ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.589
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-381-388

Поступила в редакцию 24.03.2022
Received 24.03.2022

В. А. Павловский

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ПРИНЦИП КОМПАКТНОСТИ И ТЕОРЕМА ВИТАЛИ ДЛЯ *h*-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассмотрены свойства равномерно сходящихся последовательностей *h*-голоморфных функций на множестве *h*-комплексных чисел. Сформулированы и доказаны теоремы о глобальной первообразной и равномерном приближении *h*-голоморфных функций многочленами. Получены достаточные условия *h*-голоморфности предельной функции. Сформулированы и доказаны принцип компактности для функций *h*-комплексного переменного и аналог теоремы Витали для *h*-аналитических функций.

Ключевые слова: кольцо *h*-комплексных чисел, *h*-голоморфные функции, делители нуля, равномерная сходимость, последовательность *h*-голоморфных функций, функциональный ряд, принцип компактности

Для цитирования. Павловский, В. А. Принцип компактности и теорема Витали для *h*-голоморфных функций / В. А. Павловский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 381–388. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-381-388

Vladislav A. Pavlovsky

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

THE COMPACTNESS PRINCIPLE AND VITALI'S THEOREM FOR *h*-HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Abstract. In this paper, we consider the properties of uniformly convergent sequences of *h*-holomorphic functions on the set of *h*-complex numbers. Theorems on the global antiderivative and on the uniform approximation of *h*-holomorphic functions by polynomials are formulated and proven. The sufficient conditions for the *h*-holomorphism of the limit function are obtained. The compactness principle for functions of an *h*-complex variable and an analog of Vitali's theorem for *h*-analytic functions are formulated and proven.

Keywords: ring of *h*-complex numbers, *h*-holomorphic functions, zero divisors, uniform convergence, sequence of *h*-holomorphic functions, compactness principle

For citation. Pavlovsky V. A. The compactness principle and Vitali's theorem for *h*-holomorphic functions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 381–388 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-381-388

Введение. Многие задачи геометрии и физики допускают описание с помощью *h*-комплексных чисел, что порождает интерес к исследованию свойств функций *h*-комплексного переменного. Однако в настоящее время теория таких функций разработана недостаточно. В имеющихся работах приводятся лишь разрозненные сведения о функциях *h*-комплексного переменного применительно к конкретным прикладным аспектам [1–3]. В связи с этим является актуальным изучение общих свойств *h*-голоморфных функций и построение элементов соответствующей теории.

***h*-Голоморфные функции.** Пусть $\mathbb{C}_h$ – кольцо *h*-комплексных (двойных) чисел [1, 4] вида $z = x + jy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$ с нормой $\|z\|_{\mathbb{C}_h} = |x| + |y|$. В кольце $\mathbb{C}_h$ есть делители нуля вида $(1 \pm j)t$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $f : D \subset \mathbb{C}_h \to \mathbb{C}_h$. Представим ее в виде $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$, где $u = \operatorname{Re} f$ – действительная часть, а $v = \operatorname{Hyp} f$ – гиперболическая часть.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $f(z)$ называется *h*-голоморфной в точке $z \in D$, если $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z = x + jy$, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в точке (x,y) и выполняются условия

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = v'_x.$$

Функция $f(z)$ h-голоморфна на множестве $D \subset \mathbb{C}_h$, если она h-голоморфна в каждой точке этого множества.

Обозначим через $\mathcal{H}_h(D)$ множество функций, h-голоморфных на множестве $D \subset \mathbb{C}_h$. Для h-голоморфных функций верно представление [4]

$$f(z) = \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} f(x-y). \tag{1}$$

Производная h-голоморфной функции вычисляется по формуле

$$f'(z) = u'_x + jv'_x = v'_y + ju'_y = u'_x + ju'_y.$$

Существование глобальной первообразной. Пусть $D \subset \mathbb{C}_h$ – область, $\Gamma \subset D$ – кусочно-гладкая кривая, $f : D \to \mathbb{C}_h$. Интеграл Римана от $f(z)$ по кривой Γ определим равенством

