

## Двойная периодичность механических свойств тонкого ледяного поля, сформированного в условиях бокового стеснения

© 2022 г. В.П. Епифанов\*, С.А. Лычев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

\*evp@ipmnet.ru

## Double periodicity of mechanical properties of a thin ice field formed under conditions of lateral constraint

V.P. Epifanov\*, S.A. Lychev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

\*evp@ipmnet.ru

Received May 19, 2022 / Revised June 21, 2022 / Accepted October 7, 2022

**Keywords:** *constrained deformation during freezing, ice, modal analysis, plate, resistance to through penetration, viscoelastic.*

### Summary

Experimental data and results of theoretical modeling of the bending of a viscoelastic floating ice plate formed under constrained deformation are analyzed. When a thin plate of ice is frozen on the water surface under conditions of constrained deformation, which may be caused, for example, by the rigid walls of the pool, periodic changes in physical properties occur in it, in particular, periodic penetration resistance. Experimental results confirming this fact were obtained during tests of a thin ice cover at the Krylov State Research Center (Saint-Petersburg, Russia). A characteristic feature of the test results is that their spatial distributions can be represented with sufficient accuracy as an overlap of two periodic functions with significantly different periods: long-wave and short-wave components. In this paper, a detailed analysis of experimental data is given, which makes it possible to isolate these components. Furthermore, the theoretical model that explains the physical causes for double periodicity is proposed. The model assumes viscoelastic quasi-static deformation of the ice plate caused by small fluctuations of the water level in the basin and random disturbances of its surface. An analytical solution for the model case of cylindrical bending is derived. The solution is presented in the form of an expansion in terms of eigenfunctions of differential operators generated by the boundary value problem under study. It has been established that when a thin plate of ice freezes under conditions of constrained deformation, there are at least two reasons for the appearance of a periodic structure: a general loss of stability as an elastic structure and a local loss of stability by a viscoelastic-plastic mechanism. The results obtained can be used in the development of the theory of ice compression, in assessing the causes of variation in the local strength of ice fields and the possibility of their artificial destruction.

**Citation:** Epifanov V.P., Lychev S.A. Double periodicity of mechanical properties of a thin ice field formed under conditions of lateral constraint. *Led i Sneg*. Ice and Snow. 2022, 62 (4): 591–606. [In Russian].  
doi: 10.31857/S2076673422040154, edn: mibxse

Поступила 19 мая 2022 г. / После доработки 21 июня 2022 г. / Принята к печати 7 октября 2022 г.

**Ключевые слова:** *вязкоупругость, ледяное поле, модальный анализ, сопротивление сквозной пенетрации, стеснённое деформирование при замораживании.*

Обсуждаются двойная периодичность (сжатие в плоскости ледяного поля и реологический характер локализации и накопления изгибных деформаций в нём), методы её экспериментальной идентификации, математическое моделирование и причины появления. Установлены две причины возникновения периодичности: общая потеря устойчивости упругой конструкции и локальная неустойчивость по вязкоупругому механизму. Первая зависит от геометрии пластины в целом и условий её закрепления, вторая – от толщины, усилия обжатия и физико-механических свойств льда.

### Введение

Известно, что строение и эволюция криосферы Земли во многом определяются свойствами льда (Постникова, Рыбак, 2021). Как мате-

риал, лёд имеет специфические особенности, которые проявляются, в частности, в сложных реологических соотношениях, определяющих эволюцию его напряжённо-деформированного состояния, и в разнообразии его поликристал-

лических структур, сформированных при различных условиях залегания. Разработка моделей гляциологических процессов предполагает достоверное знание соответствующих характеристик льда в условиях залегания (Vox et al, 2019; Vox et al, 2017). Однако из-за многочисленных технических трудностей определить эти характеристики в процессе полевых испытаний сложная, а иногда и невыполнимая задача. Именно поэтому реологические свойства льда часто определяют в лабораторных условиях на образцах, история формирования и пространственные масштабы которых могут сильно отличаться от естественных условий. По этой причине важно выделить наиболее значимые факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние льда в ледяном поле и эволюцию его механических свойств, и учесть их как при теоретическом описании, так и в лабораторном моделировании.

Установлено, что к таким факторам относятся *сжатие в плоскости ледяного поля и реологический характер локализации и накопления изгибных деформаций в нём*, возникающие в процессе его формирования в условиях стеснённого деформирования. Эти факторы приводят к развитию в ледяном поле периодически чередующихся областей с изменёнными физико-механическими свойствами (по отношению ко льду, сформированному без стеснения его деформирования). Это подтверждается экспериментальными наблюдениями, в частности, значениями усилий пенетрации, измеряемых с достаточно малым шагом (Епифанов, Сазонов, 2020). Особенность пространственного распределения этих изменений представлена как сумма двух периодических функций. Предмет работы – обсуждение такой двойной периодичности, методов её экспериментальной идентификации, математического моделирования и объяснения причин её появления с позиций механики континуума.

В настоящее время существуют разнообразные аналитические и численные методы исследования напряжённо-деформированного состояния ледяного поля (Staroszczyk, 2019). Однако в большинстве теоретических исследований свойства льда описывают усреднёнными характеристиками в упругой постановке. В частности, в (Vox et al, 2017; Fox, Squire, 1994; Meylan, 2021) изгиб рассматривается в упро-

щённом виде с помощью линейных уравнений технической теории пластин (Тимошенко, Войновский-Кригер, 1966). При этом краевые условия деформирования ледяной пластины выбирают заведомо соответствующими незначительным силам сжатия в срединной плоскости пластины, которые слабо влияют на её изгибные деформации. В большинстве работ пластина считается тонкой и рассматривается как свободно плавающая (Fox, Squire, 1994; Meylan, 2021) или как консольно закреплённая (Staroszczyk, Hedzielski, 2004). Это, с одной стороны, облегчает моделирование изгиба пластины (Тимошенко, Войновский-Кригер, 1966.), а с другой – не позволяет в полной мере учесть совокупность факторов, приводящих к появлению двойной периодичности. В работе предлагается модификация математической модели ледяной пластины, учитывающая усилия обжатия и вязкоупругий механизм накопления изгибных деформаций, которая позволяет объяснить причину появления второго (коротковолнового) периода.

Отмечено, что учёт сжимающих сил в плоскости упругой пластины, проводился для предельных значений напряжений, приводящих или к постановке задачи устойчивости (Вольмир, 1963), или к нелинейной задаче для гибких пластин (Ciarlet, 1988). Условия докритического стеснённого деформирования, особенно при формировании ледяных полей, оставались недостаточно исследованными. Поскольку стеснённое деформирование льда проявляется всякий раз при замораживании воды не только между берегами рек, но также между берегом и дрейфующим льдом или между неподвижными льдами, теоретическое исследование этого феномена и воспроизведение его в лабораторных условиях имеет широкий круг приложений. Экспериментальное исследование феномена двойной периодичности выполнено в Крыловском государственном научном центре (Санкт-Петербург, Россия). С помощью метода пенетрации получен массив экспериментальных данных, первоначальная обработка которых подтвердила периодичность прочностных свойств ледяного поля и позволила оценить пространственные периоды (1 и 5 м) в различных поперечных сечениях ледяного поля (Епифанов, Сазонов, 2020).

В предыдущих исследованиях для теоретического описания периодичности применялась аппроксимация экспериментальных данных с помощью упругих мод-колебаний жёстко закреплённой прямоугольной пластины в предположении, что неоднородность, возникающая в ней, подобна распределению напряжений в пластине, потерявшей устойчивость плоской формы по упругой схеме. Этот подход достаточно хорошо воспроизводит период 5 м, которому соответствует фундаментальная мода упругой системы. Волновая составляющая длиной 1 м формально может быть представлена некоторой высокочастотной модой. При этом, однако, возникал вопрос: по какой причине в потерявшей устойчивость плоской форме пластины существенным образом проявляется коротковолновая мода с периодом 1 м? Анализ ледяной пластины как упругой системы не позволяет ответить на этот вопрос. Кроме того, экспериментально установлено, что вклад периодичности в распределение свойства сопротивляемости многократно увеличивается со временем. Этот экспериментальный факт свидетельствует о протекании релаксационных процессов, которые не могут быть учтены в упругой модели.

Необходим новый подход, учитывающий, что вторичное состояние достигается из-за реологических эффектов по прошествии некоторого времени и зависит только от локальных свойств ледяного поля (от физико-механических свойств и толщины, а не от условий закрепления всей пластины в целом). В рамках работы предлагается учесть эти экспериментальные факты за счёт моделирования ледяного поля как вязкоупругой пластины и применять известный теоретический факт о развитии во времени вторичного периодического напряжённо-деформированного состояния, связанного с неупругим характером деформирования ледяной пластины (Stig-Göran Sjölin. 1985; Епифанов, Сазонов, 2020). Этот подход представляется весьма продуктивным для преодоления указанных здесь трудностей. При этом сохраняется ограничение по величине действующих сил. Силы сжатия в пластине считаются докритическими. Соответственно, влияние нелинейных эффектов на форму изгиба окажется заведомо малым и слабо влияющим на результат.

