Licitações com preço de reserva secreto e negociação: Uma análise de teoria dos leilões para o caso de valores privados♦

Maurício S. Bugarin[1]
Adriana C. Portugal[2]

Resumo

Este artigo compara diferentes mecanismos de contratação de uma obra ou serviço por meio de uma licitação. São consideradas a licitação simples sem preço de reserva, a licitação com preço de reserva anunciado, a licitação com preço de reserva secreto e, por fim, a licitação com preço de reserva secreto, mas com possibilidade de negociação ex post caso o vencedor tenha feito lance acima do preço de reserva. É adotada a hipótese de valores privados simétricos, independentes e identicamente distribuídos. A análise teórica e as simulações sugerem uma superioridade da inclusão de preços de reserva, sendo que anunciar publicamente o preço de reserva se mostra um mecanismo mais vantajoso se o preço de reserva for baixo, enquanto manter o preço de reserva secreto se mostra mais vantajoso se esse preço for elevado. Ademais, a inclusão da negociação no modelo de licitação com preço de reserva secreto induz um aumento nos lances dos participantes, majorando o custo final para o governo. No entanto, se o benefício social da obra ou serviço contratado for suficientemente maior que seu custo de reserva, então o mecanismo da negociação se torna vantajoso.

Palavras-chave

Licitações públicas; Preço de reserva anunciado; Preço de reserva secreto; Negociação em licitações.

Abstract

This article compares alternative mechanism designs for the procurement of public works or services. It analyzes the simple reverse auction with no reservation price, the reverse auction with public reservation price, with secret reservation price and, finally, with secret reservation

---

♦ Os autores agradecem a Luciano I. de Castro e a Gil Riella pelas discussões e sugestões. Agradecem também as importantes sugestões de dois pareceristas anônimos. Maurício Bugarin agradece o apoio à pesquisa do CNPq por meio de Bolsa de Produtividade em Pesquisa 308830/2019-9.Todos os possíveis erros e/ou omissões remanescentes, bem como as opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade exclusiva dos autores.

1 Professor – Universidade de Brasília – End.: Prédio da FACE, Asa Norte – CEP: 70910-900 – Brasília-DF Brasil – E-mail: bugarin.mauricio@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1177-7344.

2 Auditora de Controle Externo – Tribunal de Contas do Distrito Federal – End.: Zona Cívico-Administrativa, Asa Norte – CEP: 70075-901 – Brasília-DF – Brasil – E-mail: adriana@tc.df.gov.br ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0728-5910.

Recebido: 12/10/2021. Aceito: 11/10/2022.
Editor Responsável: Dante Mendes Aldrighi

price and the possibility of negotiation when the winning bid is above the reservation price. We make use of the framework of auction theory with symmetric, independent, and identically distributed private values and risk neutral participants. The theoretical analysis and the simulations suggest that setting a reservation price yields better results for the government. Moreover, it is more advantageous to announce the reservation price if this price is low, and more advantageous to keep it secret if that price is high. Ex post negotiation in the secret reserve price model induces an increase in participants' bids. However, if the social welfare that the public works or services create sufficiently exceeds its reservation cost, then the negotiation mechanism may be desirable.

Keywords
Public procurement auctions; Public reservation price; Secret reservation price; Ex post negotiation in procurements.

JEL Classification
C72, D04, D44, D47.

1. Introdução

A maioria das compras públicas, desde materiais de consumo para o funcionamento da máquina governamental, até a contratação de caríssimos projetos de infraestrutura como uma usina hidroelétrica, é feita por meio de licitações. As licitações públicas são regidas por leis específicas, periodicamente revisadas com vistas a gerar o melhor retorno possível ao setor público.

A mais recente dessas revisões ocorreu em primeiro de abril de 2021 quando entrou em vigor a Lei nº 14.133/2021, que estabelece normas gerais de licitação e contratação para a administração direta, autárquica e fundacional. Essa lei apresenta inovações preocupadas com a eficiência econômica das contratações públicas. Um dos formatos de licitações incluído na lei prevê a determinação de um valor de reserva máximo, a partir do qual a obra ou o serviço não será contratado, que pode ou não ser anunciado antes dos licitantes fazerem seus lances. Se o valor de reserva for mantido secreto, há ainda a possibilidade de o governo negociar com o licitante vencedor uma redução de seu preço, caso esse menor preço vitorioso esteja acima do valor de reserva.

A justificativa para a negociação ex post seria evitar que a licitação fracassasse caso o menor preço vitorioso ficasse acima do preço de reserva secreto.

O objetivo final desta pesquisa é avaliar a vantajosidade desse instrumento de negociação com o instrumental da teoria dos leilões, focando nos incentivos que tal instrumento gera quanto ao comportamento dos licitantes. Para se atingir esse objetivo, adota-se uma abordagem mais ampla, analisando quatro diferentes tipos de licitação. Em primeiro lugar constrói-se o modelo básico de licitação sem qualquer imposição de preço de reserva, ainda que tal preço de referência exista. Em segundo lugar, introduz-se o preço de reserva anunciado a todos os participantes antes do início da licitação. Em terceiro lugar considera-se a existência de um preço reserva que é mantido secreto pela administração pública, de forma que, se o licitante que fizer o menor lance (exigir o menor pagamento pela execução da obra ou serviço) ainda tiver feito um lance acima do preço de reserva, não haverá contratação. Finalmente, ainda mantendo-se o preço de reserva secreto, avalia-se o quarto modelo em que, após a abertura dos lances, caso o lance vitorioso ainda esteja acima do preço de reserva secreto, é facultado ao licitante que venceu a possibilidade de baixar seu lance até o valor de reserva de forma a conseguir o contrato da obra ou serviço.

Todos os modelos aqui estudados seguem a hipótese de valores privados, simétricos, independentes e identicamente distribuídos com participantes neutros ao risco. Para cada um dos quatro modelos estudados calculam-se os equilíbrios de Nash simétricos e apresentam-se simulações para o caso em que os custos dos licitantes são uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1]$, com o objetivo de comparar os diferentes formatos de licitação entre si.

A análise do mais simples modelo sem inclusão de restrição de participação sugere que a não inclusão do preço de reserva pode levar à contratação de uma obra ou serviço cujo retorno social se encontre abaixo de seu custo, tendo retorno social líquido negativo. No entanto, quanto maior for o número de participantes, mais baixos serão os lances dos jogadores e, portanto, menor será o custo para o governo, aumentando o retorno social.

Em seguida, mostra-se que a inclusão do preço de reserva garante que não haverá retorno social líquido negativo na licitação. No entanto, essa vantagem praticamente desaparece à medida que aumenta o número de participantes, o que reforça a importância da competição.

A inclusão do preço de reserva sigiloso funciona como se mais um jogador fosse incluído na disputa da licitação, aumentando a competição no mecanismo e, portanto, reduzindo os lances de equilíbrio. No entanto, quanto mais baixo for o preço de reserva, maior a probabilidade de a licitação fracassar. Portanto, se o preço de reserva for baixo, é melhor para o governo torná-lo público. Por outro lado, as simulações mostram que se esse preço de reserva for alto, a decisão ótima do governo é mantê-lo secreto.

Finalmente, considera-se o modelo com negociação, em que o vencedor da licitação, se tiver apresentado lance acima do preço de reserva secreto, após a finalização da fase de lances ainda pode abaixar seu lance para o valor do preço de reserva e assim ser contratado. Nesse caso, conclui-se que então essa possibilidade de negociação reduz a competição, fazendo com que os licitantes aumentem seus lances, o que implica maior custo esperado para o governo. Portanto, se o valor de reserva da obra refletir o bem-estar gerado por sua execução, então a negociação se mostra desfavorável no modelo de valores privados independentes. Por outro lado, este artigo mostra que se o bem-estar social gerado pela contratação da obra exceder seu valor de reserva, então à medida que aumenta o valor de reserva assim como a competição no certame (medida pelo número de licitantes), também aumentam as situações em que a inclusão da negociação é vantajosa para o governo.

Este trabalho contribui para a literatura sob três óticas.

Como a teoria das licitações é essencialmente uma releitura da teoria dos leilões, os equilíbrios encontrados para a licitação sem preço de reserva, com preço de reserva público e com preço de reserva sigiloso podem ser vistos como uma tradução de equilíbrios duais em leilões.[1] No entanto, talvez por essa razão, artigos e textos acadêmicos estudando cuidadosamente equilíbrios em licitações de forma autônoma não estão disponíveis. A primeira contribuição deste artigo é, portanto, didática, oferecendo essa derivação direta e detalhada. Ainda que o leitor interessado possa consultar as referências citadas de leilões e mesmo seguir o roteiro apresentado em De Castro e De Frutos (2010), por exemplo, para fazer por conta própria essa tradução, nos pareceu conveniente apresentar e derivar diretamente as expressões correspondentes aos equilíbrios nas licitações de forma a tornar essa literatura mais acessível a um público mais amplo.

[1] De Castro e De Frutos (2010), por exemplo, apresenta uma cuidadosa metodologia para se traduzir resultados de leilões em licitações.

Em segundo lugar, a teoria dos leilões não é taxativa quanto à comparação entre o uso de preços de reserva público ou sigiloso, ora identificando situações em que o primeiro formato gera maior retorno ao leiloeiro (e.g., Wilson e Weber 1982), ora situações em que o segundo mostra-se mais vantajoso (e.g., Brisset e Naegelen 2006). Mais relevante ainda para questões aplicadas, a teoria dos leilões faz essa comparação entre os dois formatos sob a perspectiva de que o preço de reserva, seja ele público ou privado, possa ser escolhido de forma estratégica, visando maximizar a receita esperada do leiloeiro. No entanto, nas licitações públicas, segundo a lei o preço de reserva é obtido por meio de estimativas de custos, não podendo ser escolhido estrategicamente. A segunda contribuição deste estudo é comparar os dois formatos de licitação sem que o preço de reserva possa ser escolhido otimamente.

Finalmente, a terceira contribuição deste trabalho é oferecer uma avaliação teórica do efeito da inclusão da negociação após a conclusão da fase de lances de uma licitação, quando não há lance inferior ou igual ao valor de reserva, sobre o custo esperado para o governo. Ainda que esse formato seja proposto em textos aplicados, como a nova Lei das Licitações no Brasil (Brasil 2021),[2] estes autores não encontraram modelagem teórica avaliando os *trade-offs* da inclusão da negociação.

Além desta introdução, o artigo está organizado da seguinte forma. A seção 2 discute as mudanças nas legislações recentes quanto aos formatos autorizados de licitações, bem como revisa a literatura existente sobre o tema. A seção 3 trata do modelo de licitação sem preço de reserva; a seção 4, do modelo de licitação com preço de reserva público; a seção 5, do modelo de licitação com preço de reserva sigiloso; a seção 6 introduz a negociação *ex post* no modelo de licitação com preço de reserva secreto e, por fim, a seção 7 apresenta as considerações finais e propostas de extensões futuras para a pesquisa.

[2] A Diretiva 2014/24 do Parlamento Europeu (2014) também ressaltam a importância do "Procedimento concorrencial com negociação", em que o conceito de negociação é bem amplo. Segundo essas diretrizes: "As negociações deverão ter por objetivo melhorar as propostas, de modo a que as autoridades adjudicantes possam adquirir obras, fornecimentos e serviços perfeitamente adaptados às suas necessidades específicas."

2. O vai e vem do valor de reserva secreto e o instituto da negociação

O direito administrativo passou por uma importante mudança recentemente com a promulgação da Lei nº 14.133/2021, que estabeleceu normas gerais de licitação e contratação para a administração direta, autárquica e fundacional. Várias regras referentes a licitações e contratos foram alteradas com essa nova norma, sendo possível destacar inovações preocupadas com a eficiência econômica das contratações públicas, como o estabelecimento de uma nova modalidade de licitação (chamada de diálogo competitivo), ou de um critério de julgamento por maior retorno econômico (para permitir firmar contratos de eficiência), ou ainda da obrigação de se definir em contrato a matriz de riscos e responsabilidades entre as partes (caracterizadora do equilíbrio econômico-financeiro inicial do contrato em vista de eventos supervenientes).

A Lei nº 13.303/2016, conhecida como a Lei das Estatais, já previa também aquele critério de julgamento e a obrigação da matriz de risco, de forma que a nova lei de licitações terminou por expandir tais institutos para toda a Administração Pública. Na linha dessas alterações, havia uma expectativa de que, também para a administração direta, autárquica e fundacional, fosse aplicada a ideia do sigilo dos valores estimativos das contratações, previsto na Lei das Estatais e introduzido pela Lei nº 12.462/2011, referente a um regime diferenciado de contratação (RDC) instituído para acelerar contratações preparatórias para a Copa do Mundo.[3]

Em contraposição à lei de licitações e contratos anteriores, a Lei nº 8.666/1993, que previa a total publicidade dos elementos da licitação e do contrato,[4] a Lei do RDC e a Lei das Estatais previam que o padrão a ser

[3] Essa lei, inicialmente, destinava-se a obras de grande porte para viabilizar os Jogos Olímpicos e Paraolímpicos de 2016, a Copa das Confederações da Federação Internacional de Futebol Associação (Fifa) 2013, a Copa do Mundo Fifa 2014 e as obras de infraestrutura de aeroportos. Com o tempo, passou a tratar também de ações do Programa de Aceleração do Crescimento (PAC), de obras no âmbito do Sistema Único de Saúde (SUS), de obras e serviços de engenharia para construção, ampliação e reforma e administração de estabelecimentos penais e de unidades de atendimento socioeducativo, bem como de obras e serviços de engenharia relacionadas a melhorias na mobilidade urbana ou ampliação de infraestrutura logística.

[4] Art. 40. O edital conterá no preâmbulo o número de ordem em série anual, o nome da repartição interessada e de seu setor, a modalidade, o regime de execução e o tipo da licitação, a menção de que será regida por esta Lei, o local, dia e hora para recebimento da documentação e proposta, bem como para início da abertura dos envelopes, e indicará, obrigatoriamente, o seguinte: (...) § 2º Constituem anexos do edital, dele fazendo parte integrante: (...) II - orçamento estimado em planilhas de quantitativos e preços unitários; (Redação dada pela Lei nº 8.883, de 1994)

seguido pela Administração seria o sigilo da estimativa do valor da contratação, contendo textos muito semelhantes nesse sentido.[5]

No entanto, o texto legal recentemente sancionado promoveu uma reversão daquela expectativa, pois a estimativa do valor do contrato somente poderá ser sigilosa se houver justificativa para tanto.[6]

Um aspecto interessante nessa reversão pode ser observado no próprio processo de sanção da lei proposta pelo Congresso. Houve o veto do inciso que estabelecia que o orçamento sigiloso seria tornado público apenas e imediatamente após a fase de julgamento das propostas. Esse veto acaba por reforçar um sentimento de que o sigilo do orçamento não é realmente desejável à luz da nova lei, já que não se restringe o momento da publicidade da estimativa.

Vários questionamentos emergem: será que houve a prevalência da ideia de publicidade dos atos administrativos? Será que algumas experiências de contratação foram determinantes para isso, como, por exemplo, certa frustração acerca dos resultados obtidos com o sigilo? Será que foi considerada alguma teoria econômica que já aponta pela desvantagem do sigilo em licitações? Será que houve dificuldades operacionais de se empreender o sigilo? Ou ainda, será que a conjunção desses fatores desencorajou o uso do sigilo?

A lei de acesso à informação, Lei nº 12.527/2011, pode ser um fator de relevo nesse contexto, na medida em que estabeleceu elementos para a transparência das ações governamentais como base da boa governança, sendo expressamente indicado que o sigilo deve ser a exceção e não a regra[7].

[5] Lei nº 12.462/2011: Art. 6º Observado o disposto no § 3º, o orçamento previamente estimado para a contratação será tornado público apenas e imediatamente após o encerramento da licitação, sem prejuízo da divulgação do detalhamento dos quantitativos e das demais informações necessárias para a elaboração das propostas.
Lei nº 13.303/2016: Art. 34. O valor estimado do contrato a ser celebrado pela empresa pública ou pela sociedade de economia mista será sigiloso, facultando-se à contratante, mediante justificação na fase de preparação prevista no inciso I do art. 51 desta Lei, conferir publicidade ao valor estimado do objeto da licitação, sem prejuízo da divulgação do detalhamento dos quantitativos e das demais informações necessárias para a elaboração das propostas.

[6] Lei nº 14.133/2021: Art. 24. Desde que justificado, o orçamento estimado da contratação poderá ter caráter sigiloso, sem prejuízo da divulgação do detalhamento dos quantitativos e das demais informações necessárias para a elaboração das propostas, e, nesse caso: I - o sigilo não prevalecerá para os órgãos de controle interno e externo; II - (VETADO).