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \big(u(x,y) + jv(x,y)\big)(dx + jdy) = \int_\Gamma u(x,y)dx + v(x,y)dy + j\int_\Gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Обозначим через $\mathcal{R}(\Gamma)$ множество функций, интегрируемых на Γ по Риману. Если $f \in \mathcal{R}(\Gamma)$, то верна оценка

$$\left\| \int_\Gamma f(z)dz \right\| \le \sqrt{2} M\, l(\Gamma),$$

где $\|f(z)\| \le M$ для любой точки $z \in \Gamma$, $l(\Gamma)$ – длина кривой Γ.

Теорема 1 (о существовании глобальной первообразной). *Пусть $f \in \mathcal{H}_h(D)$, где $D \subset \mathbb{C}_h$ – односвязная область. Тогда в D существует глобальная первообразная для $f(z)$, которая может быть взята в виде $F(z) = \int_a^z f(t)dt$, где интеграл берется по любой кусочно-гладкой кривой с концами a, z, лежащей в D и не содержащей отрезков, целиком состоящих из делителей нуля. Если $f(z)$ не является делителем нуля в любой точке $z \in D$, то интеграл $\int_a^z f(t)dt$ можно брать по любой кусочно-гладкой кривой в D с концами a, z.*

Доказательство. В условиях теоремы 1 дифференциалы ($udx + vdy$), ($vdx + udy$) имеют [5] глобальные первообразные $U(x,y)$ и $V(x,y)$ такие, что $dU = udx + vdy$, $dV = vdx + udy$. Положим $F(z) = U(x,y) + jV(x,y)$, тогда $U'_x = V'_y = u(x,y)$, $U'_y = V'_x = v(x,y)$. Следовательно, $F(z)$ h-голоморфна в D. Имеем

$$F'(z) = U'_x + jV'_x = u(x,y) + jv(x,y) = f(z).$$

Представление функции $f(z)$ в виде интеграла вытекает из аналогичных представлений для $U(x,y)$ и $V(x,y)$.

Равномерное приближение *h*-голоморфных функций многочленами.

Определение 2. Функциональная последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно к функции $f(z)$ на множестве $D \subset \mathbb{C}_h$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \quad \forall n \ge n(\varepsilon) \quad \forall z \in D: \ \|f_n(z) - f(z)\| \le \varepsilon.$$

Определение 3. Функциональная последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно внутри области $D \subset \mathbb{C}_h$, если она сходится равномерно на любых компактных подмножествах $K \subset D$.

Теорема 2. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{C}_h$ непрерывна на $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тогда существует последовательность многочленов $P_n(x)$, равномерно сходящихся на $[a,b]$ к функции $f(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x)=u(x)+jv(x)$. По теореме Стоуна – Вейерштрасса [6] существует последовательности многочленов $q_n(x)$ и $r_n(x)$, равномерно сходящихся на $[a,b]$ к $u(x)$ и $v(x)$ соответственно. Положим $P_n(x)=q_n(x)+j\,r_n(x)$. Имеем

$$\left\|P_n(x)-f(x)\right\|=\left\|\left(q_n(x)-u(x)\right)+j\left(r_n(x)-v(x)\right)\right\|=\left|q_n(x)-u(x)\right|+\left|r_n(x)-v(x)\right|,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $f\in\mathcal{H}_h(B)$, *где* $B\subset\mathbb{C}_h$, *– некоторый открытый h-круг* [7]. *Тогда существует последовательность многочленов* $P_n(z)$, *равномерно сходящихся к функции* $f(z)$ *внутри* B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K\subset B$ – компакт. Из (1) вытекает представление

$$f(z)=\frac{1+j}{2}f(x+y)+\frac{1-j}{2}f(x-y)\qquad\forall\, z=x+jy\in K.$$

Существует отрезок $[a,b]\subset\mathbb{R}$ такой, что $a\le x\pm y\le b$ и компакт K целиком лежит в замкнутом h-круге радиуса $\frac{b-a}{2}$ с центром в точке $\frac{a+b}{2}$. В силу теоремы 2 существует последовательность многочленов $P_n(x)$, равномерно сходящихся к $f(x)$ на $[a,b]$. Имеем