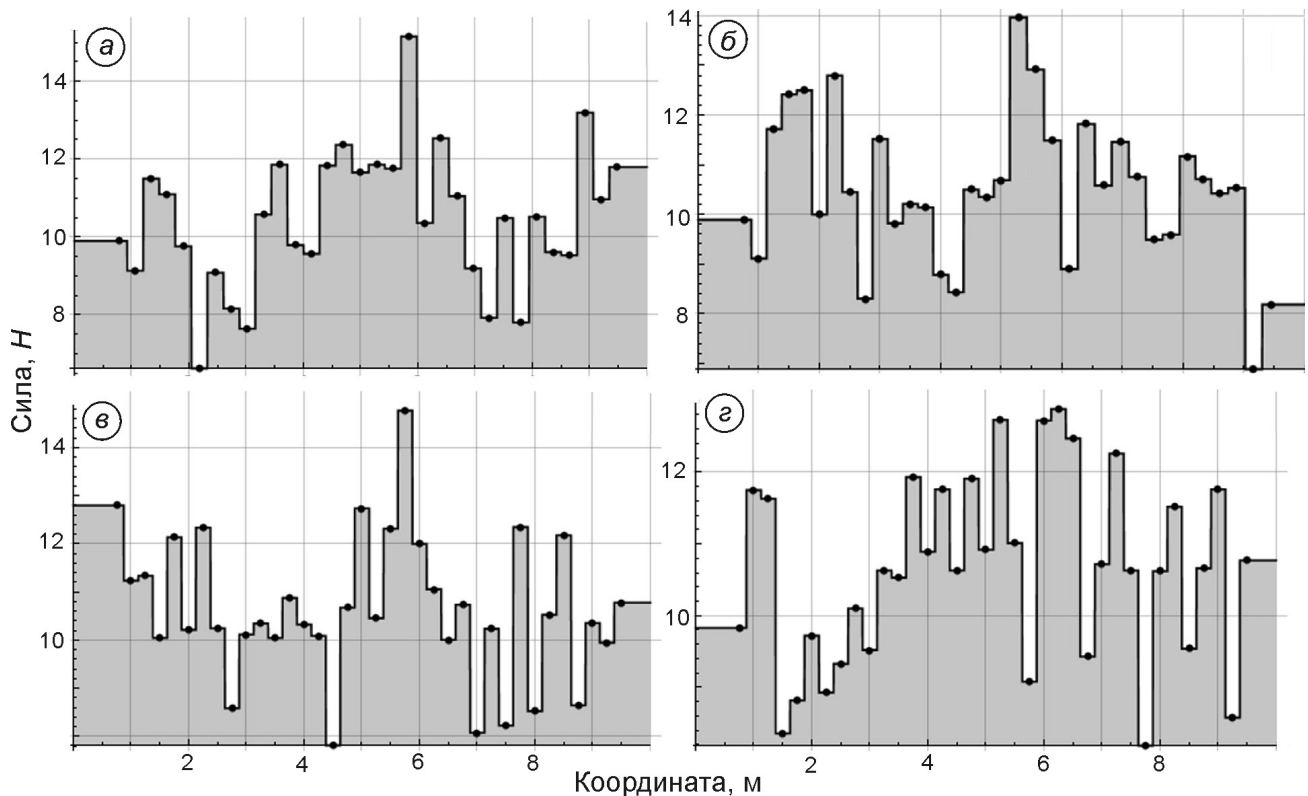
## Экспериментальные результаты

**Представление экспериментальных данных кусочно-постоянными функциями.** Детали технической реализации измерений изложены в (Епифанов, Сазонов, 2020). Краткое изложение для одного сечения дано в (Епифанов, Лычев, 2022). Далее приведены данные измерений силы пенетрации в четырёх поперечных сечениях ледяного поля. Ледяная пластина имеет размер  $80 \times 10$  м<sup>2</sup>. Координаты точек измерения, значения усилий пенетрации и продольная координата  $x$  сечений, в которых выполнялись измерения приведены на рис. 1. На рисунке экспериментальные значения силы пенетрации  $F_n^m$  и поперечные координаты мест измерения пенетрации  $p_n^m$  указаны точками. По значениям измерений  $F_n^m$  и координатам  $p_n^m$ ,  $m = 1, \dots, s$ , соответствующим сечению  $n$  и номеру точки  $m$  ( $s$  – общее число точек измерения) задаются кусочно-постоянные функции

$$f_n(x) = \begin{cases} F_n^1, & 0 \leq x < (p_n^1 + p_n^2)/2 \\ F_n^2, & (p_n^1 + p_n^2)/2 \leq x < (p_n^2 + p_n^3)/2 \\ \dots & \\ F_n^s, & (p_n^{s-1} + p_n^s)/2 \leq x \leq L \end{cases},$$

которые определяют интерполяцию экспериментальных данных нулевого порядка между точками измерения и экстраполируют крайние значения до границ бассейна. Графики этих функций также приведены на рис. 1.

**Основные периоды и их пространственные изменения.** В предшествующих работах (Епифанов, Сазонов, 2020; Epifanov, Sazonov, 2021) экспериментальные данные аппроксимировались тригонометрическими функциями и с их помощью оценивались коротковолновые (1 м) и длинноволновые (5 м) периоды. Несмотря на простоту, такой подход содержал существенный недостаток: тригонометрические функции, периоды которых определялись из условия наилучшего совпадения с экспериментальными данными, в общем случае не образовывали ортогональную систему, и из-за взаимного влияния выбор аппроксимирующих функций был не единственным. Это приводило к потере объективности представления данных. В работе применяется иной подход. Для выделения двух пространственных периодов из кусочно-посто-



**Рис. 1.** Экспериментально определённые силы пенетрации в продольных сечениях ледяного поля: а – 55 м; б – 56 м; в – 57 м; г – 58 м; точками указаны места в поперечном профиле бассейна и значения измерений  
**Fig. 1.** Experimentally determined penetration forces in the longitudinal sections of the ice field: а – 55 m; б – 56 m; в – 57 m; г – 58 m; points indicating the location in the transverse profile and measurement values

янных представлений экспериментальных данных применялась ортонормированная система функций  $(\varphi_n^0, \varphi_n^1, \varphi_n^2)$ . Первая из них – постоянная, а две другие – квазипериодические, периоды которых непрерывно изменяются в заданном диапазоне. Таким образом, аппроксимация экспериментальных данным может быть записана в виде

$$\tilde{f}_n(x) = A_n^0 \varphi_n^0(x) + A_n^1 \varphi_n^1(x) + A_n^2 \varphi_n^2(x).$$

Свойство ортогональности позволяет независимо выделить длинно- и коротковолновую составляющие, хотя для его обеспечения приходится отказаться от строгой периодичности и заменить её квазисвойством. Однако, как видно из приведённых далее конкретных вычислений, отклонение от строгой периодичности оказывается небольшим и не вносит какого-либо значимого вклада в анализ. Не погружаясь в технические детали, отметим, что ортонормированность понимается в смысле следующего скалярного произведения:

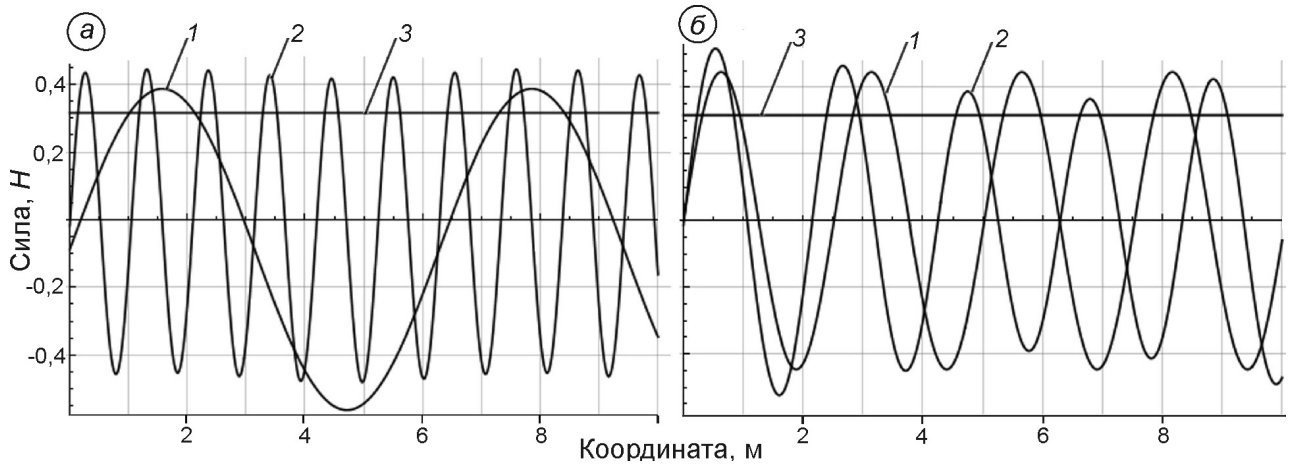
$$\langle \varphi_n^i, \varphi_n^j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle u, v \rangle := \int_0^L u(x)v(x)dx. \quad (1)$$

В качестве  $\varphi_n^k$  применялись функции, получаемые в результате процесса ортогонализации Грама-Шмидта системы неортогональных функций:

$$\begin{aligned} \psi_n^0 &= 1, \quad \psi_n^1 = \sin(\Omega_n x + \epsilon_n), \\ \psi_n^1 &= \sin(\omega_n x + \epsilon_n), \quad \omega_n > \Omega_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Первая функция характеризует постоянную составляющую экспериментальных данных, вторая – длинноволновую составляющую, третья – коротковолновую. Процедура ортогонализации даёт следующий результат:

$$\begin{aligned} \varphi_n^0 &= \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \varphi_n^1 = \frac{\beta_n + \sin(\Omega_n x + \epsilon_n)}{\sqrt{\nu_n}}, \\ \varphi_n^2 &= \frac{\delta_n + \sigma_n \sin(\Omega_n x + \epsilon_n) + \sin(\omega_n x + \epsilon_n)}{\sqrt{\zeta_n}}. \end{aligned} \quad (3)$$



