ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.968.7
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

Поступила в редакцию 27.05.2022
Received 27.05.2022

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Аннотация. Исследовано новое линейное интегро-дифференциальное уравнение произвольного порядка, которое задано на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения являются переменными и имеют специальный вид. Характерной особенностью выступает наличие линейных функций в коэффициентах. Уравнение сведено к последовательному решению краевой задачи Римана на исходной кривой и двух линейных дифференциальных уравнений. Возникшая краевая задача Римана относится к случаю хорошо изученных задач. Дифференциальные уравнения решаются для аналитических функций в областях, на которые исходная кривая делит комплексную плоскость. Найдены соответствующие фундаментальные системы решений, после чего применяется метод вариации произвольных постоянных. На полученные решения накладываются ограничения, чтобы добиться их аналитичности. Все возникающие условия разрешимости исходного уравнения записаны явно, а при их выполнении в явном виде записывается само решение. Приведен пример, показывающий наличие случаев, когда выполняются все условия разрешимости.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, краевая задача Римана, линейное дифференциальное уравнение, определитель

Для цитирования. Шилин, А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 358–369. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

Andrey P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

A HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH LINEAR FUNCTIONS IN COEFFICIENTS

Abstract. In this paper, we investigated a new linear integro-differential equation of arbitrary order given on the closed curve located on a complex plane. The coefficients of the equation are variables and have a special form. The characteristic feature is the presence of linear functions in the coefficients. The equation is reduced to the consecutive solution of a Riemann boundary value problem on an initial curve and two linear differential equations. Differential equations are solved for analytic functions in areas into which the initial curve separates a complex plane. The corresponding fundamental systems of solutions are found, after that the arbitrary-constant variation method is applied. To achieve the analyticity of the obtained solutions the restrictions are imposed. All the arising conditions of resolvability of the input equation are written down explicitly, and if they are carried out then the solution is written in an explicit form. We represent the example demonstrating the existence of the cases when all conditions of resolvability are satisfied.

Keywords: integro-differential equation, hypersingular integral, Riemann boundary problem, linear differential equation, determinant

For citation. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation with linear functions in coefficients. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 358–369 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

Введение. Гиперсингулярные интегралы в настоящей работе понимаются в смысле конечной части по Адамару [1]. Они нашли применение в задачах аэро- и гидродинамики, квантовой физики, трещиноустойчивости. Обзор важнейших результатов по решению уравнений с гиперсингулярными интегралами содержится в [2]. Решение осуществляется преимущественно численными методами, актуальной является разработка аналитических методов.

Обобщенные формулы Сохоцкого, полученные Э. И. Зверовичем [3] и содержащие гиперсингулярные интегралы, позволили дать точное аналитическое решение линейного гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на кривой, расположенной в комплексной плоскости [4]. В дальнейших разработках ([5–8] и др.) удалось указать случаи переменных коэффициентов в подобных уравнениях, сохраняющие возможность точного аналитического решения. В настоящей работе дано решение уравнения для нового случая переменных коэффициентов.

Постановка задачи и общая схема решения. Пусть L – простая замкнутая гладкая кривая на расширенной комплексной плоскости, D_+ и D_- – области расширенной комплексной плоскости с границей L, $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Зададим H-непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $f(t)$, $t \in L$. Зададим также комплексные числа α, β, A_k, B_k, $k = \overline{0, n+1}$, причем $A_0 = B_0 = A_{n+1} = B_{n+1} = 0$, $A_n = B_n = 1$, $n \geq 2$. На кривой L требуется найти n раз H-непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{k=0}^{n}\Bigg[\Big(a(t)\big((A_k - \alpha A_{k+1})t - A_{k+1}\big) + b(t)\big((B_k - \beta B_{k+1})t - B_{k+1}\big)\Big)\varphi^{(k)}(t) + \\ + \frac{\Big(a(t)\big((A_k - \alpha A_{k+1})t - A_{k+1}\big) - b(t)\big((B_k - \beta B_{k+1})t - B_{k+1}\big)\Big)k!}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}\Bigg] = f(t), \quad t \in L, \tag{1}$$

с интегралами в смысле конечной части по Адамару.