$$P_n(z)=\frac{1+j}{2}P_n(x+y)+\frac{1-j}{2}P_n(x-y).$$

Тогда верна оценка

$$\left\|P_n(x)-f(x)\right\|\le\left\|\frac{1+j}{2}\right\|\left\|P_n(x+y)-f(x+y)\right\|+\left\|\frac{1-j}{2}\right\|\left\|P_n(x-y)-f(x-y)\right\|=$$
$$=\left\|P_n(x+y)-f(x+y)\right\|+\left\|P_n(x-y)-f(x-y)\right\|,$$

что и доказывает теорему.

Равномерно сходящиеся последовательности *h*-голоморфных функций.

Т е о р е м а 4. *Пусть последовательность h-голоморфных в области* $D\subset\mathbb{C}_h$ *функций* $f_n(z)$ *сходится равномерно внутри* D *к функции* $f(z)$. *Тогда* $f(z)$ *h-голоморфна в* D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K\subset D$ – компакт, $\Delta\subset K$ – произвольный треугольник, l – длина его границы $\partial\Delta$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Существует такое n_0, что $\forall n\ge n_0$ и $\forall z\in K$ имеем $\left\|f_n(z)-f(z)\right\|\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}l}$. Из h-голоморфности $f_n(z)$ следует $\int\limits_{\partial\Delta}f_n(t)dt=0$. Тогда получаем

$$\left\|\int\limits_{\partial\Delta}f(t)dt\right\|=\left\|\int\limits_{\partial\Delta}\left(f(t)-f_n(t)+f_n(t)\right)dt\right\|\le\left\|\int\limits_{\partial\Delta}\left(f(t)-f_n(t)\right)dt\right\|+$$
$$+\left\|\int\limits_{\partial\Delta}f_n(t)dt\right\|\le\int\limits_{\partial\Delta}\left\|f(t)-f_n(t)\right\|dt\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}l}\sqrt{2}l=\varepsilon\,.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что $\int\limits_{\partial\Delta}f(t)dt=0$. Используя аналог теоремы Мореры [8], заключаем, что $f(z)$ h-голоморфна внутри K, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $B=\left\{\left\|z-z_0\right\|<r\right\}$ *– h-круг с центром в точке* $z_0=\frac{a+b}{2}$ *радиуса* $r=\frac{b-a}{2}$, *где* $0<a<b<+\infty$, *функции* $f_n(z)$, $n\in\mathbb{N}$ *h-голоморфны в* B. *Если последовательность* $f_n(t)$ *сходится равномерно на* $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *к дважды непрерывно дифференцируемой функции* $f(t)$, *то последовательность* $f_n(z)$ *сходится равномерно внутри* B *к h-голоморфной функции* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0\quad\forall n\ge n_0\quad\forall t\in[a,b]:\ \left\|f_n(t)-f(t)\right\|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любого $z \in B$ имеет место представление

$$f_n(z) = \frac{1+j}{2} f_n(x+y) + \frac{1-j}{2} f_n(x+y).$$

Пусть $K \subset B$ – компакт. Для любого $z \in K$ верна оценка

$$\|f_n(z) - f(z)\| \le \left\|\frac{1+j}{2}\right\| \|f_n(x+y) - f(x+y)\| + \left\|\frac{1-j}{2}\right\| \|f_n(x-y) - f(x-y)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Теоремы 4 и 5 не содержат информации о производной предельной функции последовательности h-голоморфных функций. Покажем, что при дополнительных условиях верна более общая теорема.

Определение 4. Стандартным назовем компактное множество с односвязной внутренностью, ограниченное замкнутой ломаной, образованной конечным числом отрезков, параллельных прямым $y = x$ или $y = -x$ [7].

