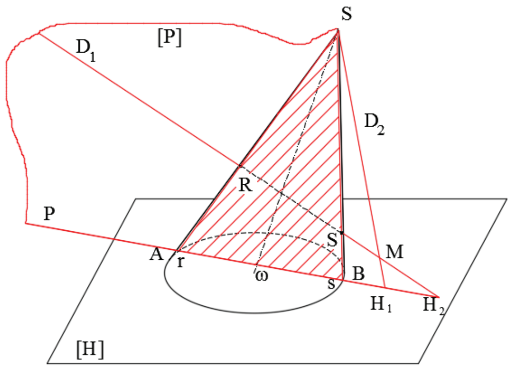
Az egyenes döféspontjának meghatározását a gúlához hasonló módon szerkesztjük meg (3.18. ábra).

A D_1, D_2 egyenesek által meghatározott P segédsík vízszintes nyomvonalának szerkesztéséhez meghatározzuk az egyenesek H_1, H_2 vízszintes nyompontjait (3.18. és 3.19. ábra).

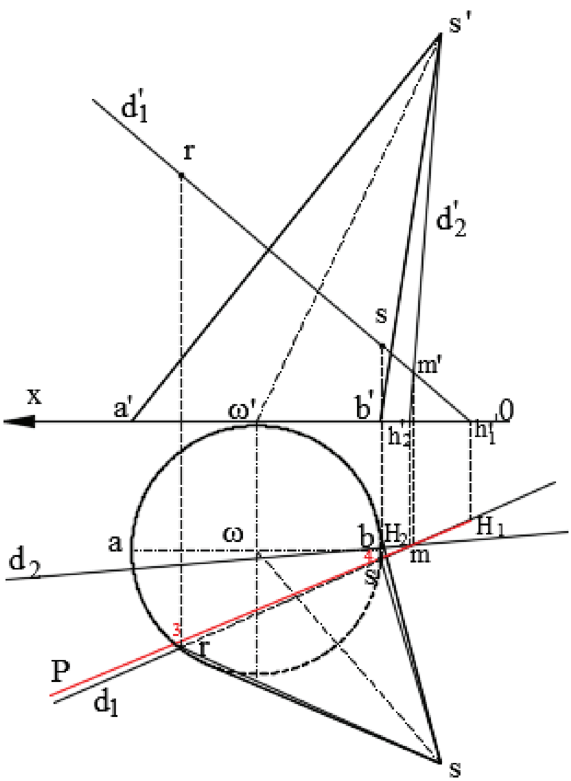
A H_1, H_2 nyompontok összekötése által a P segédsík vízszintes nyomvonala metszi a gúla alapját a 3, 4 pontokban (3.19. ábra).

Ezeket a pontokat összekötjük a kúp csúcspontjával, amely metszi az egyenes vízszintes d_1 vetületét a keresett r, s döféspontokban.

Az r, s metszéspontokból rendezőt bocsátunk az egyenes d_1' függőleges vetületére, és megkapjuk a döféspontok *r*', *s*' függőleges vetületét.



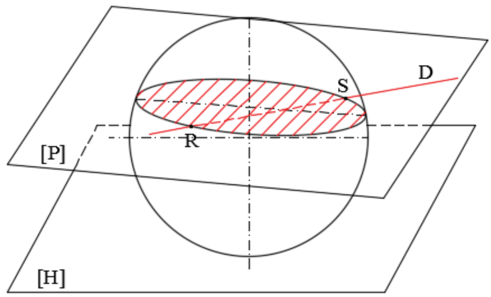
3.18. ábra. *A kúp metszése egyenessel a térben*



3.19. ábra. *A kúp metszése egyenessel*

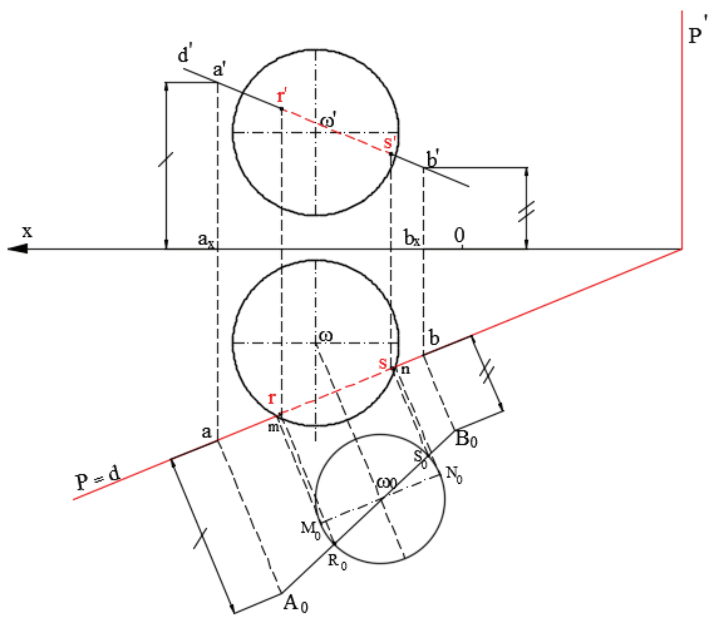
3.4.5. A gömb metszése egyenessel

A 3.20. ábra az egyenes és a gömb áthatásának szerkesztését mutatja be.



3.20. ábra. *A gömb metszése egyenessel a térben*

A szerkesztést a képsíkba forgatás eszközének segítségével végezzük el (3.21. ábra). A D egyenesre illeszkedő vetítősík a vízszintes képsíkra nézve a gömbből egy kört metsz ki. A képsíkba forgatást a sík vízszintes nyomvonala körül végezzük. A forgatás során az egyenes forgatott képét megkapjuk két tetszőleges, A_0B_0 pontjának segítségével.



3.21. ábra. *A gömb metszése egyenessel*

A sík metszi a gömböt egy körben, melyet az m és n pontok határoznak meg. A metszett kör forgatott képét valódi nagyságban kapjuk meg.

Az új képsíkban a kör metszi a leforgatott egyenest az R_0, S_0 pontokban.

A döféspontok vízszintes és függőleges vetületeit megkapjuk, ha a leforgatott A_0B_0 pontokat felemeljük az előző képsíkokba rendezők segítségével, amelyek kimetszik az egyenesen keresett döféspontokat, úgymint az r, s, r' és s'-t.

Szemlélet alapján meghatározzuk a láthatóságot.

Az egyenes döféspontjai közötti szakaszok a gömbön belül találhatók, tehát láthatatlan élek, és a gömbön kívül esők látható részek lesznek, mivel a döféspontok a szemlélő felé eső félgömbön vannak, kivéve az S és a gömb kontúr közé eső kicsiny szakaszt, amit maga a gömbfelület takar.

3.5. A geometriai felületek síkmetszete

A poliéder metszete esetében a síkmetszet poligonját megkapjuk, ha a felület alkotóegyeneseinek döfését megkeressük a metszősíkkal, és a síkmetszet pontjait célszerű módon összekötjük.

A síkmetszet poligonjának meghatározására kétféle módszert ismertetünk:

- *Az éltechnika esetében* a síkmetszet csúcsainak ismeretében határozzuk meg a síkmetszet poligonját. Az egyenes és a sík közötti döféspont meghatározásán alapul, vagyis megadjuk azokat a pontokat, ahol a sík metszi a poliéder oldaléleit.
- *A laptechnika* esetében a síkmetszet oldaléleit határozzuk meg a poliéder oldallapjainak a metsző síkkal való metszeteként. A szerkesztés két sík metszésvonalának a meghatározásán alapszik.

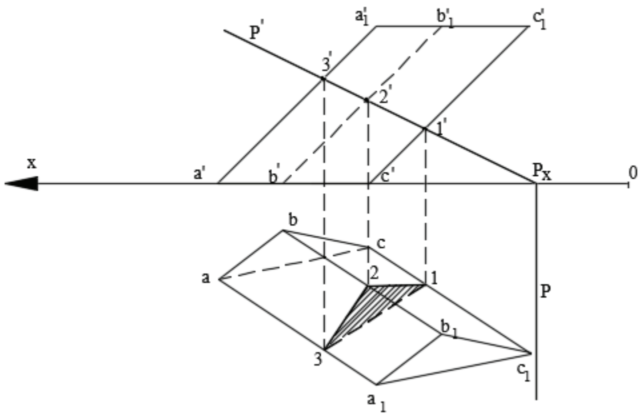
Forgásfelületek esetén a leginkább használt technika a *szeletelő síkokkal* való művelet. Ebben az esetben több, a felület tengelyére merőleges segédsíkot használunk, amelyek a felületből paralelköröket, a metsző síkból egyeneseket szeletelnek ki.

3.5.1. Poliéderek síkmetszete

3.5.1.1. A hasáb síkmetszete

Adott az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb (3.22. ábra), mely ABC alapja benne van a vízszintes képsíkban. A hasábot elmetsszük egy merőleges vetítősíkkal a függőleges képsíkra vonatkozóan. A poliéder függőleges vetületének síkmetszetpontjai rajta vannak a P sík függőleges nyomvonalán, illetve a hasáb éle és a metszősík 1'2'3' döféspontjában ($cc_1' \cap P' = 1'$, $bb_1' \cap P' = 2'$, $aa_1' \cap P' = 3'$).

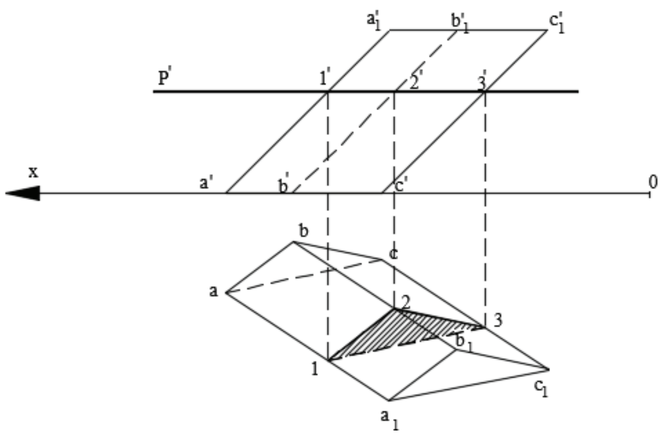
A döféspont függőleges vetületeiből rendezőt bocsátunk a hasáb éleinek vízszintes vetületeire, azaz $1 \in cc_1'$, $2 \in bb_1'$, $3 \in aa_1'$ megszerkesztésével kapjuk a hasáb vízszintes vetületének síkmetszeti pontjait.



3.22. ábra. *A hasáb metszése vetítősíkkal*

A láthatóság törvényét figyelembe véve az 12 és 23 élek a hasáb látható oldallapján helyezkednek el, ezért látható élek, míg az 13 él láthatatlan, mert a hasáb láthatatlan oldallapján van.

Ha a hasábot elmetsszük egy horizontális síkkal, a vízszintes vetületének síkmetszetét valódi nagyságban kapjuk meg (3.23. ábra), míg a függőleges vetülete rajta van a P sík függőleges nyomvonalán, illetve a hasáb éle és a metszősík 1'2'3' döféspontjában ($aa_1' \cap P' = 1'$, $bb_1' \cap P' = 2'$, $cc_1' \cap P' = 3'$,).

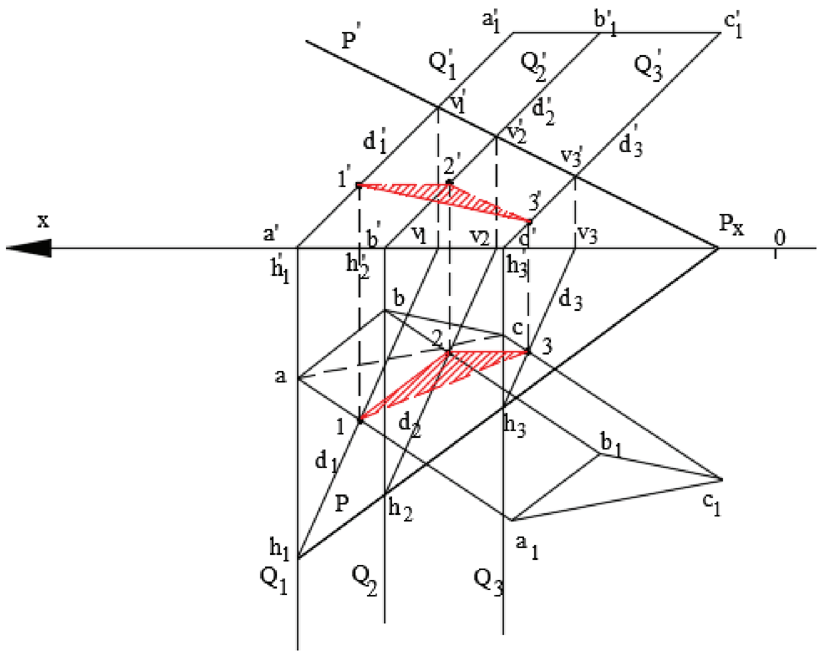


3.23. ábra. *A hasáb metszése horizontális síkkal*

A döféspont függőleges vetületéből rendezőt bocsátunk a hasáb éleinek vízszintes vetületére, így $1 \in aa_1'$, $2 \in bb_1'$, $3 \in cc_1'$ megszerkesztve a hasáb vízszintes vetületének síkmetszetpontjait kapjuk eredményül.

A láthatóság törvényét figyelembe véve, az 12 és 23 élek a hasáb látható oldallapján helyezkednek el, ezért látható élek, az 13 él láthatatlan, mert a hasáb láthatatlan oldallapján van.

Adott az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb (3.24. ábra), melynek az ABC alapja benne van a vízszintes képsíkban. A hasábot elmetsszük egy általános helyzetű síkkal.



3.24. ábra. *A hasáb metszése általános helyzetű síkkal*

A síkmetszet háromszögének meghatározására használjuk az *éltechnika* eljárást.

A hasáb AA_1, BB_1, CC_1 éleit metsző P sík metszéspontjainak meghatározására segéd vetítősíkokat használunk a függőleges képsíkra nézve, amelyek a hasáb éleit tartalmazzák. Meghatározzuk a vetítősíkok és az általános helyzetű sík metsző egyeneseit.

A Q_1 és P sík metsző egyenesét megkapjuk, ha a h_1', v_1' nyompontokat lerendezzük a vízszintes képsík megfelelő elemeire, és az azonos jelölésű h_1', v_1' betűket összekötjük, vagyis $h_1 \cup h_2 = d_1$, $h_1' \cup v_1' = d_1'$.

A d_1 egyenes vízszintes vetülete metszi a hasáb aa_1 élét az 1-es metszetpontban.

Az 1-es pontból rendezőt húzunk az egyenes d_1' függőleges vetületéig, meghatározva az 1'-es metszetpontot.

Hasonló módon szerkesztjük meg a (2, 2') (3, 3') metszéspontot is.

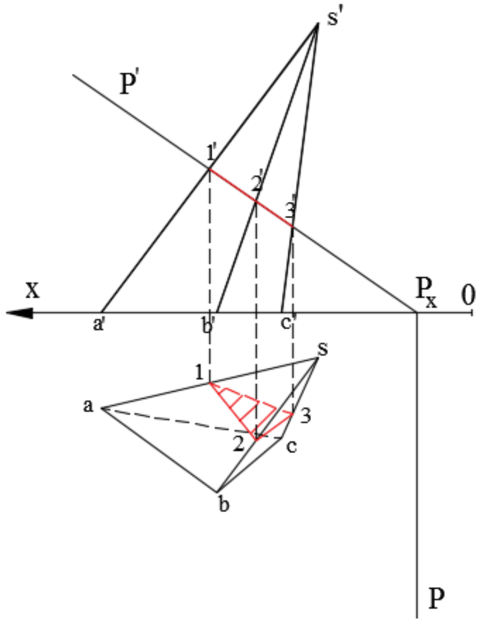
A metszetpontokat összekötve megkapjuk a síkmetszet vetületeit.

A láthatóság törvényét alkalmazva a vízszintes képsíkban az 12 és 23 élek a hasáb látható oldallapján helyezkednek el, ezért látható élek, míg az 13 él láthatatlan, mert a hasáb láthatatlan oldallapján van.

A függőleges képsíkban az 1'2' és 2'3' élek a hasáb láthatatlan ($a'b'a_1'b_1'$) és ($b'c'b_1'c_1'$) oldallapján helyezkednek el, ezért láthatatlan élek, az 1'3' él látható, mert a hasáb látható oldallapján ($a'c'a_1'c_1'$) van.

3.5.1.2. A gúla síkmetszete

Adott az SABC gúla (3.25. ábra), melynek az ABC alapja benne van a vízszintes képsíkban. A gúlát elmetsszük egy merőleges vetítősíkkal a függőleges képsíkra nézve. A poliéder függőleges vetületének síkmetszetpontjai rajta vannak a P sík függőleges nyomvonalán, azaz a gúla éleinek és a metszősíknak a döféspontjai 1'2'3', ($s'a_1' \cap P' = 1'$, $s'b_1' \cap P' = 2'$, $s'c_1' \cap P' = 3'$).



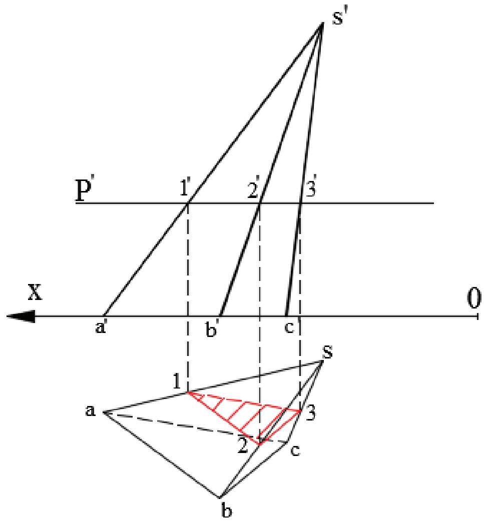
3.25. ábra. *A gúla metszete vetítősíkkal*

A döféspont függőleges vetületéből rendezőt bocsátunk a gúla éleinek vízszintes vetületére, így az $1 \in sa$, $2 \in sb$, $3 \in sc$ pontokat megszerkesztve a gúla vízszintes vetületének síkmetszet pontjait kapjuk.