Обозначим $g(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1}\lambda^k$, $h(\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k+1}\mu^k$. Будем предполагать, что корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ уравнения $g(\lambda) = 0$ и корни $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{n-1}$ уравнения $h(\mu) = 0$ являются однократными, причем $g(\alpha) \neq 0$, $h(\beta) \neq 0$. Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_\pm,$$

и применим к уравнению (1) схему решения, указанную в [8]. Согласно этой схеме, следует вначале решить краевую задачу Римана

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)}F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)}, \quad t \in L, \tag{2}$$

для аналитических функций

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^{n}\big((A_k - \alpha A_{k+1})z - A_{k+1}\big)\Phi_+^{(k)}(z), \quad z \in D_+, \tag{3}$$

$$F_-(z) = \sum_{k=0}^{n}\big((B_k - \beta B_{k+1})z - B_{k+1}\big)\Phi_-^{(k)}(z), \quad z \in D_-, \tag{4}$$

с H-непрерывными предельными значениями $F_\pm(t)$, $t \in L$. Если задача Римана (2) не имеет решений, то не имеет решений и уравнение (1). Если задача Римана окажется разрешимой, а ее решение будет найдено, то соотношения (3), (4) следует расценивать затем как линейные дифференциальные уравнения для нахождения аналитических функций $\Phi_\pm(z)$, $\Phi_-(\infty) = 0$. Если и функции $\Phi_\pm(z)$ будут найдены, то решение исходного уравнения (1) записывается по формуле Сохоцкого

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t), \quad t \in L. \tag{5}$$

Поскольку интеграл типа Коши имеет на бесконечности нуль (вообще говоря, 1-го порядка), то из (4) легко усмотреть, что функцию $F_-(z)$ следует искать ограниченной на бесконечности. Решение задачи Римана в классе ограниченных на бесконечности функций хорошо известно [9]:

$$F_{\pm}(z)=X_{\pm}(z)\big(\Psi_{\pm}(z)+P(z)\big),\qquad z\in D_{\pm},\tag{6}$$

где $X_{\pm}(z)$ – канонические функции задачи (их явный вид здесь не приводим), $\Psi_{\pm}(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L\frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_{+}(\tau)(\tau-z)}$, $P(z)=\sum\limits_{k=0}^{\gamma}d_k z^k$ – многочлен степени γ с произвольными комплексными коэффициентами d_k при $\gamma\geq 0$, $P(z)\equiv 0$ при $\gamma<0$, $\gamma=\operatorname{Ind}_L\frac{b(t)}{a(t)}$. При $\gamma\geq -1$ задача (6) разрешима безусловно, а при $\gamma<-1$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int\limits_L\frac{f(\tau)\tau^k d\tau}{a(\tau)X_{+}(\tau)}=0,\qquad k=\overline{0,-\gamma-2}.\tag{7}$$

Предположим, что задача (2) разрешима. Приступим к решению дифференциальных уравнений (3), (4).

Решение дифференциального уравнения (3). Фундаментальную систему решений однородного ($F_{+}(z)\equiv 0$) уравнения (3) образуют функции [10, с. 529, пример 17]

$$e^{\lambda_1 z},e^{\lambda_2 z},\ldots,e^{\lambda_{n-1}z},e^{\alpha z}\left(z-\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right).\tag{8}$$

(Этот же факт без должной математической точности указан в [11, с. 483, пример 5.8].) В дальнейшем понадобится вронскиан $W(z)$ функций (8), которому вначале несложно придать вид

$$W(z)=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}+\alpha)z}\left(\left(z-\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right)V+V'_{\alpha}\right),$$

где V – определитель Вандермонда чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1},\alpha$, а

$$V'_{\alpha}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n-1} & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_{n-1}^2 & 2\alpha\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_{n-1}^{n-1} & (n-1)\alpha^{n-2}\end{vmatrix}.$$

Справедливо равенство

$$-\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}V+V'_{\alpha}=0,\tag{9}$$