[7] Art. 3º Os procedimentos previstos nesta Lei destinam-se a assegurar o direito fundamental de acesso à informação e devem ser executados em conformidade com os princípios básicos da administração pública e com as seguintes diretrizes: I - observância da publicidade como preceito geral e do sigilo como exceção.

Sobre a frustração acerca dos resultados obtidos com o sigilo, um exemplo emblemático é o resultado evidenciado por Souza (2013), em relação ao uso do RDC pela Infraero, quando comparou licitações empreendidas antes e depois do uso dessa forma de contratação, em que se empregou o sigilo nos orçamentos. A conclusão foi que houve uma redução importante no patamar de descontos das empresas vencedoras em relação ao preço orçado pela Infraero quando comparado com licitações empreendidas em momentos anteriores com orçamentos públicos, resultando em contratações mais caras sob a égide do sigilo. Dessa forma, o que se alcançou foi em sentido oposto ao que se esperava com o estabelecimento do sigilo, uma vez que havia uma expectativa de melhoria da vantajosidade dos contratos para a Administração.

Essa expectativa foi construída diante de uma perspectiva econômica coincidente com uma recomendação da OCDE.[8] Para essa organização, o orçamento sigiloso é indicado como forma de minimizar os danos decorrentes do comportamento cartelizado de empresas e da prática de elevação dos preços, como foi apontado por Rezende (2011). Também se esperava que haveria incentivos para o licitante "mergulhar no preço", numa espécie de "maldição do vencedor" decorrente da disputa,[9] até para garantir que seu preço ficasse abaixo do valor máximo estabelecido pela Administração, como apontado por Nóbrega (2015).

No entanto, em sentido oposto, Rezende (2011) já indicava que o grau de corrupção da sociedade poderia não permitir o efeito mitigador que se esperava sobre o comportamento cartelizado, na medida em que os integrantes do cartel poderiam obter informações privilegiadas de agentes públicos corruptos.

Nessa linha, Nóbrega (2015) também já indicava desvantagens do sigilo, uma vez que o "mergulho" nos preços poderia aumentar o risco de seleção adversa das empresas contratadas que ofertassem preços eventualmente inferiores aos seus custos de produção, requerendo reequilíbrios contratuais posteriores ou abandono dos contratos. [10] Esse autor alertava também para

[8] Conforme sugestões constantes do documento "*Guidelines for fighting bid rigging in public procurement*" (Diretrizes para combater conluios nos certames para contratação pública), disponível em https://www.oecd.org/competition/cartels/42851044.pdf. Acesso em 08/04/2021.

[9] Aplicada às licitações públicas, essa maldição representaria fechar um contrato por um valor inferior ao que realmente custa.

[10] Bugarin e Ribeiro (2021) também chamam a atenção para um potencial paradoxo no caso de leilões de concessões públicas em que um leilão de muito sucesso, que arrecada altos valores para o governo, pode sinalizar maior probabilidade de não cumprimento de compromissos contratuais durante a concessão.

o fato de que, em sendo os preços de mercado razoavelmente conhecidos pelos licitantes, as vantagens do sigilo obtidas em estudos de diversos tipos de leilões ficam muito fragilizadas, não se podendo concluir pela adequação desse instituto sob o ponto de vista estritamente econômico.

Estudos teóricos baseados na teoria de leilões[11] têm sido desenvolvidos para se analisar a condição de sigilo do preço de reserva do leiloeiro, o que, no contexto das licitações públicas, representa manter o valor estimado pela Administração em sigilo. Nesses estudos, algumas simplificações foram necessárias para permitir a solução matemática dos modelos, tendo sido obtidas conclusões diversas acerca do sigilo dos preços de reserva dos leilões.

Riley e Samuelson (1981) argumentam que, quando os participantes são neutros ao risco e há simetria e independência entre as valorações desses participantes, manter o preço de reserva secreto não aumentaria a receita esperada do leiloeiro, desde que o preço de reserva público seja escolhido estrategicamente para maximizar a receita do leiloeiro. Milgrom e Weber (1982) também afirmaram que revelar informações, entre elas, o próprio preço de reserva, seria sempre melhor para o leiloeiro que mantê-lo em sigilo nos chamados modelos de afiliação, em que não haveria independência das valorações dos diversos participantes, ou seja, quando o valor do objeto para um participante está de alguma forma relacionado com os valores desse objeto para os demais competidores. Elyakime et al. (1994) também obtiveram que o preço de reserva público seria melhor que o secreto para efeitos de receita esperada do leiloeiro, distinguindo as estratégias dos leiloeiros daquelas dos participantes, que tenderiam a fazer lances menores que suas valorações. Em todos esses estudos o preço de reserva é escolhido estrategicamente, o que impossibilita a aplicação direta desses resultados no contexto do setor público, em que a lei não permite que o gestor escolha estrategicamente o preço de reserva de forma a otimizar seu benefício esperado.

Opostamente, mesmo mantendo a possibilidade de escolha estratégica do valor de reserva, Vincent (1995), prevendo leilões com valores comuns em vez de privados,[12] mostrou que manter o preço de reserva em sigilo pode-

[11] Nessa teoria, a lógica é invertida em relação às licitações públicas, uma vez que, para leilões os pagamentos decorrem do maior lance, enquanto nas licitações os contratos acontecem a partir do menor preço proposto.

[12] Valores privados são independentes entre si, enquanto valores comuns pressupõem que os valores dos participantes são interdependentes de alguma forma.

ria aumentar a receita do leiloeiro por induzir a uma maior participação de interessados no leilão, no caso do leilão de segundo preço, em que o vencedor paga o valor anunciado pelo segundo colocado no leilão. Também Brisset e Naegelen (2006), considerando participantes avessos ao risco e com valores privados e independentes, concluíram que se o coeficiente de aversão relativa ao risco for constante e suficientemente alto, a política de manter em sigilo o preço de reserva seria ótima.

Por fim, Silva (2011) conclui que o sigilo do preço de reserva poderia proporcionar maior receita esperada ao leiloeiro a partir de uma modelagem com funções de distribuição de probabilidade em malhas, para permitir abordar a interdependência das valorações dos participantes de uma forma alternativa àquela empreendida por Milgrom e Weber (1982). O resultado obtido decorre do fato de que o sigilo do preço de reserva provoca incerteza sobre seu valor, o que promove lances mais elevados pelos participantes do leilão, resultado esse que seria afetado pelo patamar do preço de reserva.

Esses estudos focam em fricções no modelo teórico que afetariam os resultados das licitações. Mas há também diversas questões simples e operacionais que têm o potencial de afetar a decisão do legislador em relação à escolha pelo sigilo ou não das estimativas dos valores das licitações.

Uma dificuldade operacional típica é a de se manter efetivamente o sigilo de orçamentos de grandes empreendimentos cujas dotações orçamentárias constem de leis orçamentárias anuais ou planos plurianuais, ou de obras cujo padrão de construção ou uso irrestrito dos sistemas referenciais do governo[13] já permitem conhecer, com grande aproximação, os valores envolvidos.

Também se observou uma dificuldade operacional decorrente de se manter o preço de reserva em sigilo concernente à fase de negociação com as empresas após a apresentação das respectivas propostas, dadas a premissa de que a contratação não deve superar o valor estimado pela Administração e a previsão legal de que a estimativa somente poderia ser pública imediatamente após o encerramento da licitação. Para suplantar esse entrave na negociação, a jurisprudência do Tribunal de Contas da União (TCU)

[13] Como o SICRO e o SINAPI, disponibilizados, respectivamente, pelo Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT) e pela Caixa Econômica Federal (CEF).

precisou firmar a possibilidade de tornar público o orçamento já na fase da negociação,[14] ampliando a possibilidade de uso desse instituto.

A literatura teórica sobre negociação em mecanismos de venda tipicamente modela a negociação como um mecanismo alternativo ao leilão, e não complementar, em que o proprietário do bem a ser vendido segue um protocolo de negociação bem definido (*negotiated tenders* ou ainda *framework agreements*), como, por exemplo, negociar com um interessado, depois com outro, e assim sequencialmente[15], ou ainda pré-selecionando um grupo menor dentre os interessados e somente então iniciando um mecanismo competitivo de venda. Os artigos nessa linha de pesquisa tipicamente buscam comparar os mecanismos de negociação e de leilão para determinar qual dos dois é melhor sob algum critério, como eficiência ou retorno para o leiloeiro (Bullow e Kleperer 1996). Portanto, não incluem o tipo de questão que nos interessa aqui.

Alternativamente, existe a literatura sobre leilões em dois estágios (*two-stage auctions*). No entanto, essa literatura busca desenhar mecanismos ótimos de venda em contextos multidimensionais (lances) ou de leilões sequenciais, e tampouco aborda a questão da negociação para igualar o preço de reserva, que é nosso interesse.[16]

Há ainda a literatura mais recente conhecida como *negotiauction*, que tenta incluir em um mesmo mecanismo fases de negociação e de leilão (Subramanian, 2010). Por exemplo, Ivanova-Stenzel e Kroger (2005) estudam um modelo em que há uma negociação inicial entre o vendedor e um comprador e, caso essa negociação não leve a um acordo, há um leilão tradicional envolvendo um segundo comprador interessado. De uma forma geral, em um *negotiauction* pode haver fases de negociação seguidas de fases de leilão, seguidas de novas fases de negociação, etc. A ideia geral é que, ao se introduzir fases de negociação no processo de venda pode-se obter um maior retorno para o vendedor. Essa abordagem se aplica mais naturalmente ao contexto de objetos complexos, multidimensionais, em que certas características do objeto são valorizadas por alguns compradores, enquanto outros compradores valorizam outras características do objeto.

[14] Acórdão nº 306/2013 - Plenário, disponível em https://pesquisa.apps.tcu.gov.br/#/documento/acordao-completo/*/NUMACORDAO%253A306%2520ANOACORDAO%253A2013/DTRELEVANCIA%2520desc%252C%2520NUMACORDAOINT%2520desc/0/%2520. Acesso em 08/04/2021.

[15] A referência fundamental nessa literature é Bullow e Kleperer (1996). Vide também Kersten et al. (2016), Kirkegaard (2004) e Albano e Sparro (2008; 2010).

[16] Veja, a esse respeito, Branco (1997) e Katzman (1999).

Talvez por essa razão tendem a ser mais usados em vendas online (Pham, 2013; Teich *et al.*, 2001). Nesse contexto, pode-se dizer que a negociação após a conclusão da fase de lances em uma licitação se enquadra na literatura de *negotiauctions*. No entanto, talvez até por essa literatura ser mais ampla, os autores não encontraram nenhum artigo acadêmico que tenha modelado o mecanismo específico de negociação que está sendo facultado na nova lei das licitações públicas.

Todos esses fatores acabam por apontar a importância de se entender os mecanismos econômicos envolvidos nas licitações públicas com o objetivo de estudar a vantagem de se prever na legislação brasileira a possibilidade de sigilo das estimativas dos valores das contratações públicas e a prerrogativa de negociação com o licitante vencedor após a finalização da fase de lances. O que se espera é identificar em que situações tais institutos podem ser adequadamente empregados, uma vez que são elementos discricionários atribuídos à Administração Pública com o advento da Nova Lei de Licitações e Contratos. Esse é o objetivo principal do presente trabalho.

3. Licitações sem preço de reserva

O modelo básico

Iniciamos a modelagem teórica supondo que o governo não impõe qualquer valor de reserva (máximo) ao bem/serviço sendo adquirido.

O governo deseja adquirir um bem ou serviço por meio de uma licitação pública, da qual participam n licitantes. No que se segue, usaremos indiscriminadamente o termo "obra" para representar o bem ou o serviço que está sendo adquirido pelo governo.
Cada licitante $i = 1,2, \dots, n$ consegue fornecer a obra incorrendo um custo X_i, de forma que X_i é o menor valor que i está disposto a receber pelo fornecimento. O valor X_i é modelado como uma variável aleatória distribuída no intervalo $\Omega = [\underline{\omega}_i, \overline{\omega}_i] \in \mathbb{R}_+$ com função de distribuição de probabilidade $F_i(\cdot)$. A distribuição $F_i(\cdot)$. pode ser vista como uma descrição dos possíveis custos que o licitante i deve arcar para conseguir fornecer a obra antes de conhecer ao certo suas especificidades, ou seja, em uma perspectiva *ex-ante*. Essa distribuição $F_i(\cdot)$ é também é a perspectiva que

os demais jogadores $j \neq i$ têm a respeito das probabilidades dos custos que i incorre para prover o objeto ou serviço, uma vez que se trata de um ambiente de informação incompleta em que um jogador não observa os custos dos demais.

No modelo de valores independentes, postula-se que cada participante possui sua própria distribuição de probabilidades $F_i(\cdot)$ sobre seus possíveis custos e que cada distribuição é estatisticamente independente das demais.

No modelo de valores privados admite-se, ademais, que um jogador observa a realização de seu próprio valor, mas não consegue observar qualquer informação a respeito do custo dos demais jogadores, conhecendo apenas as distribuições *ex ante* $F_i(\cdot),\ i = 1, \dots, n$.

No modelo de valores simétricos adota-se a hipótese (bayesiana) de que todos os participantes são *ex ante* idênticos, o que se traduz em supor $\underline{\omega}_i = \underline{\omega}$, $\overline{\omega}_i = \overline{\omega}$ e $F_i = F,\ i = 1, \dots, n$. Seja $\Omega = [\underline{\omega}, \overline{\omega}]$.

Nota-se que a independência diz que cada realização c_i da variável aleatória X_i é uma retirada independente da mesma distribuição F. Postula-se, ainda, que a função F admite uma densidade de probabilidade contínua $f = F'$ que possui suporte completo, ou seja, $f(x) > 0, \forall x \in \Omega$. A função F e o número de jogadores n são de conhecimento comum de todos os participantes.

A licitação é organizada da seguinte forma: cada jogador entrega ao governo um envelope lacrado em que escreve o valor mínimo que está disposto a receber pela execução da obra, seu lance, sem observar os lances dos demais jogadores.

Os envelopes são então abertos e a obra é encomendada ao jogador que tiver feito o menor lance, o vitorioso, e o governo paga pela obra esse lance. Se k jogadores tiverem feito o menor lance, então é realizado um sorteio em que cada um desses jogadores é selecionado com a mesma probabilidade $\frac{1}{k}$ para ser o vencedor da licitação.[17]

[17] Vale notar que, como estamos lidando com distribuições contínuas, buscaremos equilíbrios de Nash Bayesianos estritamente crescentes, ou seja, em que os lances dos participantes serão estritamente crescentes nos seus valores. Nesse caso, a probabilidade de um empate ocorrer é nula.

As regras da licitação produzem um jogo bayesiano entre os n licitantes definido por: $\mathcal{J} = \left(n, (T_i)_{i=1,\dots,n}, p, (A_i)_{i=1,\dots,n}, (u_i)_{i=1,\dots,n}\right)$ em que para todo $i = 1, \dots, n$: (i) $T_i = \left[\underline{\omega}, \overline{\omega}\right] = C_i$ é o conjunto de tipos do jogador i, ou seja, o conjunto dos custos que o jogador i incorre para fornecer o objeto/serviço; (ii) $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times \cdots \times f_n(x_n)$ é a densidade de probabilidade conjunta dos tipos dos jogadores; (iii) $A_i = \left[\underline{\omega}, \overline{\omega}\right] = L_i$ é o conjunto de lances do jogador i; (iv) $u_i: L_i \times L_{-i} \times T_i \to \mathbb{R}$ é a função *payoff ex post* do jogador i.

Seja um perfil de lances (*ex post*) dos jogadores. Então, o *payoff ex post* do jogador que incorre custo será:

$$u_i(l; c_i) = \begin{cases} l_i - c_i & \text{se} \quad l_i < \min_{j \neq i} l_j \\ 0 & \text{se} \quad l_i > \min_{j \neq i} l_j \\ \dfrac{l_i - c_i}{\left|\left\{k \mid l_k = \min_{j \neq i} l_j\right\}\right|} & \text{se} \quad l_i = \min_{j \neq i} l_j \end{cases}$$

Um perfil de estratégias desse jogo é uma n-upla de funções $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ em que, para cada $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i: \begin{cases} T_i & \longrightarrow & L_i \\ x_i & \longmapsto & l_i = \lambda_i(x_i) \end{cases}$.