A láthatóság törvényét figyelembe véve az 12 és 23 élek a gúla látható oldallapján helyezkednek el, ezért látható élek, az 13 él láthatatlan, mert a gúla láthatatlan oldallapján helyezkedik el.

A síkmetszet függőleges 1'2'3' vetülete látható, hiszen a gúla látható oldallapjain helyezkednek el (s'a'b's',s'b'c's').

Ha a gúlát elmetsszük egy horizontális síkkal, a vízszintes vetületének síkmetszetét valódi nagyságban kapjuk meg (3.26. ábra), míg függőleges vetülete rajta van a P sík függőleges nyomvonalán, illetve a gúla éleinek és a metszősíknak az 1'2'3' döféspontjaiban ($s'a_1' \cap P' = 1'$, $s'b_1' \cap P' = 2'$, $s'c_1' \cap P' = 3'$).



3.26. ábra. *A gúla metszete horizontális síkkal*

A döféspontok függőleges vetületéből rendezőt bocsátunk a gúla éleinek vízszintes vetületére, így az $1 \in sa$, $2 \in sb$, $3 \in sc$ vetületeket megszerkesztve a gúla vízszintes vetületének síkmetszetpontjait kapjuk eredményül.

A láthatóság törvényét figyelembe véve az 12 és 23 élek a gúla látható oldallapján helyezkednek el, ezért látható élek, míg az 13 él láthatatlan, mert a gúla láthatatlan oldallapján van.

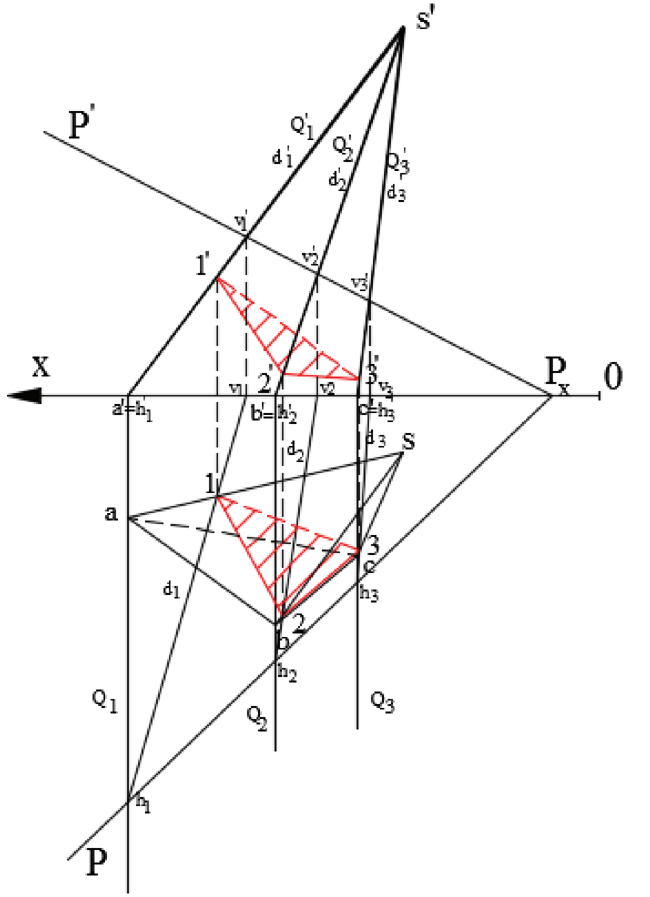
A síkmetszet függőleges 1'2'3' vetületének élei láthatók, hiszen a gúla látható oldallapján helyezkednek el (s'a'b's',s'b'c's').

A gúlát elmetsszük egy általános helyzetű síkkal (3.27. ábra).

A síkmetszet görbéjének meghatározására a gúla AA_1, BB_1, CC_1 éleinek és a P metsző sík metszéspontjainak a meghatározására segéd vetítősíkokat használunk a függőleges képsíkra nézve, amelyek a gúla éleit tartalmazzák. Meghatározzuk a vetítősíkok és az általános helyzetű sík metsző egyeneseit.

A Q_1 és P sík metsző egyenesét megkapjuk, ha a h_1' és v_1' nyompontokat lerendezzük a vízszintes képsík megfelelő elemeire, és az azonos jelölésű h_1' és v_1' vetületeket egyesítjük, vagyis $h_1 \cup v_1 = d_1$, $h_1' \cup v_1' = d_1'$.

Az egyenes vízszintes d_1 vetülete metszi a gúla sa élét az 1-es metszetpontban.



3.27. ábra. *A gúla metszete általános helyzetű síkkal*

Az 1-es pontból rendezőt húzunk az egyenes függőleges d_1' vetületére, meghatározva az 1'-es metszetpontot.

Hasonló módon szerkesztjük meg a többi metszőpontot is (2,2') (3, 3').

A megfelelő metszetpontokat összekötve megkapjuk a síkmetszet vetületeit.

A láthatóság törvényét alkalmazva a vízszintes képsíkban az 12, és 23 élek a gúla látható oldallapján helyezkednek el, ezért látható élek, míg az 13 él láthatatlan, mert a gúla láthatatlan oldallapján van.

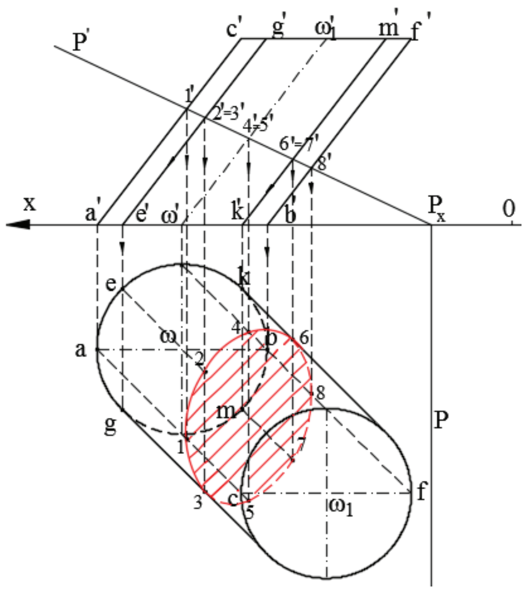
A függőleges képsíkban az 1'2' és 2'3' élek a gúla látható (*s*'*a*'*b*'*s*') (*s*'*b*'*c*'*s*') oldallapjain helyezkednek el, ezért látható élek, ugyanakkor az 1'3' él láthatatlan, mert a gúla láthatatlan oldallapján (*s*'*a*'*c*'*s*') van.

3.5.2. Forgásfelületek síkmetszete

3.5.2.1. A henger síkmetszete

Adott egy ferde henger, amelynek vezérgörbéje a vízszintes síkban helyezkedik el, és ezt elmetsszük egy merőleges vetítősíkkal a függőleges képsíkra nézve.

A henger függőleges vetülete metszetgörbéjének pontjai rajta vannak a P sík függőleges nyomvonalán, illetve a henger alkotóinak és a metszősíknak a döféspontjaiban (3.28. ábra), azaz 1'2'3'4'5'6'7'8' (a'c' ∩ P' = 1', e'g' ∩ P' = 2'3' és r'p' ∩ P' = 4'5', k'm' ∩ P' = 6'7', b'f' ∩ P' = 8').

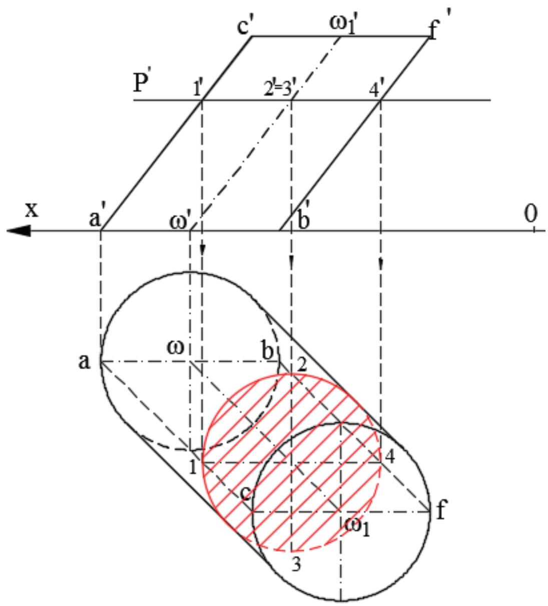


3.28. ábra. *A henger metszete vetítősíkkal*

A döféspontok függőleges vetületeiből rendezőt bocsátunk a henger megfelelő alkotóinak vízszintes vetületére, így az 1 ∈ *ac* és a 2 ∈ *e* pontból húzott henger alkotónak, míg a 3 ∈ *g* pontból húzott henger alkotónak stb. A kapott pontok összekötéséből adódik a henger vízszintes vetületének metszetgörbéje.

A láthatóság törvényét figyelembe véve a 64213 metszeti görberész látható, ugyanis a kpeag forgásfelületrész látható, míg a 68753 metszetgörberész láthatatlan, mert a kpmrg forgásfelületrész láthatatlan.

Ha a hengert elmetsszük egy horizontális síkkal, annak vízszintes vetülete egy kör, melyet valódi nagyságban kapunk meg (3.29. ábra), míg függőleges vetülete rajta van a sík függőleges nyomvonalán, illetve illeszkedik a henger alkotóinak és a metszősík 1'2'3'4' döféspontjaira.



3.29. ábra. *A henger metszete horizontális síkkal*

A hengert elmetsszük egy általános helyzetű síkkal (3.30. ábra).

A metszet görbéje egy ellipszis lesz.

A metszetgörbe pontjainak meghatározására alkalmazzuk azokat a vetítősíkokat, amelyek tartalmazzák a henger alkotóit.

Meghatározzuk a vetítősíkok és az általános helyzetű sík metsző egyenesét.

A Q_1 és P sík metsző egyenesét megkapjuk, ha a H_1V_1 nyompontokat lerendezzük a vízszintes képsík megfelelő elemeire, és az azonos jelölésű vetületeket összekötjük, vagyis $H_1 \cup v_1 = d_1$, $d_1' \cup V_1 = d_1'$ stb.

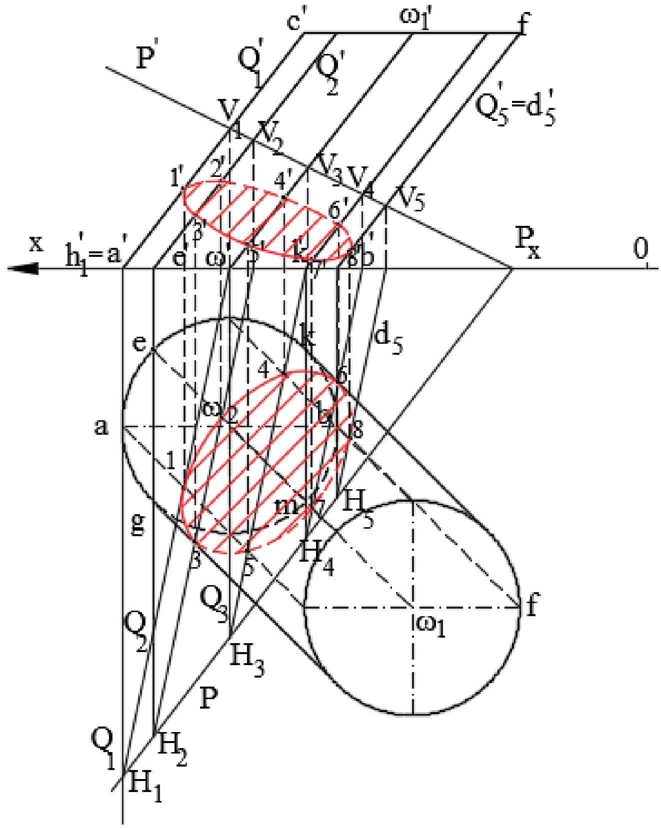
Az egyenes d_1 vízszintes vetülete metszi a henger alkotóját az 1-es metszetpontban.

Az 1-es pontból rendezőt húzunk a függőleges képsíkra, vagyis az egyenes függőleges d_1' vetületére meghatározva az 1'-es metszetpontot.

Hasonló módon szerkesztjük meg a többi metszetpontot is.

A megfelelő metszetpontokat a megfelelő sorrendben összekötve megkapjuk a síkmetszet vetületét.

A síkmetszeti pontok láthatóságának meghatározásánál figyelembe vesszük, hogy a pont hol helyezkedik el a henger alapjához húzott érintőkhöz képest. Ha a vízszintes képsíkban a (gaek) pontokból húzott alkotó egy látható forgásfelületrész, akkor az ezen a felületrészen levő 31246 metszetpontok is láthatók lesznek, így értelemszerűen a többi metszeti pont, a 68753 láthatatlan felületrészen lesz. Hasonló módon határozzuk meg a metszeti pontok láthatóságát a függőleges képsíkban is.



3.30. ábra. *A henger metszete általános helyzetű síkkal*

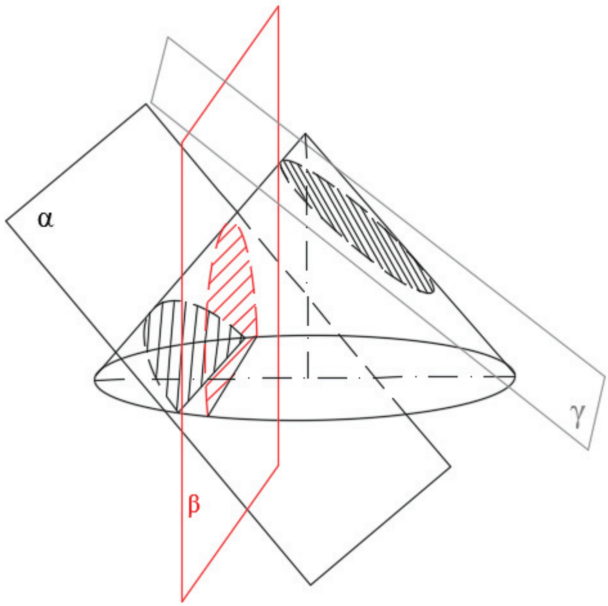
3.5.2.2. A forgáskúp síkmetszete

Dandelin tétele szerint a forgáskúp síkmetszete a sík állásától függően lehet:

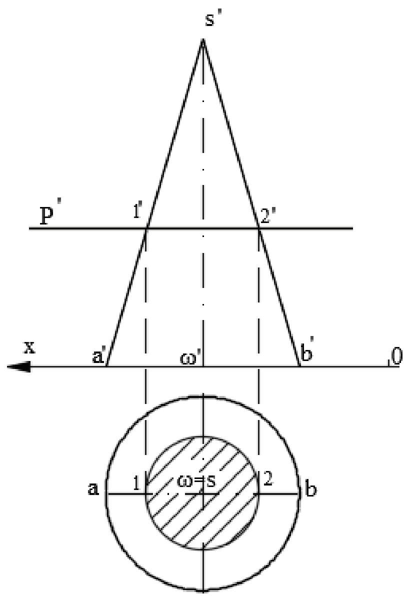
1. ellipszis, ha a sík a kúp csúcsának egyik oldalán metszi el a kúp minden alkotóját (γ sík),

2. parabola, ha a sík a kúp egy alkotójával párhuzamos (α sík),

3. hiperbola, ha a sík nem megy át a kúp csúcsán, és a kúp két alkotójával párhuzamos, vagyis a csúcsának mindkét oldalán metszi az alkotókat (β sík).

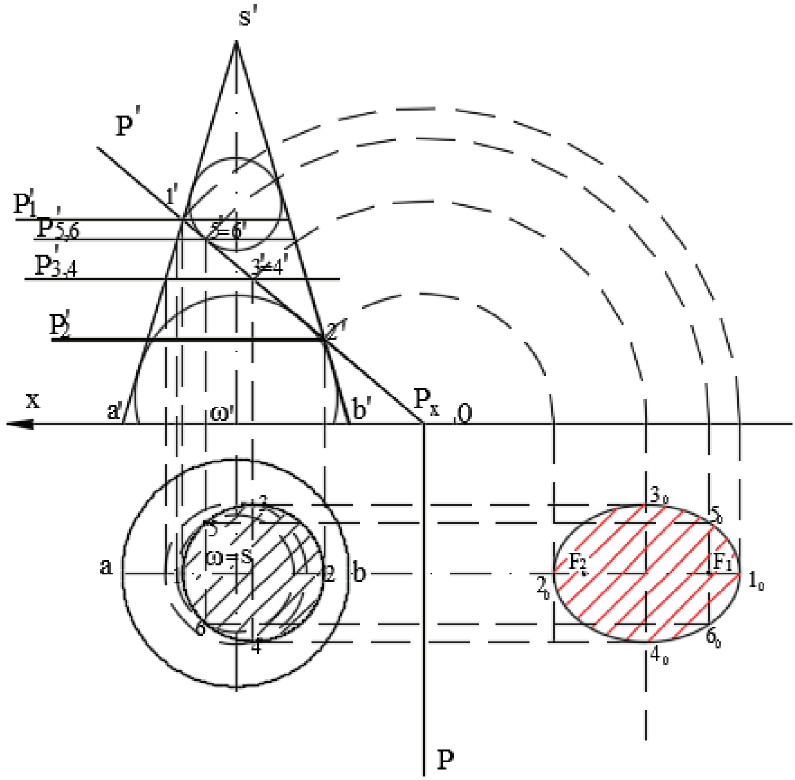


3.31. ábra. *A forgáskúp metszetgörbéi*



3.32. ábra. *A kúp metszete horizontális síkkal*

Ha a kúpot elmetsszük egy horizontális síkkal, annak vízszintes vetülete egy kör, melyet valódi nagyságban kapunk meg (3.32. ábra). Függőleges vetülete rajta van a sík függőleges nyomvonalán, illetve a kúp kontúralkotóinak és a metszősík 1'2' döféspontjain.