поскольку

$$\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}-\frac{V'_{\alpha}}{V}=\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)\right)'_{\alpha}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)}-\frac{\left(\prod\limits_{1\leq k<m\leq n-1}(\lambda_m-\lambda_k)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)\right)'_{\alpha}}{\prod\limits_{1\leq k<m\leq n-1}(\lambda_m-\lambda_k)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)}=0$$

(при $n=2$ произведение $\prod\limits_{1\leq k<m\leq n-1}(\lambda_m-\lambda_k)$ заменяем на 1). В результате получим

$$W(z)=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}+\alpha)z}Vz.$$

Вычислим также вронскианы функций $e^{\lambda_1 z},...,e^{\lambda_{j-1}z},e^{\lambda_{j+1}z},...,e^{\lambda_{n-1}z},e^{\alpha z}\left(z-\dfrac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right)$:

$$W_j(z)=e^{(\lambda_1+...+\lambda_{j-1}+\lambda_{j+1}+...+\lambda_{n-1}+\alpha)z}\left(\left(z-\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right)V_j+(V_j)'_\alpha\right),$$

где V_j – определители Вандермонда чисел $\lambda_1,...,\lambda_{j-1},\ \lambda_{j+1},...,\lambda_{n-1},\alpha,\ j=\overline{1,n-1}$. Эти вронскианы равны нулю в точках

$$z=\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}-\frac{(V_j)'_\alpha}{V_j}=\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)\right)'_\alpha}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)}-$$

$$-\frac{\left(\prod\limits_{\substack{1\le k<m\le n-1\\ m,k\ne j}}(\lambda_m-\lambda_k)\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)\right)'_\alpha}{\prod\limits_{\substack{1\le k<m\le n-1\\ m,k\ne j}}(\lambda_m-\lambda_k)\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)+(\alpha-\lambda_j)\left(\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)\right)'_\alpha}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)}-\frac{\left(\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)\right)'_\alpha}{\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)}=\frac{1}{\alpha-\lambda_j}$$

(при $n=2$ полагаем $\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)=\prod\limits_{\substack{1\le k<m\le n-1\\ m,k\ne j}}(\lambda_m-\lambda_k)=1$). Следовательно,

$$W_j(z)=e^{(\lambda_1+...+\lambda_{j-1}+\lambda_{j+1}+...+\lambda_{n-1}+\alpha)z}V_j\left(z-\frac{1}{\alpha-\lambda_j}\right),\quad j=\overline{1,n-1}.$$

Обозначим $W_n(z)=e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_{n-1})z}V_n$ вронскиан функций $e^{\lambda_1 z},e^{\lambda_2 z},...,e^{\lambda_{n-1}z}$, V_n – определитель Вандермонда чисел $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n-1}$.

Согласно методу вариации произвольных постоянных (напр., [11, с. 94]), решение уравнения (3) записывается по формуле

$$\Phi_+(z)=\sum_{j=1}^{n-1}e^{\lambda_j z}\left(C_j^+ +(-1)^{n+j}\int\limits_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)W_j(\zeta)d\zeta}{\big((A_n-\alpha A_{n+1})\zeta-A_{n+1}\big)W(\zeta)}\right)+$$

$$+e^{\alpha z}\left(z-\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right)\left(C_n^+ +\int\limits_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)W_n(\zeta)d\zeta}{\big((A_n-\alpha A_{n+1})\zeta-A_{n+1}\big)W(\zeta)}\right),$$

где C_j^+ – произвольные комплексные постоянные, $j=\overline{1,n}$, $z_0^+\in D_+$, $z_0^+\ne 0$, а интегрирование проводится по любой кривой в D_+, не проходящей через точку $z=0$. С учетом выражений для $W_j(z)$, $W(z)$, A_n, A_{n+1} получим

$$\Phi_+(z)=\sum_{j=1}^{n-1}e^{\lambda_j z}\left(C_j^+ + \frac{(-1)^{n-1}}{(\alpha-\lambda_j)\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_j)}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)\left(\zeta-\dfrac{1}{\alpha-\lambda_j}\right)e^{-\lambda_j\zeta}d\zeta}{\zeta^2}\right)+$$

$$+e^{\alpha z}\left(z-\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right)\left(C_n^+ + \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)e^{-\alpha\zeta}d\zeta}{\zeta^2}\right). \tag{10}$$