O equilíbrio simétrico

A proposição a seguir explicita o equilíbrio simétrico desse jogo. A demonstração desta proposição, bem como de todas as demais proposições e os detalhamentos de todos os cálculos aqui desenvolvidos, encontra-se disponível no Apêndice deste trabalho. Na Proposição 1, bem como nas proposições seguintes, usaremos reiteradamente a distribuição $(x) = 1 - [1 - F(x)]^{n-1}$, bem como sua densidade $g(x) = G'(x) = (n-1)[1 - F(x)]^{n-2} f(x)$. Por essa razão, e visando evitar repetições, no que se segue não mais explicitaremos a definição dessas funções.[18]

[18] Somos gratos a um parecerista anônimo por essa sugestão simplificadora.

Proposição 1. *No equilíbrio simétrico diferenciável estritamente crescente da licitação selada de menor custo* ***sem preço de reserva****, cada jogador escolhe a estratégia* λ^{spr} *dada por:*

$$\lambda^{spr}(x) = \frac{1}{1-G(x)}\int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy = x + \frac{1}{1-G(x)}\int_x^{\overline{\omega}} [1-G(y)]dy$$

Exemplo 1. Considere o caso especial em que os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Então:

O lance de um jogador de tipo x é:

$$\lambda^{spr}(x) = \frac{1}{1-G(x)}\int_x^{1} yg(y)dy = \frac{1}{(1-x)^{n-1}}\int_x^{1} yg(y)dy = \frac{(n-1)x+1}{n}$$

$$\lambda^{spr}(x) = \frac{(n-1)x+1}{n} = \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}$$

Ou seja, o lance do jogador é uma média ponderada entre seu verdadeiro custo e o custo máximo possível, sendo que o peso de seu próprio custo é $\frac{n-1}{n}$, que converge para 1 quando n aumenta.

Em particular $\lim_{n\to\infty} \lambda^{spr}(x) = x$, ou seja, quando a competição aumenta, o lance do jogador se aproxima cada vez mais de seu próprio custo de fornecimento da obra.

Particularizando mais ainda para $n = 2$, temos $\lambda^{spr}(x) = \frac{x+1}{2}$, que é o valor esperado do segundo menor custo, dado que x é o menor custo.

Proposição 2. O *pagamento esperado do governo em uma licitação selada de menor custo sem preço de reserva, é dado pela expressão a seguir:*

$$m^{spr} = n\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} F(y)yg(y)dy$$

Exemplo 2. Considere novamente o caso especial em que os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Então:

$$m^{spr} = n\int_0^1 F(y)yg(y)dy = \frac{2}{n+1}$$

Em particular, quando $n = 2$, o pagamento esperado é $\frac{2}{3}$. Ademais, à medida que aumenta o número de participantes, o pagamento diminui, pois a maior competição faz com que os licitantes demandem menores remunerações por seus serviços.

Suponha que o governo esteja disposto a pagar, no máximo, o valor r pela obra. Esse valor reflete as estimativas de custos da obra a preços de mercado feitas pelos órgãos responsáveis pela licitação. O valor r é chamado de *custo de reserva* ou ainda *preço de reserva* da obra e é visto no presente estudo como o benefício social (bruto) do projeto. Mas então, o benefício social esperado líquido é dado por:

$$r - m^{spr} = r - n\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} F(y)yg(y)dy$$

Note que dependendo do valor de r, a não inclusão de um preço de reserva no desenho da licitação pode levar a um benefício esperado líquido negativo. De fato, como a obra é contratada com probabilidade 1, isso ocorre se $r < n\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} F(y)yg(y)dy$.

Avaliando a competição no certame, no Gráfico 1 a seguir apresenta-se a relação entre o custo de reserva e o número de participantes na licitação. Quanto menor for o número de participantes, maior terá que ser o custo de reserva para que o certame (sem inclusão da regra de não se contratar a obra caso o vencedor apresente lance maior que o custo de reserva) não leve a um prejuízo líquido esperado.

Por exemplo, com dois participantes, o custo de reserva (ou seja, o valor da obra para o governo) deve estar acima de 66% do valor máximo possível do custo da obra, ou seja, do limite superior $\overline{\omega}$ do intervalo de possíveis custos, para que não se tenha prejuízo. Por outro lado, à medida que a competição aumenta, reduzem-se as situações em que a licitação sem custo de reserva induz prejuízo líquido esperado. Por exemplo, com 20 participantes basta que o custo de reserva esteja acima de 10% do valor máximo possível do custo de execução da obra para que o governo não tenha prejuízo líquido esperado. A tabela com os valores exatos, bem como todas as demais simulações feitas neste trabalho estão disponíveis sob demanda aos autores.[19] A simulação usada para construir esse e todos os demais

[19] Agradecemos a um parecerista anônimos pela excelente sugestão quanto à forma gráfica de se apresentar este resultado.

gráficos aqui apresentados é baseada na hipótese de os valores de custos dos licitantes serem uniformemente distribuídos no intervalo [0,1].

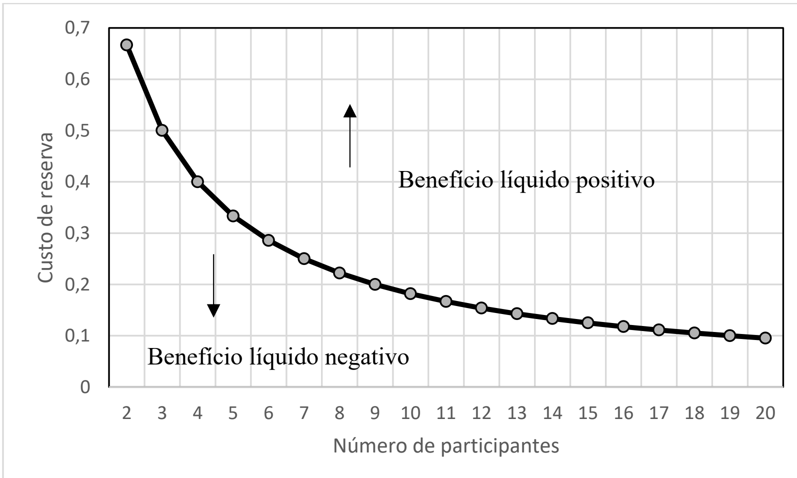

Gráfico 1 - Número de participantes e custo de reserva

Nota: A curva representa o custo de reserva mínimo (ou seja, o retorno mínimo da obra para o governo) para que o leilão sem exigência de valor de reserva não gere benefício líquido esperado negativo.

Fonte: Elaboração própria.

4. Licitações com preço de reserva anunciado

Consideramos agora o mesmo modelo estudado anteriormente, no qual é incluída a seguinte restrição: o governo anuncia um preço máximo de reserva, r, de forma que, se o vencedor da licitação tiver feito um lance maior que r, i.e., se o menor pagamento solicitado for maior que r, então a obra não será contratada.

O *equilíbrio simétrico*

A Proposição 3 a seguir apresenta o efeito do anúncio do preço de reserva sobre os lances dos licitantes.

Proposição 3. *No equilíbrio simétrico diferenciável estritamente crescente da licitação selada de menor custo com* ***preço de reserva anunciado****, cada jogador escolhe a estratégia λ^{pra} dada por:*

$$\lambda^{pra}(x) = x \qquad\qquad se \quad x \geq r$$

$$\lambda^{pra}(x) = r\frac{1-G(r)}{1-G(x)} + \frac{1}{1-G(x)}\int_x^r yg(y)dy \qquad se \quad x \leq r$$

Exemplo 3. Considere o caso especial em que os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Então:

$$\lambda^{pra}(x) = \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{(1-r)^n}{(1-x)^{n-1}}$$

Note que se $r = 1$, então: $\lambda^{pra}(x) = \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}$ que é exatamente a solução quando não há valor de reserva.

Proposição 4. O *pagamento esperado do governo em uma licitação selada de menor custo com preço de reserva anunciado r é dado pela expressão a seguir:*

$$m^{pra}(r) = nr\big(1-G(r)\big)F(r) + n\int_{\underline{\omega}}^r F(y)yg(y)dy$$

Corolário[20]. O lance de um jogador que tem valor x maior que o valor de reserva anunciado $r < 1$, $\lambda(r)$ é uma função estritamente crescente em r. Ademais, o pagamento esperado do governo, $m^{pra}(r)$, também é uma função estritamente crescente do preço máximo de reserva r.

Observação. Vale notar que o corolário acima sugere escolher um preço de reserva bem baixo para diminuir o custo do contrato para o governo. No entanto, isso não será ótimo pois existe um *trade-off*: se um preço de reserva r baixo induz os licitantes que têm custos abaixo de r a reduzirem seus lances, por outro lado, aqueles licitantes que têm custos acima não conseguirão fazer lances competitivos, aumentando a probabilidade de fracasso do certame, em cujo caso o governo tem benefício líquido zero. É possível mostrar (vide Laffont e Maskin 1980) que se fosse possível escolher o preço de reserva estrategicamente, o retorno esperado do governo seria maximizado

[20] Agradecemos a uma parecerista anônimo por chamar a atenção para este resultado geral.

com um valor estritamente inferior ao verdadeiro benefício social da obra, ainda que não demasiadamente baixo devido à exclusão de participantes de maior custo. No entanto, infelizmente, no caso do governo a legislação impede o agente público de escolher o valor de reserva estrategicamente.

Exemplo 4. Considere novamente o caso especial em que os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Então:

$$m^{pra}(r) = \frac{2}{n+1}[1-(1-r)^n(nr+1)]$$

Note que

$$m^{pra} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+1}(1-r)^n(nr+1) < \frac{2}{n+1} = m^{spr}$$

No caso particular em que $n = 2$ temos:

$$m^{pra} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1-r)^2[2r+1] < \frac{2}{3} = m^{spr}$$

Proposição 5. O *pagamento esperado do governo em uma licitação selada de menor custo com preço de reserva anunciado* $r > \underline{\omega}$ *é menor que o pagamento esperado em uma licitação selada de menor custo sem preço de reserva:*$m^{pra}(r) < m^{spr}$.

Observação. Note que, como o pagamento esperado é menor com a inclusão da restrição de contratação apenas para valores acima do preço de reserva, e como o pagamento somente ocorre em situações vantajosas para o governo, ou seja, quando o benefício é maior que o preço de reserva, então é imediato concluir-se que o benefício líquido é maior com a exigência do preço de reserva.

Mais precisamente, no modelo atual, com preço de reserva correspondendo ao custo estimado de mercado, r, a obra somente será contratada se o menor custo dos participantes for menor que r, uma vez que, em equilíbrio, se $x \leq r$ então, $\lambda(x) \leq r$. Portanto, a obra será executada com probabilidade:

$$\text{Prob}\left[\min_{i=1,\dots,n} x_i \leq r\right] = \text{Prob}[x_1 \leq r \vee \cdots \vee x_n \leq r]$$

$$= 1 - \text{Prob}[x_1 > r \wedge \cdots \wedge x_n > r] = 1 - \left(1 - F(r)\right)^n$$

Logo, o retorno esperado para o governo será:

$$r\left[1-\left(1-F(r)\right)^{n}\right]-m^{pra}(r)$$
$$=r\left[1-\left(1-F(r)\right)^{n}\right]-nr\left(1-G(r)\right)F(r)-n\int_{\underline{\omega}}^{r}F(y)yg(y)dy$$

No entanto, à medida que a competição aumenta, reduz-se fortemente a vantagem da inclusão do preço de reserva. O Gráfico 2 apresenta os valores limites do custo de reserva a partir dos quais a diferença entre o benefício líquido dos dois formatos de licitação é inferior a um milésimo do valor máximo possível do custo da obra. Nota-se que, quando a competição é pequena há maior benefício em se anunciar um custo máximo de reserva e não contratar a obra caso o maior lance seja superior a esse custo. Por exemplo, se forem apenas 4 participantes, o custo de reserva deve ser superior a 80% do valor máximo possível de construção da obra para que não exista vantagem significativa no uso do custo de reserva; por outro lado, se forem 10 participantes basta que o valor de reserva seja da ordem de 50% do valor máximo para que os dois formatos sejam essencialmente equivalentes para o governo.

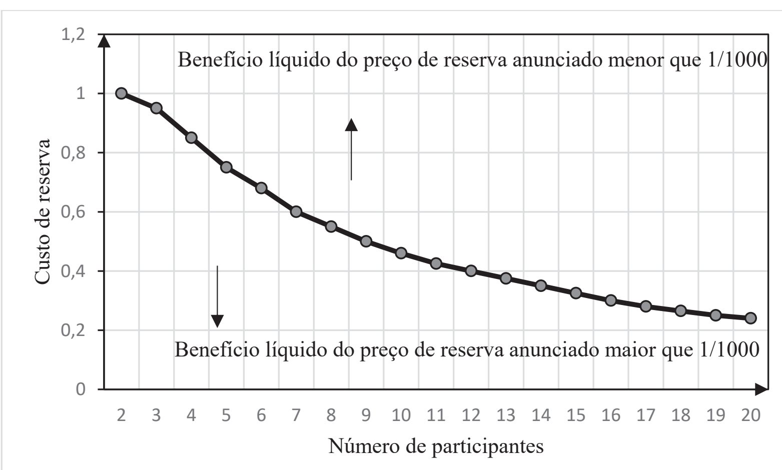

Gráfico 2 - Diferença entre o benefício líquido quando o custo de reserva anunciado é usado e quando não há valor máximo de contratação da obra

Nota: A curva representa o custo de reserva mínimo para que o leilão com exigência de valor de reserva a partir do qual a introdução de um preço de reserva acarrete um aumento pouco significante (inferior a um milésimo do valor máximo possível do custo de execução da obra) do benefício líquido do governo, em comparação com o leilão simples sem preço de reserva.

Fonte: Elaboração própria.

5. Licitações com preço de reserva secreto sem negociação

Suponha agora que existe um valor de reserva r para a obra, mas que esse valor somente é revelado após a entrega dos envelopes. Nesse caso, se o lance vencedor (o mais baixo dos lances) estiver acima do valor de reserva, a obra não será contratada.

Do ponto de vista dos licitantes, o valor de reserva é uma variável aleatória r distribuída em Ω de acordo com uma distribuição de probabilidades He respectiva densidade h.

O *equilíbrio simétrico*

A Proposição 6 a seguir apresenta o efeito do anúncio do preço de reserva secreto sobre os lances dos licitantes.

Proposição 6. *No equilíbrio simétrico diferenciável estritamente crescente da licitação selada de menor custo com* ***preço de reserva secreto****, cada jogador escolhe a estratégia* λ^{prs} *dada por:*

$$\lambda^{prs}(x) = x + \frac{1}{1 - G(x)} \int_x^{\overline{\omega}} \frac{1 - H\big(\lambda^{prs}(y)\big)}{1 - H\big(\lambda^{prs}(x)\big)} [1 - G(y)] dy$$

Corolário. *Se a distribuição ex ante do preço de reserva, H, for estritamente crescente, então a introdução de um preço de reserva secreto reduz os lances do licitante, em comparação com a situação em que não há preço de reserva. Portanto, o preço de reserva secreto reduz o pagamento esperado do governo.*

Observação. Vale notar que a expressão na Proposição 6, diferentemente das expressões nas Proposições 1 e 3, não apresenta uma forma explícita para a solução do problema, uma vez que $\lambda(x)$ aparece nos dois lados da equação. Portanto, sem um conhecimento mais específico das distribuições de probabilidade não se consegue isolar a solução.

De forma a obter uma expressão explícita para a solução do problema, particularizamos para o caso de distribuições uniformes e buscamos soluções lineares.

Exemplo 5. Considere novamente o caso especial em que os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], inclusive quanto ao valor de reserva r. Então:

$$\lambda^{prs}(x) = \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{n+1}$$

Observação. Comparando as expressões para o lance com preço de reserva secreto (acima) com a ausência de preço de reserva, $\lambda^{spr}(x) = \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}$, verifica-se que o preço de reserva secreto funciona como se o jogador estivesse enfrentando mais um competidor (o próprio governo) de forma que seu lance se torna um pouco mais agressivo (mais baixo), beneficiando o governo.

Comparando com o caso de preço de reserva anunciado, $\lambda^{pra}(x) = \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{(1-r)^n}{(1-x)^{n-1}}$, temos esse mesmo efeito que favorece o secreto (funciona como se aumentasse a competição), mas também um efeito que favorece o anunciado, o termo redutor $-\frac{1}{n}\frac{(1-r)^n}{(1-x)^{n-1}}$. Qual dos dois efeitos prevalecerá não está claro e dependerá de vários parâmetros. Em particular, se r for elevado, ou seja, a limitação quanto ao custo não for muito relevante, então o termo será baixo, de forma que se espera que o preço de reserva secreto seja melhor. Por outro lado, se r for baixo, ou seja, o governo restringe bastante o custo da obra, então o termo $\frac{1}{n}\frac{(1-r)^n}{(1-x)^{n-1}}$ será alto, de forma que se espera que o preço de reserva anunciado seja superior.