Лемма. *Пусть G – стандартное множество. Тогда существует число $M(G)$ такое, что любые две точки z_0, $z \in G$ можно соединить ломаной, длина которой не превышает $M(G)$.*

Доказательство. Соединяя подходящие вершины ломаной ∂G, представим G в виде объединения конечного числа замкнутых треугольников $\Delta_i : G = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i$, $N \in \mathbb{N}$. Пусть $P(\Delta_i)$ – периметр треугольника Δ_i. Положим $M(G) = \sum_{i=1}^{N} P(\Delta_i)$. Пусть z_0, $z \in G$ – внутренние точки. Покажем, что их можно соединить ломаной γ так, что $\gamma \cap \Delta_i = \gamma_i$ будет состоять не более чем из одного отрезка γ_i и $\gamma_i \cap \partial G = \varnothing$.

Используем метод математической индукции. При $N = 2$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для $N = n$, докажем его верность для $N = n + 1$. Любой треугольник Δ_i имеет общий участок границы с каким-либо Δ_j. Пусть $z \in \Delta_{n+1}$, который соседствует с Δ_n. Выберем произвольную внутреннюю точку $z^* \in \Delta_n$. Соединим ломаной точки z_0 и z^* и продолжим отрезок γ_n до пересечения с общей границей треугольников Δ_n и Δ_{n+1}. Затем соединим точку пересечения с точкой z. Получим ломаную γ, удовлетворяющую требованиям леммы. Очевидно, что длина каждого ее участка $l(\gamma_i) < P(\Delta_i)$. Тогда длина всей ломаной $l(\gamma) < \sum_{i=1}^{N} P(\Delta_i) = M(G)$.

Случай, когда z_0, $z \in G$ – граничные точки, легко сводится к уже рассмотренному с помощью подходящего выбора внутренних точек z'_0, $z' \in G$.

Теорема 6. *Пусть $D \subset \mathbb{C}_h$ – односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой, $f_n \in \mathcal{H}_h(D)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, последовательность производных $f'_n(z)$ сходится равномерно внутри D к непрерывной функции $g(z)$; числовая последовательность $f_n(z_0)$ сходится в некоторой точке $z_0 \in D$. Тогда последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно внутри D к некоторой функции $f \in \mathcal{H}_h(D)$ и $f'(z) = g(z)$ $\forall z \in D$.*

Доказательство. Пусть z, $z_0 \in D$. $\{D_k\}$ – компактное исчерпание [9] D стандартными множествами такое, что $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots$. Существует такое k_0, что z, $z_0 \in D_k$ $\forall k \ge k_0$. В силу равномерной сходимости и теоремы 1 имеем

$$\int_{z_0}^{z} g(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty} \int_{z_0}^{z} f'_n(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(z) - f_n(z_0)\right),$$

отсюда следует, что существует

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) = \int_{z_0}^{z} g(\tau)d\tau + A,$$

где $A = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_0)$, интегрирование ведется по ломаной $\gamma \subset D_{k_0}$ с концами в точках z_0 и z, выбранной в соответствии с леммой и так, что ни одно ее звено не состоит целиком из делителей нуля. Существует такое число $M(D_{k_0})$, что длина ломаной $l(\gamma) \le M(D_{k_0})$.

Согласно теореме 1, $f'(z) = g(z)\ \ \forall z \in D_{k_0}$. Кроме того,

$$\left\| f_n(z) - f(z) \right\| = \left\| \left(\int_{z_0}^{z} f_n'(\tau) d\tau + f_n(z_0) \right) - \left(\int_{z_0}^{z} g(\tau) d\tau + A \right) \right\| \le \left\| \int_{z_0}^{z} \left(f_n'(\tau) - g(\tau) \right) d\tau \right\| +$$
$$+ \left\| f_n(z_0) - A \right\| \le \sqrt{2} \sup_{\tau\in\gamma} \left\| g(\tau) - f_n'(\tau) \right\| l(\gamma) + \left\| A - f_n(z_0) \right\| \le \varepsilon\sqrt{2} M(D_{k_0}) + \varepsilon$$

при достаточно больших n. Отсюда вытекает, что $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно на D_{k_0}. В силу произвольности $z \in D$ $f(z)$ h-голоморфна в D и $f'(z) = g(z)\ \ \forall z \in D$.