Однако формула (10) не даст, вообще говоря, однозначную функцию. Для однозначности функции $\Phi_+(z)$ необходима и достаточна справедливость условий

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{F_+(z)\left(z-\dfrac{1}{\alpha-\lambda_j}\right)e^{-\lambda_j z}}{z^2}=0,\qquad j=\overline{1,n-1}, \tag{11}$$

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{F_+(z)e^{-\alpha z}}{z^2}=0, \tag{12}$$

которые в дальнейшем считаем выполненными.

Каждый из интегралов в формуле (10) может дать в точке $z = 0$ полюс 1-го порядка. Покажем, что при суммировании в этой формуле произойдет взаимное «погашение» этих полюсов, так что в результате получится аналитическая в D_+ функция. Пусть $c_0+c_1z+\ldots$ – ряд Маклорена функции $F_+(z)$. Тогда при $z\to 0$

$$e^{\lambda_j z}\left(C_j^+ +(-1)^{n+j}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)W_j(\zeta)d\zeta}{\big((A_n-\alpha A_{n+1})\zeta-A_{n+1}\big)W(\zeta)}\right)\sim\frac{(-1)^{n+j}V_jc_0}{V(\alpha-\lambda_j)z},\qquad j=\overline{1,n-1},$$

$$e^{\alpha z}\left(z-\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right)\left(C_n^+ +\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)W_n(\zeta)d\zeta}{\big((A_n-\alpha A_{n+1})\zeta-A_{n+1}\big)W(\zeta)}\right)\sim\frac{g'(\alpha)V_nc_0}{g(\alpha)Vz},$$

поэтому главная часть разложения функции $\Phi_+(z)$ в ряд Лорана в точке $z = 0$ будет равна

$$\frac{c_0}{V}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n+j}\frac{V_j}{\alpha-\lambda_j}+\frac{g'(\alpha)V_n}{g(\alpha)}\right)\cdot\frac{1}{z}.$$

Далее вычислим

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n+j}\frac{V_j}{\alpha-\lambda_j}+\frac{g'(\alpha)V_n}{g(\alpha)}=\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\ldots&\lambda_{n-1}&\alpha\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \lambda_1^{n-2}&\lambda_2^{n-2}&\ldots&\lambda_{n-1}^{n-2}&\alpha^{n-2}\\ \dfrac{1}{\alpha-\lambda_1}&\dfrac{1}{\alpha-\lambda_2}&\ldots&\dfrac{1}{\alpha-\lambda_{n-1}}&\dfrac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \alpha^{n-2} \\ \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}-\frac{(V_1)'_\alpha}{V_1} & \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}-\frac{(V_2)'_\alpha}{V_2} & \dots & \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}-\frac{(V_{n-1})'_\alpha}{V_{n-1}} & \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \alpha^{n-2} \\ \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} & \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} & \dots & \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} & \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \alpha^{n-2} \\ \frac{(V_1)'_\alpha}{V_1} & \frac{(V_2)'_\alpha}{V_2} & \dots & \frac{(V_{n-1})'_\alpha}{V_{n-1}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Первый из полученных определителей равен нулю, поскольку у него первая и последняя строки пропорциональны. Второй определитель раскроем по элементам последней строки:

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n+j}\frac{(V_j)'_\alpha}{V_j}\cdot V_j+0\cdot V_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}(V_j)'_\alpha=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \alpha^{n-2} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)'_\alpha=0.$$

Итак, при выполнении условий (11), (12) формула (10) даст аналитическое решение уравнения (3).