**Рис. 2.** Аппроксимирующие функции при различных значениях параметров:  $\Omega = 1, \omega = 6, \epsilon = \varepsilon = 0$  (а);  $\Omega = 2,5, \omega = 3, \epsilon = \varepsilon = 0$  (б); линия: 1 – длинноволновая; 2 – коротковолновая; 3 – константа  
**Fig. 2.** Approximating functions for different values of the parameters:  $\Omega = 1, \omega = 6, \epsilon = \varepsilon = 0$  (a);  $\Omega = 2.5, \omega = 3, \epsilon = \varepsilon = 0$  (b); line: 1 – long-wave; 2 – shortwave; 3 – constant

Здесь  $\beta_n, \delta_n, \sigma_n, \nu_n, \xi_n$  – числовые параметры, определяемые по произвольно принимаемым значениям для волновых  $\Omega_n, \omega_n$  и фазовых  $\epsilon_n, \varepsilon_n$  характеристик по следующим формулам:

$$\beta_n = \frac{\cos(\Omega_n L + \epsilon_n) - \cos \epsilon_n}{L \Omega_n}, \quad \delta_n = \sigma_n \beta_n + \xi_n,$$

$$\sigma_n = \frac{\xi_n \beta_n L - \mu_n}{\nu_n}, \quad \xi_n = \frac{\cos(\omega_n L + \varepsilon_n) - \cos \varepsilon_n}{L \omega_n},$$

$$\nu_n = \frac{1}{2 \Omega_n^2} (L^2 \Omega_n^2 - 2 - \cos(2 \epsilon_n) + 2 \cos(L \Omega_n) - \cos(2 \epsilon_n + 2 L \Omega_n) - \cos(2 \epsilon_n + L \Omega_n) (L \Omega_n \sin(L \Omega_n) - 2)),$$

$$\mu_n = \frac{\sin(\epsilon_n - \varepsilon_n) - \sin(\epsilon_n - \varepsilon_n - L(\omega_n - \Omega_n))}{2(\omega_n - \Omega_n)} + \frac{\sin(\epsilon_n + \varepsilon_n) - \sin(\epsilon_n + \varepsilon_n + L(\omega_n + \Omega_n))}{2(\omega_n + \Omega_n)},$$

$$\xi_n = \sigma_n^2 \left( \frac{2 L \Omega_n + \sin(2 \epsilon_n) - \sin(2 \epsilon_n + 2 L \Omega_n)}{4 \Omega_n} - 2 \nu_n - L \beta_n^2 \right) + \frac{2 L \omega_n + \sin(2 \varepsilon_n) - \sin(2 \varepsilon_n + 2 L \omega_n)}{4 \omega_n} - L \xi_n^2.$$

Отметим, что система функций (3), будучи ортонормированной, сохранила качественные свойства системы (2): первая функция представляет собой постоянную составляющую, вторая – длинноволновую, третья – коротковолновую. Кроме того, при достаточном разли-

чии волновых параметров  $\Omega_n$  и  $\omega_n$  эти функции близки к периодическим. Нарушение периодичности, вызванное процедурой ортогонализации, существенно меньше погрешностей, вносимых разбросом исходных данных. На рис. 2 приведены аппроксимирующие функции с существенно различными значениями волновых параметров (а) и для сравнения – с близкими (б).

Из рис. 2 следует, что дальнейшее применение полученных аппроксимирующих функций (4) ограничено существенно различными значениями волновых параметров, что не противоречит их априорной оценке в 1 и 5 м. Определение параметров  $\Omega_n, \omega_n, \epsilon_n, \varepsilon_n$  для каждого сечения  $n$  осуществлялось из условия минимума невязки

$$\|f_n - \tilde{f}_n\| \rightarrow \min \tag{4}$$

$$(\Omega_n, \omega_n, \epsilon_n, \varepsilon_n) \in (0, 3) \times (3, 10) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

Здесь норма  $\|\cdot\|$  определяется скалярным произведением (1), а коэффициенты  $A_n^0, \dots, A_n^2$  вычисляются как проекции на элементы ортонормированной системы:

$$A_n^i = \langle f_n, \varphi_n^i \rangle, \quad i = 0, 1, 2. \tag{5}$$

Выбор волнового диапазона и его разбиение на длинноволновую (0–3) м<sup>-1</sup> и коротковолновую (3–10) м<sup>-1</sup> продиктованы предварительной эмпирической оценкой экспериментальных данных. С помощью явных выражений для функций  $\varphi_n^i$  (3) интегралы (5) могут быть вычислены по элементарным формулам:

Волновые и фазовые параметры функций для сечений а-г

<i>n</i>	<i>x</i> , м	$A_n^0$ , Н	$A_n^1$ , Н	$A_n^2$ , Н	$\Omega_n$ , 1/м	$\omega_n$ , 1/м	$\epsilon_n$	$\epsilon_n$
<i>a</i>	55	33,1	-3,16	-1,45	1,18	6,06	4,97	1,72
<i>б</i>	56	32,74	-2,15	-1,26	1,25	7,71	2,85	6,28
<i>в</i>	57	34,11	2,45	-1,37	1,25	7,01	0,85	1,71
<i>г</i>	58	33,48	1,85	-1,47	0,77	7,20	3,54	3,21

$$A_n^0 = \frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ F_n^1 \frac{p_n^1 + p_n^2}{2} + F_n^s \left( L - \frac{p_n^{s-1} + p_n^s}{2} \right) + \sum_{m=2}^{s-1} F_n^m \frac{p_n^{m+1} - p_n^{m-1}}{2} \right\},$$

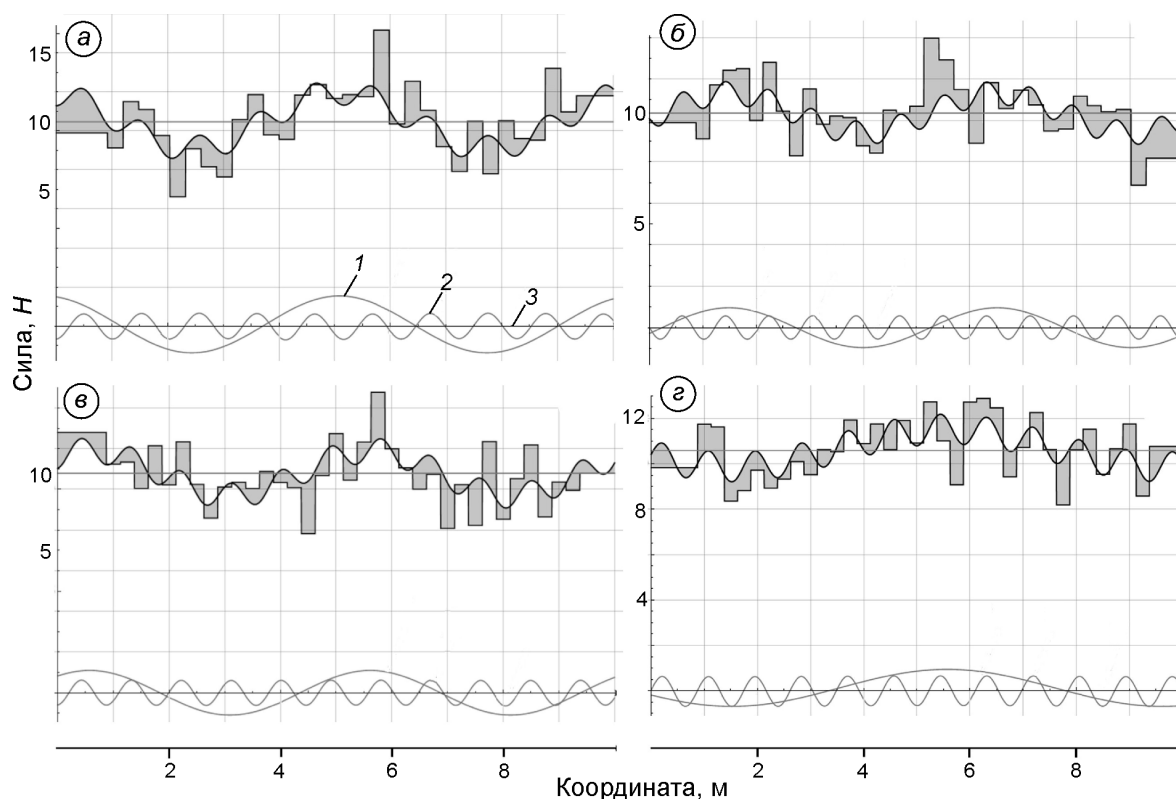
$$A_n^1 = \frac{1}{\sqrt{v_n}} \left\{ F_n^s \left( \beta_n L - \frac{\cos(\epsilon_n + L\Omega_n)}{\Omega_n} \right) + F_n^1 \frac{\cos \epsilon_n}{\Omega_n} + \sum_{m=1}^{s-1} (F_n^m - F_n^{m+1}) \left[ \beta_n \frac{p_n^m + p_n^{m+1}}{2} - \frac{1}{\Omega_n} \cos \left( \Omega_n \frac{p_n^m + p_n^{m+1}}{2} + \epsilon_n \right) \right] \right\},$$

$$A_n^2 = \frac{1}{\sqrt{\xi_n}} \left\{ F_n^s \left( \delta_n L - \frac{\sigma_n \cos(\epsilon_n + L\Omega_n)}{\Omega_n} - \frac{\cos(\epsilon_n + L\omega_n)}{\omega_n} \right) + F_n^1 \left( \frac{\cos \epsilon_n}{\Omega_n} + \frac{\cos \epsilon_n}{\omega_n} \right) + \sum_{m=1}^{s-1} (F_n^m - F_n^{m+1}) \left[ \beta_n \frac{p_n^m + p_n^{m+1}}{2} - \frac{1}{\Omega_n} \cos \left( \Omega_n \frac{p_n^m + p_n^{m+1}}{2} + \epsilon_n \right) - \frac{1}{\omega_n} \cos \left( \omega_n \frac{p_n^m + p_n^{m+1}}{2} + \epsilon_n \right) \right] \right\}.$$