Пусть $K \subset D$ – компакт. Существует такое k^*, что $K \subset D_k\ \ \forall k \ge k^*$. Следовательно, последовательность $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно внутри D. Теорема доказана.

Т е о р е м а 7 (аналог теоремы Вейерштрасса). *Пусть $D \subset \mathbb{C}_h$ – односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой, пусть также*

1) $w_k \in \mathcal{H}_h(D)\ \ \forall k \in \mathbb{N}$;

2) функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k'(z)$ сходится равномерно внутри D к непрерывной функции $g(z)$;

3) сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k(z_0)$, где $z_0 \in D$.

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ сходится равномерно внутри D к некоторой функции $f \in \mathcal{H}_h(D)$, при этом $f'(z) = g(z)\ \ \forall z \in D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теоремы 6, примененной к последовательности частичных сумм $f_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k(z)$.

Принцип компактности.

О п р е д е л е н и е 5. Функциональная последовательность $f_n : D \subset \mathbb{C}_h \to \mathbb{C}_h$ называется равностепенно непрерывной внутри области D, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого компакта $K \subset D$ существует такое $\delta(\varepsilon, K) > 0$, что для любых $z', z'' \in K$, $\left\| z' - z'' \right\| < \delta(\varepsilon, K)$, для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\left\| f_n(z') - f_n(z'') \right\| \le \varepsilon.$$

О п р е д е л е н и е 6. Функциональная последовательность $f_n : D \subset \mathbb{C}_h \to \mathbb{C}_h$ называется компактной в D, если любая ее подпоследовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри области D.

Для h-голоморфных функций классический принцип компактности [10] неверен. При наложении более сильных ограничений верна

Т е о р е м а 8 (принцип компактности). *Пусть $D \subset \mathbb{C}_h$ – односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой ∂D, $f_n \in \mathcal{H}_h(D)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ и для любого компакта $K \subset D$ существует такое число $M(K)$, что*

$$\left\| f_n(z) \right\| \le M(K), \quad \left\| f_n'(z) \right\| \le M(K) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in K.$$

Тогда функциональная последовательность $f_n(z)$ компактна внутри D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство в несколько этапов.

1) Покажем, что функциональная последовательность $f_n(z)$ равностепенно непрерывна внутри области D. Пусть $K \subset D$ – компакт. Обозначим через 2ρ расстояние между $\overline{K}$ и ∂D. Пусть $z', z'' \in K$ и $\left\| z' - z'' \right\| \le \dfrac{\rho}{2}$. Тогда z' и z'' можно соединить ломаной γ, такой, что ее длина $l(\gamma) \le 2\left\| z' - z'' \right\|$ и $\gamma \subset K$. Верна оценка

$$\|f_n(z') - f_n(z'')\| \le \sqrt{2}\,|f_n(z') - f_n(z'')| = \sqrt{2}\left|\int_{z'}^{z''} f'(\tau)d\tau\right| \le \sqrt{2}M(K)l(\gamma) \le 2\sqrt{2}M(K)\|z' - z''\|.$$

Полагая $\delta = \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}M(K)}\right\}$, в силу определения 5 выводим, что $f_n(z)$ равностепенно непрерывна внутри области D.