Решение дифференциального уравнения (4). Формула решения уравнения (4), к которой приводит метод вариации произвольных постоянных, аналогична формуле (10) и имеет вид

$$\Phi_-(z)=\sum_{j=1}^{n-1}e^{\mu_j z}\left(C_j^-+\frac{(-1)^{n-1}}{(\beta-\mu_j)\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}(\mu_k-\mu_j)}\int_{z_0^-}^{z}\frac{F_-(\zeta)\left(\zeta-\frac{1}{\beta-\mu_j}\right)e^{-\mu_j\zeta}d\zeta}{\zeta^2}\right)+$$

$$+e^{\beta z}\left(z-\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\right)\left(C_n^-+\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\beta-\mu_k)}\int_{z_0^-}^{z}\frac{F_-(\zeta)e^{-\beta\zeta}d\zeta}{\zeta^2}\right), \qquad (13)$$

где C_j^- – произвольные комплексные постоянные, $j=\overline{1,n}$, $z_0^-\in D_-$, $z_0^-\neq\infty$, а интегрирование проводится по любой кривой в D_-, не проходящей через точку $z=\infty$. Для однозначности функции $\Phi_-(z)$ необходимы и достаточны условия

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{F_-(z)\left(z-\frac{1}{\beta-\mu_j}\right)e^{-\mu_j z}}{z^2}=0, \quad j=\overline{1,n-1}, \qquad (14)$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{F_-(z)e^{-\beta z}}{z^2} = 0, \tag{15}$$

которые в дальнейшем считаем выполненными. И тогда лишь возможная существенно особая точка на бесконечности у функции $\Phi_-(z)$ может не дать искомого решения уравнения (4). Добиваясь устранения этой существенно особой точки, заметим, прежде всего, что постоянные C_j^- в формуле (13) не могут оставаться произвольными, поскольку в противном случае общее решение однородного уравнения (4)

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{\mu_j z} C_j^- + e^{\beta z}\left(z - \frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\right) C_n^-$$

будет иметь существенно особую точку на бесконечности из-за линейной независимости функций $e^{\mu_j z}, e^{\beta z}\left(z - \frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\right)$. Будем считать теперь постоянные C_j^- конкретными, подлежащими нахождению (тогда формула (13) даст частное решение уравнения (4)). Для их нахождения запишем лорановское разложение функции $\Phi_-(z)$ в окрестности бесконечности и приравняем к нулю коэффициенты при неотрицательных степенях z. В результате придем к следующей бесконечной линейной алгебраической системе для нахождения постоянных C_j^- :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j^m C_j^- + \left(-\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^m + m\beta^{m-1}\right) C_n^- = \nu_m, \ \ m = 0,1,2,\ldots , \tag{16}$$

где

$$\nu_m = -\frac{m!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dt}{t^{m+1}} \times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1} e^{\mu_j t}}{(\beta-\mu_j)\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}(\mu_k-\mu_j)} \int_{z_0}^{t} \frac{F_-(\zeta)\left(\zeta - \frac{1}{\beta-\mu_j}\right)e^{-\mu_j\zeta}d\zeta}{\zeta^2} + \frac{e^{\beta t}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\beta-\mu_k)} \int_{z_0}^{t} \frac{F_-(\zeta)e^{-\beta\zeta}d\zeta}{\zeta^2}\right),$$

Γ – окружность с центром в нуле достаточно большого радиуса.

Матрица системы (16) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{n-1} & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta + 1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_{n-1}^2 & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^2 + 2\beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^m & \mu_2^m & \ldots & \mu_{n-1}^m & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^m + m\beta^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Обоснуем, что ранг этой матрицы равен n. Обозначим U определитель Вандермонда чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \beta$. Минор, образованный первыми n строками матрицы (17) и имеющий наиболее простую структуру, оказывается равным нулю. Вычислим минор M, образованный строками матрицы со 2-й по $(n + 1)$-ю, предполагая вначале, что среди чисел $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{n-1}$ нет равного нулю:

$$M = \begin{vmatrix} \mu_1 & ... & \mu_{n-1} & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta + 1 \\ \mu_1^2 & ... & \mu_{n-1}^2 & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^2 + 2\beta \\ ... & ... & ... & ... \\ \mu_1^n & ... & \mu_{n-1}^n & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^n + n\beta^{n-1} \end{vmatrix} = -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} \begin{vmatrix} \mu_1 & ... & \mu_{n-1} & \beta \\ \mu_1^2 & ... & \mu_{n-1}^2 & \beta^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \mu_1^n & ... & \mu_{n-1}^n & \beta^n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \mu_1 & ... & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1^2 & ... & \mu_{n-1}^2 & 2\beta \\ ... & ... & ... & ... \\ \mu_1^n & ... & \mu_{n-1}^n & n\beta^{n-1} \end{vmatrix} = -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} \mu_1 \cdot ... \cdot \mu_{n-1}\beta \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & 1 \\ \mu_1 & ... & \mu_{n-1} & \beta \\ ... & ... & ... & ... \\ \mu_1^{n-1} & ... & \mu_{n-1}^{n-1} & \beta^{n-1} \end{vmatrix} +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} \mu_1 & ... & \mu_{n-1} & \beta \\ \mu_1^2 & ... & \mu_{n-1}^2 & \beta^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \mu_1^n & ... & \mu_{n-1}^n & \beta^n \end{vmatrix} \right)'_\beta = -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} \mu_1 \cdot ... \cdot \mu_{n-1}\beta U + (\mu_1 \cdot ... \cdot \mu_{n-1}\beta U)'_\beta =$$

$$= -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} \mu_1 \cdot ... \cdot \mu_{n-1}\beta U + \mu_1 \cdot ... \cdot \mu_{n-1}(\beta U'_\beta + U) =$$

$$= \mu_1 \cdot ... \cdot \mu_{n-1} \left(U + \beta \left(-\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} U + U'_\beta \right) \right) = \mu_1 \cdot ... \cdot \mu_{n-1} U \neq 0.$$

При этом использовалось равенство $-\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} U + U'_\beta = 0$, вполне аналогичное равенству (9). Пусть теперь равно нулю одно из чисел μ_j, для определенности $\mu_1 = 0$. Тогда $h(\mu) = \mu h_1(\mu)$, где $h_1(\mu)$ – многочлен с корнями $\mu_2, ..., \mu_{n-1}$. Далее получим

$$\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} = \frac{h_1'(\beta)}{h_1(\beta)} + \frac{1}{\beta}, \qquad -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^m + m\beta^{m-1} = -\frac{h_1'(\beta)}{h_1(\beta)}\beta^m + (m-1)\beta^{m-1}.$$

Возьмем минор матрицы (17)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)} \\ 0 & \mu_2^2 & ... & \mu_{n-1}^2 & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^2 + 2\beta \\ 0 & \mu_2^3 & ... & \mu_{n-1}^3 & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^3 + 3\beta^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & \mu_2^n & ... & \mu_{n-1}^n & -\frac{h'(\beta)}{h(\beta)}\beta^n + n\beta^{n-1} \end{vmatrix} = \mu_2 \cdot ... \cdot \mu_{n-1}\beta \begin{vmatrix} \mu_2 & ... & \mu_{n-1} & -\frac{h_1'(\beta)}{h_1(\beta)}\beta + 1 \\ \mu_2^2 & ... & \mu_{n-1}^2 & -\frac{h_1'(\beta)}{h_1(\beta)}\beta^2 + 2\beta \\ ... & ... & ... & ... \\ \mu_2^{n-1} & ... & \mu_{n-1}^{n-1} & -\frac{h_1'(\beta)}{h_1(\beta)}\beta^{n-1} + (n-1)\beta^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель имеет такую же структуру, как и минор M в уже рассмотренном случае, поэтому он отличен от нуля. Итак, ранг матрицы (17) равен n, поэтому система (16) имеет разве что единственное решение.