Приведённые вычисления показывают, что норма невязки (4) выражается через элементарные функции, экспериментально найденные значения  $F_n^i, p_n^i, i = 1, 2, \dots, s$ , а также волновые и фазовые параметры  $\Omega_n, \omega_n, \epsilon_n, \epsilon_n$ . Вместе с тем зависимость от последних оказывается существенно нелинейной. Это делает неэффективными алгоритмы прямого поиска минимума, а определение волновых и фазовых параметров, минимизирующих невязку, осуществлялось методом Монте-Карло с равномерным распределением пробных значений в области поиска. Для каждого сечения проводилось  $10^6$  вычислений. Результаты вычислений представлены в таблице и на рис. 3. На рис. 3 для различных сечений заливкой показано отличие кусочно-постоянных функций, представляющих собой интерполяцию экспериментальных данных, от аппроксимирующей комбинаций, а также от-

дельно даны все три слагаемых этой комбинации. Результаты убедительно иллюстрируют наличие двух пространственных периодов. Малый разброс волновых параметров  $\omega_n$  и соответствующих коэффициентов  $A_n^2$  коротковолновых составляющих характеризует коротковолновую компоненту как феномен, связанный с локальными свойствами ледовой пластины. Значительно больший разброс параметров длинноволновой компоненты также имеет ясную физическую интерпретацию, связанную с потерей устойчивости (либо квазиколебаниями) всей ледовой пластины в целом. Действительно, длинноволновая компонента определяется фундаментальной формой, сечения которой для различных продольных координат различаются, так как различны условия на границе контакта льда со стенкой бассейна.

**Сравнение рассчитанных итоговых значений волновых параметров с их эмпирическими аппроксимациями.** Рассчитанное среднее значение итоговой величины длинноволнового параметра  $\Omega_n = 1,11 \pm 0,17, \text{ м}^{-1}$  близко к ранее полученной априорной оценке  $-1, \text{ м}^{-1}$ . Этот факт согласуется с представлениями об его упругом характере. Соответствующее среднее значение этого периода в изгибной форме вязко-упругой пластины равно  $\lambda_n = 0,9 \text{ м}$  при разбросе 15%. Сравнение рассчитанного итогового значения волнового параметра и соответствующего ему значения периода 0,9 м с ранее полученной априорной оценкой 1 м позволяет утверждать, что новый способ обработки экспериментальных результатов позволяет придать им более строгое описание, но не указывает на ошибочность ранее использованного априорного подхода. Другой результат анализа экспериментальных данных – среднее значение итоговой величины коротковолнового параметра  $\Omega_n = 7,0 \pm 0,5 \text{ м}^{-1}$ . Ему соответствует пространственный период  $\lambda_n = 0,14 \text{ м}$  при разбросе  $\pm 7\%$ . Отмечено, что эта величина почти на порядок (в 6,4 раза) меньше, чем период упругой моды.



**Рис. 3.** Аппроксимации экспериментальных данных в различных сечениях:

*a* – 55 м; *б* – 56 м; *в* – 57 м; *г* – 58 м; 1 – длинноволновые; 2 – коротковолновые; 3 – постоянные составляющие

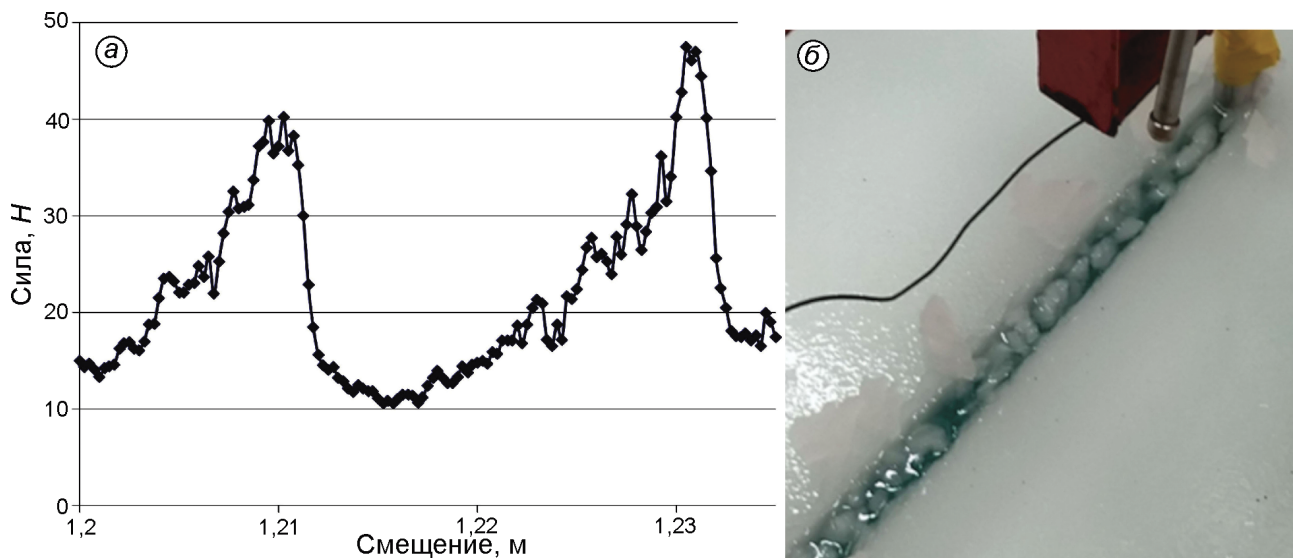
**Fig. 3.** Approximations of experimental data in various sections:

*a* – 55 m; *б* – 56 m; *в* – 57 m; *г* – 58 m; 1 – long-wave; 2 – shortwave; 3 – constant components

Анализ полученных результатов позволяет утверждать присутствие двойной периодичности (1 и 0,14 м) в сериях экспериментальных данных (см. рис. 3). Вторая периодичность проявляется через некоторое время после замораживания. Об этом свидетельствуют данные, приведённые в работе (Епифанов, Сазонов, 2020) для одного и того же сечения, но в различные моменты времени – сразу после засева водной поверхности ледяными частицами и по прошествии 20 часов. Из анализа этих экспериментальных данных следует, что эволюция второй периодичности имеет явные релаксационные свойства, в силу которых её влияние значительно усиливается во времени. Замечено, что коротковолновая периодичность появляется не только в описанном выше эксперименте, но и в других, методика проведения которых существенно различается (изгиб ледяных клавиш, прорезание ледяного поля, акустическая эмиссия). В одних экспериментах эта периодичность выражена в виде результата условий формирования ледяного поля

(пенетрация, изгиб), в других – результатом процесса разрушения (прорезание).

На рис. 4 показан канал, прорезаемый в моделированном льде вертикальным цилиндрическим индентором, движущимся вдоль ледового бассейна с постоянной скоростью 1 мм/с. Диаметр индентора 30 мм, температура воздуха  $-5^{\circ}\text{C}$ ; на инденторе жёстко закреплён пьезоэлектрический датчик. Схема измерительной линии дана в работе (Епифанов, Глазовский, 2010). Ось индентора ориентирована вертикально, и прорезание льда происходит боковой поверхностью индентора. Зависимость силы прорезания от смещения представляется обычно периодической (пилообразной) кривой. По числу максимумов ( $n = 23$ ) на мерной базе  $L = 4,3$  м определён период  $\Lambda = L/n = (4,3 \text{ м}/23) = 0,19$  м. Полученное значение оказывается одного порядка со средним значением периода  $\lambda = 0,14$  м, измеренным методом пенетрации. Механизм этой периодичности в англоязычной литературе обозначается как *stick-slip*.



**Рис. 4.** Прорезание ледяного поля вертикальным индентором: *a* – зависимость силы сопротивления от смещения на мерной базе 0,03 м со скоростью 1 мм/с; *б* – рабочий момент процесса  
**Fig. 4.** Cutting through the ice field with a vertical indenter: *a* – dependence of the resistance force on the displacement on a measured base of 0,03 m at a speed of 1 mm/s; *б* – the working moment of the process

На экспериментальной кривой выбран произвольный участок с двумя максимумами (см. рис. 4, *a*). При таком разрешении по смещению проявляются особенности механического поведения льда. Отмечено, что при прорезании лёд не только пластически деформируется, но и хрупко разрушается. Пластичность подтверждается выдавливанием льда из контактной зоны (см. рис. 4, *б*), а упругость – присутствием экстремумов на восходящем участке экспериментальной кривой (см. рис. 4, *a*). Это не противоречит предположению, что наблюдаемая периодичность механических свойств льда обусловлена упругопластическими процессами.