3.33. ábra. *A kúp ellipszismetszete vetítősíkkal és valódi nagysága képsíkba forgatással*

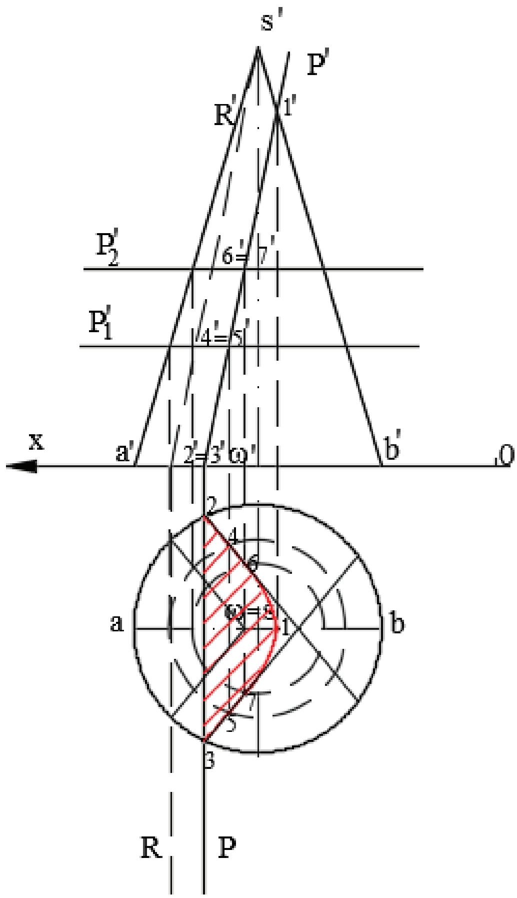
A vízszintes képsíkon álló egyenes körkúpot elmetsszük egy függőleges képsíkra merőleges vetítősíkkal. A sík függőleges nyomvonala metszi a kúp kontúralkotóit az 1'2' pontokban. A pontokból rendezőegyenest bocsátunk a vízszintes képsíkban lévő alapkör vízszintes sugaraira, így megkapjuk az 1, 2 pontokat, amelyek a metszetellipszis nagytengelyének a pontjai. Az ellipszis kistengelyének pontjait úgy határozzuk meg, hogy az 1'2' szakasz felezőpontján egy horizontális szeletelősíkot veszünk fel, amely egy kört metsz ki a kúpfelületből. A kistengely pontjait a vízszintes képsíkban kapjuk meg, ha a metszetkört elmetsszük a 3'4' pontokból húzott közös rendezőegyenessel.

További ellipszispontok szerkesztéséhez szeletelő horizontális síkokat használunk.

A Dandelin-gömb (3.33. ábra) érinti a metszősíkot és a kúpfelületet is. Az 5' = 6' érintkezési pontokban segéd szeletelő horizontális síkot veszünk fel. A szeletelő horizontális sík egy kört metsz ki a kúpfelületből. A kör kimetszi a közös rendezőegyenesből a keresett 5 és 6 pontokat, amelyek a metszetellipszis további pontjai.

Ezen 5 és 6 érintési pontok segítségével szerkesztjük meg a metszetellipszis F_1, F_2 fókuszpontjait a képsíkba forgatás módszerével.

A metszetgörbe képe egy ellipszis, amelynek valódi nagyságát a sík vízszintes nyomvonala körüli képsíkba forgatással kapjuk meg.



3.34. ábra. *A kúp hiperbolametszete vetítősíkkal*

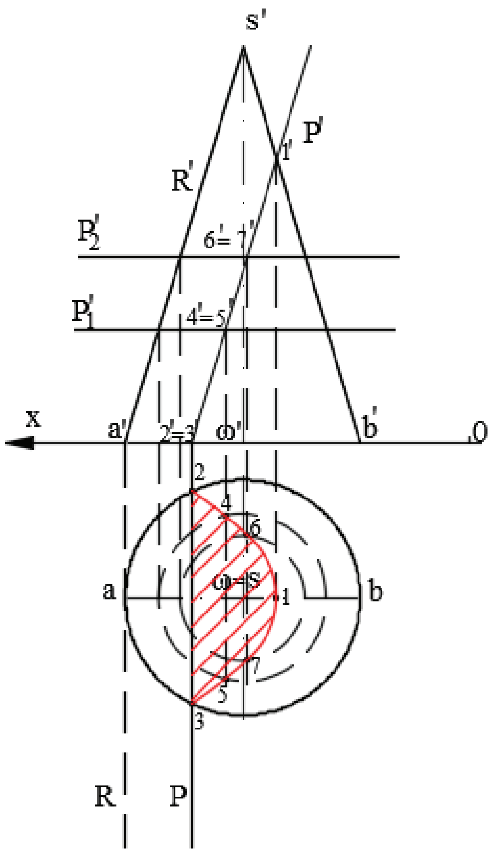
Adott a vízszintes képsíkon álló egyenes körkúp, amelyet elmetszünk egy olyan P függőleges vetítősíkkal, ami párhuzamos egy képzeletbeli, kúp csúcspontjára illeszkedő, a kúp két alkotóját tartalmazó R síkkal (3.34. ábra). A P sík nem megy át a kúp csúcsán, és metszi az alkotókat a kúp csúcsának mindkét oldalán.

A P sík függőleges nyomvonala metszi a kúp kontúrvonalait az 1', illetve 2' = 3' pontokban. Ha az 1'pontból rendezőegyenest bocsátunk a vízszintes képsíkban az őt tartalmazó kúpalkotó vízszintes vetületére, megkapjuk a hiperbola csúcsát.

A hiperbola további pontjait megkapjuk, ha a kúpot elmetsszük horizontális segédsíkokkal, úgymint a P_1' és a P_2'.

Ezek a síkok egy-egy kört metszenek ki a kúpfelületből, amely körök kimetszik a közös rendezőegyenesekből a keresett 4, 5, 6, 7 pontokat, amelyek a hiperbola pontjait határozzák meg.

A képzeletbeli R síkkal történő metszeti kép egy háromszög.



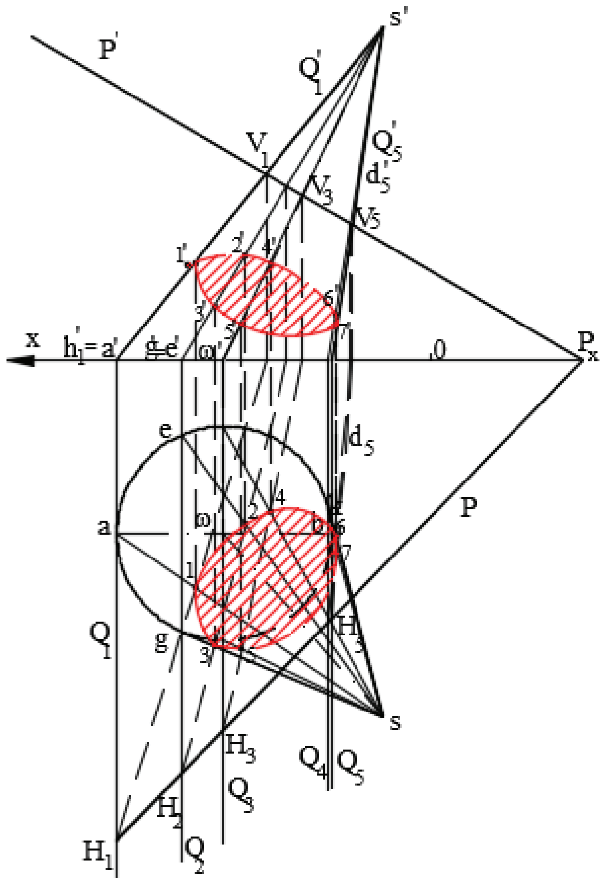
3.35. ábra. *A kúp parabolametszete vetítősíkkal*

Adott a vízszintes képsíkon álló egyenes körkúp, amelyet elmetszünk egy olyan P vetítősíkkal, amely párhuzamos egy képzeletbeli R síkkal, amely átmegy a kúp csúcsán és tartalmazza a kúp kontúralkotóját (3.35. ábra).

A P sík függőleges nyomvonala metszi a kúp látszólagos kontúrvonalát 1', illetve 2' = 3' pontokban. Ha az 1' pontból rendezőegyenest bocsátunk az őt tartalmazó kontúralkotó vízszintes képére, akkor megkapjuk a vízszintes képsíkban a parabola csúcsát.

A parabola további pontjait megkapjuk, ha a kúpot elmetsszük horizontális segédsíkokkal, mint például a P_1', P_2'.

Ezek a síkok egy-egy kört metszenek ki a kúpfelületből, amely körök kimetszik a közös rendezőegyenesekből a keresett 4, 5, 6, 7 pontokat, amelyeket a parabola további pontjaiként határoztunk meg.



3.36. ábra. *A kúp metszete általános helyzetű síkkal*

A vízszintes képsíkon álló ferde körkúpot elmetszve egy általános helyzetű síkkal a 3.36. ábra szerint a metszetgörbe egy ellipszis lesz.

A metszetgörbe pontjainak meghatározásához alkalmazzuk azokat a vetítősíkokat, amelyek tartalmazzák a kúp alkotóit.

Meghatározzuk a vetítősíkok és az általános helyzetű sík metsző (fedő) egyenesét.

Az egyenes vízszintes vetülete metszi a kúp (sa) alkotóját az 1-es metszetpontban.

Az 1-es pontból rendezőt húzunk a függőleges képsíkon lévő *s'a'* alkotóra, így meghatározva az 1'-es metszetpontot.

Hasonló módon szerkesztjük meg a többi metszetpontot is, amelyeket megfelelően összekötve megkapjuk a síkmetszet vetületét mindkét képsíkban.

A síkmetszeti pontok láthatóságának meghatározásánál figyelembe vesszük, hogy a pont hol helyezkedik el a kúp alapjához húzott érintőhöz képest. Ha a vízszintes képsíkban a (gaek) pontokat tartalmazó körívből húzott alkotó egy látható forgásfelület, akkor ezen a felületen levő 31246 metszeti pontok is láthatók lesznek, így értelemszerűen a 376 metszetpont láthatatlan lesz. Hasonló módon határozzuk meg a metszetpontok láthatóságát a függőleges képsíkban is.

3.5.2.3. A gömb síkmetszete

A gömböt metszve egy általános vagy partikuláris helyzetű síkkal a vetítősíkhoz képest, a síkmetszetünk egy kör lesz.

Adott egy gömb, amelyet metsszünk egy általános helyzetű P síkkal (3.37. ábra).

A metszetgörbe egy kör lesz, amelynek vetülete a képsíkokban egy-egy ellipszis.

A metszetgörbe pontjainak meghatározására horizontális segédsíkokat használunk, úgymint a Q_1, Q_2, Q_3.

A Q_2 sík átmegy a gömb középpontján, ami metszi a gömböt a látszólagos kör vízszintes kontúrvonalában, a vízszintes kontúrkör vízszintes képén.

A P sík metszi a gömböt a D_2 (d_2,d_2') egyenesben, ahol d_2 || P a sík vízszintes nyomvonalával.

A vízszintes képsíkban a D_2 egyenes vízszintes vetülete, d_2 metszi a gömb látszólagos kontúrvonalát az ellipszis 3, 4 pontjában.

A 3',4' pontokat megkapjuk, ha rendezőt bocsátunk a D_2 egyenes függőleges d_2' vetületére.

A tetszőlegesen választott Q_1 és Q_3 szeletelő horizontális síkok esetében is hasonló módon járunk el.

A szerkesztésben használunk egy frontális R síkot is, amit szintén a gömb középpontjában veszünk fel. Az R sík metszi a gömböt a függőleges látszólagos kör, azaz kontúrkör függőleges vonalában.

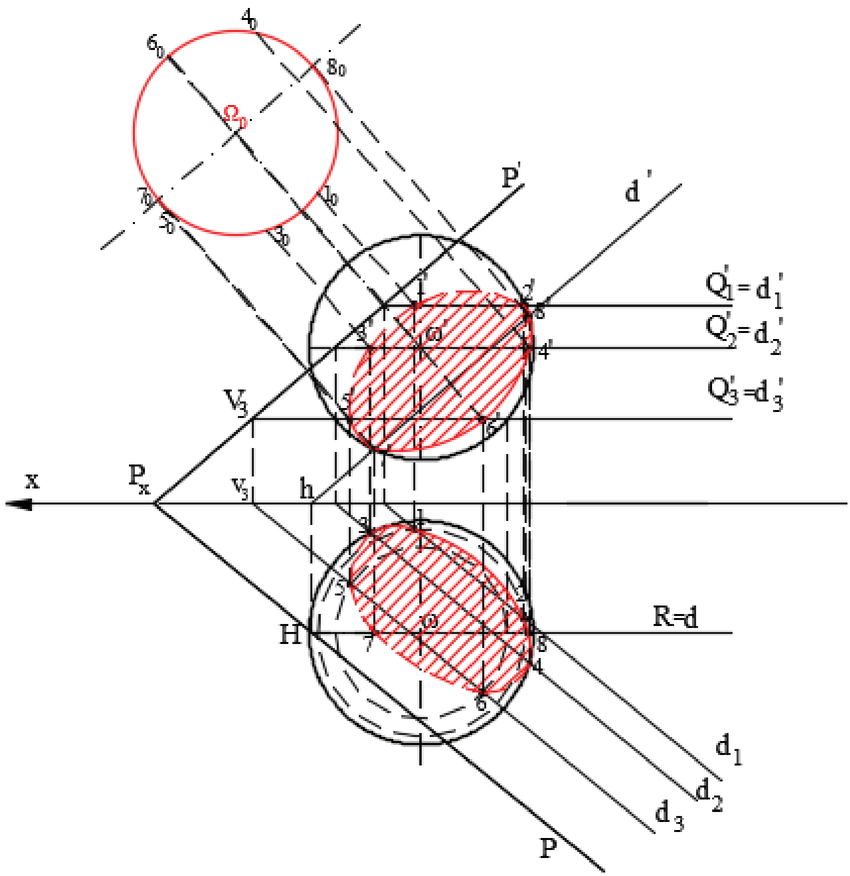
Itt a P sík egy D frontális egyenesben metszi a gömböt.

A függőleges képsíkban a *D* egyenes függőleges vetülete, *d'* metszi a gömb látszólagos kontúrvonalát a síkmetszet ellipszis 7', 8' pontjában.

A 7, 8 pontokat megkapjuk, ha rendezőt bocsátunk a *D* egyenes vízszintes *d* vetületére.

A metszetpontokat összekötve megkapjuk a síkmetszet vetületét mindkét képsíkban, ami egy-egy deformált ellipszis.

A metszetkör valódi nagyságát megkapjuk képsíkba forgatás módszerével a sík függőleges nyomvonala körül.



3.37. ábra. *A gömb metszete általános helyzetű P síkkal*

3.6. A geometriai felületek áthatása

A felületek közös pontjainak összességét metszésvonalnak vagy áthatási görbének nevezzük.

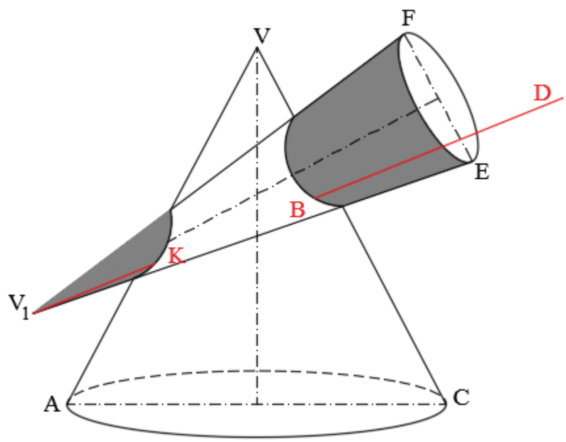
A felületek közös pontjainak meghatározása céljából segédfelületeket használunk.

A segédfelületek által meghatározott hosszmetszeteknek könnyen szerkeszthetőknek kell lenniük mindkét felület vonatkozásában. Az áthatási görbék szerkesztésénél két módszert alkalmazzunk:

1. *Lapmódszer*: az áthatási görbe éleit szerkesztjük meg, ami két síklap metszetének megszerkesztéséből áll.

2. *Élmódszer*: az áthatási vonal csúcspontjait szerkesztjük meg, ami az egyik felület élének és a másik felület lapja közös pontjainak meghatározásából áll.

A geometriai felületek áthatását leegyszerűsíthetjük egy test és egy egyenes metszetének meghatározására (3.38. ábra).



3.38. ábra. *A geometriai felületek áthatása*

Két geometriai felület metszete esetén meghatározunk két kontúrgörbét, a bemenetel és a kilépés görbéit. Ezen görbék meghatározása céljából megfelelő segédsíkokat alkalmazzunk.

Egy általános módszer a pontok szerinti metszésvonal meghatározása céljából a következő lépéseket tartalmazza:

– a segédsíkok meghatározása;
– a metszeti forma meghatározása a határsíkok segítségével;
– a metszetpontok meghatározása;
– a metszetpontok megfelelő sorrendben történő összekötése, használva a mozgó pont vagy kiterítés módszerét;

– a metszetpontok láthatóságának meghatározása.

A határsíkok azok a szélső helyzetű segédsíkok, amelyeket a metsző egyenesek meghatározásához használunk. A határsíkok mutatják mindkét geometriai testnek a metszésben levő részvételét, áttekintést adva a metszet formájáról.

Kétféle metszési forma ismeretes:

1. *áthatás*, egy alap kontúrvonalon egy metsző kontúrvonal,

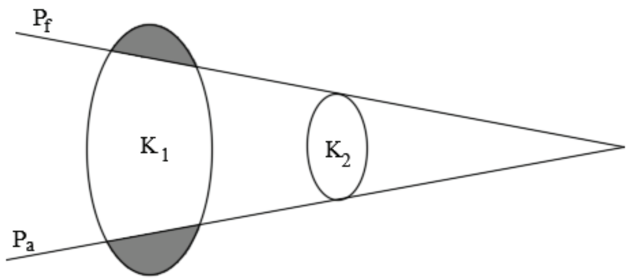
2. *szakadás,* egy alap kontúrvonalon két különálló metsző kontúrvonal.

Az alap kontúrvonalak vetületeinek jelölése: K_1, K_2, míg a határsíkok jelölése: P_f, P_a.