Основной результат. Пример. Из формул, на которых основано доказательство метода вариации произвольных постоянных, получим выражения для производных решения уравнения (3)

$$\Phi_+^{(k)}(z)=\sum_{j=1}^{n-1}(e^{\lambda_j z})^{(k)}\left(C_j^+ + \frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_j)}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)\left(\zeta-\frac{1}{\alpha-\lambda_j}\right)e^{-\lambda_j\zeta}d\zeta}{\zeta^2}\right)+$$

$$+\left(e^{\alpha z}\left(z-\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right)\right)^{(k)}\left(C_n^+ + \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_k)}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)e^{-\alpha\zeta}d\zeta}{\zeta^2}\right)+G_k(z),\quad z\in D_+,$$

где $G_k(z)\equiv 0$ для $k=\overline{0,n-1}$, $G_k(z)=\dfrac{F_+(z)}{z}$ для $k=n$. Поскольку $F_+(z)$ имеет H-непрерывные предельные значения на L, то из этих формул понятно, что и производные $\Phi_+^{(k)}(z)$ будут иметь H-непрерывные предельные значения на L. Аналогично проверяется наличие n раз H-непрерывной дифференцируемости у функции $\Phi_-(t)$, $t\in L$, а тогда и у найденной по формуле (5) искомой функции $\varphi(t)$.

Сформулируем результат исследования.

Т е о р е м а. *Пусть функции* $a(t)\neq 0$, $b(t)\neq 0$, $f(t)$ *удовлетворяют условию Гельдера на кривой* L. *Если выполняются условия* (7) (*при* $\gamma<-1$), (11), (12), (14), (15) *и система* (16) *совместна, то решение уравнения* (1) *находится по формуле* (5), *в которой* $\Phi_+(t)$ *и* $\Phi_-(t)$ *берутся из формул* (10) *и* (13) *соответственно. При этом постоянные* C_j^+ *в формуле* (10) *произвольны, а постоянные* C_j^- *в формуле* (13) *являются решением системы* (16), $j=\overline{1,n}$.

Отметим, что при $\gamma\geq 0$ выполнение условий (11), (12), (14), (15) в развернутом виде будет означать совместность системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов d_k многочлена $P(z)$, входящего в выражения (6) для $F_\pm(z)$. Явный вид этой системы может быть несложно записан и здесь не приводится. В случае совместности этой системы число произвольных постоянных уменьшится на ее ранг. Если после этого часть постоянных d_k останутся произвольными, то они могут быть далее использованы для достижения совместности системы (16), из-за чего число произвольных постоянных d_k, возможно, станет еще меньше.

Решим пример:

$$t(t+1)\varphi''(t)-(t^2+4t+1)\varphi'(t)+2(1-3t^2)\varphi(t)-$$

$$-\frac{2(3t^2+2t+1)}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{2t+1-t^2}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{2t(t-1)}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}=$$

$$=2\left(t^3-\frac{3}{t^2}-\frac{5}{t}-2\right),\quad |t|=1.$$

Такой вид можно придать уравнению (1) на единичной окружности, если $n=2$, $a(t)=t$, $b(t)=1$, $f(t)=2\left(t^3-\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{5}{t}-2\right)$, $A_1=2$, $A_2=1$, $\alpha=3$, $B_1=-2$, $B_2=1$, $\beta=1$.

Соответствующая краевая задача Римана (2)

$$F_+(t)=\frac{1}{t}F_-(t)+t^2-\frac{3}{t^3}-\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t},\quad |t|=1,$$

является безусловно разрешимой и имеет единственное решение

$$F_+(z) = z^2, \quad F_-(z) = \frac{3}{z^2} + \frac{5}{z} + 2$$

в классе ограниченных на бесконечности функций. Уравнение (3) приобретает вид

$$z\Phi''_+(z) - (z+1)\Phi'_+(z) - (6z+2)\Phi_+(z) = z^2, \quad |z| < 1.$$

Функции e^{-2z}, $e^{3z}\left(z - \dfrac{1}{5}\right)$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, а общее решение, найденное методом вариации произвольных постоянных, записывается по формуле

$$\Phi_+(z) = C_1^+ e^{-2z} + C_2^+ e^{3z}\left(z - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{12}(1 - 2z).$$