O *pagamento esperado do governo*

A Proposição 7 apresenta o pagamento esperado do governo na licitação com preço de reserva secreto.

Proposição 7. O *pagamento esperado do governo em uma licitação selada de menor custo com preço de reserva secreto* r *será zero (a licitação fracassará) se* $\lambda(\underline{\omega}) > r$ *e, se* $\lambda(\underline{\omega}) \leq r$, *será dado pela expressão a seguir em que* $\lambda(y) = \lambda^{prs}(y)$ *é o lance de um licitante de custo* y *no equilíbrio de Nash encontrado na Proposição 6.*

$$m^{prs}(r) =$$

$$n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} x[1-G(x)]f(x)dx$$

$$+\,n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)}\int_{x}^{\overline{\omega}}\left[1-H\big(\lambda(y)\big)\right][1-G(y)]dy\,\frac{1}{1-H\big(\lambda(x)\big)}f(x)dx$$

Exemplo 6.

Considere novamente o caso especial em que os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], com a solução linear. Então:

$$m^{prs}(r) = \frac{2n+1}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}[nr+1](1-r)^n$$

Em particular, se $n = 2$, então o pagamento esperado é:

$$m^{prs}(r) = \frac{5}{9} - \frac{3}{4}[2r+1](1-r)^2$$

Desde que $\lambda(0) = \frac{n}{n+1}0 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3}$ seja menor ou igual a r.

Por exemplo, se $r = \frac{1}{3}$, então, $m^{prs}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}+1\right)\frac{4}{9} = \frac{5}{9} - \frac{5}{9} = 0$

Ou ainda, se $r = \frac{1}{2}$, então, $m^{prs}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{9} - \frac{3}{4}2\frac{1}{4} = \frac{5}{9} - \frac{3}{8} = \frac{224-135}{288} = \frac{89}{288} = 0{,}18.$

Por outro lado,

$$m^{pra}(r) = \frac{2}{3}[1-(1-r)^2(2r+1)]$$

$$m^{pra}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left[1-\frac{4}{9}\frac{5}{3}\right] = \frac{2}{3}\left[1-\frac{20}{27}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{7}{27}\right] = 0{,}17 > 0$$

$$m^{pra}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left[1-\frac{1}{4}2\right] = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3} > 0{,}18$$

Ou seja, o preço de reserva secreto reduz o pagamento esperado porque ele aumenta o risco (de perder a obra) com lances mais elevados, se comparado ao preço de reserva anunciado.

O *benefício líquido para a governo*

Suponha como anteriormente que a obra, uma vez realizada, gere um ganho de bem-estar social $r \in \Omega = [\underline{\omega}, \overline{\omega}] \in \mathbb{R}_+$.

No modelo atual, a obra somente será contratada se o menor lance dos participantes for menor que r, ou seja, a obra será executada com probabilidade:

$$\text{Prob}\left[\min_{i=1,\dots,n} \lambda(x_i) \le r\right] = \text{Prob}[x_1 \le \lambda^{-1}(r) \vee \cdots \vee x_n \le \lambda^{-1}(r)]$$

$$= 1 - \text{Prob}[x_1 > \lambda^{-1}(r) \wedge \cdots \wedge x_n > \lambda^{-1}(r)] = 1 - \left(1 - F(\lambda^{-1}(r))\right)^n$$

Então, o benefício líquido do governo com a obra, é:

$$r\left[1 - \left(1 - F\left(\lambda^{-1}(r)\right)\right)^n\right] - m^{prs}(r) =$$

$$r\left[1 - \left(1 - F\left(\lambda^{-1}(r)\right)\right)^n\right] - n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} x[1 - G(x)]f(x)dx$$

$$-n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} \int_x^{\overline{\omega}} [1 - H(\lambda(y))][1 - G(y)]dy \frac{1}{1 - H(\lambda(x))} f(x)dx$$

Em comparação com a licitação sem preço de reserva, a inclusão do preço de reserva secreto apresenta duas vantagens para o governo. Em primeiro lugar, os participantes jogam mais agressivamente, conforme discutido anteriormente. Em segundo lugar, a obra somente é contratada quando gera benefício líquido não negativo. Portanto, naturalmente, a inclusão do preço de reserva secreto leva a um maior benefício para o governo do que a ausência de preço de reserva.

Já a comparação com a licitação com preço de reserva anunciado revela que tanto um formato como o outro pode ser mais vantajoso para o governo, a depender, por um lado, no nível de competição do certame, i.e., o número de participantes e, por outro lado, do benefício bruto da obra para a sociedade, r. O Gráfico 3 apresenta os valores do benefício da obra r a partir dos quais é vantajoso manter secreto o preço de reserva, em função do número de participantes.

Em geral, o anúncio do preço de reserva é mais vantajoso quando se tratar de preços baixos, ou seja, de obras baratas, de baixo custo de produção. Por outro lado, o preço de reserva secreto mostra-se mais vantajoso se esse preço for elevado, ou seja, para obras maiores, de maior custo. Trata-se de resultado semelhante àquele encontrado em Silva (2011) para a análise de leilões. Ademais, quanto maior for a competição, ou seja, quanto maior for o número de licitantes, maior será a região para os valores dos preços de reserva em que é mais vantajoso o modelo de preço de reserva secreto.

Vale ainda notar outro papel da competição, já ressaltado na comparação anterior entre o modelo sem preço de reserva e o modelo com preço anunciado. Para $n = 3$ participantes, por exemplo, só é vantajoso se manter o preço secreto se o benefício social da obra for acima de 50% de seu custo máximo de produção. Se for menor, é melhor que o governo anuncie publicamente o valor de reserva. Já para um nível maior de competição, por exemplo de 10 participantes, então basta que o retorno social seja superior a 30% do valor máximo do custo de execução da obra para que seja vantajoso para o leiloeiro manter o preço de reserva sigiloso.

A intuição por trás desse resultado é simples. Existe um *trade-off* entre manter o preço sigiloso ou revelá-lo publicamente. Por um lado, o preço sigiloso aumenta a competição entre os participantes, fazendo com que estes escolham lances menores. Por outro lado, aumenta-se a probabilidade de que a obra não seja contratada. Se o benefício social for elevado, o preço de reserva é menos limitante para a contratação da obra e, portanto, deve ser mantido secreto. Por outro lado, um benefício social baixo implica em baixa probabilidade de se contratar a obra quando o valor de reserva é mantido secreto. Nesse caso, é melhor torná-lo público para se aumentar a probabilidade do certame ter sucesso.

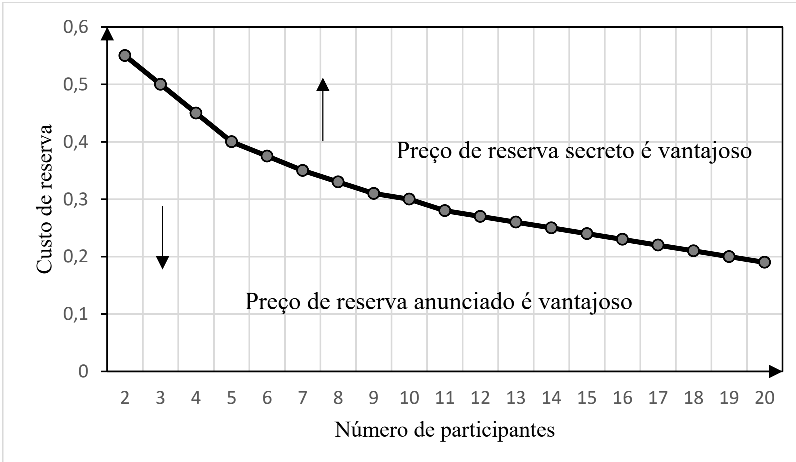

Gráfico 3 - Comparação entre licitação com preço de reserva anunciado e sigiloso

Nota: A curva representa o custo de reserva mínimo (ou seja, o retorno mínimo da obra para o governo) para que o leilão com valor de reserva sigiloso seja mais vantajoso para o governo que o leilão com valor de reserva público. Por se tratar de simulações, os valores são aproximados.

Fonte: Elaboração própria.

6. Licitações com preço de reserva secreto e com negociação

Suponha agora que existe um valor de reserva r para a obra, mas que esse valor somente é revelado após a entrega dos envelopes. Ademais, se o lance vencedor estiver acima do valor de reserva, o vencedor pode ainda optar por "cobrir" o valor de reserva e assim evitar perder a contratação.

Do ponto de vista dos licitantes, o valor de reserva é uma variável aleatória r distribuída em Ω de acordo com uma distribuição de probabilidades H e respectiva densidade h.

O *equilíbrio simétrico*

A Proposição 8 a seguir apresenta o efeito do anúncio do preço de reserva secreto sobre os lances dos licitantes.

Proposição 8. *No equilíbrio simétrico diferenciável estritamente crescente da licitação selada de menor custo com* ***preço de reserva secreto, mas com possibilidade de negociação****, cada jogador escolhe a estratégia* λ^{psn} *satisfaz a seguinte equação:*

$$\lambda^{psn}(x) = x + \mathcal{H}\big(\lambda^{psn}(x)\big) - \mathcal{H}(x) + \frac{1}{1-G(x)}\int_x^{\overline{\omega}} [1-H(y)][1-G(y)]dy$$

em que $\mathcal{H}$ *é uma primitiva da função* H.

Exemplo 7. Considere novamente o caso especial em que os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], inclusive quanto ao valor de reserva r. Então:

$$\lambda^{psn}(x) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} x + \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ou seja, o lance do jogador é novamente uma média ponderada entre seu verdadeiro custo e o custo máximo possível, sendo que o peso do seu próprio custo é $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, que também converge para 1 quando n aumenta. Em particular $\lim_{n\to\infty} \lambda^{prn}(x) = x$, ou seja, quando a competição aumenta, o lance do jogador se aproxima cada vez mais de seu próprio custo de fornecimento da obra.

Observação. É interessante comparar as soluções encontradas para os casos de preço de reserva secreto com ou sem negociação. Temos:

$$\lambda^{prs}(x) = \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{n+1}$$

$$\lambda^{psn}(x) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} x + \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{n}{n+1} > \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow n^2(n+1) > (n+1)^2(n-1) \Leftrightarrow n^2 > n^2 - 1 \Leftrightarrow 1 > 0$$

Portanto, o peso dado ao valor do licitante no seu lance no modelo com negociação $\alpha^{psn} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ é menor que o peso dado ao valor do licitante no modelo sem negociação $\alpha^{prs} = \frac{n}{n+1}$. Sejam $\beta^{prs} = 1 - \alpha^{prs}$ e $\beta^{psn} = 1 - \alpha^{psn}$. Como se trata de combinações lineares convexas, temos:

$$\alpha^{prs} > \alpha^{psn},\ \beta^{prs} < \beta^{psn}$$

Mas então, tanto $\lambda^{prs}(x)$ como $\lambda^{prs}(x)$ são combinações lineares convexas de $x(< 1)$ e 1, sendo que $\lambda^{prs}(x)$ dá um peso maior ao menor dos dois pontos dessa média, x; portanto, $\lambda^{prs}(x) < \lambda^{psn}(x)$, ou seja, o mecanismo de preço de reserva com negociação aumenta o lance dos licitantes, o que é ruim para o governo. Isso ocorre porque no novo modelo o único que o jogador precisa fazer é vencer seus adversários, já que, feito isso, caso seu lance seja maior que o valor de reserva, ainda terá a opção de reduzi-lo e executar a obra, se seu custo estiver abaixo do custo de reserva.

No entanto, há que se ressaltar que a possibilidade de negociação faz com que o objeto seja vendido mesmo quando todos os lances estão acima do valor de reserva, se o vencedor tiver custo abaixo desse valor de reserva.

Comparando com os demais modelos analisados temos:

$$\lambda^{prs}(x) < \lambda^{spr}(x), \lambda^{psn}(x) \ \text{ e } \ \lambda^{spr}(x) > \lambda^{pra}(x; r)$$

O *pagamento esperado do governo*

A Proposição 9 apresenta o pagamento esperado do governo na licitação com preço de reserva secreto e com negociação.

Proposição 9. O *pagamento esperado do governo em uma licitação selada de menor custo com preço de reserva secreto* r *e com negociação depende da relação entre* $\lambda(\underline{\omega})$ *e* r.

(i) Se $\lambda(\underline{\omega}) > r$, então o pagamento esperado é:

$$m^{psn}(r) = nr\int_0^r [1 - G(x)]f(x)dx$$

(ii) Se $\lambda(\underline{\omega}) \leq r$, então o pagamento esperado é dado pela expressão a seguir, em que $\lambda(y) = \lambda^{psn}(y)$ é o lance de um licitante de custo y no equilíbrio de Nash encontrado na Proposição 8.

$$m^{psn}(r) =$$

$$n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} x[1 - G(x)]f(x)dx + n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} \int_{x}^{\overline{\omega}} [1 - H(y)][1 - G(y)]dy\, f(x)dx$$

$$+n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} [\mathcal{H}(\lambda(x)) - \mathcal{H}(x)][1 - G(x)]f(x)dx + nr\int_{\lambda^{-1}(r)}^{r} [1 - G(x)]f(x)dx$$

Exemplo 8.

Considere novamente o caso especial em que os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], com a solução linear.

Então, $\lambda^{psn}(0) = \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ e:

(i) Para : $r < 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$:

$$m^{psn}(r) = r(1 - (1 - r)^n)$$

(ii) Para : $r \geq 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$:

$$m^{psn}(r) = nA(s) + nB(s) + nC(s) + nD(s)$$

em que:

$$nA(s) = \frac{1}{n+1}[1 - (1 - s)^n(1 + ns)]$$

$$nB(s) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}[1 - (1 - s)^{n+2}]$$

$$nC(s) = \frac{1}{2}\left[\beta^2 + \frac{1}{n+1}\left[\frac{2}{n+2}(\alpha^2 - 1) + 2\alpha\beta\right]\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[a(s) + \frac{1}{n+1}\left[c(s) + \frac{2}{n+2}(\alpha^2 - 1)[1 - s]\right][1 - s]\right][1 - s]^n$$

$$nD(s) = r\big[[1-s]^n - [1-r]^n\big]$$

$s = 1 - \alpha^{-1}(1-r);\ \alpha = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}},\ \beta = 1-\alpha;\ a(s) = (\alpha^2-1)s^2 + 2\alpha\beta s + \beta^2$
$c(s) = 2(\alpha^2-1)s + 2\alpha\beta$

O benefício líquido para a governo

Suponha como anteriormente que a obra, uma vez realizada, gere um ganho de bem-estar social $r \in \Omega = [\underline{\omega}, \overline{\omega}] \in \mathbb{R}_+$.

No modelo atual, com preço de reserva secreto, mas com possibilidade de negociação, a obra será contratada sempre que o menor valor dos participantes for menor que r, ou seja, a obra será executada com probabilidade:

$$\text{Prob}\left[\min_{i=1,\ldots,n} x_i \leq r\right] = 1 - \big(1 - F(r)\big)^n$$

Logo, o benefício líquido do governo com a obra é: $r\left[1 - \big(1 - F(r)\big)^n\right] - m^{psn}(r)$.

A Tabela 1 a seguir apresenta o benefício esperado líquido do governo para a licitação com preço de reserva secreto e com negociação no caso das distribuições uniformes. A primeira coluna corresponde ao número de jogadores enquanto a segunda coluna corresponde ao valor limite de forma que, se o valor de reserva for menor que esse limite, então se a obra for contratada, ela o será feito ao custo igual ao valor de reserva, de forma que o benefício líquido esperado será nulo. Todas as células em cinza se encontram nessa situação. Por exemplo, com $n = 2$ jogadores, se o preço de reserva for inferior a 0,423, então caso a obra seja contratada, ela o será no processo de negociação, de forma que o vencedor receberá exatamente r pela obra. Em comparação com situação de preço de reserva secreto sem negociação, observa-se que aumenta a região em que o benefício líquido esperado é nulo, ainda que aumente também a região em que a obra é efetivamente contratada. O que ocorre é que, enquanto no caso sem negociação havia uma probabilidade nula da obra ser contratada ao custo r, agora essa probabilidade é positiva, pois sempre que há negociação e se o vencedor tem custo abaixo de r, a obra é contratada pelo preço r, o que dá benefício líquido zero ao governo.