Az egyenes nem metszi a geometriai testet, ha a határsíkok nyomvonala kitérő az alap kontúrvonalához képest.

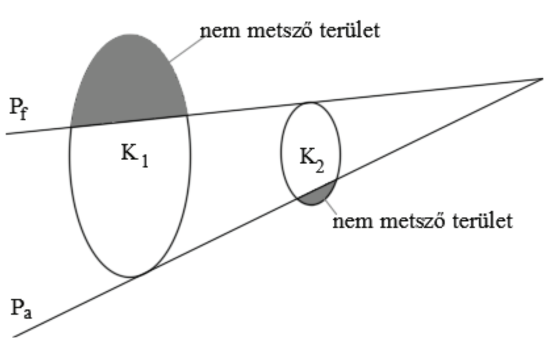
Akkor határozhatók meg a határsíkok helyzetei, amikor a test alapsíkjában lévő egyenes metszi a testet, következésképpen a sík nyomvonala érintője az alapalakzat kontúrvonalának.

Amikor a határsíkok nyomvonalai érintői a K_2 alap kontúrvonalának és metszik a másik test alapjának kontúrvonalát, akkor áthatásról beszélünk (3.39. ábra).



3.39. ábra. *K_1, K_2 alap kontúrgörbéjű felületek közötti áthatás*

Abban az esetben, ha a határsík nyomvonala a P_f érintője a K_2 alap kontúrvonalának, ugyanakkor metszi a másik test alapjának K_1 kontúrvonalát, akkor szakadásról (széteső áthatásról) beszélünk (3.40. ábra).



3.40. ábra. *A K_1, K_2 alap kontúrgörbék közötti szakadás*

3.6.1. A poliéderek áthatása

A metszésvonal meghatározása céljából olyan segédsíkot használunk, amelyet két, a hasáb vagy henger oldaléleivel párhuzamos egyenes, illetve a gúla vagy kúp csúcspontjainak összekötése határoz meg, és amely hosszanti irányban metszi a geometriai testeket.

A metszési forma meghatározása érdekében a hasábok alapjának pontjaitól párhuzamosakat húzunk a P sík vízszintes nyomvonalával.

A metszési forma megadása érdekében a gúla alapját metsszük a P segédsík vízszintes nyomvonalával.

A metszetpontok sorrendjének az összekötését kétféle módon tudjuk meghatározni:

1. mozgó pont módszere,
2. kiterítés módszere.

1. A mozgó pont módszere:

Tekintsünk egy mozgó pontot, amely a geometriai testek alapjain, illetve ezeknek a vetületén mozog.

Felveszünk egy haladási irányt, ami bejárja a testek alapjának azon darabját, mely részt vesz a metszésben a vizsgált vetületen.

A mozgó pont nem haladhat át a határsíkok által meghatározott *nem metsző területen* (3.40. ábra). Ezeket a meghatározott pontokat táblázatba foglaljuk. Meghatározzuk mindkét vetület éleinek láthatóságát, figyelembe véve, hogy a mozgó pont látható lesz, ha látható kontúrvonalon halad, és láthatatlan, ha az egyik vagy mindkét kontúrvonal láthatatlan.

2. A kiterítés módszere

Megrajzoljuk a geometriai testek alapjának egymást követő oldaléleit vízszintes és függőleges vonalaknak megfeleltetve, amelyek egy hálót képeznek.

Megjelöljük a metszetpontokat és összekötjük őket.

3.6.1.1. Két hasáb metszete

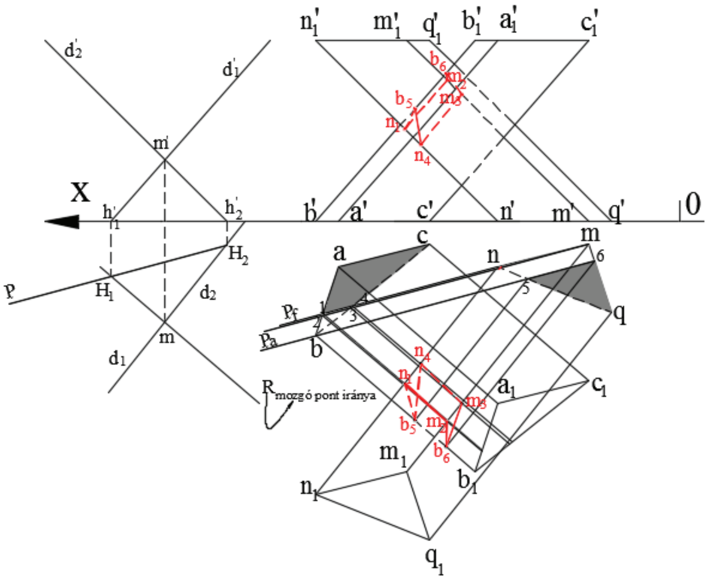
Például adott egy ABC alapú és ismert AA_1 élű, illetve MNQ alapú és MM_1 élű hasáb.

Ábrázoljuk a két hasáb metszetét!

$$\text{Pl:}\begin{cases} A\,(40,15,15) \\ B\,(10,5,5) \\ C\,(25,35,25) \\ A_1(25,35,25) \end{cases},\ \begin{cases} M\,(40,15,15) \\ N\,(10,5,5) \\ Q\,(25,35,25) \\ M_1(25,35,25) \end{cases}.$$

1. táblázat. *Metszetpontok meghatározása a mozgó pont módszerével*

Metszőpontok										
ABC alapú hasáb	1	2	b	3	4	4	3	b	2	1
MNQ alapú hasáb	n	–	5	–	n	n	m	6	m	n
Metszőpontok	n_1	–	b_5	–	n_4	n_4	m_3	b_6	m_2	n_1
Láthatóság Vízszintes képsíkban										
ABC alapú hasáb										
MNQ alapú hasáb										
Láthatóság										
Láthatóság Függőleges képsíkban										
ABC alapú hasáb										
MNQ alapú hasáb										
Láthatóság										



3.41. ábra. *Két hasáb metszete*

A segédsík meghatározásához két metsző egyenest használunk, amelyek párhuzamosak a hasábok éleivel.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a metszet formáját, a hasáb alapjának csúcspontjaiból párhuzamost húzunk a segédsík P nyomvonalával.

A hátulsó P_f határsík P_f az (n) pontra illeszkedik és a P síkkal párhuzamos, ami metszi a másik hasáb alapját az 1 és 4 pontokban.

Az elülső P_a határsík a (b) pontra illeszkedik és a P síkkal párhuzamos, ami metszi a másik hasáb alapját az 5 és 6 pontokban. A metszési forma szakadás, azaz széteső lesz (3.41. ábra).

Választunk egy haladási irányt az R mozgó pontnak. Figyelembe vesszük, hogy a mozgó pont nem haladhat át a határsíkok által nem metszett területen.

A metszetpontok meghatározásához szükséges, hogy az egyik hasáb éle metszsze a másik hasábot a keresett metszetőpontban.

Amint a 3.41. ábra mutatja, az NN_1 egyenes metszi az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb alapjának az 1 és 4 pontokból húzott lapegyenesét az $N_1(n_{1,}\ n_1')$ és $N_4(n_{4,}\ n_4')$ metszéspontokban.

Hasonló módon határozzuk meg a B_5, B_6, M_3, M_2 metszetpontot is.

A metszet poligont megkapjuk, ha összekötjük a metszetpontokat, alkalmazva a mozgó pont módszerét (1. táblázat), követve a láthatóságot mindkét képsíkban.

3.6.1.2. Két gúla metszete

2. táblázat. *Metszetpontok meghatározása a mozgó pont módszerével*

Metszőpontok														
ABC alapú gúla	1	-	3	5	3	-	1	2	c	4	6	4	c	2
MNQ alapú gúla	m	7	-	q	n	8	m	m	7	-	q	n	8	m
Metszőpontok	m_1	-	-	q_5	n_3	-	m_1	m_2	c_7	-	q_6	n_4	c_8	m_2
Láthatóság Vízszintes képsíkban														
ABC alapú gúla														
MNQ alapú gúla														
Láthatóság														
Láthatóság Függőleges képsíkban														
ABC alapú gúla														
MNQ alapú gúla														
Láthatóság														

A határsíkok meghatározása céljából, a gúla csúcspontjain keresztül (3.42. ábra) felveszünk egy D egyenest, amelynek vízszintes nyompontja H.

Ez a D egyenes benne van abban a segédsíkban, amelyet a gúlák egyidejű metszésére használunk. Ezek a határsíkok átmennek a D egyenes vízszintes H nyompontján.

A metszési formát megkapjuk, ha a gúla alapjának csúcspontjait összekötjük a D egyenes H nyompontjával.

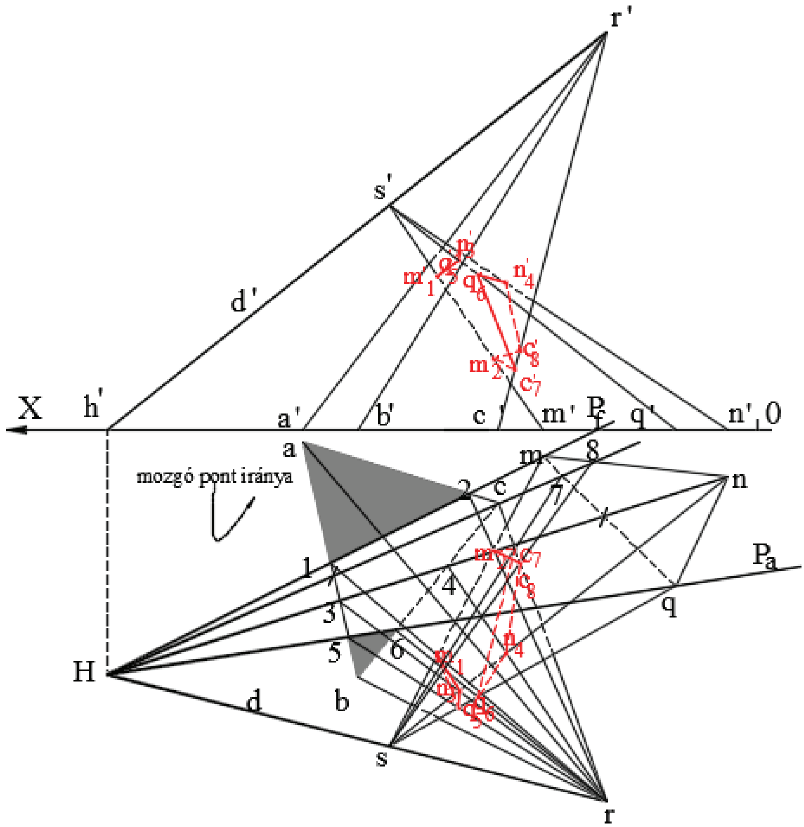
A hátsó P_f határsík az (m) pont összekötése a H nyomponttal, ami metszi a másik gúla alapját az 1 és 2 pontokban.

Az elülső P_a határsík a (q) pont összekötése a H nyomponttal, ami metszi a másik gúla alapját az 5 és a 6 pontokban. A metszési forma áthatás lesz a 3.42. ábra szerint.

Választunk egy haladási irányt a mozgó pontnak.

Figyelembe vesszük, hogy a mozgó pont nem haladhat át a határsíkok által nem metszett területen.

A metszetpontok meghatározása érdekében az egyik gúla éle metszi a másik gúlát a keresett metszetpontban.



3.42. ábra. *Két gúla metszete*

Amint azt a 3.42. ábra mutatja, a vízszintes képsíkban az r_1 egyenes metszi az *SMNQ* gúla sm élét az m_1 metszéspontban.

Hasonló módon határozzuk meg a q_5, n_3, m_2, c_7, q_6, n_4, c_8 i metszetpontot is a vízszintes képsíkban, illetve ezen pontok függőleges vetületét is megkapjuk, ha a metszetpontokból rendezőt bocsátunk a gúla megfelelő éleire.

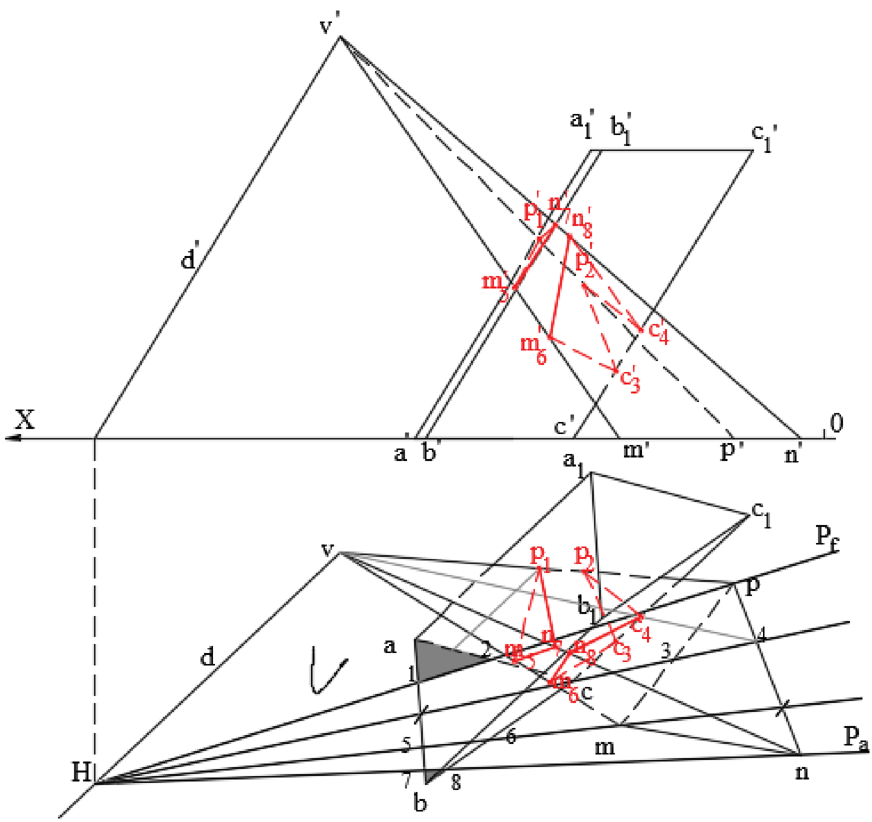
A metszet poligont megkapjuk, ha összekötjük a metszetpontokat, alkalmazva a mozgó pont módszerét (2. táblázat), követve a láthatóságot mindkét képsíkban.

3.6.1.3. Hasáb-gúla metszete

A határsíkok meghatározása céljából felveszünk egy D egyenest, amelyet a gúla csúcspontján keresztül párhuzamosan húzunk a hasáb élével (3.43. ábra), amelynek vízszintes nyompontja H.

3. táblázat. *Metszetpontok meghatározása a mozgó pont módszerével*

Metszőpontok														
ABC alapú hasáb	1	-	5	7	5	-	1	2	c	6	8	6	c	2
MNQ alapú gúla	p	3	m	n	-	4	p	p	3	m	n	-	4	p
Metszőpontok	p_1	-	m_5	n_7	-	-	p_1	p_2	c_3	m_6	n_8	-	c_4	p_2
Láthatóság Vízszintes képsíkban														
ABC alapú hasáb														
MNQ alapú gúla														
Láthatóság														
Láthatóság Függőleges képsíkban														
ABC alapú hasáb														
MNQ alapú gúla														
Láthatóság														



3.43. ábra. *Hasáb-gúla metszete*

Ez a D egyenes benne van azokban a segédsíkokban, amelyeket a hasáb-gúla egyidejű metszésére használunk. Ezek a határsíkok átmennek a D egyenes vízszintes H nyompontján.

A metszési formát megkapjuk, ha a hasáb és a gúla alapjának csúcspontjait összekötjük a D egyenes H nyompontjával.

A hátsó P_f határsík a gúla alapján lévő (p) pont összekötése a H nyomponttal, ami metszi a hasáb alapját az 1 és 2 pontokban.

Az elülső P_a határsík a gúla alapján lévő (n) pont összekötése a H nyomponttal, ami metszi a hasáb alapját a 7 és 8 pontokban. A metszési forma áthatás lesz a 3.43. ábra szerint.

Választunk egy haladási irányt a mozgó pontnak.

Figyelembe vesszük, hogy a mozgó pont nem haladhat át a határsíkok által nem metszett területen.

A metszetpontok meghatározása során a gúla élei metszik a hasáb lapjait a keresett metszetpontokban.

Amint azt a 3.43. ábra mutatja, a vízszintes képsíkban az 1-es pontból húzott párhuzamos a hasáb élével metszi az VMNP gúla (vp) élét a p_1 metszéspontban.

Hasonló módon határozzuk meg a p_2, n_7, m_5, c_3, m_6, n_8, c_4 metszetpontokat is a vízszintes képsíkban, illetve ezen pontok függőleges vetületét is megkapjuk, ha a metszetpontokból rendezőt bocsátunk a testek megfelelő éleire.

A metszetpoligont megkapjuk, ha összekötjük a metszetpontokat, alkalmazva a mozgó pont módszerét (3. táblázat), követve a láthatóságot mindkét képsíkban.

3.6.2. A forgásfelületek áthatása

3.6.2.1. Két kúp metszete

Adott két kúp, amelyek kör alapjai benne vannnak a vízszintes képsíkban, és Ω_1, Ω_2 középponttal rendelkeznek (3.43. ábra).

A segédsíkok tartalmazzák a kúpok alkotóit és a D egyenest, amelyet a kúp csúcspontjainak összekötése határoz meg.

A határsíkok átmennek a D egyenes vízszintes H nyompontján.

A metszési forma áthatás lesz, amelynek hátulsó és elülső határsíkja, P_f és P_a érintőleges az Ω_1 kúp alapköréhez, és metszi a másik kúp alapját két-két alkotó vonalban (3.43. ábra).

A hátsó P_f határsíkot a H nyompontból az Ω_1 kúp alapköréhez húzott (e) határozza meg, ami metszi a másik kúp alapkörét az (1, 2) pontokban.

Az elülső P_a határsíkot a H nyompontból az Ω_1 kúp alapköréhez húzott (m) érintő határozza meg, ami metszi a másik kúp alapkörét a (11, 12) pontokban.