Отметим, что условия (11), (12) здесь окажутся выполненными, поскольку для их выполнения, очевидно, достаточно наличия у функции $F_+(z)$ нуля второго (или более высокого) порядка в точке $z = 0$. Уравнение (4) приобретает вид

$$z\Phi''_-(z) - (3z+1)\Phi'_-(z) + (2z+2)\Phi_-(z) = \frac{3}{z^2} + \frac{5}{z} + 2, \quad |z| > 1.$$

Фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения образуют функции e^{2z}, $e^{z}(z + 1)$. Формулу (13), к которой приводит метод вариации произвольных постоянных, удобно записать в виде

$$\Phi_-(z) = \left(C_1^- + \widetilde{C}_1^-(z)\right)e^{2z} + \left(C_2^- + \widetilde{C}_2^-(z)\right)e^{z}(z+1),$$

где $\widetilde{C}_1^-(z)$, $\widetilde{C}_2^-(z)$ – первообразные в области $|z| > 1$ функций соответственно

$$e^{-2z}\left(\frac{2}{z} + \frac{7}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{3}{z^4}\right),$$
$$-e^{-z}\left(\frac{2}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{3}{z^4}\right).$$

Так как

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\left(e^{-2z}\left(\frac{2}{z} + \frac{7}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{3}{z^4}\right)\right) = \operatorname*{res}_{z=\infty}\left(-e^{-z}\left(\frac{2}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{3}{z^4}\right)\right) = 0,$$

то эти первообразные существуют. Вычисления дают, например,

$$\widetilde{C}_1^-(z) = -e^{2z}\left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right),$$
$$\widetilde{C}_2^-(z) = e^{-z}\left(\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right),$$

и тогда $\Phi_-(z) = \dfrac{1}{z} + C_1^- e^{2z} + C_2^- e^{z}(z+1)$.

Непосредственно легко усматривается, что при $C_1^- = C_2^- = 0$ получим решение $\Phi_-(z) = \dfrac{1}{z}$ с нужными свойствами. А так как такое решение может быть единственным, то записывать и решать соответствующую систему (16) не требуется. Окончательно получим по формуле (5) следующее общее решение примера:

$$\varphi(t) = C_1^+ e^{-2t} + C_2^+ e^{3t}\left(t - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{12}(1-2t) - \frac{1}{t}, \quad |t| = 1, \quad \forall C_1^+, C_2^+ \in \mathbb{C}.$$

Заключение. Проведено исчерпывающее конструктивное исследование исходного уравнения (1). Явно записаны как условия разрешимости уравнения, так и при их выполнении общее решение. Также решен пример, показывающий наличие случаев, когда все условия разрешимости выполняются.

Список использованных источников

1. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа: пер. с фр. / Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

2. Бойков, И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // Динам. системы. – 2019. – Т. 9, № 3. – С. 244–272.

3. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.

4. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.

5. Зверович, Э. И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э. И. Зверович, А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

6. Шилин, А. П. О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным и гиперсингулярным интегралами / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 298–309. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

7. Шилин, А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлерова типа / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

8. Шилин, А. П. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах / А. П. Шилин // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 3. – С. 48–56. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

9. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

10. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

11. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. / Э. Камке. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.

References

1. Hadamard J. *Le Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris, Hermann et C[ie] Éditeurs, 1932. 560 p. (in French).

2. Boykov I. V. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. *Dinamicheskie sistemy* [Dynamic Systems], 2019, vol. 9, no. 3, pp. 244–272 (in Russian).

3. Zverovich E. I. Generalization of Sohotsky formulas. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).

4. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Nacionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

5. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

6. Shilin A. P. On the solution of one integro-differential equation with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 298–309 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

7. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equations of the Euler type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 17–29 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

8. Shilin A. P. Hypersingular integro-differential equation with power factors in coefficients. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 3, pp. 48–56 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56.

9. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

10. Zaytsev V. F., Polyanin A. D. *Handbook of Ordinary Differential Equations.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (in Russian).

11. Kamke E. *Handbook of Ordinary Differential Equations*. Saint Peterburg, Lan' Publ., 2003. 576 p. (in Russian).

Информация об авторе

Шилин Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

Information about the author

Andrey P. Shilin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com