Tabela 1 - Benefício líquido da licitação com preço de reserva secreto e negociação, para diferentes valores do benefício da obra e do número de participantes com distribuições uniformes

n	$\lambda(0)$	Benefício bruto: Preço de reserva secreto r																		
		0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
		Benefício líquido esperado: $r\left[1-\left(1-F\left((r)\right)\right)^{n}\right]-m^{psn}(r)$																		
2	0,423	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,010	0,026	0,049	0,078	0,112	0,151	0,193	0,238	0,286	0,335	0,385
3	0,293	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,007	0,022	0,045	0,075	0,109	0,148	0,191	0,236	0,283	0,331	0,381	0,430	0,480	0,530
4	0,225	0,000	0,000	0,000	0,002	0,013	0,034	0,063	0,098	0,137	0,180	0,225	0,273	0,321	0,370	0,420	0,470	0,520	0,570	0,620
5	0,184	0,000	0,000	0,000	0,012	0,034	0,065	0,102	0,143	0,188	0,234	0,282	0,331	0,381	0,431	0,480	0,530	0,580	0,630	0,680
6	0,155	0,000	0,000	0,007	0,027	0,057	0,094	0,135	0,180	0,227	0,276	0,325	0,375	0,425	0,474	0,524	0,574	0,624	0,674	0,724
7	0,134	0,000	0,001	0,015	0,042	0,077	0,119	0,164	0,211	0,259	0,308	0,358	0,408	0,458	0,508	0,558	0,608	0,658	0,708	0,758
8	0,118	0,000	0,004	0,025	0,057	0,096	0,140	0,187	0,235	0,285	0,334	0,384	0,434	0,484	0,534	0,584	0,634	0,684	0,734	0,784
9	0,106	0,000	0,009	0,034	0,070	0,113	0,159	0,207	0,256	0,305	0,355	0,405	0,455	0,505	0,555	0,605	0,655	0,705	0,755	0,805
10	0,095	0,000	0,014	0,044	0,083	0,127	0,174	0,223	0,273	0,322	0,372	0,422	0,472	0,522	0,572	0,622	0,672	0,722	0,772	0,822
11	0,087	0,001	0,019	0,052	0,094	0,140	0,188	0,237	0,287	0,337	0,387	0,437	0,487	0,537	0,587	0,637	0,687	0,737	0,787	0,837
12	0,080	0,002	0,024	0,061	0,104	0,151	0,200	0,249	0,299	0,349	0,399	0,449	0,499	0,549	0,599	0,649	0,699	0,749	0,799	0,849
13	0,074	0,004	0,030	0,068	0,113	0,161	0,210	0,260	0,310	0,360	0,410	0,460	0,510	0,560	0,610	0,660	0,710	0,760	0,810	0,860
14	0,069	0,006	0,035	0,075	0,121	0,170	0,219	0,269	0,319	0,369	0,419	0,469	0,519	0,569	0,619	0,669	0,719	0,769	0,819	0,869
15	0,065	0,008	0,040	0,082	0,129	0,178	0,227	0,277	0,327	0,377	0,427	0,477	0,527	0,577	0,627	0,677	0,727	0,777	0,827	0,877

Nota: O benefício bruto da obra é identificado ao preço de reserva, que é obtido somente quando a obra é contratada. O parâmetro *n* corresponde ao número de jogadores. Esta simulação é baseada na hipótese de valores de custos dos licitantes uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], bem como o valor de reserva. A função lance $\lambda^{psn}(x)=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}x+1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ correspondendo ao lance de equilíbrio dos jogadores quando há *n* participantes não é apresentada na tabela, mas é usada nos cálculos. A função $m^{psn}(r)$ corresponde ao dispêndio esperado do governo, ou seja, o pagamento esperado ao licitante vencedor pela execução da obra. A variável relevante é o benefício líquido: $r\left[1-\left(1-F(r)\right)^{n}\right]-m^{psn}(r)$. O parâmetro $\lambda(0)$ na segunda coluna explicita situações em que se o objeto for vendido, será pelo seu valor de reserva, gerando um benefício líquido nulo.

Fonte: Elaboração própria.

O Gráfico 4, por sua vez, apresenta a diferença entre benefício esperado líquido preço de reserva secreto, com negociação e sem negociação. Note que a negociação nunca é vantajosa para o governo. Como os lances são maiores em presença de negociação, as obras ficam mais caras e a introdução da negociação se torna prejudicial, exceto no caso particular em que a obra é contratada pelo preço de reserva. Note que nesse caso a obra gera retorno social líquido zero, de forma que os dois formatos se tornam equivalentes. Note que mesmo com baixa concorrência, por exemplo, $n=3$, valores de reserva bem baixos (acima de 25% do valor máximo possível do custo da obra para um licitante) garantem a superioridade estrita do modelo sem negociação.

Vale notar a importante hipótese feita neste jogo de que o valor de reserva é igual ao benefício gerado pela obra. Isso faz com que, toda vez que a obra é contratada em razão da redução do preço via negociação, o benefício líquido para o governo seja nulo, pois ele paga exatamente o que vale a obra para si. Portanto, a única vantagem da negociação, que seria garantir a contratação da obra em mais situações que na ausência dela, é perdida nesta comparação. Portanto, se for adequada a hipótese de modelagem segundo a qual o preço de reserva corresponde ao valor da obra para o governo, não existe real justificativa para se introduzir a possibilidade de negociação no caso específico de valores privados, idêntica e uniformemente distribuídos. Em suma, enquanto a análise comparativa a respeito de preço de reserva secreto versus anunciado sugere a superioridade do preço de reserva secreto em se tratando de obras mais caras, esta seção sugere que o preço de reserva secreto sem possibilidade de negociação leva a um melhor resultado para o governo do que a introdução da possibilidade de negociação *ex post*.

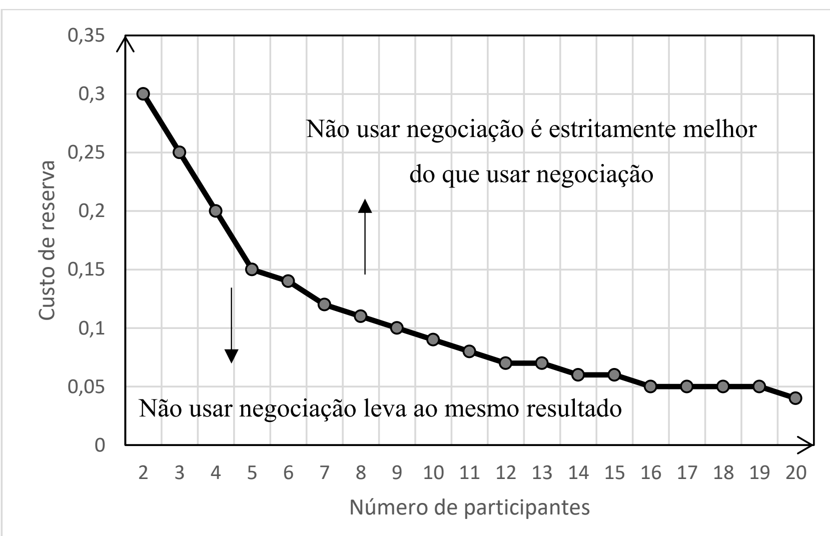

Gráfico 4 - Comparação entre licitação com preço de reserva secreto com e sem negociação

Nota: A curva representa o custo de reserva mínimo (ou seja, o retorno mínimo da obra para o governo) para que o leilão com valor de reserva sigiloso sem negociação seja estritamente mais vantajoso para o governo do que o leilão com valor de reserva sigiloso e negociação. Por se tratar de uma simulação, os valores são aproximados.

Fonte: Elaboração própria.

Benefício social acima do valor de reserva e uma possível vantagem do modelo com negociação

Este artigo mostrou o fato estilizado de que a introdução do instrumento da negociação faz com que os licitantes escolham lances mais elevados, tornando a licitação menos competitiva e, consequentemente, mais cara para o governo. A intuição por trás desse resultado é que, com a possibilidade de negociação, a preocupação em fazer um lance muito elevado e ficar acima do valor de reserva desaparece, pois o vencedor sempre pode reduzir seu lance *ex post* se isso lhe for vantajoso.

Ademais, como o valor de reserva é visto como o bem-estar social da obra, sempre que a negociação é usada, não há vantagem líquida no resultado, pois o governo paga pela obra exatamente o benefício social por ela gerado. No entanto, se poderia pensar que existe um descasamento entre o valor de reserva r, que é definido como o custo estimado competitivo da obra, e seu benefício social b, que se espera ser maior: $b > r$. Se esse for o caso, então cada vez que houver $b - r > 0$ ao bem-estar social líquido. Mas então, o novo benefício social líquido passa a ser:

$$b\left[1 - \left(1 - F(r)\right)^n\right] - m^{psn}(r)$$

Surge, portanto, um *trade-off* entre os dois modelos. Se, por um lado, no modelo com negociação o governo paga mais pela obra, em termos esperados, ele também aumenta a probabilidade de a obra ser executada, gerando um ganho de bem-estar social líquido adicional. A proposição a seguir estabelece a relação entre b e r que deve ser satisfeita para que o modelo com negociação seja desejável.

Proposição 10. Seja r o valor de reserva correspondendo ao custo de produção a valores de mercado competitivo da obra e seja $b > r$ o ganho de bem-estar social obtido com a construção da obra. Então, a licitação com preço de reserva e com negociação será vantajosa para o governo em comparação com a licitação com preço de reserva r mas sem negociação se e somente se $m^{prs}(r) = 0$ ou $m^{prs}(r) \neq 0$ e:

$$b > \max\left\{r, b_{min} = \frac{m^{psn}(r) - m^{prs}(r)}{\left(1 - F\left((\lambda^{prs})^{-1}(r)\right)\right)^n - \left(1 - F(r)\right)^n}\right\}$$

A Tabela 2 abaixo apresenta o valor mínimo que o bem-estar social $b > r$ precisa exceder para que seja vantajoso para o governo usar o mecanismo de negociação. As células marcadas com "I" correspondem a situações em que o benefício social da obra deve ser superior a 100% do valor máximo possível de construção da obra, para que o mecanismo da negociação seja desejável. Já as células marcadas com "V" correspondem a situações em que esse benefício deve ser pelo menos 5 vezes o valor máximo possível do custo para que a negociação seja vantajosa.

Nota-se que quando o valor de reserva é muito baixo, caso em que a probabilidade de contratação da obra é zero na ausência de negociação, qualquer valor do bem-estar social superior a r torna o uso da negociação vantajoso.

Por outro lado, para valores intermediários de r, em que há probabilidade positiva da obra ser contratada, por exemplo, entre 30% e 60% do valor máximo da obra, então, o benefício social deve ser significativamente maior que r para que seja compensatório o uso do mecanismo de negociação. Esse resultado é especialmente verdadeiro quando há elevada competição, pois a competição reduz os lances dos participantes na situação sem negociação mais fortemente que na situação com negociação. Por exemplo, quando r é igual a 40% do valor máximo da obra e há 10 participantes, então o benefício social necessita ser duas vezes maior que o custo de reserva de execução da obra para que seja vantajoso usar o mecanismo de negociação.

Finalmente, à medida que o valor de reserva aumenta, o benefício da negociação se torna cada vez mais negligenciável, tornando esse instrumento claramente prejudicial ao setor público.

Tabela 2 - Benefício mínimo b_{min} necessário para que seja vantajoso o uso do mecanismo da negociação

n	$\lambda^{prs}(0)$	**Preço de reserva secreto r**																		
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
		$b_{min} = \frac{m^{psn}(r) - m^{prs}(r)}{\left(1 - F\left((\lambda^{prs})^{-1}(r)\right)\right)^n - \left(1 - F(r)\right)^n}$																		
2	0,333	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.351	0.414	0.497	0.591	0.695	0.818	0.969	I	I	I	I	V
3	0,250	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.310	0.381	0.459	0.545	0.646	0.770	0.933	I	I	I	I	V	V
4	0,200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.260	0.326	0.399	0.481	0.578	0.702	0.873	I	I	I	I	V	V	V
5	0,167	0.000	0.000	0.000	0.000	0.206	0.267	0.335	0.412	0.503	0.621	0.787	I	I	I	I	V	V	V	V
6	0,143	0.000	0.000	0.000	0.150	0.209	0.272	0.343	0.426	0.532	0.682	0.922	I	I	I	V	V	V	V	V
7	0,125	0.000	0.000	0.000	0.153	0.212	0.276	0.351	0.444	0.572	0.775	I	I	I	V	V	V	V	V	V
8	0,111	0.000	0.000	0.000	0.154	0.214	0.281	0.360	0.467	0.629	0.916	I	I	V	V	V	V	V	V	V
9	0,100	0.000	0.000	0.100	0.156	0.216	0.285	0.372	0.497	0.709	I	I	I	V	V	V	V	V	V	V
10	0,091	0.000	0.000	0.101	0.157	0.218	0.290	0.387	0.538	0.825	I	I	V	V	V	V	V	V	V	V

11	0,083	0.000	0.000	0.101	0.158	0.220	0.297	0.405	0.594	0.994	I	I	V	V	V	V	V	V	V	V
12	0,077	0.000	0.000	0.102	0.158	0.222	0.304	0.429	0.670	I	I	V	V	V	V	V	V	V	V	V
13	0,071	0.000	0.000	0.102	0.159	0.225	0.313	0.460	0.773	I	I	V	V	V	V	V	V	V	V	V
14	0,067	0.000	0.000	0.102	0.160	0.228	0.324	0.499	0.916	I	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
15	0,063	0.000	0.000	0.103	0.161	0.231	0.337	0.550	I	I	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

Nota: O parâmetro n corresponde ao número de jogadores. Esta simulação é baseada na hipótese de valores de custos dos licitantes uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], bem como o valor de reserva. O parâmetro $\lambda^{prs}(0)$ na segunda coluna explicita situações em que o objeto for vendido em equilíbrio na licitação sem negociação.
Fonte: Elaboração própria.

7. Considerações finais: O problema da negociação

Muito tem-se discutido a respeito de ser ou não desejável manter segredo sobre o valor de reserva em uma licitação pública. Na recente reforma da lei das licitações, além do valor secreto, foi introduzido um mecanismo que também existe na União Europeia, a negociação *ex post* com vistas a se garantir o sucesso da licitação quando lance vencedor ainda está acima do limite secreto. Nesse caso, pergunta-se ao vencedor se este estaria disposto a baixar seu valor de forma a chegar no máximo permitido.

Pouco se tem estudado a respeito desse mecanismo de negociação inovador. O presente trabalho buscou justamente preencher esta lacuna, usando, para tanto, um modelo de licitação de valores privados, independentes e identicamente distribuídos. Os equilíbrios encontrados e suas simulações indicam alguns resultados interessantes quanto à comparação dos diferentes modelos de licitação possíveis.

Em primeiro lugar, incluir-se um preço de reserva publicamente anunciado é melhor do que não o incluir, no sentido de que o benefício esperado líquido do governo é maior com o preço de reserva anunciado. Há, no entanto, uma ressalva. Ao incluir o preço de reserva, a obra deixa de ser contratada em algumas situações, o que não ocorre na ausência de preço de reserva. Ademais, fica clara a importância da competição, uma vez que o aumento do número de participantes praticamente elimina a vantagem de se incluir preço de reserva anunciado.

Em segundo lugar, incluir-se um preço de reserva secreto também é melhor do que não incluir qualquer preço de reserva, com semelhante embargo sobre a não contratação da obra.

Em terceiro lugar, incluir-se um preço de reserva secreto pode ser melhor ou pior que anunciá-lo publicamente, sendo melhor para valores de reserva mais elevados e pior para valores de reserva mais baixos. Trata-se de um resultado análogo àquele encontrado em Silva (2011) no contexto de valores interdependentes.

Em quarto lugar, supondo-se que o preço de reserva reflita o bem-estar social gerada pela obra licitada, incluir-se a possibilidade de negociação no modelo com preço de reserva secreto aumenta o lance dos jogadores, o que faz com que se diminua a vantagem da inclusão do preço de reserva secreto. Portanto, essa novidade da negociação tende a reduzir o benefício do governo em comparação com o simples preço de reserva secreto.

Em quinto lugar, diferentemente da modelagem de leilões, em que o preço de reserva se encontra naturalmente definido como o valor que o proprietário do objeto atribui ao bem que está sendo leiloado, no caso da licitação há certa ambiguidade na definição do preço de reserva. A adaptação natural da formulação dos leilões seria identificar o preço de reserva com o benefício que a obra ou o serviço que está sendo licitado gera para a sociedade. Por outro lado, a legislação vigente é bem clara em estabelecer que o valor de reserva deve ser o valor competitivo de construção da obra ou fornecimento do serviço. Há uma explicação teórica para identificar os dois conceitos, custo competitivo e benefício social; no entanto, pode-se facilmente argumentar pela distinção entre esses dois critérios. Se o benefício social de uma obra ou serviço for maior que seu custo competitivo, então seu fornecimento, mesmo quando o governo paga seu valor de reserva, geraria um benefício líquido estritamente positivo para o governo. O presente artigo mostra que, nesse caso, pode haver uma vantagem adicional no modelo em que se permite negociação, que pode ou não compensar o aumento do custo associado a esse mecanismo. Em poucas palavras, o uso do mecanismo de negociação se torna vantajoso quando o valor de reserva aumenta bem como quando aumenta a competição medida pelo número de participantes, situações em que cresce a probabilidade da não contratação da obra quando não há negociação. Entendemos ser esta uma importante contribuição para a literatura que tem o potencial de direcionar a decisão de se usar ou não o mecanismo de negociação facultado.