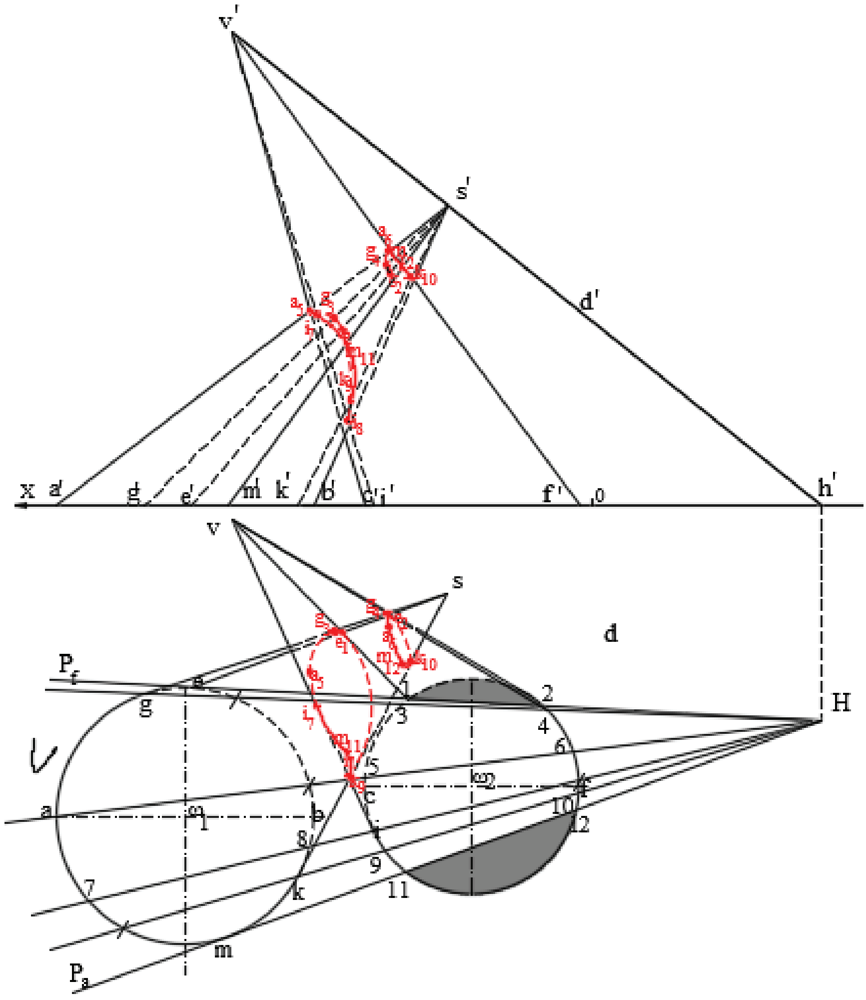
Ezután választunk egy haladási irányt a mozgó pontnak.

Figyelembe vesszük, hogy a mozgó pont nem haladhat át a határsíkok által nem metsző területen.

A metszéspontok meghatározása a D egyenesre illeszkedő sorozósíkkal történik, melyben az egyik kúp alkotói metszik a másik kúp alkotóit a keresett metszéspontokban.

Amint a 3.43. ábra mutatja, a vízszintes képsíkban az e_1 metszéspontot megkapjuk, ha az (se) alkotót metsszük a másik kúp (v1) alkotójával.

Hasonló módon határozzuk meg a többi metszéspontot is a vízszintes képsíkban, úgymint a q_3, a_5, i_7, m_{11}, k_9, i_8, e_2-t, illetve ezen pontok függőleges vetületét megkapjuk, ha a metszéspontokból rendezőt bocsátunk a kúpok megfelelő alkotóira.



3.44. ábra. *Két kúp metszete*

4. táblázat. *Metszetpontok meghatározása a mozgó pont módszerével*

Metszőpontok																						
SAB kúp	e	g	a	7	–	m	k	8	–	–	e	e	g	a	7	–	m	k	8	–	–	e
VCF kúp	1	3	5	i	9	11	9	i	5	3	1	2	4	6	–	10	12	10	–	6	4	2
Metszőpontok	e_1	g_3	a_5	i_7	–	m_{11}	k_9	i_8	–	–	e_1	e_2	g_4	a_6	–	–	m_{12}	k_{10}	–	–	–	e_2
Láthatóság Vízszintes képsíkban																						
SAB kúp																						
VCF kúp																						
Láthatóság																						
Láthatóság Függőleges képsíkban																						
SAB kúp																						
VCF kúp																						
Láthatóság																						

A metszési görbe vonalat megkapjuk, ha összekötjük a metszéspontokat, alkalmazva a mozgó pont módszerét (4. táblázat), követve a láthatóságot mindkét képsíkban.

3.6.2.2. Két henger metszete

A segédsík meghatározásához a D_1, D_2 metsző egyeneseket használjuk, amelyek párhuzamosak a hengerek alkotóival.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a metszést, a segédsíkoknak párhuzamosnak kell lenniük a P sík vízszintes nyomvonalával.

A hátsó P_f határsík a (g) pontra illeszkedik és párhuzamos a P sík vízszintes nyomvonalával, érinti az Ω_1, Ω_4 tengelyű henger alapját és metszi a másik henger alapját az (1, 2) pontokban.

Az elülső P_a határsík illeszkedik a (k) pontra, és párhuzamos a P sík vízszintes nyomvonalával, érinti az Ω_2, Ω_3 tengelyű henger alapját, és metszi a másik henger alapját a (13, 14) pontokban. A metszetforma szakadás (szétesző) lesz (3.45. ábra).

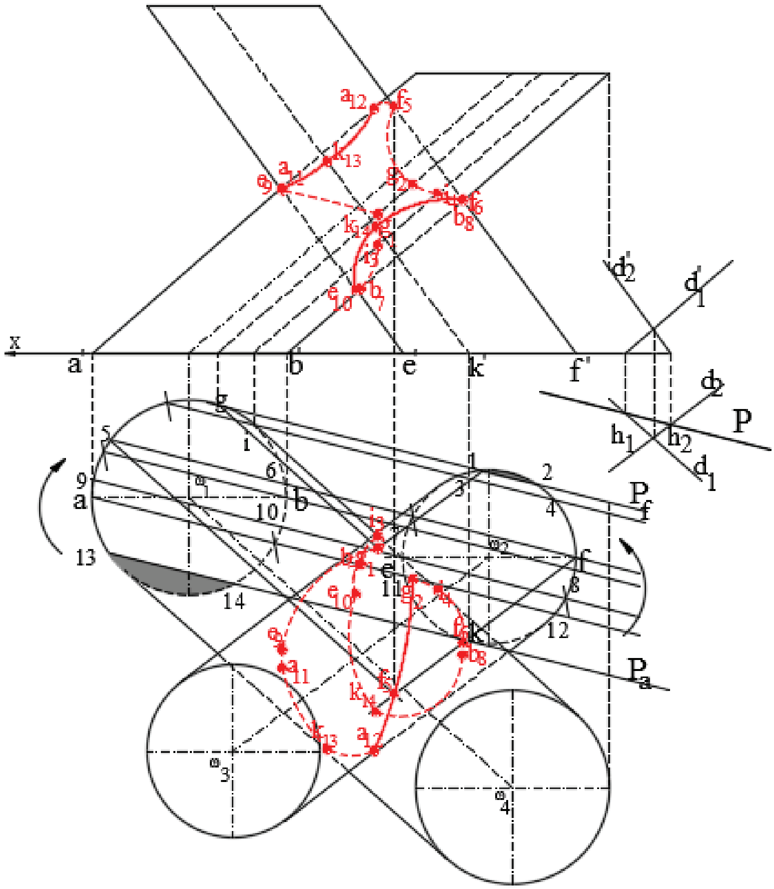
Választunk egy haladási irányt a mozgó pontnak, és figyelembe vesszük, hogy a mozgó pont nem haladhat át a határsíkok által nem metsző területen.

A metszéspontok meghatározása érdekében a segédsíkokban az egyik henger alkotója metszi a másik henger alkotóját a keresett metszéspontban.

Amint azt a 3.45. ábra mutatja, a henger alapjának 5-ös pontjából húzott alkotó metszi a másik henger alapjának f pontjából húzott alkotót az f_5 metszéspontban.

Hasonló módon határozzuk meg a többi metszéspontot is a vízszintes képsíkban, úgymint a k_{13}, a_{11}, e_9, g_1, …-t, illetve ezen pontok függőleges vetületét megkapjuk, ha a metszéspontokból rendezőt bocsátunk a hengerek megfelelő alkotóira.

A metszési görbe vonalat megkapjuk, ha összekötjük a metszéspontokat, alkalmazva a mozgó pont módszerét (5. táblázat), és követve a láthatóságot mindkét képsíkban.



3.45. ábra. *Két henger metszete*

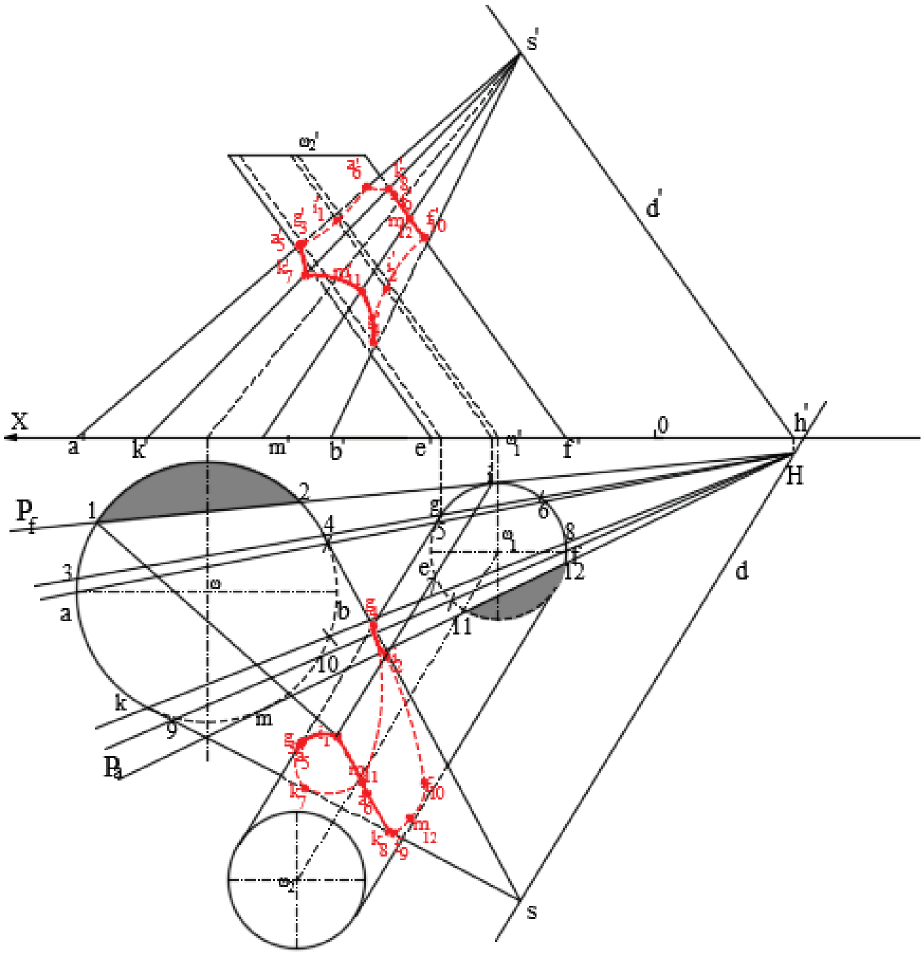
5. táblázat. *Metszéspontok meghatározása*

Metszőpontok																										
Henger $\Omega_1\Omega_4$ tengely	13	a	9	—	5	—	g	i	6	b	10	—	14	14	—	10	b	6	i	g	—	5	—	9	a	13
Henger $\Omega_2\Omega_3$ tengely	k	11	e	7	—	3	1	3	—	7	e	11	k	k	12	—	8	f	4	2	4	f	8	—	12	k
Metszőpontok	k_{13}	a_{11}	e_9	—	5	—	g_1	i_3	6	b_7	e_{10}	—	k_{14}	k_{14}	—	—	b_8	f_6	i_4	g_2	—	f_5	—	—	a_{12}	k_{13}
Láthatóság Vízszintes képsíkban																										
Henger $\Omega_1\Omega_4$ tengely																										
Henger $\Omega_2\Omega_3$ tengely																										
Láthatóság																										
Láthatóság Függőleges képsíkban																										
Henger $\Omega_1\Omega_4$ tengely																										
Henger $\Omega_2\Omega_3$ tengely																										
Láthatóság																										

3.6.2.3. Kúp-henger metszete

A határsíkok meghatározása céljából felveszünk egy D egyenest, amelyet a kúp csúcspontján keresztül párhuzamosan húzunk meg a henger alkotójával (3.46. ábra), melynek vízszintes nyompontja H.

Erre a D egyenesre illesztjük a segédsíkot, amelyet a henger-kúp egyidejű metszésének meghatározásakor használunk. Ezek a határsíkok átmennek a D egyenes vízszintes H nyompontján keresztül.



3.46. ábra. *Kúp-henger metszete*

6. táblázat. *Metszéspontok meghatározása*

Metszőpontok																						
Henger $\Omega_1\Omega_2$ tengely	i	g	5	7	—	11	—	7	5	g	i	i	—	6	8	f	12	f	8	6	—	i
SAB kúp	1	3	a	k	9	m	10	—	—	4	2	2	4	—	—	10	m	9	k	a	3	1
Metszőpontok	i_1	g_3	a_5	k_7	—	m_{11}	—	—	—	g_4	i_2	i_2	—	—	—	f_{10}	m_{12}	f_9	k_8	a_6	—	i_1
Láthatóság Vízszintes képsíkban																						
Henger $\Omega_1\Omega_2$ tengely																						
SAB kúp																						
Láthatóság																						
Láthatóság Függőleges képsíkban																						
Henger $\Omega_1\Omega_4$ tengely																						
SAB kúp																						
Láthatóság																						

A metszési forma szakadás (széteső) lesz, amelynek hátsó P_f határsíkja érintőleges a Ω_1 henger alapköréhez az (i) pontban, és metszi a kúp alapját az (1, 2) pontokban (3.46. ábra), elülső P_a határsíkja érintőleges a kúp alapköréhez az (m) pontban, és metszi a henger alapját a (11, 12) metszéspontokban.

Választunk egy haladási irányt a mozgó pontnak.

Figyelembe vesszük, hogy a mozgó pont nem haladhat át a határsíkok által nem metsző területen.

A metszéspontok meghatározása érdekében a segédsíkban lévő kúp alkotója metszi a henger alkotóját a keresett metszéspontban.

Amint azt a 3.46. ábra mutatja, a vízszintes képsíkban az 1-es pontot összekötjük a kúp (s) csúcspontjával, ami a henger (i) pontjából húzott alkotót metszi az i_1 metszéspontban.

Hasonló módon határozzuk meg a többi metszéspontot is a vízszintes képsíkban, úgymint a g_3, a_5, k_7, m_{11}, i_2, …-t, illetve ezen pontok függőleges vetületét megkapjuk, ha a metszéspontokból rendezőt bocsátunk a testek megfelelő alkotóira.

A metszési görbe vonalat megkapjuk, ha összekötjük a metszéspontokat a mozgó pont módszerét alkalmazva (6. táblázat), és követve a láthatóságot mindkét képsíkban.

3.6.2.4. Két gömb metszete

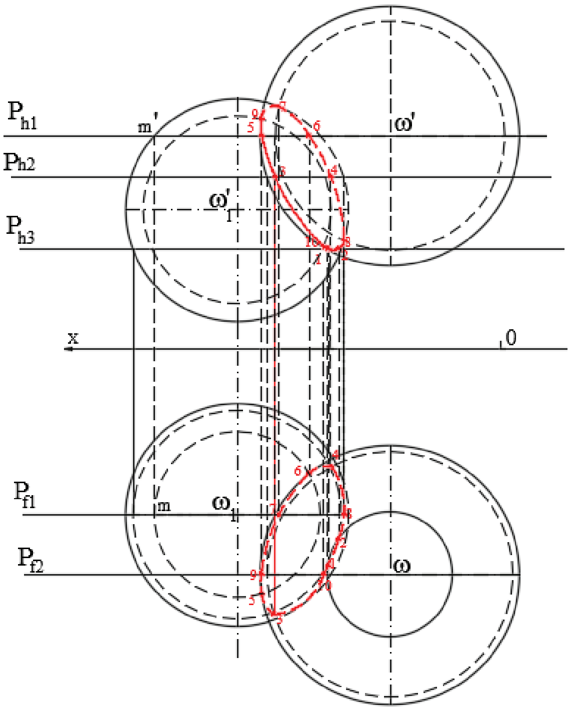
A gömbök metszéspontjainak meghatározása céljából horizontális és frontális segédsíkokat használunk, amelyek mindkét gömböt körben metszik.

A P_{h1} horizontális segédsík átmegy az Ω középpontú gömb tengelyén, és metszi az Ω_1 középpontú gömb kontúrvonalát az m' pontban. Az m' pontot lerendezzük az Ω_1 középpontú gömb vízszintes m szimmetriatengelyére, így megkapjuk azt a $\omega_1 m$ sugarú kört, amely metszi az Ω középpontú gömb m'-re illeszkedő paralell körét a keresett 5,6 metszéspontokban.

Ezeket a metszéspontokat visszarendezzük a függőleges képsíkba, vagyis az Ω középpontú gömb szimmetriatengelyére, és megkapjuk az 5', 6' metszéspontokat.

Hasonló módon szerkesztjük meg a többi metszéspontot, alkalmazva a horizontális P_{h2}, P_{h3} és frontális P_{f1}, P_{f2} segédsíkokat.

A láthatóság törvényét alkalmazva összekötjük az 1,…,10 metszéspontokat, és megkapjuk a metszési vonalat (3.47. ábra).