2) Пусть $D_{\mathbb{Q}}$ – множество точек $z = x + jy \in D$ таких, что $x, y \in \mathbb{Q}$. Множество $D_{\mathbb{Q}}$ счетно и всюду плотно в D. Его точки можно занумеровать. Пусть $D_{\mathbb{Q}} = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$. Покажем, что $f_n(z)$ содержит подпоследовательность, поточечно сходящуюся на $D_{\mathbb{Q}}$. Поскольку числовая последовательность $f_n(z_1)$ ограничена, значит, она содержит сходящуюся подпоследовательность $f_{k1}(z_1)$. Числовая последовательность $f_{k1}(z_2)$, в свою очередь, содержит сходящуюся подпоследовательность $f_{k2}(z_2)$. Следовательно, функциональная последовательность $f_{k2}(z)$ сходится в точках z_1 и z_2. Последовательность $f_{k2}(z_3)$ содержит сходящуюся подпоследовательность $f_{k3}(z_3)$. Тогда функциональная последовательность $f_{k3}(z)$ сходится в точках z_1, z_2, z_3. Продолжим этот процесс неограниченно и выберем диагональную подпоследовательность $f_{11}(z),\ f_{22}(z),\ \ldots\ , f_{nn}(z), \ldots$. Эта подпоследовательность сходится в любой точке $z_\nu \in D_{\mathbb{Q}}$, так как все ее члены, начиная с p-го, взяты из последовательности $f_{kp}(z)$, сходящейся в точке z_p.

3) Покажем, что если функциональная последовательность $g_n(z)$ равностепенно непрерывна внутри области D и сходится поточечно на множестве $D_{\mathbb{Q}} \subset D$, всюду плотном в D, то она сходится равномерно внутри D. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и компакт $K \subset D$. Пользуясь равностепенной непрерывностью с помощью прямых, параллельных прямым $y \pm x$, разобьем K на конечное число ячеек K_l, $l = \overline{1, L}$, так, чтобы для любых $z', z'' \in K$, принадлежащих любой ячейке, и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство

$$\|g_n(z') - g_n(z'')\| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Множество $D_{\mathbb{Q}}$ всюду плотно в D, поэтому в каждой ячейке K_l найдется точка $z_l \in D_{\mathbb{Q}}$. Так как последовательность $g_n(z)$ сходится поточечно на $D_{\mathbb{Q}}$, то найдутся такие $n, m \in \mathbb{N}$, что

$$\|g_m(z_l) - g_n(z_l)\| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall z_l,\ l = \overline{1, L}.$$

Пусть z – произвольная точка K. Найдется точка z_l, лежащая в той же ячейке, что и z. Тогда для любых $n, m \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\|g_m(z) - g_n(z)\| \le \|g_m(z) - g_m(z_l)\| + \|g_m(z_l) - g_n(z_l)\| + \|g_n(z_l) - g_n(z)\| \le \varepsilon.$$

По критерию Коши отсюда заключаем, что последовательность $g_n(z)$ сходится равномерно на K.

4) Применяя эти рассуждения к диагональной подпоследовательности $f_{nn}(z)$, получим утверждение теоремы.

***h*-Аналитичность предельной функции.**

Определение 7. Пусть $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^n (z - z_0)^k$ – последовательность функций, h-аналитических в h-круге $B = \{\|z - z_0\| < r\}$. Функция $f^M(z)$ называется h-аналитической мажорантой для последовательности $f_n(z)$ в B, если она представима в виде суммы степенного ряда $f^M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k (z - z_0)^k$, сходящегося в B и такого, что $\|d_k^n\| \le M_k \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$.

Теорема 9. *Пусть* $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^n (z - z_0)^k$ *– последовательность функций, h-аналитических в h-круге* $B = \{\|z - z_0\| < r\}$, *имеющая в B h-аналитическую мажоранту. Если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует* $d_k = \lim_{n\to\infty} d_k^n$, *то последовательность* $f_n(z)$ *сходится равномерно внутри B к h-аналитической функции* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать $z_0 = 0$, $B = \{\|z\| < r\}$. Пусть $f^M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k z^k$ – h-аналитическая мажоранта для $f_n(z)$ в B, $z^* \in B$. Используя свойства степенных рядов, получим оценку

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z^*)^k\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \left\|d_k (z^*)^k\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} M_k \left\|z^*\right\|^k < \infty .$$

Отсюда вытекает, что $f(z)$ h-аналитична в B.