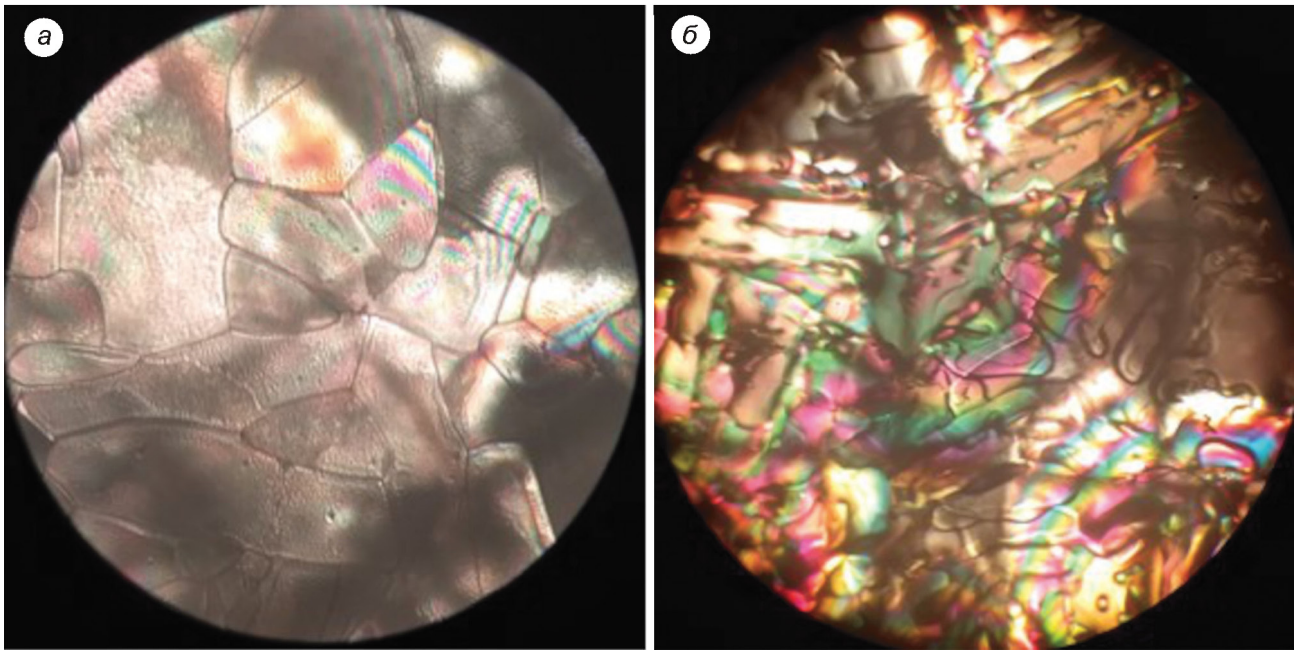
Для независимого подтверждения достоверности протекания пластических процессов исследована структура льда в ледяной пластине, полученной замораживанием воды в ванне прямоугольного сечения  $50 \times 25 \text{ см}^2$  с жёсткими бортами. На рис. 5 показаны шлифы льда в поляризованном свете. При сравнении шлифов льда, полученных замораживанием воды в ванне с жёсткими стенками и в бассейне Крыловского государственного научного центра, обнаружены общие характерные признаки: округлая форма ледяных кристаллитов (и их малый размер). Именно округлая форма кристаллитов – доказательство пластических процессов при сжатии

в плоскости ледяной пластины и её изгибе. Из этого следует, что двойная периодичность механических свойств льда в обоих случаях получена в условиях докритического стеснённого деформирования. Это позволяет применять полученные результаты к широкому кругу реальных ситуаций, включая ледяные поля.

### Теоретическая модель

Идея, которую предлагается положить в основу теоретической интерпретации двойной периодичности, состоит в разделении изгиба на две составляющие. Первая соответствует изгибу на фундаментальной моде всей пластины в целом, а вторая характеризуется накоплением возмущений с пространственной периодичностью, отвечающей её вязкоупругим свойствам. Для верификации этой идеи требуется выполнить математическое моделирование напряжённого состояния пластины льда с учётом указанных выше особенностей её вязкоупругого деформирования и сопоставить результаты с экспериментальными данными. В исходных данных (Епифанов, Сазонов, 2020) сила обжатия ледяной пластины непосредственно не приводится. Косвенная оценка этого параметра, ко-





**Рис. 5.** Структура шлифов льда, полученного замораживанием воды в ванне (а) и в ледяном поле (б).  
Размер координатной сетки  $2 \times 2 \text{ мм}^2$

**Fig. 5.** The structure of the ice section, obtained by freezing water in the bath (a) and in the pool (b).  
The size of the coordinate grid is  $2 \times 2 \text{ мм}^2$

тору можно получить из условия жёсткости контура бассейна и объёмного расширения льда при замораживании, оказывается чрезвычайно грубой в виду присутствия в толще льда пор и включений. В связи с этим усилие обжатия будет определяться в ходе математического моделирования из условия наилучшего согласования с экспериментальными данными.

Учитывая, что в рассматриваемом эксперименте (Епифанов, Сазонов, 2020) ледяная пластина имеет длину в 10 раз превышающую ширину, а вдоль длинных сторон пластина приморожена к жёстким бортам, её деформацию можно определить в рамках модели цилиндрического изгиба. Поддерживающее действие воды под пластиной представлено моделью винклеровского основания, жёсткость которого определяется архимедовой силой, приложенной к погружённой части. Предполагается, что пластина однородна и при отсутствии изгиба самоуравновешена. Изгиб может быть вызван некоторой поперечной нагрузкой на пластину, а также изменением уровня воды в бассейне, которое из-за того, что пластина приморожена к бортам, эквивалентно приложению равномерно распределённой поперечной нагрузки. Далее

этот вид нагружения считается основным. Материал пластины предполагается однородным, изотропным, отклик которого определяется вязкоупругим законом Фойгта. При всех этих предположениях начально-краевая задача в квазистатическом приближении может быть сформулирована следующим образом:

$$\left( \tilde{E} + \tilde{R} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho g w = q,$$

$$w|_{y=0} = w|_{y=L} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0, \quad w|_{t=0} = w_0.$$

Здесь  $w$  – прогиб пластины;  $\tilde{E}$  – цилиндрическая жёсткость;  $\tilde{R}$  – аналогичная характеристика, определяемая вязкой составляющей отклика, т.е.:

$$\tilde{E} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \tilde{R} = \frac{Rh^3}{12(1-\nu^2)},$$

где  $E$  – модуль Юнга льда;  $R$  – модуль, характеризующий вязкое деформирование льда (модуль вязкости);  $h$  – толщина пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона льда;  $P$  – погонная сила сжатия, приложенная к длинным сторонам пластины;  $\rho$  – плотность воды;  $g$  – ускорение свободного

падения;  $q$  – поперечная нагрузка;  $w_0$  – начальные отклонения от равновесного состояния.

Решение начально-краевой задачи предлагается отыскивать в виде суммы двух функций:  $w(y, t) = w_e(y) + w_v(y, t)$ . Первая функция  $w_e(y)$  зависит только от пространственной переменной и представляет собой постоянную во времени (или изменяемую по тому же закону, что и закон изменения поперечной нагрузки  $q$ ) составляющую изгиба. Вторая  $w_v(y, t)$  определяет эволюцию изгиба, обусловленную вязкими свойствами льда. Такое представление решения позволяет сформулировать две независимые краевые задачи относительно этих функций. Подобная декомпозиция даёт возможность выделить часть решения, которая соответствует длинноволновой составляющей прогибов, и часть, отвечающую коротковолновой составляющей.

Краевая задача относительно  $w_e$  имеет следующий вид:

$$\tilde{E} \frac{d^4 w_e}{dy^4} + P \frac{d^2 w_e}{dy^2} + \rho g w_e = q,$$

$$w_e|_{y=0} = w_e|_{y=L} = \frac{dw_e}{dy}|_{y=0} = \frac{dw_e}{dy}|_{y=L} = 0.$$

Начально-краевая задача относительно  $w_v$  записывается так:

$$\tilde{R} \frac{\partial^5 w_v}{\partial y^4 \partial t} + \tilde{E} \frac{\partial^4 w_v}{\partial y^4} + P \frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} + \rho g w_v = 0,$$

$$w_e|_{y=0} = w_e|_{y=L} = \frac{\partial w_e}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial w_e}{\partial y}|_{y=L} = 0, \quad w_v|_{t=0} = w_0.$$

Решения обеих задач представим в форме разложений по собственным функциям дифференциальных операторов, порождаемых каждой из них. При этом решение первой задачи будет таким:

$$w_e = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \frac{\alpha_n}{\lambda_n}, \quad \alpha_n = \int_0^L q W_n dy, \quad (6)$$

где  $W_n$  определяются из решений классической задачи Штурма–Лиувилля

$$\tilde{E} \frac{d^4 W_n}{dy^4} + P W_n'' + \rho g W_n = \lambda_n W_n, \quad \|W_n\| = 1,$$

$$W_n|_{y=0} = W_n|_{y=L} = W_n'|_{y=0} = W_n'|_{y=L} = 0.$$

Решение второй задачи может быть представлено в аналогичной форме:

$$w_v = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \beta_n e^{\xi_n t}, \quad \beta_n = \int_0^L w_0 \frac{d^4 V_n}{dy^4} dy. \quad (7)$$

Здесь  $V_n$  определяются из решений обобщенной задачи Штурма–Лиувилля

$$(\tilde{E} + \xi_n \tilde{R}) \frac{d^4 V_n}{dy^4} + P V_n'' + \rho g V_n = 0, \quad \|V_n\| = 1,$$

$$V_n|_{y=0} = V_n|_{y=L} = V_n'|_{y=0} = V_n'|_{y=L} = 0. \quad (8)$$

В обеих постановках задачи Штурма–Лиувилля допускают решения в элементарных функциях. Опуская очевидные детали их построения, приведём окончательный результат.