3.47. ábra. *Két gömb metszete*

3.6.2.5. Henger-gömb metszete

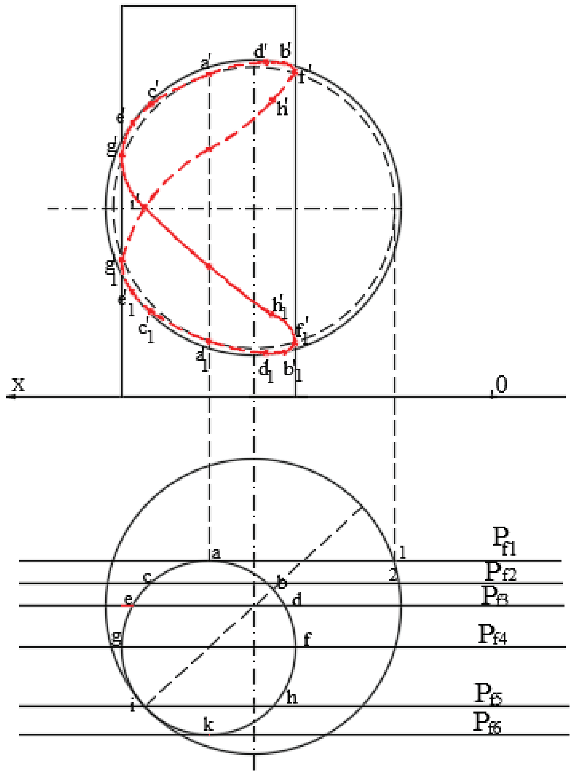
A henger-gömb metszéspontjainak meghatározása céljából frontális segédsíkokat használunk.

A P_{f1} frontális segédsík érinti az (a) pontban a henger kör kontúrvonalát, ugyanakkor metszi a gömb kontúrkörét az 1-es pontban. Ha ezt a pontot felvetítjük a függőleges képsíkba, megkapjuk azt a kört, amely metszi az (a) pontból húzott rendezőt a keresett a', a_1' metszéspontokban.

Hasonló módon szerkesztjük meg a többi metszéspontot, alkalmazva a frontális P_{f1}, P_{f2}, … P_{f6} segédsíkokat.

A láthatóság törvényét felhasználva összekötjük a függőleges képsíkban a metszéspontokat, és megkapjuk a metszési vonalat (3. 48. ábra).

A metszet egy egyszerű érintőleges áthatás.



3.48. ábra. *Henger-gömb metszete*

4. A geometriai testek felületének kiterítése

Egy geometriai test oldalfelületének kiterítése annyit jelent, mint minden pontját egy síkba fektetni.

A kiterítés ábrázolása szempontjából ismernünk kell:

– az élek vagy az alkotók valódi méretét;

– az élekre, alkotókra merőleges síkkal készített normál metszet valódi méretét.

A kiterítés során a normál metszet egyenes vonallá alakul.

4. 1. A poliéderek kiterítése

4.1.1. A hasáb kiterítése

Adott egy $ABCA_1B_1C_1$ hasáb, amelynek ABC alapja benne van a vízszintes képsíkban.

Ahhoz, hogy ábrázoljuk a hasáb kiterített képét, szükséges meghatároznunk az élei valódi nagyságát, valamint a hasáb normál metszetének valódi nagyságát.

Az ábrázoló geometria módszerét alkalmazzuk, hogy megkapjuk az élek valódi nagyságát.

Amint a 4.1. ábra mutatja, a függőleges sík transzformálásának módszerével a hasáb oldaléleit az új képsík bevezetésével párhuzamosan ábrázoljuk az új képsík X_1 tengelyével.

Ebben az esetben a hasáb éleinek vetületét az új képsíkban valódi nagyságban kapjuk meg.

Az új képsíkkal párhuzamos hasáb oldaléleket elmetsszük egy rájuk is és az új képsíkra is merőleges síkkal.

A normál metszet transzformált képe a kiterítés folytán egy egyenes lesz.

A sík merőleges az azonos jelölésű hasábélekre, azaz $P \perp a_0 a_1$.

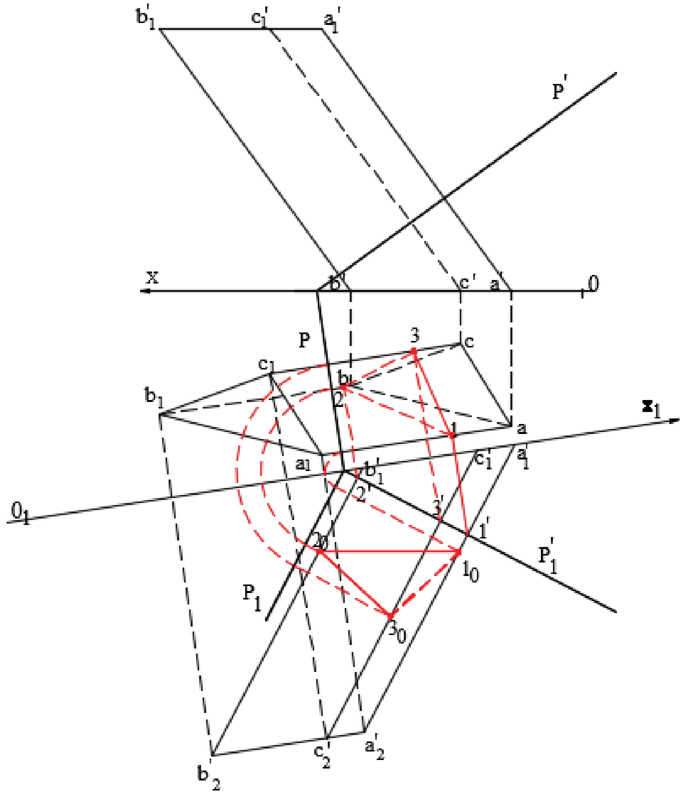
Az új képsíkrendszerben megszerkesztjük a P_1 sík P_1' nyomvonalát.

A P_1 sík metszi a hasábot az 1', 2' és 3' metszetpontokban, ami rajta van a sík P_1' nyomvonalán. Ezután a pontokból rendezőt bocsátunk a vízszintes képsíkbeli hasáb alkotókra, így megkapjuk az 1, 2 és 3 metszetpontokat, melyeket összekötve deformált háromszöget kapunk (4.1. ábra).

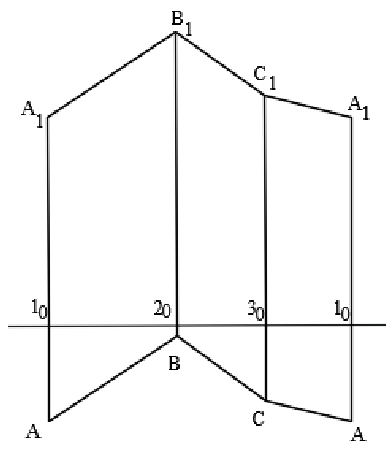
Az ábrázoló geometria módszerét alkalmazva, a képsíkba forgatással kapjuk a metszet $1_0 2_0 3_0$ valódi nagyságát.

A hasáb alapja benne van a vízszintes képsíkban, tehát az abc háromszög vetület pontjai valódi nagyságban láthatók.

A kiterítés megszerkesztése céljából egy egyenesre felmérjük az $1_0 2_0$, $2_0 3_0$, $3_0 1_0$ távolságokat.



4.1. ábra. *A hasáb kiterítésének szerkesztési menete*



4.2. ábra. *A hasáb kiterített képe*

Ezekből a pontokból merőlegesen az egyenesre felmérjük az új képsíkban valódi nagyságban látható hasábéleket, úgymint az $1_0A = 1'a_1'$, $1_0A_1 = 1'a_2'$ stb. Ezeket a pontokat összekötve kapjuk meg a hasáb kiterített képét (4.2. ábra).

4.1.2. A gúla kiterítése

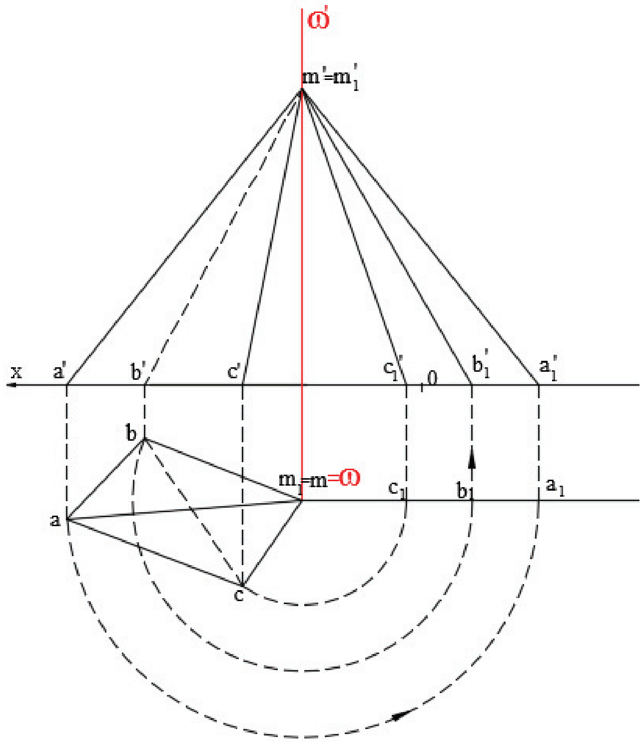
Adott az SABC gúla, melynek ABC alapja benne van a vízszintes képsíkban.

Ahhoz, hogy ábrázoljuk a gúla kiterített képét, szükséges meghatároznunk az élek valódi nagyságát.

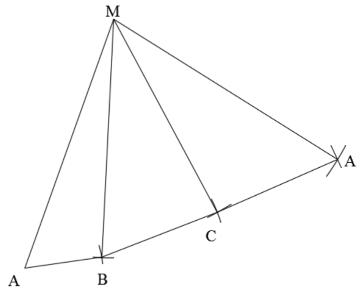
Az élek valódi nagyságának meghatározására az ábrázoló geometria módszerei közül a forgatást alkalmazzuk.

A horizontális forgatás tengelye átmegy a gúla M csúcspontján (4.3. ábra).

A vízszintes képsíkban elforgatjuk a gúla alapjának a, b és c pontjait az $m = \omega$ egyenes körül addig, míg az oldalélek egyenként az 0X tengellyel párhuzamosak lesznek, ezáltal megkapjuk az a_1, b_1, c_1 pontokat. A gúla M csúcspontja rajta van a forgástengelyen, így saját maga körül forog, $M = M_1$.



4.3. ábra. *A gúla kiterítésének szerkesztése*



4.4. ábra. *A gúla palástjának kiterített képe*

Rendelkezésre áll a függőleges képsíkban a gúla oldaléleinek $m_1'a_1'$, $m_1'b_1'$, $m_1'c_1'$ valódi nagysága. Mivel a gúla ABC alapja benne van a vízszintes képsíkban, az alap abc oldalai valódi nagyságban látszanak.

A gúla kiterített képének szerkesztésekor (4.4. ábra) felvesszük az $m_1'a_1' = MA$ szakaszt, amely valódi nagyságban található. Az A pontból egy ab sugarú körívet rajzolunk, majd az M pontból rajzolunk egy $m_1'b_1'$ sugarú körívet. Az MB él valódi nagyságával elmetszve a B pontból rajzolt ab sugarú körívet, a B pontot kapjuk eredményül (4.4. ábra).

Hasonló módon szerkesztjük meg a gúla alapjának többi pontját (MC = $m_1'c_1'$, BC = bc, MA = $m_1'a_1'$, CA = ca).

4.2. A forgásfelületek kiterítése

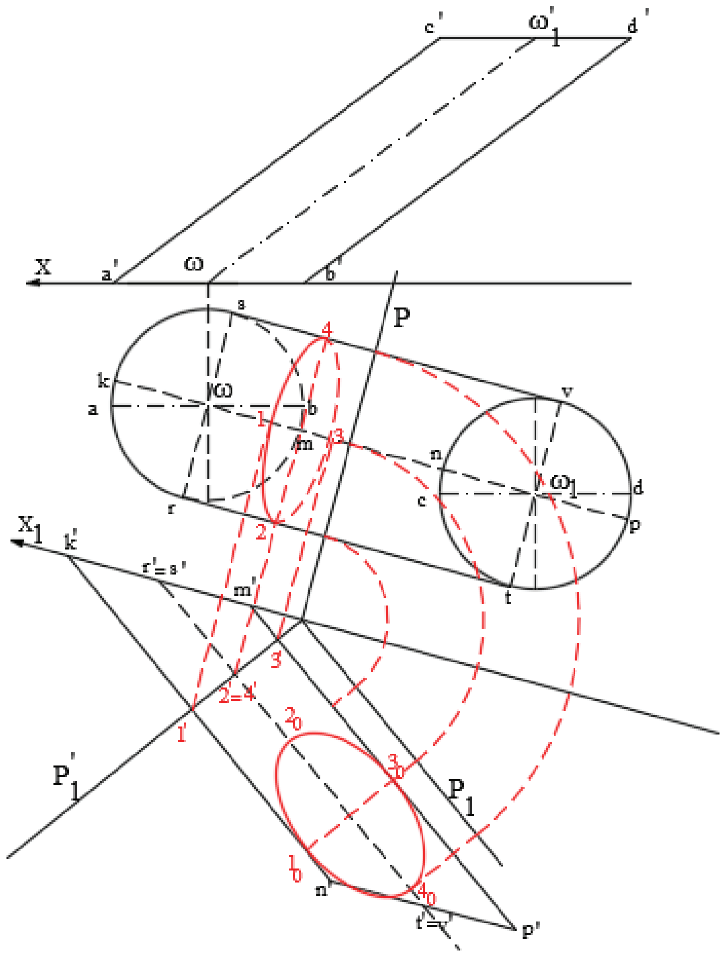
A forgásfelületek síkba történő kiterítése esetén megfeleltetjük a felület pontjait a kiterített pontoknak, ezáltal a felületen lévő görbe megfelel a kiterített görbének. Az adott görbe kiterítésének hossza megegyezik a forgásfelületre rajzolt görbe hosszúságával.

4.2.1. A henger kiterítése

Adott egy ferde henger, amelynek Ω középpontú kör alapja benne van a vízszintes képsíkban.

Ahhoz, hogy ábrázoljuk a henger kiterített képét, szükséges, hogy meghatározzuk az alkotók valódi nagyságát, illetve a henger normál metszetének valódi nagyságát.

Az ábrázoló geometria módszerét alkalmazzuk, amint azt a 4.5. ábra mutatja. A függőleges sík transzformálásának módszerével a henger alkotóit párhuzamosan ábrázoljuk az X_1 tengelyével megadott új képsíkban.



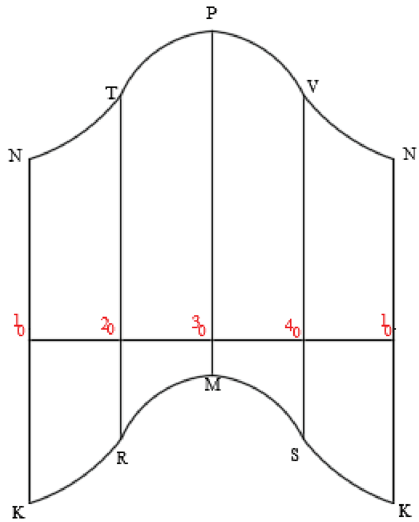
4.5. ábra. *A henger kiterítésének szerkesztése*

A henger alkotóit a velük párhuzamos új képsíkban valódi nagyságban látjuk, és így metsszük el egy rájuk és az új képsíkra merőleges síkkal.

A normál metszet transzformált képe kiterítés következtében egy egyenes lesz.

A sík nyomvonalai merőlegesek az azonos jelölésű henger alkotóira, mivel P ⊥ rt, ezért az új képsíkrendszerben megszerkesztjük a sík P_1', P_1 nyomvonalát, ahol $P_1' \perp r't'$.

A P_1' sík függőleges nyomvonala metszi a hengert az *1'2'3'4'* metszetpontokban, ahonnan rendezőt bocsátva a vízszintes képsík megfelelő alkotóira kapjuk az 1234 metszetpontokat.



4.6. ábra. *A henger palástjának kiterített képe*

Az ábrázoló geometria egyik módszerét, a képsíkba forgatást alkalmazva, kapjuk meg a metszet $1_0 2_0 3_0 4_0$ valódi nagyságát (4.6. ábra).

A kiterítés szerkesztésénél egy egyenesre felmérjük az $1_0 2_0$, $2_0 3_0$, $3_0 4_0$, $4_0 1_0$ távolságokat.

Ezekből a pontokból az egyenesre merőlegesen felmérjük az új képsíkban levő henger függőleges alkotóit, úgymint a $1_0 K = 1'k'$, a $1_0 N = 1'n'$ *stb.* Ezeket a pontokat összekötve megkapjuk a henger kiterített képét.

4.2.2. A kúp kiterítése

Adott a kúp, amelynek Ω középpontú kör alapja benne van a vízszintes képsíkban.

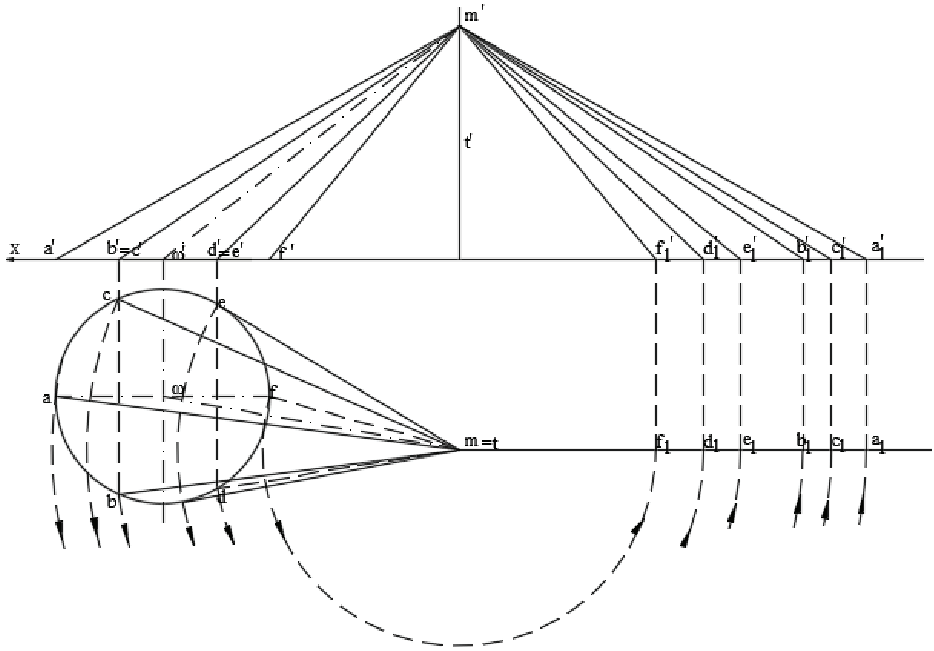
Ahhoz, hogy ábrázoljuk a kúp kiterített képét, szükséges, hogy meghatározzuk az alkotók valódi nagyságát.