Na resolução do modelo de licitação com preço de reserva secreto e negociação foi encontrada uma expressão implícita para a solução, ou seja, o lance escolhido por um licitante aparece como a solução de uma equação que depende da primitiva da função de distribuição do valor de reserva $H(r)$. A questão natural que surge é sob que condições sobre H pode-se garantir a existência dessa solução. Essa questão também é apresentada aqui como sugestão para extensões futuras.

Ademais, considerando a legislação em vigor que estabelece a forma de se estimar o valor de uma obra, ou seja, o valor de reserva rr, pode-se supor que os próprios participantes tenham condições de estimar esse valor de forma bastante precisa. Nesse caso, ainda que formalmente secreto, é possível que, na prática, a licitação funcione de forma equivalente à licitação com preço de reserva anunciado, conforme discutido na introdução deste artigo. Pode ser ainda possível que alguns dos participantes tenham acesso a essa estimativa acurada, seja por ter melhores condições técnicas de calculá-la, seja por outras razões associadas à corrupção, por exemplo. Nesse caso, o modelo com valor de reserva secreto pode gerar uma assimetria entre os participantes que pode, em última instância, reduzir a competitividade do certame. A extensão do modelo para incorporar essa assimetria é também deixada aqui como sugestão para futuras pesquisas.

A modelagem desenvolvida neste artigo se baseou na licitação selada de menor custo. Essa abordagem reflete a legislação brasileira atual que prevê o pagamento do menor lance. Alternativamente, poder-se-ia considerar a licitação de segundo menor custo, em que o vencedor é aquele que faz o menor lance, mas ele recebe o segundo menor lance, ou seja, recebe potencialmente mais que seu lance. Esse modelo é equivalente ao Leilão de Vickrey (Vickrey, 1961) e tem propriedades muito boas, como o fato de ser revelador, ou seja, cada participante tem por estratégia (fracamente) dominante lançar seu próprio custo. Como estamos seguindo o paradigma do modelo de valores privados, independentes, simétricos com agentes neutros ao risco, é provável que se possa provar um Teorema de Equivalência de Gasto do governo, segundo o qual os dois formatos, de menor e de segundo menor custo, sejam equivalentes do ponto de vista do dispêndio esperado pelo governo. Essa extensão também é mencionada aqui como sugestão para pesquisas futuras.

Ainda em complemento à motivação inicial deste artigo, que é a análise do mecanismo de negociação no âmbito da nova lei das licitações públicas no Brasil, poder-se-ia aprofundar a análise do governo como um agente estratégico, que poderia escolher estrategicamente o valor de reserva, de forma a minimizar seu dispêndio. No caso de um leilão com valor de reserva sigiloso em que não há negociação, Elyakime *et al*. (1994) mostra que a estratégia ótima do leiloeiro é escolher como preço de reserva o valor que atribui ao objeto. No entanto, não está claro se quando a possibilidade de negociação é incluída, poderia haver outra estratégia otimizadora. Essa análise estratégica é oferecida aqui como sugestão para futuras pesquisas.

Finalmente, o estudo aqui apresentado se encaixa no paradigma dos valores privados independentes. A extensão da análise para valores comuns ou afiliados, bem como para a possibilidade de conluio também é sugerida para futuras explorações.

Referências

Albano, Gian Luigi e Marco Sparro. 2008. "A Simple Model of Framework Agreements: Competition and Efficiency." *Journal of Public Procurement* 8(3): 356-378.

———. 2010. "Flexible Strategies for Centralized Public Procurement." *Review of Economic Institutions* 1 (2): 1-32.

Branco, Fernando. 1997. "The design of multidimensional auctions". *RAND Journal of Economics* 28 (1): 63-81.

Brasil. 2021. "Lei nº 14.133, de 1 de Abril de 2021. Lei de Licitações e Contratos Administrativos". Diário Oficial da União 61-F (Abril): 2.

Brisset, Karine e Florence Naegelen. 2006. "Why the reserve price should not be kept secret". *The BE Journal of Theoretical Economics* 6 (1): 1-17.

Bugarin, Mauricio Soares e Frederico Ribeiro. 2021. "The Paradox of Concessions in Developing Countries". *Brazilian Review of Econometrics* 41 (1): 69-100.

Bulow, Jeremy e Paul Klemperer. 1996. "Auctions vs. negotiations". *American Economic Review* 86 (1): 180-194.

De Castro, Luciano e María-Angeles de Frutos. 2010. "How to translate results from auctions to procurements". *Economics Letters* 106 (2): 115-118.

Elyakime, Bernard, Jean Jacques Laffont, Patrice Loisel e Quang Vuong. 1994. "First-price sealed-bid auctions with secret reservation prices." *Annales d'Economie et de Statistique* 34: 115-141.

Ivanova-Stenzel, Radosveta e Sabine Kroger. 2005. "Behavior in combined mechanisms: Auctions with a pre-negotiation stage-an experimental investigation". Department of Economics, University of Arizona, Tucson.

Katzman, Brett. 1999. "A two stage sequential auction with multi-unit demands". *Journal of Economic Theory* 86 (1): 77-99.

Kersten, Gregory, Tomasz Wachowicz e Margaret Kersten. 2016. "Competition, transparency, and reciprocity: a comparative study of auctions and negotiations". *Group Decision and Negotiation* 25 (4): 693-722.

Kirkegaard, Renée. 2004. "Auctions versus negotiations revisited". Department of Economics, University of Aarhus, Aarhus.

Laffont, Jean Jacques e Eric Maskin. 1980. "Optimal reservation price in the Vickrey auction." *Economics Letters* 6 (4): 309-313.

Milgrom, Paul R. e Robert J. Weber. 1982. "A theory of auctions and competitive bidding." *Econometrica* 50 (5): 1089-1122.

Myerson, Roger B. 1981. "Optimal auction design". *Mathematics of Operations Research* 6 (1): 58-73.

Nóbrega, Marcos. 2015. "O Regime Diferenciado de Contratação – RDC, Negotiauction e o Orçamento Sigiloso. " *Revista Eletrônica de Direito do Estado (REDE)* 42.

Parlamento Europeu. 2014. "Diretiva 2014/24/UE do Parlamento Europeu e do Conselho de 26 de fevereiro de 2014, relativa aos contratos públicos e que revoga a Diretiva 2004/18/CE". Acessado em 20/08/2022. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PT/TXT/?uri=CELEX%3A32014L0024.

Pham, Long, Alexander Zaitsev, Robert Steiner e Jeffrey Teich. 2013. "NegotiAuction: An experimental study". *Decision Support Systems* 56: 300-309.

Portugal, Adriana e Mauricio Bugarin. 2021. "Limite de contratos por empresas em licitações públicas: uma análise sob a ótica da teoria dos leilões". *Revista do TCU* 1 (147): 92-113.

Rezende, Renato M. 2013. "O Regime Diferenciado de Contratações Públicas: Comentários à Lei nº 12.462, de 2011". Texto para Discussão nº 100, Núcleo de Estudos e Pesquisas do Senado.

Riley, John e William Samuelson. 1981. "Optimal auctions". *American Economic Review* 71 (3): 381-392.

Silva, Ângelo. 2011. "Preço de reserva sigiloso em licitações públicas". Prêmio Tesouro Nacional 16.

Souza, Luiz Fernando. 2013. "A Utilização do Regime Diferenciado de Contratações Públicas (RDC) pela INFRAERO". Artigo do XV Simpósio Nacional de Auditoria de Obras Públicas, Vitória (ES).

Subramanian, Guhan. 2010. *Negotiauctions: New Dealmaking Strategies for a Competitive Marketplace*. New York: W. W. Norton & Company.

Teich, Jeffrey, Hannele Wallenius, Jyrki Wallenius e Alexander Zaitsev. 2011. "Designing electronic auctions: an internet-based hybrid procedure combining aspects of negotiations and auctions." *Electronic Commerce Research* 1: 301-314.

Vickrey, William. 1961. "Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders." *Journal of Finance* 16 (1): 8-37.

Vincent, Daniel R. 1995. "Bidding off the wall: Why reserve prices may be kept secret." *Journal of Economic Theory* 65 (2): 575-584.

Ye, Lixin. 2007. "Indicative bidding and a theory of two-stage auctions." *Games and Economic Behavior* 58 (1): 181-207.

Apêndice

Demonstração da Proposição 1

Buscamos um equilíbrio de Nash Bayesiano (ENB) simétrico, estritamente crescente diferenciável λ.

Suponha que os demais jogadores jogam segundo esse equilíbrio e o jogador i tem custo x_i e faz o lance l. Então i ganhará se e somente se:

$$l < \lambda(x_j), \forall j \neq i \quad \Leftrightarrow \quad l < \min_{j \neq i} \lambda(x_j)$$

Como λ é estritamente crescente, denotando por $m_1(x_{-i})$ a estatística de ordem 1 das $n-1$ observações $\{x_j\}_{j \neq i}$, i vence se e somente se:

$$l < \lambda\left(\min_{j\neq i}(x_j)\right) = \lambda\big(m_1(x_{-i})\big) \quad \Leftrightarrow \quad m_1(x_{-i}) > \lambda^{-1}(l)$$

Portanto, a probabilidade de vitória de i com lance l é:

$$\text{Prob}[m_1(x_{-i}) > \lambda^{-1}(l)] = 1 - \text{Prob}[m_1(x_{-i}) < \lambda^{-1}(l)] = 1 - G\big(\lambda^{-1}(l)\big)$$

Mas então, sua utilidade esperada (ínterim) é: $\left[1 - G\big(\lambda^{-1}(l)\big)\right](l - x_i)$

Se essa utilidade for uma função estritamente côncava, então a condição de primeira ordem (CPO) nos dará a melhor resposta de i às estratégias dos demais jogadores. Substituindo x_i por x por simplicidade,

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[1 - G\big(\lambda^{-1}(l)\big)\right](l - x) = -g\big(\lambda^{-1}(l)\big)(\lambda^{-1})'(l)(l - x) + \left[1 - G\big(\lambda^{-1}(l)\big)\right] = 0$$

Na solução que se busca, $l = \lambda(x) \Leftrightarrow x = \lambda^{-1}(l)$. Portanto, podemos reescrever a condição acima como:

$$1 - G(x) = g(x)(\lambda^{-1})'\big(\lambda(x)\big)(\lambda(x) - x)$$

Note agora que $\lambda^{-1}\big(\lambda(x)\big) = x \Rightarrow (\lambda^{-1})'\big(\lambda(x)\big) = \big(\lambda'(x)\big)^{-1}$.

Portanto, a CPO se reduz a:

$$1 - G(x) = g(x)\big(\lambda'(x)\big)^{-1}(\lambda(x) - x)$$

$$[1 - G(x)]\lambda'(x) = g(x)(\lambda(x) - x) = g(x)\lambda(x) - g(x)x$$

$$g(x)x = -[1 - G(x)]\lambda'(x) + g(x)\lambda(x)$$

$$xg(x) = -\frac{d}{dx}[1 - G(x)]\lambda(x)$$

Mas então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$[1 - G(\overline{\omega})]\lambda(\overline{\omega}) - [1 - G(x)]\lambda(x) = -\int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy$$

Mas $G(\overline{\omega}) = 1$. Portanto, a condição acima se reduz à expressão procurada:

$$\lambda(y) = \frac{1}{1 - G(x)}\int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy = E[m_1 \mid m_1 > x]$$

Ademais,

$$[yG(y)]' = G(y) + yg(y) \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega} - xG(x) = \int_x^{\overline{\omega}} G(y)dy + \int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy$$

$$\Rightarrow \int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy = \overline{\omega} - xG(x) - \int_x^{\overline{\omega}} G(y)dy = (\overline{\omega} - x) + x\big(1 - G(x)\big) - \int_x^{\overline{\omega}} G(y)dy$$

$$= x\big(1 - G(x)\big) + \int_x^{\overline{\omega}} \big(1 - G(y)\big)dy$$

Portanto,

$$\lambda(x) = \frac{1}{1 - G(x)} \int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy = x + \int_x^{\overline{\omega}} \frac{1 - G(y)}{1 - G(x)} dy$$

Em particular, $\lambda(x) > x$ para todo $x > 0$.

Cálculos do Exemplo 1

Os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Então:

$F(x) = x, \;\; G(x) = 1 - (1 - x)^{n-1}, \;\; 1 - G(x) = (1 - x)^{n-1},$
$g(x) = (n - 1)(1 - x)^{n-2}, \;\; yg(y) = (n - 1)y(1 - y)^{n-2}.$

Ademais, integrando por partes,

$$\int_x^1 yg(y)dy = yG(y)\Big|_x^1 - \int_x^1 G(y)dy = 1 - xG(x) - \left[y + \frac{(1 - y)^n}{n}\right]_x^1$$

$$= 1 - xG(x) - [1 - x] - \left[-\frac{(1 - x)^n}{n}\right] = x\big(1 - G(x)\big) + \frac{(1 - x)^n}{n}$$

$$= x(1 - x)^{n-1} + \frac{(1 - x)^n}{n} = (1 - x)^{n-1}\left[\frac{nx + 1 - x}{n}\right] = (1 - x)^{n-1}\left[\frac{(n - 1)x + 1}{n}\right]$$

Portanto, o lance de um jogador de tipo x é:

$$\lambda^{spr}(x) = \frac{1}{1 - G(x)} \int_x^1 yg(y)dy = \frac{1}{(1 - x)^{n-1}} \int_x^1 yg(y)dy = \frac{(n - 1)x + 1}{n}$$

$$\lambda^{spr}(x) = \frac{(n - 1)x + 1}{n} = \frac{n - 1}{n}x + \frac{1}{n}$$

Demonstração da Proposição 2

Suponha que o jogador 1 incorra no custo x para fornecer a obra. Então, no equilíbrio simétrico encontrado ele vencerá se seu custo for o menor de todos. Isso ocorre com probabilidade $[1-F(x)]^{n-1} = 1-G(x)$.

Se vencer, o pagamento do governo será $\lambda^{spr}(x) = \frac{1}{1-G(x)}\int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy$.

Mas então, o pagamento esperado a um jogador de tipo x é:

$$m_1^{spr}(x) = Prob\left[x \leq x_j, j \neq 1\right]\lambda^{spr}(x) = [1-G(x)]\frac{1}{1-G(x)}\int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy$$
$$= \int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy$$

Portanto, o pagamento esperado para o jogador 1, considerando todos os seus possíveis tipos é:

$$m_1^{spr} = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}}\int_x^{\overline{\omega}} yg(y)dy\, f(x)dx = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}}\int_{\underline{\omega}}^{y} f(x)dx\, yg(y)dy = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} F(y)yg(y)dy$$

Mas então, o pagamento esperado do governo, considerando todos os jogadores é:

$$m^{spr} = n\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} F(y)yg(y)dy$$

Cálculos do Exemplo 2

Os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Então:

$$F(x) = x,\ \ G(x) = 1-(1-x)^{n-1},\ \ 1-G(x) = (1-x)^{n-1},$$
$$g(x) = (n-1)(1-x)^{n-2},\ \ yg(y) = (n-1)y(1-y)^{n-2}.$$

Então, $F(y)yg(y) = y(yg(y))$.

Sejam $a(y) = y$ e $b'(y) = yg(y)$.

Então $a'(y) = 1$ e $b(y) = \int_0^y zg(z)\, dz$

Sejam $c(z) = z$ e $d'(z) = g(z)$.

Então $c'(z) = 1$ e $d(z) = G(z) = 1 - (1 - z)^{n-1}$.

Portanto, $b(y) = z[1 - (1 - z)^{n-1}]\Big|_0^y - \int_0^y G(z)\,dz =$

$= y[1 - (1 - y)^{n-1}] - \int_0^y [1 - (1 - z)^{n-1}]\,dz$

$= y - y(1 - y)^{n-1} - \left[z + \frac{(1-z)^n}{n}\right]\Big|_0^y = y - y(1 - y)^{n-1} - \left[y + \frac{(1-y)^n}{n} - \frac{1}{n}\right]$

$b(y) = \frac{1}{n} - y(1 - y)^{n-1} - \frac{(1-y)^n}{n}$

Mas então:

$$\int_0^1 F(y)yg(y)dy = [yb(y)]\Big|_0^1 - \int_0^1 b(y)dy$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}(1 - y)^{n+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 y(1 - y)^{n-1}\,dy$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} + \int_0^1 y(1 - y)^{n-1}\,dy$$

Sejam $h(y) = y$ e $i'(y) = (1 - y)^{n-1}$.