$$W_n = \frac{A}{\sqrt{N}} (\mu_1 \sin(\mu_2 y) - \mu_2 \sin(\mu_1 y)) + \frac{B}{\sqrt{N}} (\cos(\mu_2 y) - \cos(\mu_1 y)), \quad (9)$$

$$\mu_1 = \sqrt{\mathcal{P} + \sqrt{\lambda_n / \tilde{E} + \mathcal{P}^2 - r}},$$

$$\mu_2 = \sqrt{\mathcal{P} - \sqrt{\lambda_n / \tilde{E} + \mathcal{P}^2 - r}}$$

$$\mathcal{P} = P / (2\tilde{E}), \quad r = \rho g / \tilde{E}, \quad A = c_1 - c_2, \quad B = \mu_1 s_2 - \mu_2 s_1,$$

$$c_1 = \cos(L\mu_1), \quad c_2 = \cos(L\mu_2), \quad s_1 = \sin(L\mu_1), \quad s_2 = \sin(L\mu_2),$$

$$N = \frac{1}{2\mu_1 \mu_2 (\mu_1^2 - \mu_2^2)} \{ A^2 [\mu_2^5 (c_1 s_1 - \mu_1 L) - c_2 \mu_1^5 s_2 +$$

$$+ (4c_1 + c_2) \mu_2^2 \mu_1^3 s_2 - (c_1 + 4c_2) \mu_2^3 \mu_1^2 s_1 +$$

$$+ \mu_2 \mu_1^5 L] + 2AB (\mu_1^2 - \mu_2^2) (\mu_1 s_2 - \mu_2 s_1)^2 +$$

$$+ B^2 (\mu_2 \mu_1^2 (c_1 s_1 - 4c_2 s_1 + 2\mu_1 L) - \mu_2^3 (c_1 s_1 + 2\mu_1 L) +$$

$$+ c_2 \mu_1^3 s_2 + (4c_1 - c_2) \mu_2^2 \mu_1 s_2 \}.$$

Здесь  $\lambda_n$  находятся как корни трансцендентного уравнения

$$1 - c_1 c_2 - \mathcal{P} \frac{s_1 s_2}{\mu_1 \mu_2} = 0.$$

Решение  $V_n$  задачи (8) определяется теми же формулами, в которых вместо приведённых выше выражений для  $\mu_1, \mu_2$  следует использовать

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{P} + \sqrt{\mathcal{P}^2 - r(1 + \xi_n \tilde{R} / \tilde{E})}}{1 + \xi_n \tilde{R} / \tilde{E}}},$$

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{P} - \sqrt{\mathcal{P}^2 - r(1 + \xi_n \tilde{R} / \tilde{E})}}{1 + \xi_n \tilde{R} / \tilde{E}}},$$

а  $\xi_n$  удовлетворяют уравнению

$$1 - c_1 c_2 - \frac{\mathcal{P} s_1 s_2}{(1 + \xi_n \tilde{R} / \tilde{E}) \mu_1 \mu_2} = 0.$$

Отмечена особенность решения второй задачи. Пространственная периодичность этого решения определяется значениями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , которые будучи корнями одного и того же алгебраического уравнения, удовлетворяют соотношению (различия не делаются между  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и индексы отпускаются):

$$\xi_n = \frac{2\mathcal{P}\mu^2 - r - \mu^4}{\tilde{R} / \tilde{E}\mu^4}.$$

Эта зависимость имеет максимум при

$$\frac{d\xi_n}{d\mu} = \frac{4(r - \mathcal{P}\mu^2)}{\tilde{R} / \tilde{E}\mu^5} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mu = \sqrt{\frac{r}{\mathcal{P}}} = \sqrt{\frac{2\rho g}{P}}. \quad (10)$$

Учитывая форму решения (7), в котором каждое слагаемое умножается на  $e^{\xi_n t}$ , можно утверждать, что члены разложения с максимальными значениями  $\xi_n$  будут уменьшаться медленнее других и через некоторое время станут доминирующими. Именно этот эффект наблюдается в натуральных испытаниях, когда после замораживания тонкого ледяного слоя в бассейне в нём через некоторое время возникает коротковолновая периодичность свойств.

### Верификация модели

В расчётах по приведённым здесь формулам применялись следующие исходные данные: толщина пластины льда:  $h = 5 \times 10^{-2}$  м, модуль Юнга  $E = 35$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, модуль вязкости  $R = 3$  МПа·с.

Так как прямых измерений сил сжатия пластины не проводилось, их величина определялась косвенно. Поскольку объёмное расширение воды при замораживании велико (около 9%), напряжения, которые при этом могли бы возникнуть в пластине льда, существенно превышают предел текучести. В этой связи в качестве верхней оценки следует использовать значения сил, развиваемых в ледяной пластине в предельном состоянии. Полагая, что предел текучести льда

0,01 МПа, получим верхнюю оценку для погонного усилия сжатия  $P < 500$  Н/м. В действительности, из-за наличия пор и дефектов структуры льда эта сила меньше. Уточнение её значения может получено из условия наилучшей аппроксимации длинноволновой составляющей экспериментальных данных с помощью  $w_e$  (6) либо из условий наилучшей аппроксимации коротковолновой составляющей посредством  $w_v$  (7). Возможность построения двух оценок одной и той же величины позволяет показать их адекватность в случае, если найденные значения будут близки.

Построенные теоретические решения определяют изгиб пластины, который непосредственно не определялся в эксперименте. Последние дают распределение усилий сквозной пенетрации пластины льда, а чтобы связать эксперимент и теорию, требуются дополнительные следующие предположения: предполагается, что области, в которых развиваются максимальные напряжения, испытывают рекристаллизацию и уменьшение пористости, в результате в них возникает упрочнение и, как следствие, повышенное сопротивление пенетрации. Распределение максимальных интенсивностей напряжений, вызванных изгибом по форме (9), в рамках кинематических гипотез технической теории пластин может быть определено следующим образом:

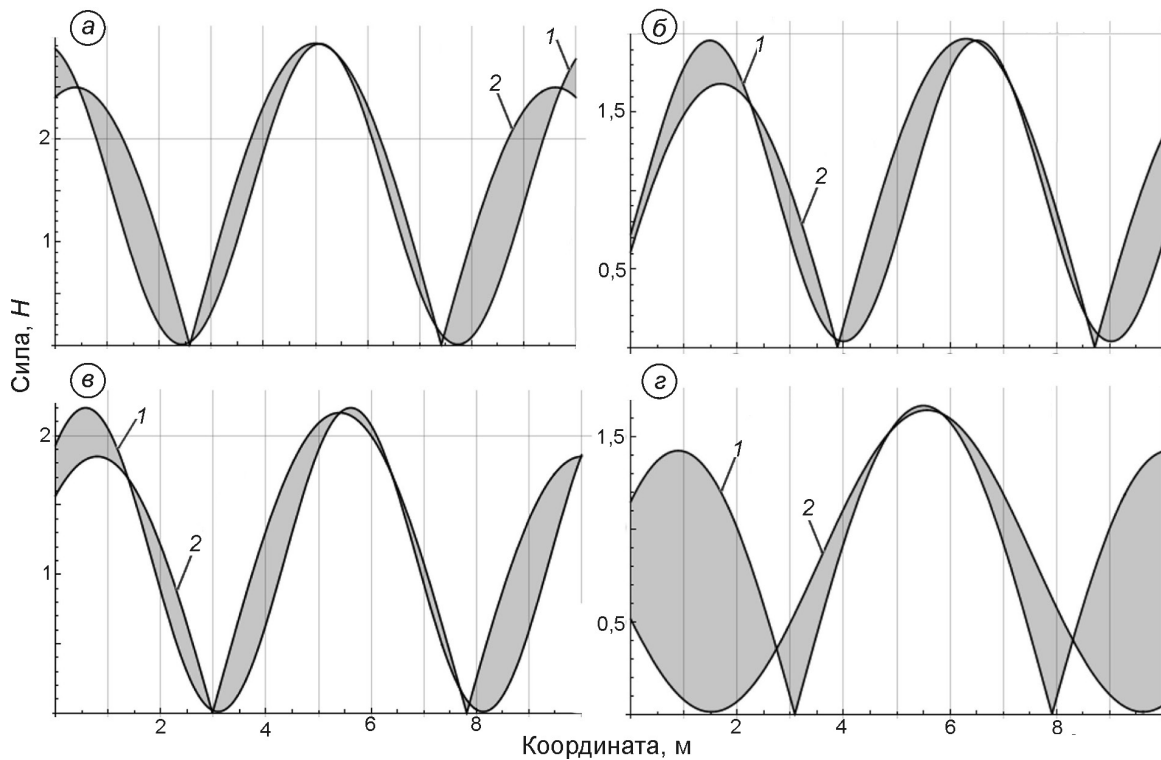
$$S \approx \alpha |\partial^2 w / \partial y^2|,$$

где  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от физико-геометрических параметров пластины.