Az alkotók valódi nagyságának meghatározására az ábrázoló geometria módszerei közül a forgatást alkalmazzuk.

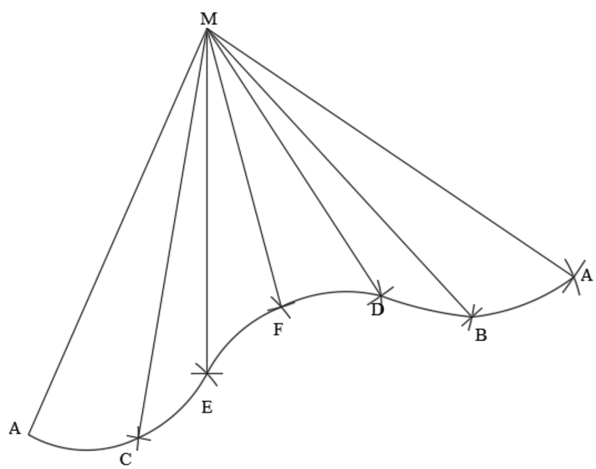
A horizontális forgatás tengelye T, átmegy a kúp M csúcspontján (4.7. ábra).

A vízszintes képsíkban elforgatjuk a kúp alapjának a, b, c, d, e, f pontjait az m=t körül egészen addig, hogy az m pontból húzott képeik az 0X tengellyel párhuzamosak legyenek, ezáltal megkapjuk az a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 pontokat. A kúp M csúcspontja rajta van a forgástengelyen, így saját maga körül forog.

Ismerjük a függőleges képsíkban a kúp $m'a_1'$, $m'b_1'$, $m'c_1'$, $m'd_1'$, $m'e_1'$, $m'f_1'$ alkotóinak valódi nagyságát. Mivel a kúp alapja benne van a vízszintes képsíkban, az abcdef alappontok közötti távolságok valódi nagyságban látszanak.



4.7. ábra. *A kúp kiterítésének szerkesztése*



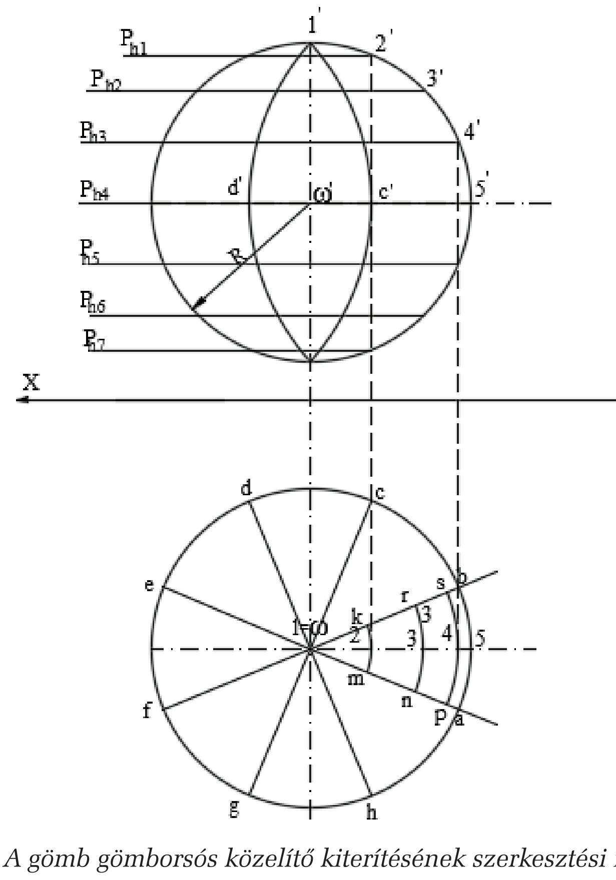
4.8. ábra. *A kúp palástjának kiterített képe*

A kúp kiterített képének szerkesztésekor (4.8. ábra) felvesszük az $m'a_1' = MA$ szakaszt, ami forgatott helyzetében valódi nagyságban található. Az A pontból egy ac sugarú körívet rajzolunk, majd az M pontból megrajzoljuk az $m'c_1'$ körívet, amely az MC él valódi nagyságát ábrázolja. Ezzel elmetszve az ac sugarú körívet, a C pontot kapjuk eredményül (4.8. ábra).

Hasonló módon szerkesztjük meg a kúp alkotóinak (ME = $m'e_1'$, CE = ce stb. képeit.

4.2.3. A gömb egy közelítő kiterítése

A gömb felületét a ∏ transzcendens volta miatt kizárólag megközelítő módszerekkel tudjuk kiteríteni. A kiterítés leggyakoribb módszerei: gömborsók, gömbzónák, ötszög, gömbháromszög stb. segítségével történik.



4.9. ábra. A gömb gömborsós közelítő kiterítésének szerkesztési menete

A gömborsó a gömb felületének egy része, amely két egymást követő fél meridián között helyezkedik el, és amelyet a gömb függőleges vetítési síkokkal történő metszésével kapunk.

Legyen a 4.9. ábrán látható R sugarú gömb középpontja az Ω(ω, ω') pont. A gömböt egyforma szöget bezáró 4 függőleges vetítési síkkal elmetsszük, amelyek átmennek a gömb középpontján, ezzel felosztva a gömböt 8 gömborsóra.

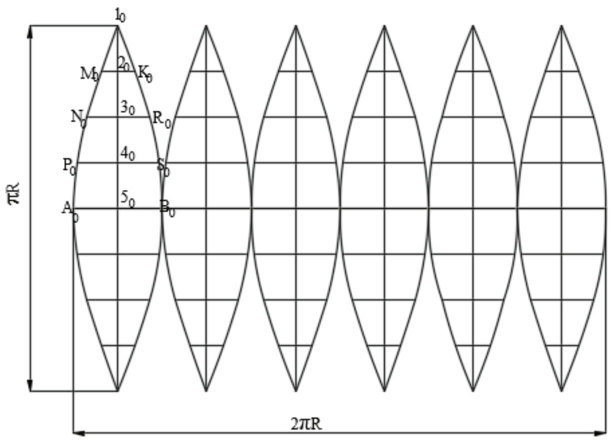
A gömborsó közelítőleg kiterített képe az wa és wb síkok közötti felületrész ismétléséből adódik.

A meridiánkörön egyenlő íveket veszünk fel 1'2 , = 2'3' = 3'4' stb. Ezeken a pontokon keresztül horizontális P_{h1}, P_{h2}, … P_{h7} segédsíkokat veszünk fel, amely síkok körökben metszik a gömböt.

A vízszintes képsíkban az ab, ps, nr, mk köríveket valódi nagyságban kapjuk meg.

A kiterített gömborsó magassága a meridiánkör hosszának a fele, azaz πR. Ennek a hossznak a felső felét 4 egyenlő részre osztjuk, $1_0 2_0$, $2_0 3_0$, $3_0 4_0$, $4_0 5_0$ (4.10. ábra). Ezekből a pontokból merőlegest húzunk a gömborsó tengelyére, és felmérjük az $A_0B_0 = ab$, $P_0S_0 = ps$, $M_0K_0 = mk$ szakaszokat, amelyek megegyeznek a horizontális segédsíkok által meghatározott körívekkel.

Mivel az egyenlítői körtől szimmetrikus a gömborsó, a szerkesztés megismétlődik az alsó részénél is.



4.10. ábra. *A gömb kiterített képe*

4.2.4. A henger felületén levő csavarvonal kiterítése

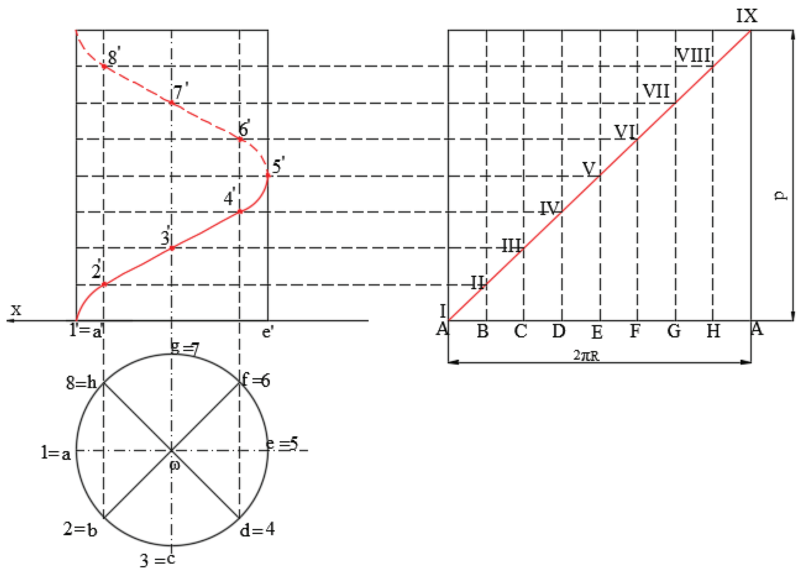
A csavarvonal vezérkörét 8 egyenlő körívre osztjuk.

A kört közelítőleg kiterítve, az AA hossza 2πR, magassága p. A kiterített hosszat 8 egyenlő részre osztjuk, amelynek pontjaiból merőlegest bocsátunk rá, ezáltal megkapjuk a függőleges képsíkban a henger alkotóinak valódi nagyságát.

A henger kiterített képe egy téglalap lesz, amelynek átlója a csavarvonal kiterítését szemlélteti.

A felosztott pontokból húzott merőleges metszi a téglalap átlóját I, II, III, IV, .. IX pontokban.

Ha az I, II, III stb. metszéspontokat és a körön levő felosztott körív 1, 2, 3, … pontjait rendezők segítségével visszavetítjük a henger felületére, megkapjuk az 1'2'3'4'5'6'… pontokat, amelyeket összekötve jutunk a csavarvonal görbéjéhez (4.11. ábra).



4.11. ábra. *A csavarvonal kiterített képe*

5. Gyakorlófeladatok a geometriai felületek metszetének, kiterítésének ábrázolásához

1. Ábrázolja és határozza meg a gúla láthatóságát, ha ismerjük az alapjának M(50,10,15) N(35,20,5) Q(25,20,10) pontjait és S(5,5,40) csúcspontját!

Határozza meg a P pont függőleges vetületét, amely rajta van a gúla felületén, ha ismert a P pont vízszintes vetülete!

2. Ábrázolja a hasábot láthatóságával, ha ismert az ABC alapja és az AA_1 éle!

$$\begin{cases} A\ (35,5,0) \\ B\ (45,20,0) \\ C\ (50,10,0) \\ A_1(10,15,25) \end{cases}$$

A hasábot metssze el a P síkkal, ha $P_x(10,0,0)$,$OP_xP = -140°$, $OP_xP' = 155°$!

Ábrázolja a metszetet, és határozza meg a metszet valódi nagyságát!

3. Ábrázolja a VABC gúlát, amelynek alapja egy 45 mm hosszúságú egyenlő oldalú háromszög, mely benne van a vízszintes képsíkban, és 80 mm hosszúságú oldalélei vannak!

4. Ábrázoljunk egy 25 mm oldalhosszúságú kockát, amelynek egyik oldala a P síkban helyezkedik el, ahol $P_x(80,0,0)$, $OP_xP' = 45°$, $OP_xP = -40°$!

5. Adott egy egyenes gúla magassága 50 mm, melynek szabályos hatszög alapja benne van a vízszintes síkban és oldalhossza l = 20 mm. A gúlát elmetsszük egy D egyenessel, ahol

$$D \begin{cases} R(70,40,25) \\ S(10,15,5) \end{cases}.$$

Határozza meg a metszéspontokat, valamint az egyenes és a gúla láthatóságát!

6. Adott egy $ABCA_1B_1C_1$ hasáb, aminek ABC alapja benne van a vízszintes képsíkban. A hasábot elmetsszük egy D egyenessel.

Határozza meg a metszéspontokat, valamint a hasáb és az egyenes láthatóságát!

$$\begin{cases} A\,(15,10,0) \\ B\,(20,25,0) \\ C\,(40,5,0) \\ A_1(60,30,45) \end{cases}, \mathrm{D} \begin{cases} \mathrm{M}(60,15,10) \\ \mathrm{N}\,(30,40,35) \end{cases}$$

7. Adott egy SABCDE ötoldalú gúla, aminek ABCDE alapja benne van a vízszintes képsíkban. A gúlát elmetsszük egy P síkkal, ahol $P_x(65,0,0)$, $\mathrm{O}P_xP' = 45°$, $\mathrm{O}P_xP = -45°$, S(55,40,25)

$$\begin{cases} \mathrm{A}(10,15,0) \\ \mathrm{B}(15,30,0) \\ \mathrm{C}(30,25,0) \\ \mathrm{D}(45,10,0) \\ \mathrm{E}(35,5,0) \end{cases}$$

Ábrázolja a metszetet és ennek láthatóságát a gúlával!

8. Ábrázoljon egy ferde körhengert, amelynek alapja benne van a vízszintes képsíkban, ha az alapkör sugara R = 30 mm és középpontja Ω(120,50,0), valamint a henger tengelye átmegy az $\Omega_1(30,80,80)$ ponton!

9. Adott egy ferde henger, amelynek alapja benne van a P síkban. Az alapkör sugara R = 20 mm, középpontja Ω(0,40,20) és a henger magassága 70 mm.

A hengert elmetsszük egy P síkkal, ahol $P_x(10,0,0)$, $\mathrm{O}P_xP = -45°$, $\mathrm{O}P_xP' = 45°$.

Ábrázolja a henger és sík metszetét!

10. Ábrázolja azt a kúpot, amelynek alapja benne van a vízszintes képsíkban, az alapkörének sugara R = 30 mm, és középpontja Ω(80,40,0), valamint a kúp csúcspontja S(20,0,80)!

11. Ábrázolja a kúpnak azt az alkotóját, amely párhuzamos a Q síkkal!

$Q_x(30,0,0)$, $\mathrm{O}Q_xQ = -40°$, $\mathrm{O}Q_xQ' = 30°$

A kúp csúcspontja S(10,10,20), az alapkör benne van a vízszintes képsíkban, sugara R = 10 és középpontja Ω(30,20,0).

12. Adott egy egyenes körkúp, amelynek alapköre benne van a vízszintes képsíkban, a kúp csúcspontja S(35,20,35), alapkörének sugara R = 15 és középpontja Ω(40,20,0).

A kúpot egy P síkkal metsszük el, amelyben van egy D frontális egyenes, ahol

$$\mathrm{D} \begin{cases} \mathrm{A}(15,20,30) \\ \mathrm{B}(60,20,5) \end{cases} \text{ és } P_x(90,0,0),\ \mathrm{O}P_xP = -40°.$$

Ábrázolja a kúp és a sík metszetét!

13. Adott egy körkúp és egy D egyenes. A kúp csúcspontja S(45,30,30) és vezérgörbéje egy kör, ami benne van a függőleges képsíkban és sugara R = 10 mm. A kör középpontja Ω(15,5,10).

$$D \begin{cases} A(35,10,5) \\ B(20,20,25) \end{cases}$$

Határozza meg a ferde körkúp és a D egyenes metszéspontjait!

14. Szerkessze meg az egyenes körkúp és a D profilegyenes metszéspontjait, ha ismerjük a következő adatokat:

$$D \begin{cases} A(60,30,50) \\ B(60,75,20) \end{cases}$$

A kúp csúcspontja S(70,50,60), alapköre benne van a vízszintes képsíkban, középpontja Ω(70,50,0), sugara R = 40 mm.

15. Adott egy ferde körhenger, amelynek alapja benne van a vízszintes képsíkban, középpontja Ω(15,10,0), sugara R = 15 mm és Ω_1(40,25,30).

A ferde hengert elmetsszük egy D egyenessel, ahol

$$D \begin{cases} A(15,20,20) \\ B(40,5,10) \end{cases}$$

Szerkessze meg a henger és a D egyenes metszéspontjait!

16. Adott egy ferde körkúp, amelyet metsszünk el egy P síkkal, ahol P_x(60,0,0), $OP_xP = -45°$, $OP_xP' = 45°$.

A kúp csúcspontja S(20,20,20), alapköre benne van a vízszintes képsíkban, középpontja Ω(30,25,0) és sugara R = 20 mm.

Ábrázolja a metszet vízszintes vetületét!

17. Ábrázoljon egy ferde körkúpban egy parabolametszetet!

A kúp csúcspontja S(60,65,50), alapköre benne van a vízszintes képsíkban és középpontja Ω(40,80,0), valamint sugara R = 40 mm.

18. Adott egy egyenes körhenger, amelynek alapköre benne van a vízszintes képsíkban, középpontja Ω(20,15,0), sugara R = 10 mm és magassága h = 25 mm.

A hengert metsszük el egy P merőleges vetítősíkkal a függőleges képsíkra nézve, ahol P_x(5,0,0), $OP_xP' = 135°$.

Ábrázolja a henger és a sík metszetét, majd terítse ki a henger törzsét, ami a P sík és a vízszintes képsík között helyezkedik el!

19. Adott egy ferde körkúp, amelyet metsszünk el egy P síkkal! Legyen adott a P sík a következő adatokkal: $P_x(65{,}0{,}0)$, $OP_xP = -90°$, $OP_xP' = 150°$.

A kúp csúcspontja S(60,15,30), alapköre benne van a vízszintes képsíkban, középpontja Ω(95,25,0), a sugara pedig R = 15 mm.