Então $h'(y) = 1$ e $i(y) = -\frac{1}{n}(1 - y)^n$.

Então, $\int_0^1 y(1 - y)^{n-1}\,dy = -\frac{1}{n}(1 - y)^n y\Big|_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 (1 - y)^n dy$

$= 0 - \frac{1}{n(n+1)}(1 - y)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n(n+1)}$

Portanto, $\int_0^1 F(y)yg(y)dy = \frac{2}{n(n+1)}$.

Mas então, $m^{spr} = n\int_0^1 F(y)yg(y)dy = \frac{2}{n+1}$

Demonstração da Proposição 3

Se um jogador tiver custo $x > r$, então não tem interesse em executar a obra e fazer um lance igual a seu custo é uma melhor resposta que lhe garante retorno zero. O pagamento esperado a esse jogador será zero.

Se um jogador tiver valor $x \leq r$, então, está claro que uma melhor resposta sua envolverá um lance $l = \lambda(x) \leq r$. Ademais, para que seu lance seja ótimo é necessário que $l = \lambda(x) \geq x$.Tomando o limite com $x \to r$, com valores abaixo de r conclui-se que em qualquer equilíbrio de Nash bayesiano simétrico contínuo, $\lambda(r) = r$. Essa será a "condição de contorno".

Buscamos um ENB λ simétrico, estritamente crescente e diferenciável (para custos menores ou iguais a r). Se um jogador i tiver custo $x_i < r$ e fizer um lance l, então esse jogador ganhará se e somente se: $l < \lambda(x_j), \forall j \neq i$. Ou ainda, $l < \min_{j \neq i} \lambda(x_j)$.

Como λ é estritamente crescente, i vence se e somente se:

$$l < \lambda\left(\min_{j \neq i}(x_j)\right) = \lambda(m_1(x_{-i})) \quad \Leftrightarrow \quad m_1(x_{-i}) > \lambda^{-1}(l)$$

Portanto, a probabilidade de vitória de i com lance l é: $1 - G(\lambda^{-1}(l))$.

Mas então, escrevendo x em vez de x_i, sua utilidade esperada (ínterim) é:

$$\left(1 - G(\lambda^{-1}(l))\right)(l - x)$$

Portanto, o jogador resolve o mesmo problema que na situação sem preço de reserva, com a única alteração sendo a condição de contorno $\lambda(r) = r$. Resolvendo o problema da mesma forma que antes chegamos à seguinte equação diferencial:

$$xg(x) = -\frac{d}{dx}[1 - G(x)]\lambda(x)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, agora aplicado entre x e r,

$$[1 - G(x)]\lambda(x) - [1 - G(r)]\lambda(r) = \int_x^r yg(y)dy$$

Como, $\lambda(r) = r$, a condição acima se reduz a:

$$\lambda(x) = r\frac{1 - G(r)}{1 - G(x)} + \frac{1}{1 - G(x)}\int_x^r yg(y)dy = E[\min\{r, m_1\} \,|\, m_1 > x]$$

Cálculos do Exemplo 3

Os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Então:

$$F(x) = x, \;\; G(x) = 1 - (1-x)^{n-1}, \;\; 1 - G(x) = (1-x)^{n-1},$$
$$g(x) = (n-1)(1-x)^{n-2}, \;\; yg(y) = (n-1)y(1-y)^{n-2}.$$

integrando por partes, para $x \leq r$,

$$\int_x^r yg(y)dy = yG(y)\Big|_x^r - \int_x^r G(y)dy = rG(r) - xG(x) - \left[y + \frac{(1-y)^n}{n}\right]_x^r$$

$$= rG(r) - xG(x) - \left[r + \frac{(1-r)^n}{n} - x - \frac{(1-x)^n}{n}\right]$$

$$= x\big(1 - G(x)\big) - r\big(1 - G(r)\big) + \frac{1}{n}[(1-x)^n - (1-r)^n]$$

Portanto,

$$\frac{1}{1-G(x)}\int_x^r yg(y)dy = x - r\frac{\big(1-G(r)\big)}{1-G(x)} + \frac{1}{n}\left[\frac{(1-x)^n}{1-G(x)} - \frac{(1-r)^n}{1-G(x)}\right]$$

Substituindo,

$$\frac{1}{1-G(x)}\int_x^r yg(y)dy = x - r\frac{(1-r)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}} + \frac{1}{n}\left[(1-x) - \frac{(1-r)^n}{(1-x)^{n-1}}\right]$$

$$\lambda^{pra}(x) = r\frac{1-G(r)}{1-G(x)} + \frac{1}{1-G(x)}\int_x^r yg(y)dy = x + \frac{1}{n}\left[(1-x) - \frac{(1-r)^n}{(1-x)^{n-1}}\right]$$

$$\lambda^{pra}(x) = x + \frac{1}{n}\left[(1-x) - \frac{(1-r)^n}{(1-x)^{n-1}}\right]$$

$$\lambda^{pra}(x) = \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{(1-r)^n}{(1-x)^{n-1}}$$

Demonstração da Proposição 4

Suponha que o jogador 1 incorra no custo $x \leq r$ para fornecer a obra. Então, no equilíbrio simétrico encontrado ele vencerá se seu custo for o menor de todos. Isso ocorre com probabilidade $[1 - F(x)]^{n-1} = 1 - G(x)$.

Se vencer, o pagamento do governo será:

$$\lambda^{pra}(x) = r\frac{1 - G(r)}{1 - G(x)} + \frac{1}{1 - G(x)}\int_x^r yg(y)dy$$

Mas então, o pagamento esperado a um jogador de tipo $x \leq r$ é:

$$m_1^{pra}(x) = Prob\left[x \leq x_j, j \neq 1\right]\lambda^{pra}(x) = [1 - G(x)]\lambda^{pra}(x)$$

$$m_1^{pra}(x) = r(1 - G(r)) + \int_x^r yg(y)dy$$

Portanto, o pagamento esperado para o jogador 1, considerando todos os seus possíveis tipos é:

$$m_1^{pra} = \int_{\underline{\omega}}^r m_1^{pra}(x)f(x)dx$$

$$= \int_{\underline{\omega}}^r r\big(1 - G(r)\big)f(x)dx + \int_{\underline{\omega}}^r \int_x^r yg(y)dy\, f(x)dx$$

Mas,

$$\int_{\underline{\omega}}^r \int_x^r yg(y)dy\, f(x)dx = \int_{\underline{\omega}}^r \int_{\underline{\omega}}^y f(x)dx\, yg(y)dy = \int_{\underline{\omega}}^r \big[F(y) - F\big(\underline{\omega}\big)\big]yg(y)dy$$

Portanto,

$$m_1^{pra} = r\big(1 - G(r)\big)F(r) + \int_{\underline{\omega}}^r F(y)yg(y)dy$$

Mas então, o pagamento esperado do governo, considerando todos os jogadores é:

$$m^{pra}(r) = nr\big(1 - G(r)\big)F(r) + n\int_{\underline{\omega}}^r F(y)yg(y)dy$$

Demonstração do Corolário às Proposições 3 e 4

Para $x > r$, $\lambda^{pra}(x) = r\,\frac{1-G(r)}{1-G(x)} + \frac{1}{1-G(x)}\int_x^r yg(y)dy = \lambda(x;r)$.

Portanto, para $r < 1$,

$$\big(1 - G(x)\big)\frac{\partial\lambda(x;r)}{\partial r} = 1 - G(r) - rg(y) + rg(r) = 1 - G(r) > 0$$

Ademais, o pagamento esperado do governo é:

$$m^{pra}(r) = nr\big(1 - G(r)\big)F(r) + n\int_{\underline{\omega}}^{r} F(y)yg(y)dy$$

Portanto, para $r < 1$,

$$\frac{1}{n}\frac{\partial m^{pra}(r)}{\partial r} = \big[\big(1 - G(r)\big)F(r) - rg(r)F(r) + r(1 - G(r)f(r)\big] + F(r)rg(r)$$
$$= \big(1 - G(r)\big)F(r) + r(1 - G(r)f(r) = \big(1 - G(r)\big)\big(F(r) + rf(r)\big) > 0$$

Cálculos do Exemplo 4

Os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Então: $\underline{\omega} = 0$ e:

$F(x) = x, \qquad G(x) = 1 - (1 - x)^{n-1}, \qquad 1 - G(x) = (1 - x)^{n-1},$

$g(x) = (n - 1)(1 - x)^{n-2},\;\; yg(y) = (n - 1)y(1 - y)^{n-2}.$

Então, $nr\big(1 - G(r)\big)F(r) = nr(1 - r)^{n-1}r = nr^2(1 - r)^{n-1}$

Ademais, $F(y)yg(y) = y\big(yg(y)\big) = y^2g(y)$.

Sejam $a(y) = y^2$ e $b'(y) = g(y)$.

Então $a'(y) = 2y$ e $b(y) = \int_0^y g(z)\,dz = G(y)$

Portanto,

$$\int_0^r F(y)yg(y)dy = y^2G(y)|_0^r - 2\int_0^r yG(y)dy = r^2G(r) - 2\int_0^r yG(y)dy$$

Sejam $c(z) = z$ e $d'(z) = G(z)$.

Então $c'(z) = 1$ e $d(z) = \int_0^z G(w)dw = \int_0^z [1-(1-w)^{n-1}]dw$.

Ou ainda, $d(z) = w\Big|_0^z + \frac{1}{n}(1-w)^n\Big|_0^z = z + \frac{1}{n}(1-z)^n - \frac{1}{n}$.

Portanto,

$$\int_0^r yG(y)dy = z\left[z + \frac{1}{n}(1-z)^n - \frac{1}{n}\right]_0^r - \int_0^r \left[z + \frac{1}{n}(1-z)^n - \frac{1}{n}\right]dz$$

$$= r\left[r + \frac{1}{n}(1-r)^n - \frac{1}{n}\right] - \left[\frac{z^2}{2} - \frac{1}{n(n+1)}(1-z)^{n+1} - \frac{1}{n}z\right]_0^r$$

$$= r\left[r + \frac{1}{n}(1-r)^n - \frac{1}{n}\right] - \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{n(n+1)}(1-r)^{n+1} - \frac{1}{n}r + \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= \frac{r^2}{2} + \frac{1}{n}r(1-r)^n - \frac{1}{n}r + \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}(1-r)^{n+1} + \frac{1}{n}r - \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{r^2}{2} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n}(1-r)^n\left[r + \frac{1}{n+1}(1-r)\right]$$

$$= \frac{r^2}{2} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}(1-r)^n[(n+1)r + (1-r)]$$

$$= \frac{r^2}{2} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}(1-r)^n[nr+1]$$

Logo,

$$\int_0^r F(y)yg(y)dy = r^2G(r) - 2\int_0^r yG(y)dy$$

$$= r^2[1-(1-r)^{n-1}] - r^2 + \frac{2}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+1)}(1-r)^n[nr+1]$$

$$= +\frac{2}{n(n+1)} - r^2(1-r)^{n-1} - \frac{2}{n(n+1)}(1-r)^n[nr+1]$$

Portanto,

$$n\int_0^r F(y)yg(y)dy = \frac{2}{n+1} - nr^2(1-r)^{n-1} - \frac{2}{n+1}(1-r)^n[nr+1]$$

Como $nr\big(1-F(r)\big)^{n-1}F(r) = nr^2(1-r)^{n-1}$, conclui-se que:

$$m^{pra} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+1}(1-r)^n[nr+1]$$

Ou ainda,

$$m^{pra}(r) = \frac{2}{n+1}[1-(1-r)^n(nr+1)]$$

Demonstração da Proposição 5

$$m^{pra}(r) = nr\big(1-G(r)\big)F(r) + n\int_{\underline{\omega}}^r F(y)yg(y)dy$$

$$m^{spr} = n\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} F(y)yg(y)dy = n\int_{\underline{\omega}}^{r} F(y)yg(y)dy + n\int_{r}^{\overline{\omega}} F(y)yg(y)dy$$

Portanto, $m^{pra}(r) < m^{spr} \Leftrightarrow \int_r^{\overline{\omega}} F(y)yg(y)dy > r\big(1-G(r)\big)F(r)$.

Mas, para todo $y \in [r,\overline{\omega}]$, $F(y)y > F(r)r \Rightarrow \int_r^{\omega} F(y)yg(y)dy >$

$$\int_r^{\overline{\omega}} F(r)rg(y)dy = r\big(1-G(r)\big)F(r).$$

Demonstração da Proposição 6

Buscamos um equilíbrio de Nash Bayesiano (ENB) simétrico, estritamente crescente e diferenciável λ.

Suponha que os demais jogadores jogam segundo esse equilíbrio e o jogador i tem custo x_i e faz o lance l. Então i ganhará e executará a obra se duas condições forem satisfeitas:

(i) $l < \lambda(x_j), \forall j \neq i \quad \Leftrightarrow \quad l < \min_{j \neq i} \lambda(x_j)$.

(ii) $l \leq r$.

Como λ é estritamente crescente, i vence se e somente se:

$$l < \lambda\left(\min_{j \neq i}(x_j)\right) = \lambda(m_1(x_{-i})) \quad \Leftrightarrow \quad m_1(x_{-i}) > \lambda^{-1}(l)$$

Portanto, a probabilidade de i fazer o menor lance l é:

$$\text{Prob}[m_1(x_{-i}) > \lambda^{-1}(l)] = 1 - \text{Prob}[m_1(x_{-i}) < \lambda^{-1}(l)] = 1 - G(\lambda^{-1}(l))$$

Ademais, a probabilidade de que o lance l esteja abaixo do valor de reserva é:

$$\text{Prob}[r \geq l] = 1 - \text{Prob}[r < l] = 1 - H(l)$$

Mas então, sua utilidade esperada (ínterim) é:

$$[1 - G(\lambda^{-1}(l))][1 - H(l)](l - x_i)$$

Se essa utilidade for uma função estritamente côncava, então a CPO nos dará a melhor resposta de i às estratégias dos demais jogadores. Substituindo x_i por x por simplicidade,

$$\frac{\partial}{\partial l}[1 - G(\lambda^{-1}(l))][1 - H(l)](l - x)$$
$$= -g(\lambda^{-1}(l))(\lambda^{-1})'(l)[1 - H(l)](l - x) + [1 - G(\lambda^{-1}(l))][1 - H(l)]$$
$$-[1 - G(\lambda^{-1}(l))]h(l)(l - x) = 0$$

Na solução que se busca, $l = \lambda(x) \Leftrightarrow x = \lambda^{-1}(l)$. Portanto, podemos reescrever a condição acima como:

$$[1 - G(x)][1 - H(\lambda(x))]$$
$$-g(x)(\lambda^{-1})'(\lambda(x))[1 - H(\lambda(x))](\lambda(x) - x) - [1 - G(x)]h(\lambda(x))(\lambda(x) - x) = 0$$

Note agora que $\lambda^{-1}(\lambda(x)) = x \Rightarrow (\lambda^{-1})'(\lambda(x)) = (\lambda'(x))^{-1}$.

Portanto, a CPO se reduz a:

$$[1-G(x)][1-H(\lambda(x))]$$
$$-g(x)\left(\lambda'(x)\right)^{-1}\left[1-H\left(\lambda(x)\right)\right](\lambda(x)-x)-[1-G(x)]h\left(\lambda(x)\right)(\lambda(x)-x)=0$$

ou ainda,

$$[1-G(x)]\left[1-H\left(\lambda(x)\right)\right](\lambda'(x)-1)$$
$$-g(x)\left[1-H\left(\lambda(x)\right)\right](\lambda(x)-x)-[1-G(x)]h\left(\lambda(x)\right)\lambda'(x)(\lambda(x)-x)=$$
$$=-[1-G(x)]\left[1-H\left(\lambda(x)\right)\right]$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial x}[1-G(x)]\left[1-H\left(\lambda(x)\right)\right](\lambda(x)-x)=-[1-G(x)]\left[1-H\left(\lambda(x)\right)\right]$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, integrando de x a $\overline{\omega}$, e lembrando que $G(\overline{\omega})=1$, temos:

$$[1-G(x)]\left[1-H\left(\lambda(x)\right)\right](\lambda(x)-x)=\int_x^{\overline{\omega}}[1-G(y)]\left[1-H\left(\lambda(y)\right)\right]dy$$

Donde,

$$\lambda(x)=x+\frac{1}{1-G(x)}\int_x^{\overline{\omega}}\frac{1-H\left(\lambda(y)\right)}{1-H\left(\lambda(x)\right)}[1-G(y)]dy$$

ou ainda,

$$\lambda(x)=x+\frac{1}{[1-G(x)][1-H(\lambda(x)]}\int_x^{\overline{\omega}}\left[1-H\left(\lambda(y)\right)\right][1-G(y)]dy$$

Demonstração do Corolário à Proposição 6

De fato, temos, por um lado,

$$\lambda^{spr}(x)=x+\frac{1}{1-G(x)}\int_x^{\overline{\omega}}[1-G(y)]dy$$

e, por outro,

$$\lambda^{prs}(x) = x + \frac{1}{1-G(x)}\int_x^{\overline{\omega}} \frac{1-H\big(\lambda(y)\big)}{1-H\big(\lambda(x)\big)}[1-G(y)]dy$$

Mas, para todo $\in (x,\overline{\omega})$, $H\big(\lambda(y)\big) > H\big(\lambda(x)\big)$ se H estritamente crescente.