При идентификации длинноволновой составляющей решения (6) варьировались параметры  $\alpha$  и  $\mathcal{P}$  при фиксированных значениях  $L = 10$  м,  $r = 24$ , причём  $r$  определяется по приведённым выше исходным данным. Находились величины  $\alpha$  и  $\mathcal{P}$ , отвечающие наименьшим квадратичным отклонениям теоретических значений от экспериментальных. В результате анализа четырёх сечений получены такие результаты:  $\mathcal{P} = 0,25$ ,  $\lambda_1 = 24,5$ , которым отвечает следующее выражение для фундаментальной моды

$$W_1 = 0,202 \cos(0,172y) - 0,202 \cos(0,685y) + 0,236 \sin(0,172y) - 0,059 \sin(0,685y).$$

Этим значениям соответствует усилие обжатия  $P = 200$  Н/м. Наложение теоретических распределений на длинноволновые представления экспериментальных данных приведе-



**Рис. 6.** Отличие распределений максимальных интенсивностей напряжений по балочному приближению (2) от длинноволновой (1) составляющей экспериментальных данных на усилиях пенетрации для поперечных сечений а–г бассейна

**Fig. 6.** The difference between the distributions of maximum stress intensities according to the beam approximation (2) from the long-wavelength (1) component of the experimental data on the penetration forces for the cross sections а–г of the basin

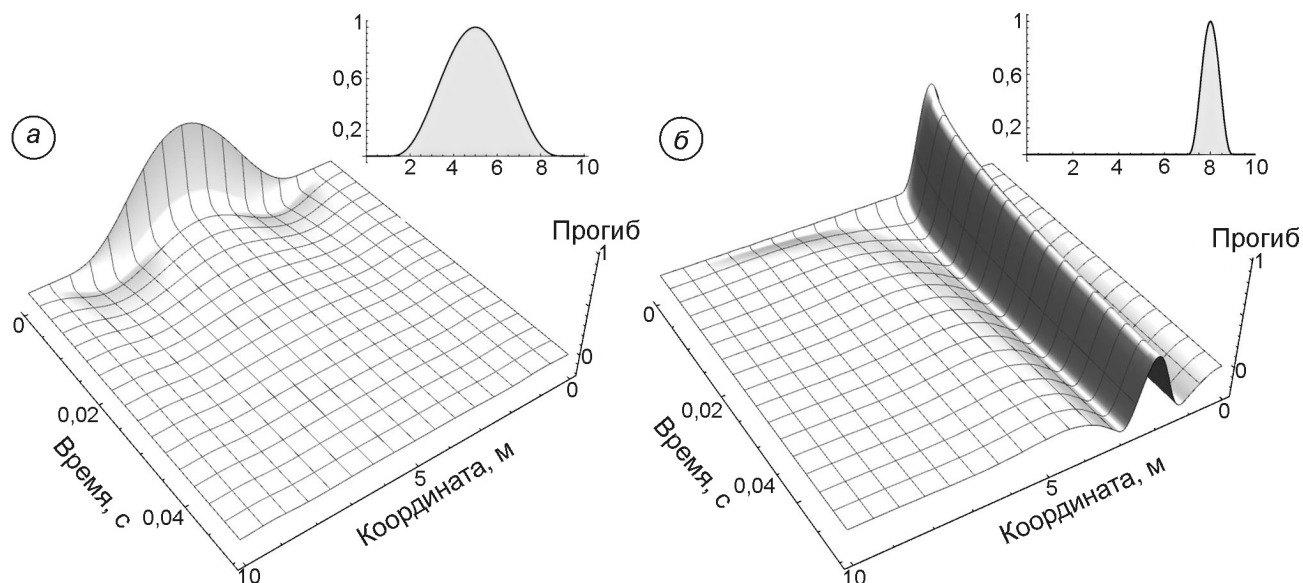
ны на рис. 6, на котором для различных сечений заливкой показаны отличия распределений интенсивностей напряжений (нормированных соразмерно экспериментальным данным) и длинноволновой составляющей экспериментальных данных о пенетрации. Видно хорошее совпадение на первом сечении. Совпадения для последующих сечений не столь явные, но наблюдаемый на них фазовый сдвиг легко объяснить грубым приближением модели цилиндрического изгиба, не учитывающим двумерное распределение интенсивности в пластине.

Идентификация усилия обжатия  $P$  по коротковолновой составляющей проводилась с помощью зависимости (10), из которой следует, что  $P$  можно определить по среднему значению  $\mu$ , т.е.:

$$P = 2\rho g/\mu^2.$$

Среднее значение коротковолнового параметра  $\mu$  по четырём сечениям составило  $\mu = 7,16$ . Соответственно  $P = 382,5$  Н/м. Поверхности,

иллюстрирующие эволюцию прогибов, найденных по (7), приведены на рис. 7. Начальные изгибы соответствуют двум различным пространственным масштабам. Левая поверхность (а) соответствует возмущению 70% ширины пластины, правая (б) – 10%. Видно, что изгибы, вызванные возмущением малой области, затухают во времени существенно медленнее изгибов, вызванных возмущением более широкой области. При этом протяжённость малой области близка к периоду коротковолновой составляющей экспериментальных данных. Образно говоря, второй начальный изгиб оказывается в «резонансе» с собственными характеристиками пластины и след этого возмущения длительное время сохраняется. Выделяя подобные следы из случайных возмущений, вязкоупругая система проявляет свойства фильтра, создавая со временем упорядоченную структуру, которая и наблюдается в форме коротковолновых составляющих экспериментальных данных.



**Рис. 7.** Эволюция прогибов при возмущениях на интервалах различной протяжённости: *a* – 70%; *b* – 10% ширины пластины

**Fig. 7.** Evolution of deflections under disturbances at intervals of different lengths: *a* – 70%; *b* – 10% of the plate width

Верификация модели осуществлена путём сопоставления значения сжимающей силы, найденной из анализа длинноволнового распределения, со значением, которое определено по коротковолновой части. Несмотря на то, что они различаются почти в два раза, их значения одного порядка. Отличия могут быть объяснены недостаточной точностью моделирования условий адгезионного контакта на бортах. Сила сжатия, найденная по коротковолновой составляющей, оказалась близкой к теоретическому пределу (которое было определено ранее по пределу текучести льда), что позволяет в большей степени доверять именно этому значению.

### Обсуждение экспериментальных данных

Методом пенетрации проведены исследования зависимости сопротивления пенетрации от поперечных координат в четырёх сечениях тонкого ледяного покрова прямоугольного бассейна с размерами  $100 \times 10$  м. По постановке выполненные исследования отличаются от традиционных своим подходом. Исследовались закономерности распределения локальной твёрдости в ледяном поле как результат воздействия периодических структур изгиба на прочностную

характеристику льда. Особенностью результатов измерений – периодичность свойства сопротивляемости пенетрации с двумя основными пространственными периодами, причём периодичность слабо проявляет себя сразу после замораживания ледяного покрова, однако уже через несколько часов её вклад в распределение свойств сопротивляемости многократно усиливается (Епифанов, Саонов, 2020).

Показано, что пространственные распределения периодичности с достаточной точностью могут быть представлены как наложение двух периодических функций с существенно разными периодами: длинноволновой и коротковолновой составляющими. На их основе выделены эти составляющие и предложена теоретическая модель, объясняющая физические причины возникновения двойной периодичности. Модель предполагает вязкоупругое квазистатическое деформирование ледяной пластины, вызванное малыми колебаниями уровня воды в бассейне и случайными возмущениями её поверхности.

В рамках модели предполагается квазистатический изгиб пластины, вызванный медленными малыми изменениями уровня воды в бассейне и случайными силовыми воздействиями на её внешнюю поверхность. Первая причина приводит к упругим изгибаниям ледяного по-

крова, форма которых, в основном, определяется его фундаментальной изгибной модой. Это подтверждается образованием напряжённых областей в окрестности бортов и в середине ледяного поля, где происходит упрочнение льда и, как следствие, возрастает сопротивление пенетрации. Вторая причина — случайные малые возмущения, носящие релаксационный характер, которые обусловлены произвольно распределёнными во времени и пространстве локальными поперечными нагружениями. Они вызывают изгиб, мгновенная форма которого также имеет случайный характер, но из-за вязкоупругих свойств льда последствие, связанное с релаксационными процессами, приобретает некоторую упорядоченность. В рамках модели показано, что эта упорядоченность связана с вполне определённым экстремальным значением показателя экспоненциальных координатных функций, которое зависит от локальных физико-геометрических свойств ледяной пластины и в некоторой степени — от условий её закрепления. В результате многократных случайных изгибаний и последующих релаксационных процессов выделяется преобладающая составляющая, что и объясняет появление локальных зон упрочнения, пространственное распределение которых подобно представлениям коротковолновой составляющей экспериментальных данных об осевой силе пенетрации.

Верификация модели осуществлена путём сопоставления значения сжимающего усилия, найденного из анализа длинноволнового распределения, со значением, которое определено по коротковолновой части. Несмотря на то, что они различаются почти в два раза, их значения можно признать согласованными, поскольку подбор фундаментальной моды при идентификации длинноволновой части позволяет весьма грубо оценить силу сжатия. Дело в том, что существенное различие в теоретических и экспериментальных данных наблюдается вблизи опорных точек и используемый алгоритм подбора параметров определил эти параметры из условия наименьших отклонений именно в этих областях. Вместе с тем условия примораживания к бортам характеризуются довольно сложными зависимостями и их представление как жёсткое закрепление — весьма приближённое. Поэтому сопоставлять значения сил следует

только в смысле их порядков, которые оказались одинаковыми.

Независимое количественное подтверждение достоверности протекания пластических процессов в ледяном поле следует из зависимости силы сопротивления от времени в эксперименте по прорезанию ледяного поля вертикальным индентором, а также подтверждается формой кристаллитов в шлифах льда и анализом сигналов акустической эмиссии (Епифанов, Глазовский, 2010). Комплексные измерения реологических и акустических характеристик льда позволяют установить закономерности деформационной перестройки структуры льда, а также определить характерные масштабы источников излучения. Полученное значение коэффициента неоднородности, которое определялось как отношение среднего значения к максимальному значению прочности в испытаниях на одноосное сжатие, например, в работе (Беккер, 2017) равно 0,75, совпадает с его оценками, полученными на речном и моделированном льде (Епифанов, Сазонов, 2020). Повидимому, обнаруженная локальная периодичность механических свойств льда может быть одной из причин вариаций значений прочности ледяного покрова, определяемых по месту его залегания.

## Заключение

Анализ экспериментальных данных и результаты теоретического моделирования изгиба вязкоупругой плавающей ледяной пластины, сформированной в условиях стесненного деформирования, позволяют сделать ряд выводов.

1. В ходе процесса замораживания и последующего неупругого деформирования в ледяной пластине образуется двойная периодичность физико-механических свойств.