Пусть $B' = \{\|z\| < r' = r - \delta\}$. Имеем $\forall z \in B'$

$$\|f_n(z) - f(z)\| = \left\|\left(d_0^n - d_0\right) + \left(d_1^n - d_1\right)z + \left(d_2^n - d_2\right)z^2 + \ldots + \left(d_k^n - d_k\right)z^k + \sum_{m=k+1}^{\infty}\left(d_m^n - d_m\right)z^m\right\| \le$$

$$\le \left\|d_0^n - d_0\right\| + \left\|d_1^n - d_1\right\|\|z\| + \left\|d_2^n - d_2\right\|\left\|z^2\right\| + \ldots + \left\|d_k^n - d_k\right\|\left\|z^k\right\| + \left\|\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(d_m^n - d_m\right)z^m\right\|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем k так, чтобы $\forall z \in B'$ выполнялось неравенство

$$\left\|\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(d_m^n - d_m\right)z^m\right\| \le 2\sum_{m=k+1}^{\infty} M_m \|z\|^m \le \varepsilon.$$

Фиксируем k и находим такое n_0, что $\forall n \ge n_0$, $\forall m = 1, 2, \ldots, k$ выполняется $\left\|d_m^n - d_m\right\| \le \varepsilon$. Тогда $\forall z \in B'$ при $r' \ne 1$ имеем

$$\left\|d_0^n - d_0\right\| + \left\|d_1^n - d_1\right\|\|z\| + \left\|d_2^n - d_2\right\|\left\|z^2\right\| + \ldots + \left\|d_k^n - d_k\right\|\left\|z^k\right\| \le \varepsilon\left(1 + r' + (r')^2 + \ldots + (r')^k\right) = \varepsilon\frac{1 - (r')^{k+1}}{1 - r'} .$$

Отсюда при $n \ge n_0$ $\forall z \in B'$ получаем оценку

$$\|f_n(z) - f(z)\| \le \varepsilon\left(\frac{1 - (r')^{k+1}}{1 - r'} + 1\right).$$

Если $r' = 1$, то $\|f_n(z) - f(z)\| \le \varepsilon(k + 2)$. Таким образом, последовательность $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно внутри B, что и завершает доказательство теоремы.

Аналог теоремы Витали.

Определение 8. Последовательность $f_n(z)$ функций, h-аналитических в области $D \subset \mathbb{C}_h$, называется компактной в себе в этой области, если любая ее подпоследовательность содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри D к h-аналитической функции.

Теорема 10. *Пусть последовательность функций $f_n(z)$, h-аналитических в области $D \subset \mathbb{C}_h$, компактна в себе в этой области и сходится на некоторой последовательности $z_k \in D$, $k \in \mathbb{N}$, такой, что существует $\lim_{k\to\infty} z_k = z \in D$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ разность $(z_k - z)$ не является делителем нуля. Тогда последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно внутри D к h-аналитической функции.*

Доказательство. Выберем две равномерно сходящиеся внутри D подпоследовательности $f_{n'_m}(z)$ и $f_{n''_m}(z)$, и пусть $\lim_{m\to\infty} f_{n'_m}(z) = f(z)$, $\lim_{m\to\infty} f_{n''_m}(z) = g(z)$. Функции $f(z)$, $g(z)$ h-аналитические в D, $f(z_k) = g(z_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Из теоремы единственности [4] вытекает, что $f(z)$ и $g(z)$ совпадают во всей области D. Таким образом, все равномерно сходящиеся внутри D подпоследовательности имеют одну и ту же предельную функцию $f(z)$. Пусть $f_n(z)$ не сходится равномерно к $f(z)$ на некотором компакте $K \subset D$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, подпоследовательность $f_{n_m}(z)$ и последовательность точек $s_m \in K$ такие, что

$$\left\|f_{n_m}(s_m) - f(s_m)\right\| > \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots . \qquad (2)$$

Подпоследовательность $f_{n_m}(z)$ содержит подпоследовательность $f_{\tilde{n}_m}(z)$, равномерно сходящуюся на K к $f(z)$. Следовательно, существует такое n_0, что $\forall \tilde{n}_m \geq n_0$ и $\forall z \in K$ выполняется

$$\left\| f_{\tilde{n}_m}(z) - f(z) \right\| \leq \varepsilon_0 . \tag{3}$$

Неравенства (2) и (3) противоречат друг другу. Следовательно, $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно на любом компакте $K \subset D$, что и доказывает теорему.