Ábrázolja a kúp és a sík metszetét, majd terítse ki a csonkakúp palástját!

20. Adott egy egyenes körhenger, amelynek alapköre benne van a vízszintes képsíkban, sugara R = 20 mm és középpontja Ω(35,15,0).

A henger magassága h = 40 mm.

A hengert metsszük el egy P síkkal, ha $P_x(5{,}0{,}0)$, $OP_xP = -120°$, $OP_xP' = 135°$.

Ábrázolja a henger és a sík metszetét!

21. Adott egy fronto-horizontális henger, amelynek alapköre benne van az oldalképsíkban, sugara R = 10 mm. A henger alapkörének középpontja a vízszintes képsíktól ω = 15 mm-re helyezkedik el. A hengert metsszük el egy P síkkal:

$P_x(30{,}0{,}0)$, $OP_xP = -45°$, $OP_xP' = 45°$.

Ábrázolja a henger és a sík metszetét!

22. Adott egy egyenes körhenger, amelynek alapköre benne van a függőleges képsíkban, sugara R = 10 mm és középpontja Ω(25,0,15).

A henger magassága h = 40 mm.

A hengert metsszük el egy P síkkal:

$P_x(5{,}0{,}0)$, $OP_xP = -135°$, $OP_xP' = 135°$.

Ábrázolja a henger és a sík metszetét!

23. Adott az egyenes kúp, amelynek alapköre benne van a vízszintes képsíkban, sugara R = 15 mm, csúcspontja S(30,15,30).

A kúpot elmetsszük egy P merőleges vetítősíkkal a vízszintes képsíkra.

$P_x(55{,}0{,}0)$, $OP_xP = -45°$.

Ábrázolja a kúp és a sík metszetét!

24. Adott egy gömb, amelynek sugara R = 10 mm és középpontja Ω(20,15,15).

A gömböt elmetsszük egy P síkkal, amely párhuzamos az x tengellyel, és $P_x = 25$, $P_z = 25$.

a) Ábrázolja a gömb és a sík metszetét!

b) Ábrázolja a metszet kör valódi nagyságát!

25. Adott egy gömb, sugara r = 5 mm, középpontja Ω(35,5,15), amelyet elmetszünk egy P síkkal, ahol

$P_x(50{,}0{,}0)$, $OP_xP = -45°$, $OP_xP' = 45°$.

Ábrázolja a gömb és a sík metszetét!

26. Adott egy gömb, sugara r = 10 mm, középpontja Ω(30,15,15), amelyet elmetszünk egy D egyenessel.

A szerkesztéshez használjuk azt a P segédsíkot, amelyet a D egyenes és a gömb középpontja határoz meg.

$$D\begin{cases} A(45,25,15) \\ B(15,15,30) \end{cases}$$

Határozza meg a gömb és az egyenes metszéspontját!

27. Határozza meg a gömb és az egyenes metszéspontját, ha a gömb sugara r = 10 mm, középpontja Ω(30,10,10)! Használja azt a P merőleges vetítősíkot a vízszintes képsíkra, amely illeszkedik a D egyenesre, ha

$$D\begin{cases} A(45,20,10) \\ B(20,10,20) \end{cases}$$

28. Adott egy gömb, sugara r = 15 mm, középpontja Ω(25,15,15), amelyet metsszünk el egy D egyenessel, ahol

$$D\begin{cases} A(40,15,15) \\ B(10,25,30) \end{cases}$$

Határozza meg a gömb és az egyenes metszéspontjait, alkalmazva a segédsík módszerét!

29. Határozza meg az $ABCA_1B_1C_1$ és az $MNQM_1N_1Q_1$ hasábok metszetét, ha a hasábok ABC és MNQ alapja benne van a vízszintes képsíkban, és ismertek az AA_1, MM_1 oldaléleik!

$$\begin{cases} A\,(100,20,0) \\ B\,(100,45,0) \\ C\,(80,5,0) \\ A_1(25,50,50) \end{cases}, \begin{cases} M\,(20,5,0) \\ N\,(45,10,0) \\ Q\,(10,30,0) \\ M_1(70,60,50) \end{cases}.$$

30. Határozza meg az $ABCA_1B_1C_1$ és az $MNQM_1N_1Q_1$ hasábok metszetét, ha a hasábok ABC és MNQ alapja benne van a vízszintes képsíkban, és ismertek az AA_1, MM_1 oldaléleik!

$$\begin{cases} A\,(100,95,0) \\ B\,(45,100,0) \\ C\,(80,60,0) \\ A_1(165,50,90) \end{cases}, \begin{cases} M\,(150,45,0) \\ N\,(190,80,0) \\ Q\,(105,95,0) \\ M_1(30,0,90) \end{cases}.$$

31. Határozza meg az $ABCA_1B_1C_1$ és az $MNQM_1N_1Q_1$ hasábok metszetét, ha a hasábok ABC és MNQ alapja benne van a vízszintes képsíkban, és ismertek az AA_1, MM_1 oldaléleik!

$$\begin{cases} A\,(15{,}75{,}0) \\ B\,(85{,}60{,}0) \\ C\,(55{,}95{,}0) \\ A_1(70{,}25{,}95) \end{cases}, \begin{cases} M\,(150{,}50{,}0) \\ N\,(190{,}80{,}0) \\ Q\,(110{,}100{,}0) \\ M_1(35{,}0{,}95) \end{cases}.$$

32. Határozza meg az $ABCA_1B_1C_1$ és az $MNQM_1N_1Q_1$ hasábok metszetét, ha a hasábok ABC és MNQ alapja benne van a vízszintes képsíkban, és ismertek az AA_1, MM_1 oldaléleik!

$$\begin{cases} A\,(5{,}65{,}0) \\ B\,(75{,}50{,}0) \\ C\,(45{,}105{,}0) \\ A_1(60{,}15{,}85) \end{cases}, \begin{cases} M\,(140{,}40{,}0) \\ N\,(180{,}70{,}0) \\ Q\,(100{,}90{,}0) \\ M_1(25{,}0{,}85) \end{cases}.$$

33. Határozza meg az SABC és VMNQ gúlák metszetét, ha mindkét gúla ABC és MNQ alapja benne van a vízszintes képsíkban, valamint az S, V csúcspontjaik ismertek!

$$\begin{cases} A(130{,}10{,}0) \\ B(110{,}70{,}0) \\ C(95{,}5{,}0) \\ S(55{,}60{,}40) \end{cases}, \begin{cases} M(85{,}15{,}0) \\ N(40{,}45{,}0) \\ Q(50{,}5{,}0) \\ V(100{,}80{,}70) \end{cases}.$$

34. Határozza meg az SABC és VMNQ gúlák metszetét, ha a gúlák alapja ABC és MNQ, valamint csúcspontjaik S és V!

$$\begin{cases} A(40{,}70{,}0) \\ B(20{,}20{,}0) \\ C(70{,}20{,}0) \\ S(110{,}80{,}70) \end{cases}, \begin{cases} M(90{,}30{,}0) \\ N(140{,}50{,}0) \\ Q(110{,}80{,}0) \\ V(60{,}100{,}110) \end{cases}.$$

35. Határozza meg az SABC és VMNQ gúlák metszetét, ha a gúlák alapja ABC és MNQ, valamint a csúcspontjaik S és V!

$$\begin{cases} A(25{,}55{,}0) \\ B(5{,}5{,}0) \\ C(55{,}5{,}0) \\ S(95{,}65{,}55) \end{cases}, \begin{cases} M(75{,}15{,}0) \\ N(125{,}35{,}0) \\ Q(95{,}65{,}0) \\ V(45{,}85{,}95) \end{cases}.$$

36. Határozza meg az SABC és VMNQ gúlák metszetét, ha a gúlák alapja ABC és MNQ, valamint a csúcspontjaik S és V!

$$\begin{cases} A(45,55,0) \\ B(25,25,0) \\ C(75,25,0) \\ S(115,85,75) \end{cases}, \begin{cases} M(95,35,0) \\ N(145,25,0) \\ Q(115,85,0) \\ V(65,105,115) \end{cases}.$$

37. Határozza meg az SABC gúla és az $MNQM_1N_1Q_1$ hasáb metszetét, ha a gúla alapja ABC, a hasáb alapja MNQ és ismert éle MM_1!

$$\begin{cases} A(50,5,0) \\ B(25,35,0) \\ C(10,5,0) \\ S(85,75,55) \end{cases}, \begin{cases} M\,(110,30,0) \\ N\,(100,60,0) \\ Q\,(85,15,0) \\ M_1(50,70,60) \end{cases}.$$

38. Határozza meg az SABC gúla és az $MNQM_1N_1Q_1$ hasáb metszetét, ha a gúla alapja ABC, a hasáb alapja MNQ és ismert éle MM_1!

$$\begin{cases} A(65,0,0) \\ B(35,65,0) \\ C(0,20,0) \\ S(105,95,85) \end{cases}, \begin{cases} M\,(125,35,0) \\ N\,(105,65,0) \\ Q\,(85,15,0) \\ M_1(55,90,85) \end{cases}.$$

39. Szerkessze meg két kúp metszetét, ha ismertek a kúpok alapjának Ω_1 és Ω_2 középpontjai, R_1, R_2 sugarai és V_1, V_2 csúcspontjai, valamint a kúpok alapjai benne vannak a vízszintes képsíkban!

$$\begin{cases} R_1=40 \\ \Omega_1(50,60,0) \\ V_1(35,70,80) \end{cases}, \begin{cases} R_2=40 \\ \Omega_2(130,75,0). \\ V_2(85,10,65) \end{cases}$$

40. Szerkessze meg az egyenes körkúpok metszetét, ha a V_1 csúcspontú kúp alapja benne van a vízszintes képsíkban, középpontja Ω_1 és sugara R_1, valamint a másik kúp alapja benne van a profil képsíkban, és a kúpok tengelyei metszik egymást.

$$\begin{cases} R_1=20 \\ \Omega_1(40,30,0) \\ V_1(40,30,50) \end{cases}, \begin{cases} R_2=15 \\ \Omega_2(15,25,20). \\ V_1(75,25,20) \end{cases}$$

41. Szerkessze meg az egyenes körkúp és vízszintes forgáshenger metszetét, ha a V_1 csúcspontú kúp alapja benne van a vízszintes képsíkban, középpontja Ω_1 és sugara R_1!

$$\begin{cases} R_1=20 \\ \Omega_1(65,25,0) \\ V_1(65,25,40) \end{cases}.$$

A vízszintes forgáshenger egyik alkotója érintő a vízszintes képsíkhoz és a kúp alkotójához, a henger alapkörének sugara $R_2 = 10$ magassága h = 45 mm.

42. Szerkessze meg a kúp és forgáshenger metszetét, ha alapkörük benne van a vízszintes képsíkban!

$$\begin{cases} R_1=20 \\ \Omega_1(25,15,0) \\ V_1(75,55,50) \end{cases}, \begin{cases} R_1=15 \\ \Omega_1(65,20,0) \\ \Omega_2(40,60,50) \end{cases}.$$

43. Szerkessze meg két henger metszetét, ha ismertek alapköreik R_1, R_2 sugara, Ω_1, Ω_2 középpontjaik és $\Omega_1\Omega_3$, $\Omega_2\Omega_4$ tengelyeik!

$$\begin{cases} R_1=35 \\ \Omega_1(55,45,0) \\ \Omega_3(55,45,85) \end{cases}, \begin{cases} R_2=35 \\ \Omega_2(95,40,45). \\ \Omega_4(15,40,45) \end{cases}$$

44. Szerkessze meg két henger metszetét, ha ismertek alapköreik R_1, R_2 sugara, Ω_1, Ω_2 középpontjaik és $\Omega_1\Omega_3$, $\Omega_2\Omega_4$ tengelyeik!

$$\begin{cases} R_1=30 \\ \Omega_1(35,35,0) \\ \Omega_3(115,35,75) \end{cases}, \begin{cases} R_2=20 \\ \Omega_2(105,40,0). \\ \Omega_4(25,40,75) \end{cases}$$

45. Szerkessze meg a gömb és a henger metszetét, ha ismert a gömb R_2 sugara, Ω_3 középpontja, illetve a henger alapkörének Ω_1 középpontja, R_1 sugara és $\Omega_1\Omega_2$ tengelye!

$$\Omega_1(55,55,0) \quad \Omega_2(55,55,85) \quad R_1 = 35$$
$$\Omega_3(65,55,45) \quad R_2 = 40$$

46. Egy egyenes gúla négyzet alapja benne van a vízszintes képsíkban, amely alapélénel hossza 35 mm, a gúla magassága pedig 70 mm. Metsszük el a gúlát egy P síkkal, ahol

$P_x(80,0,0)$, $OP_xP = -90°$, $OP_xP' = 40°$

Szerkessze meg a csonka gúlának az alap és a metszősík közé eső palástjának a kiterített képét!

47. Egy VABCD ferde gúla alapja benne van a vízszintes képsíkban.

$$\begin{cases} V(15,50,45) \\ A(75,25,0) \\ B(55,45,0) \\ C(40,20,0) \\ D(70,10,0) \end{cases}$$

Metssze el a gúlát a P síkkal, ha $P_x(25{,}0{,}0)$, $OP_xP = -90°$, $OP_xP' = 140°$!
Terítse ki az alapsík és metszősík közé eső csonka gúla palástját!

IRODALOMJEGYZÉK

BOTEZ, St. M.
1965 *Geometrie descriptivă*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică.
BOLOŞ, C.
1992 *Geometrie descriptivă şi desen tehnic*. Tg Mureş, Ed. Universităţii Tehnice.
IVĂNCEANU, T.–SOFRONESCU, E.–BUZILĂ, V.
1979 *Geometrie descriptivă şi desen tehnic*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică.
BARTHA M.–BÁNDY A.–CSEKE, J., KLEMENTIS, Cs., NYITRAI, J., NYOLCAS, M., TÖRÖK, I.
2011 *Műszaki Ábrázolás I*, BME, Budapest, Egyetemi tananyag.
GONDA, S.
1990 *Ábrázoló geometria fejezetének segédlete*, Veszprém, Pannon Egyetem kiadó.
MONCEA, J.
1982 *Geometrie descriptivă şi Desen tehnic*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică.
NÉMETH L.–TEMESVÁRI Á.–SZAKÁL P.
2010 *Ábrázoló geometria*. Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem, Matematikai Intézet.
TĂNĂSESCU, A.
1967 *Geometrie descriptivă. Probleme*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică.
TĂNĂSESCU, A.
1975 *Geometrie descriptivă. Perspectivă axonometrie*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică.

REZUMAT

Geometrie descriptivă

Cartea oferă ajutor în vederea înţelegerii şi însuşirii reprezentărilor formelor spaţiale în plan. Scopul didactic al cărţii, constă în punerea la dispoziţia studentului o serie de informaţii de bază, pornind de la proiectarea punctului, dreptei şi a planului, parcurgând metodele geometriei descriptive, care sunt metode de modificare sau de transformare a proiecţiilor în funcţie de condiţiile cerute (transformare, rotaţie, rabaterea), utilizând construcţii geometrice suplimentare, necesare pentru obţinerea unor informaţii noi cu privire la obiectul de reprezentat. Ultimele capitole ale cărţii conţin intersecţia corpurilor geometrice şi desfăşurata lor.

ABSTRACT

Descriptive Geometry

The book offers help in understanding and in its acquisition the representations of spatial forms on a plane. The didactic purpose of the book is to available the student with a series of basic information, starting from the projection of the point, the line and the plan, going through the methods of descriptive geometry, which are methods of modifying or transforming the projections depending on the required conditions (transformations, rotations, rotations into parallel position with plane of projections), using additional geometric constructions, necessary to obtain new information about the object to be represented. The last chapters of the book contain the intersection of geometrical models and their development.

A SZERZŐRŐL

Popa-Müller Izolda mérnöki fokozatát a marosvásárhelyi Petru Maior Egyetemen szerezte, textil és bőr technológiai berendezések szakon. Óraadó tanárként tanított a marosvásárhelyi Petru Maior Egyetemen, ahol továbbfejlesztve tudását, 1999-ben egy másik mesteri fokozatot is szerzett, a fogaskerekek számítógépes tervezése és a fogazás modern technológiája területén. Doktori fokozatát 2010-ben a mérnöki ipar szakon szerezte meg a brassói Transilvania Egyetemen. 1999–2001 között tervezőmérnökként dolgozott a Matricon és a Design-Plast cégeknél. 2001 óta a Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem Marosvásárhelyi Kara Gépészmérnöki Tanszékének főállású oktatója, alapgeometriai ismereteket – ábrázoló geometriát, műszaki rajzot, számítógépes ábrázolást és tribológiát – tanít.

Editura Scientia Kiadó
400112 Kolozsvár (Cluj-Napoca)
Mátyás király (Matei Corvin) u. 4. sz.
Tel./fax: +40-364-401454
E-mail: scientia@kpi.sapientia.ro
www.scientiakiado.ro

Korrektúra:
Szenkovics Enikő

Tördelés:
Metaforma Kft.

Tipográfia:
Könczey Elemér

Készült az F&F INTERNATIONAL nyomdában
Igazgató / Director: Ambrus Enikő

sapientia
tankönyvek

A tankönyv mérnök szakos hallgatók számára készült azzal a céllal, hogy segítse őket az ábrázoló geometriai ismeretek elsajátításában, ami elengedhetetlen a mérnöki gondolkodásban. Az alapgeometriai tudás fejleszti a térbeli alakzatok belső látásának készségét, alakítja a megfelelő térszemléletet, könnyebbé teszi az alkatrészek térbeli alakzatának elképzelését, valamint a kétdimenziós műszaki rajzok jobb megértését.

A könyv az elméleti részek mellett feladatokat, illetve geometriai megoldástípusokat is tartalmaz, ugyanakkor a geometriai testek metszetének és kiterítésének ismertetésével továbbfejleszti a rajzolási és szerkezeti gondolkodásmódot, valamint a precíz térlátás kialakulását. Mindezeket figyelembe véve nemcsak oktatási anyagként használható, hanem tágabb érdeklődésre is számot tarthat.

ISBN 978-606-975-071-1
9 786069 750711