2. Большой период соответствует фундаментальной упругой моде пластины и может быть теоретически прогнозирован из анализа чисто упругой моды потери устойчивости сжатой пластины.

3. Периодичность с коротким периодом проявляет реологический характер и может быть теоретически объяснена развитием вязкоупругих деформаций в пластине.

4. Математическое моделирование вязкоупругой плавающей пластины показывает, что из возмущений с различными пространственными периодами наибольшее влияние оказывают лишь те, период которых лежит в достаточно узком диапазоне, который зависит от реологических свойств льда и толщины пластины, но не зависит от условий её закрепления. Теоретически определённый диапазон соответствует экспериментально определённому коротковолновому периоду. Этот факт позволяет объяснить физические причины возникновения второй периодичности физико-механических свойств ледяной пластины, сформированной в условиях стеснённого деформирования.

Статистический анализ результатов показал хорошее согласование теоретических и экспериментальных данных. Оценка согласованности может быть количественно определена коэффициентами вариации, вычисленными по последовательностям измерений и теоретическим оценкам периодов. Для первой (длинноволновой) периодичности их значения составили 4%, а для второй (коротковолновой) – 15%. Таким образом, при замораживании тонкой пластины льда в условиях стеснённого деформирования причин возникновения периодической структуры, как минимум, две: общая потеря устойчивости как упругой конструкции и локальная потеря устойчивости по вязкоупругопластическому механизму. Первая причина порождает периодичность, которая зависит от геометрии пластины в целом и условий её закрепления; вторая причина вызывает периодичность, которая зависит только от толщины, усилия обжатия и свойств

льда. В связи с этим первую причину можно охарактеризовать как условно структурную, а вторую – как условно материальную (связанную с формированием вторичной текстуры).

Теоретически оценены напряжения на контактной поверхности стенок ледового бассейна, возникающие при формировании ледяного поля. Сила сжатия, найденная по коротковолновой составляющей, оказалась близкой к своему теоретическому пределу (определён по пределу текучести льда). Это позволяет в большей степени доверять именно этому значению. При дальнейших исследованиях периодичности, возникающей при формировании ледяного поля в условиях стеснения, следует учитывать двумерность ледяной пластины, моделирование слоя жидкости и исследование этих эффектов для льда большего масштаба. Полученные результаты могут быть использованы при разработке теории сжатия льдов, решении задач, связанных с формированием льда в ограниченных водных пространствах полярных морей, а также при оценке причин вариации локальной прочности ледяных полей и возможностей их искусственного разрушения.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 20–01–00649 «Численно-экспериментальное исследование нелинейных волновых явлений при контактном разрушении льда».

**Acknowledgments.** This work was supported by RFBR grant № 20–01–00649 «Numerical and experimental study of nonlinear wave phenomena in contact ice destruction».

## Литература

- Беккер Ф.Е., Фарафанов А.Э., Помников Е.Е. Неоднородность ледяных полей // Вестн. Инженерной Школы ДВФУ. 2017. Т. 33. № 32. С. 64–71.
- Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Госизд-во физ.-мат. литературы, 1963. 879 с.
- Епифанов В.П., Глазовский А.Ф. Акустические характеристики как индикатор особенностей движения льда в ледниках // Криосфера Земли. 2010. Т. XIV. № 4. С. 42–55.
- Епифанов В.П., Лычев С.А. Периодичность механических свойств льда, возникающая при формировании ледяного поля в условиях стеснения // ДАН. Физика. Технические науки. 2022. Т. 502. С. 24–30. doi: 10.31857/S2686740021060092.

## References

- Bekker F.E., Farafonov A.E., Pomnikov E.E. Heterogeneity of ice fields. *Vestnik Inzhenernoy Shkoly DVFU*. Bulletin of the School of Engineering. 2017, 3 (32): 64–71. [In Russian].
- Volmir A.S. *Ustoychivost' uprugikh sistem*. Stability of elastic systems. M.: Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1963: 879 p. [In Russian].
- Epifanov V.P., Glazovsky A.F. Acoustic characteristics as an indicator of the features of ice movement in glaciers. *Kriosfera Zemli*. Cryosphere of the Earth. 2010, XIV (4): 42–55.
- Epifanov V.P., Lychev S.A. Periodicity of the Mechanical Properties of Ice Resulting from the Formation of an Ice Field under Compression. *Doklady Rossiiskoi Aka-*

- Епифанов В.П., Сазонов К.Е.* Волновые структуры в ледяном поле и их влияние на прочность солёного льда // *Лёд и Снег*. 2020. Т. 60. № 4. С. 623–636. doi: 10.31857/S2076673420040066.
- Постникова Т.Н., Рыбак О.О.* Глобальные гляциологические модели: новый этап в развитии методов прогнозирования эволюции ледников. Часть 1. Общий подход и архитектура моделей // *Лёд и Снег*. 2021. Т. 61. № 4. С. 620–636. doi: 10.31857/S2076673421040111.
- Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
- Box F., Vella D., Style RW., Neufeld J.A.* Indentation of a floating elastic sheet: geometry versus applied tension // *Proceedings of the Royal Society*. 2017. V. 473. P. 1–22. doi: 10.1098/rspa.2017.0335.
- Ciarlet P.G.* *Mathematical Elasticity. V. II: Theory of Plates*. North-Holland, 1988. 262 p.
- Epifanov V.P., Sazonov K.E.* Wave metamorphism of ice // *Journ. of Physics: Conf. Series* 2021. V. 1959 № 012019. P. 1–7. doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012019.
- Fox C., Squire V.A.* On the Oblique Reflexion and Transmission of Ocean Waves at Shore Fast Sea Ice // *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*. 1994. V. 347. № 1682. P. 185–218. <http://www.jstor.org/stable/54236>.
- Meylan M.H.* Time-Dependent Motion of a Floating Circular Elastic Plate // *Journ. of Fluids*. 2021. V. 6. № 1. 29 p. doi: 10.3390/fluids6010029.
- Staroszczyk R.* *Ice Mechanics for Geophysical and Civil Engineering Applications*. GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences. Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p. doi: 10.1007/978-3-030-03038-4\_1.
- Staroszczyk R., Hedzielski B.* Creep Buckling of a Wedge-Shaped Floating Ice Plate // *Engineering Transactions*. 2004. V. 52. № 1–2. P. 111–130. doi: 10.24423/engtrans.472.2004.
- Stig-Göran Sjölin.* Visco-elastic buckling analysis of floating ice sheets // *Cold Regions Science and Technology*. 1985. V. II. № 3. P. 241–246. doi: 10.1016/0165-232X(85)90048-5.
- Von Bock, Polach R.U.F., Franz R.U., Ettemab R., Gralhera S., Kellner L., Stendera M.* The nonlinear behavior of aqueous model ice in downward flexure // *Cold Regions Science and Technology*. 2019. V. 36. № 1–3. P. 47–70. doi: 10.1016/j.coldregions
- demii Nauk. Fizika. Tekhnicheskie Nauki*. 2022, 67 (1): 5–10. doi: 10.1134/S1028335821120041. [In Russian].
- Epifanov V.P., Sazonov K.E.* Wave structures in the ice field and their influence on the strength of salt ice. *Led i Sneg*. Ice and Snow. 2020, 60 (4): 623–636. doi: 10.31857/S2076673420040066. [In Russian].
- Postnikova T.N., Rybak O.O.* Global glaciological models: a new stage in the development of methods for predicting the evolution of glaciers. Part 1. General approach and architecture of models. *Led i Sneg*. Ice and Snow. 2021, 61 (4): 620–636. doi: 10.31857/S2076673421040111. [In Russian].
- Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S.* *Plastinki i obolochki*. Plates and shells. M.: Nauka, 1965: 636 p. [In Russian].
- Box F., Vella D., Style RW., Neufeld J.A.* Indentation of a floating elastic sheet: geometry versus applied tension. *Proceedings of the Royal Society*. 2017, 473: 1–22. doi: 10.1098/rspa.2017.0335.
- Ciarlet P.G.* *Mathematical Elasticity. V. II: Theory of Plates*. North-Holland, 1988: 262 p.
- Epifanov V. P., Sazonov K. E.* Wave metamorphism of ice. *Journ. of Physics: Conf. Series*. 2021, 1959 (012019): 1–7. doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012019.
- Fox C., Squire V.A.* On the Oblique Reflexion and Transmission of Ocean Waves at Shore Fast Sea Ice. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*. 1994, 347 (1682): 185–218. <http://www.jstor.org/stable/54236>.
- Meylan M.H.* Time-Dependent Motion of a Floating Circular Elastic Plate. *Journ. of Fluids*. 2021, 6 (1): 29. doi: 10.3390/fluids6010029.
- Staroszczyk R.* *Ice Mechanics for Geophysical and Civil Engineering Applications*. GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences. Springer Nature Switzerland AG. 2019: 344 p. doi: 10.1007/978-3-030-03038-4\_1.
- Staroszczyk, R., Hedzielski, B.* Creep Buckling of a Wedge-Shaped Floating Ice Plate. *Engineering Transactions*. 2004, 52 (1–2): 111–130. doi: 10.24423/engtrans.472.2004.
- Stig-Göran Sjölin.* Visco-elastic buckling analysis of floating ice sheets. *Cold Regions Science and Technology*. 1985, II (3): 241–246. doi: 10.1016/0165-232X(85)90048-5.
- Von Bock, Polach R.U.F., Franz R.U., Ettemab R., Gralhera S., Kellner L., Stendera M.* The nonlinear behavior of aqueous model ice in downward flexure. *Cold Regions Science and Technology*. 2019, 36 (1–3): 47–70. doi: 10.1016/j.coldregions