Список использованных источников

1. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – Изд. 2-е, стер. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 192 с.

2. Antonuccio, F. Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics [Electronic resource] / F. Antonussio // Arxiv [Preprint]. – 2008. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9311032.pdf

3. Khrennikov, A. An Introduction to Hyperbolic Analysis [Electronic resource] / A. Khrennikov G. Segre // Arxiv [Preprint]. – 2005. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053. https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0507053

4. Павловский, В. А. О свойствах *h*-дифференцируемых функций / В. А. Павловский, И. Л. Васильев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 2. – С. 29–37. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-29-37

5. Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ: в 6 ч. / Э. И. Зверович. – Минск: Выш. шк., 2007. – Ч. 5: Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям. – 195 с.

6. Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ: в 6 ч. / Э. И. Зверович. – Минск: Выш. шк., 2008. – Ч. 4: Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра. – 165 с.

7. Васильев, И. Л. Отображения с помощью *h*-голоморфных функций / И. Л. Васильев, В. А. Павловский // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2021. – № 2. – С. 37–43.

8. Павловский, В. А. Дифференцирование и интегрирование функций *h*-комплексного переменного / В. А. Павловский // Наука и образование в современном мире: вызовы XXI века: материалы IX Междунар. науч.-практ. конф., 15 сент. 2021. – Нур-Султан, 2021. – С. 70–73.

9. Стоилов, С. Теория функций комплексного переменного: в 2 т.: пер. с рум. / С. Стоилов. – М.: Иностр. лит., 1962. – Т. 1: Основные понятия и принципы. – 364 с.

10. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ: в 2 ч. / Б. В. Шабат. – М.: Ленанд, 2015. – Ч. 1: Функции одного переменного. – 572 с.

References

1. Yaglom I. M. *Complex Numbers in Geometry*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 192 p. (in Russian).

2. Antonuccio F. Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics. *Arxiv* [Preprint], 2008. Available at: https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9311032.pdf

3. Khrennikov A., Segre G. An Introduction to Hyperbolic Analysis. *Arxiv* [Preprint], 2008. Available at: https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053. https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0507053

4. Pavlovsky V. A., Vasiliev I. L. On the properties of *h*-differentiable functions. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics,* 2021, no. 2, pp. 29–37 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-29-37

5. Zverovich E. I. *Real and Complex Analysis. Part 5. Multiple Integrals. Integrals Over Manifolds*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 2007. 195 p. (in Russian).

6. Zverovich E. I. *Real and Complex Analysis. Part 4. Functional Sequences and Series. Integrals Depending on a Parameter*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 2008. 165 p. (in Russian).

7. Vasil'ev I. L., Pavlovskii V. A. Mappings with the help of *h*-holomorphic functions. *Vestsi BDPU. Seriya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya* [BGPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography], 2021, no. 2, pp. 37−43 (in Russian).

8. Pavlovsky, V. A. Differentiation and integration of functions of an *h*-complex variable. *Nauka i obrazovaniye v sovremennom mire: Vyzovy XXI veka. Materialy IX Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, 15 sentyabrya 2021* [Science and Education in the Modern World: Challenges of the XXI Century. Materials of the IX International Scientific and Practical Conference, September 15, 2021]. Nur-Sultan, 2021, pp. 70–73 (in Russian).

9. Stoilow S. *Theoria funcţiilr de o variabilă compexă. Volume 1. Noţiunişi principii fundamentale*. Editura academiei republicii populare române, 1954. 360 p. (in Romanian).

10. Shabat B. V. *Introduction to Complex Analysis. Tutorial. Part 1. Functions of One Variable*. Moscow, Lenand Publ., 2015. 572 p. (in Russian).

Информация об авторе

Павловский Владислав Андреевич – аспирант кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: pavlad95@gmail.com

Information about the author

Vladislav A. Pavlovsky – Postgraduate Student of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: pavlad95@gmail.com