Então,

$$1-H\big(\lambda(y)\big) < 1-H\big(\lambda(x)\big) \Rightarrow \frac{1-H\big(\lambda(y)\big)}{1-H\big(\lambda(x)\big)} < 1 \ \Rightarrow \ \lambda^{prs}(x) < \lambda^{spr}(x)$$

Cálculos do Exemplo 5

Os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], inclusive quanto ao valor de reserva r. Então:

$$F(x) = x, \qquad G(x) = 1-(1-x)^{n-1}, \qquad 1-G(x) = (1-x)^{n-1},$$
$$g(x) = (n-1)(1-x)^{n-2},\ \ yg(y) = (n-1)y(1-y)^{n-2},\ H(r) = r,\ h(r) = 1.$$

Então[21], para $x < 1$,

$$\lambda^{prs}(x) = x + \frac{1}{(1-x)^{n-1}}\int_x^1 \frac{1-\lambda(y)}{1-\lambda(x)}[1-y]^{n-1}dy$$

Busquemos um equilíbrio de Nash bayesiano linear, i.e., $\lambda^{prs}(x) = \alpha x + \beta$. Então a equação acima pode ser reescrita como:

$$\lambda^{prs}(x) = x + \frac{1}{(1-x)^{n-1}(1-\alpha x-\beta)}\int_x^1 (1-\alpha y-\beta)[1-y]^{n-1}dy$$

Sejam $a(y) = 1-\alpha y-\beta \quad \Rightarrow \quad a'(y) = -\alpha$

$$b'(y) = [1-y]^{n-1} \quad \Rightarrow \quad b(y) = -\frac{[1-y]^n}{n}$$

[21] Naturalmente, $\lambda(1) = 1$.

Então,

$$\int_x^1 (1-\alpha y-\beta)[1-y]^{n-1}dy = -[1-\alpha y-\beta]\left[\frac{(1-y)^n}{n}\right]_x^1 - \frac{\alpha}{n}\int_x^1 [1-y]^n dy$$

$$= [1-\alpha x-\beta]\left[\frac{(1-x)^n}{n}\right] + \frac{\alpha}{n}\left[\frac{(1-y)^{n+1}}{n+1}\right]_x^1$$

$$= [1-\alpha x-\beta]\left[\frac{(1-x)^n}{n}\right] - \frac{\alpha}{n}\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$= \frac{(1-x)^n}{n}\left[1-\alpha x-\beta-\frac{\alpha}{n+1}(1-x)\right]$$

$$= \frac{(1-x)^n}{n(n+1)}[(n+1)(1-\alpha x-\beta)-\alpha(1-x)]$$

$$= \frac{(1-x)^n}{n(n+1)}[n(1-\alpha x-\beta)+1-\alpha-\beta]$$

Mas então,

$$\lambda^{prs}(x) = \alpha x+\beta = x+\frac{(1-x)^n}{n(n+1)}\left[\frac{n(1-\alpha x-\beta)+1-\alpha-\beta}{(1-x)^{n-1}(1-\alpha x-\beta)}\right]$$

$$= x+\frac{1-x}{n(n+1)}\left[\frac{n(1-\alpha x-\beta)+1-\alpha-\beta}{(1-\alpha x-\beta)}\right]$$

$$= x+\frac{1-x}{n(n+1)}\left[n+\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha x-\beta}\right]$$

$$\lambda^{prs}(x) = \alpha x+\beta = x+\frac{1-x}{n+1}+\left(\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha x-\beta}\right)\frac{1-x}{n(n+1)}$$

$$\lambda^{prs}(x) = \alpha x+\beta = \frac{n}{n+1}x+\frac{1}{n+1}+\frac{1-\alpha-\beta}{n(n+1)}\frac{1-x}{1-\alpha x-\beta}$$

Cuja solução nos leva a: $\alpha = \frac{n}{n+1}$, $\beta = \frac{1}{n+1}$, seja, $\lambda^{prs}(x) = \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{n+1}$

Demonstração da Proposição 7

Suponha que o jogador 1 incorra no custo x para fornecer a obra. Então, no equilíbrio simétrico encontrado ele vencerá se seu custo for o menor de todos e, além disso, seu lance for menor que o preço de reserva.

Seu custo será menor que os demais com probabilidade $[1 - F(x)]^{n-1} = 1 - G(x)$.

Ademais, seu lance $\lambda(x)$ será menor que o valor de reserva r se $\lambda(x) \leq r \Leftrightarrow x \leq \lambda^{-1}(r) =: s$.

Note que se $\lambda(\underline{\omega}) > r$, então nunca teremos $\lambda(x) \leq r$, de forma que a obra não será contratada e o pagamento do governo será zero.

Por outro lado, se $\lambda(\underline{\omega}) \leq r$, então a obra será contratada se $(x) \leq r \Leftrightarrow x \leq \lambda^{-1}(r) =: s$. Nesse caso, o governo pagará:

$$[1 - G(x)]\lambda(x) = x[1 - G(x)] + \int_x^{\overline{\omega}} \frac{1 - H(\lambda(y))}{1 - H(\lambda(x))}[1 - G(y)]dy$$

Ou ainda,

$$[1 - G(x)]\lambda(x) = x[1 - G(x)] + \frac{1}{1 - H(\lambda(x))}\int_x^{\overline{\omega}}[1 - H(\lambda(y))][1 - G(y)]dy$$

Mas então, se $s = \lambda^{-1}(r) \geq \underline{\omega}$, o pagamento esperado ao jogador 1, considerando todos os seus possíveis tipos é:

$$\int_{\underline{\omega}}^{s}[1 - G(x)]\lambda(x)f(x)dx$$

$$= \int_{\underline{\omega}}^{s} x[1 - G(x)]f(x)dx + \int_{\underline{\omega}}^{s}\int_x^{\overline{\omega}}[1 - H(\lambda(y))][1 - G(y)]dy\frac{1}{1 - H(\lambda(x))}f(x)dx$$

Mas então podemos concluir que o pagamento esperado do governo, considerando todos os jogadores será: $m^{prs}(r) = 0$ se $\lambda(\underline{\omega}) > r$ e, se $\lambda(\underline{\omega}) \leq r$, então o pagamento esperado será:

$$m^{prs}(r) =$$

$$n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} x[1 - G(x)]f(x)dx$$

$$+ n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} \int_{x}^{\overline{\omega}} \left[1 - H\big(\lambda(y)\big)\right][1 - G(y)]dy \frac{1}{1 - H\big(\lambda(x)\big)} f(x)dx$$

Cálculos do Exemplo 6

Os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], com a solução linear. Então: $\underline{\omega} = 0, \overline{\omega} = 1$ e:

$$F(x) = x, G(x) = 1 - (1 - x)^{n-1}, 1 - G(x) = (1 - x)^{n-1}, H(x) = x$$

Ademais,

$$\lambda^{prs}(x) = \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 - H\big(\lambda(y)\big) = \frac{n}{n+1}(1 - y)$$

E,

$$\frac{n}{n+1}x + \frac{1}{n+1} = r \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}x = r - \frac{1}{n+1}$$

$$x = \frac{n+1}{n}r - \frac{1}{n} = \lambda^{-1}(r) =: s$$

Sejam

$$A(s) = \int_0^s x[1 - G(x)]f(x)dx$$

$$B(s) = \int_0^s \int_x^1 \left[1 - H\big(\lambda(y)\big)\right][1 - G(y)]dy \frac{1}{1 - H\big(\lambda(x)\big)} f(x)dx$$

Então,

$$m^{prs}(r) = nA\big(\lambda^{-1}(r)\big) + nB\big(\lambda^{-1}(r)\big)$$

Calculemos,

$$A(s) = \int_0^s x(1-x)^{n-1}dx$$

Sejam $a(x) = x$ e $b'(x) = (1-x)^{n-1}$.

Então $a'(x) = 1$ e $b(x) = -\frac{(1-x)^n}{n}$.

Portanto,

$$A(s) = -x\left[\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^s + \int_0^s \frac{(1-x)^n}{n}dx$$

$$= -\frac{1}{n}s(1-s)^n - \frac{1}{n}\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^s$$

$$= \frac{1}{n}\left[-s(1-s)^n - \frac{1}{n+1}\ [(1-s)^{n+1} - 1]\right]$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}[1-(n+1)s(1-s)^n - (1-s)^{n+1}]$$

Mas,

$$(n+1)s(1-s)^n + (1-s)^{n+1} = (1-s)^n[ns+s+1-s] = (1-s)^n(1+ns)$$

Logo,

$$A(s) = \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}[1-(1-s)^n(1+ns)]$$

Mas,

$$s = \lambda^{-1}(r) = \frac{n+1}{n}r - \frac{1}{n} \Rightarrow -s = \frac{1}{n} - \frac{n+1}{n}r$$

$$1-s = \frac{n+1}{n}(1-r) \Rightarrow (1-s)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n(1-r)^n$$

$$(1+ns) = (1+(n+1)r-1) = (n+1)r$$

Portanto,

$$A(s) = \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\left[1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (1-r)^n (n+1) r\right]$$

$$A(s) = \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\left[1 - (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n r(1-r)^n\right]$$

$$A(s) = \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} - r(1-r)^n\right]$$

$$A(s) = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} - r(1-r)^n\right]$$

E,

$$nA(s) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} - r(1-r)^n\right]$$

Ou ainda,

$$nA(s) = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n r(1-r)^n$$

Calculemos agora,

$$B(s) = \int_0^s \int_x^1 [1 - H(\lambda(y))][1 - G(y)]dy \frac{1}{1 - H(\lambda(x))} f(x)dx$$

$$\int_x^1 [1 - H(\lambda(y))][1 - G(y)]dy = \int_x^1 \frac{n}{n+1}(1-y)(1-y)^{n-1}dy$$

$$= \frac{n}{n+1}\int_x^1 (1-y)^n dy = -\frac{n}{n+1}\frac{1}{n+1}\,(1-y)^{n+1}\Big|_x^1 = \frac{n}{(n+1)^2}(1-x)^{n+1}$$

$$B(s) = \int_0^s \frac{n}{(n+1)^2}(1-x)^{n+1}\frac{n+1}{n}\frac{1}{1-x}dx = \frac{1}{n+1}\int_0^s (1-x)^n dx$$

$$= -\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\Big|_0^s = -\frac{1}{(n+1)^2}[(1-s)^{n+1} - 1]$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}[1 - (1-s)^{n+1}]$$

Lembrando que

$$1 - s = \frac{n+1}{n}(1-r) \Rightarrow (1-s)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}(1-r)^{n+1}$$

$$B(s) = \frac{1}{(n+1)^2}\left[1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}(1-r)^{n+1}\right]$$

E,

$$nB(s) = \frac{n}{(n+1)^2}\left[1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}(1-r)^{n+1}\right]$$

Ou ainda,

$$nB(s) = \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}(1-r)^{n+1}$$

Portanto,

$$m^{prs}(r) = nA\big(\lambda^{-1}(r)\big) + nB(\lambda^{-1}(r))$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} r(1-r)^n + \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}(1-r)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[1 + \frac{n}{n+1}\right] - \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}[(n+1)r + (1-r)](1-r)^n$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{n+1+n}{n+1} - \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}[nr + r + 1 - r](1-r)^n$$

$$m^{prs}(r) = \frac{2n+1}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}[nr+1](1-r)^n$$

Demonstração da Proposição 8

Buscamos um equilíbrio de Nash Bayesiano (ENB) simétrico, estritamente crescente diferenciável λ.

Suponha que os demais jogadores jogam segundo esse equilíbrio e o jogador i tem custo x_i e faz o lance l. Então seu lance será o lance vencedor se e somente se:

$$l < \lambda(x_j), \forall j \neq i \quad \Leftrightarrow \quad l < \min_{j\neq i} \lambda(x_j)$$

Como λ é estritamente crescente, i vence se e somente se:

$$l < \lambda\left(\min_{j\neq i}(x_j)\right) = \lambda(m_1(x_{-i})) \quad \Leftrightarrow \quad m_1(x_{-i}) > \lambda^{-1}(l)$$

Portanto, a probabilidade de i fazer o menor lance l é:

$$\text{Prob}[m_1(x_{-i}) > \lambda^{-1}(l)] = 1 - \text{Prob}[m_1(x_{-i}) < \lambda^{-1}(l)] = 1 - G(\lambda^{-1}(l))$$

Se esse jogador fizer o menor lance, três situações podem ocorrer.

(i) $l \leq r$. Nesse caso, esse jogador é contratado e recebe o pagamento l. Seu *payoff* resultante é $l - x_i$.

(ii) $r < l$ mas $x \leq r$. Então o jogador aceita fornecer a obra pelo valor r durante a fase de negociação. Portanto, esse jogador é selecionado para executar a obra e recebe por ela o pagamento r. Seu *payoff* resultante é $r - x_i$.

(iii) $r < l$ e $r < x$. Nesse caso não interessa ao jogador o pagamento r, a licitação fracassa e o licitante que fez o menor lance tem *payoff* 0.

Portanto, a utilidade esperada ínterim desse jogador é:

$$[1 - G(\lambda^{-1}(l))]\left[\int_{\underline{\omega}}^{x} 0h(r)dr + \int_{x}^{l}(r-x)\,h(r)dr + \int_{l}^{\overline{\omega}}(l-x)\,h(r)dr\right]$$

$$= [1 - G(\lambda^{-1}(l))]\left[\int_{x}^{l}(r-x)\,h(r)dr + \int_{l}^{\overline{\omega}}(l-x)\,h(r)dr\right]$$

Mas,

$$\int_{x}^{l}(r-x)\,h(r)dr = \int_{x}^{l} r\,h(r)dr - x[H(l) - H(x)]$$

Sejam $a(r) = r$ e $b'(r) = h(r)$.

Então $a'(r) = 1$ e $b(r) = H(r)$.

Portanto,

$$\int_x^l r\, h(r)dr = rH(r)|_x^l - \int_x^l H(r)dr = lH(l) - xH(x) - \mathcal{H}(l) + \mathcal{H}(x)$$

Logo,

$$\int_x^l (r-x)\, h(r)dr = (l-x)H(l) - \mathcal{H}(l) + \mathcal{H}(x)$$

Ademais,

$$\int_l^\omega (l-x)\, h(r)dr = (l-x)\big(H(\overline{\omega}) - H(l)\big) = (l-x)\big(1 - H(l)\big)$$

Mas então,

$$\int_x^l (r-x)\, h(r)dr + \int_l^{\overline{\omega}} (l-x)\, h(r)dr = (l-x) - \mathcal{H}(l) + \mathcal{H}(x)$$

Portanto, a utilidade esperada do licitante pode ser reescrita como:

$$\left[1 - G\big(\lambda^{-1}(l)\big)\right][\,(l-x) - \mathcal{H}(l) + \mathcal{H}(x)]$$

Se essa utilidade for uma função estritamente côncava, então a CPO nos dará a melhor resposta de i às estratégias dos demais jogadores. Substituindo x_i por x por simplicidade,

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[1 - G\big(\lambda^{-1}(l)\big)\right][\,(l-x) - \mathcal{H}(l) + \mathcal{H}(x)]$$

$$= -g\big(\lambda^{-1}(l)\big)(\lambda^{-1})'(l)[\,(l-x) - \mathcal{H}(l) + \mathcal{H}(x)] + \left[1 - G\big(\lambda^{-1}(l)\big)\right]\big(1 - H(l)\big) = 0$$

Na solução que se busca, $l = \lambda(x) \Leftrightarrow x = \lambda^{-1}(l)$. Portanto, podemos reescrever a condição acima como:

$$-\left[\lambda(x) - x - \mathcal{H}\big(\lambda(x)\big) + \mathcal{H}(x)\right]g(x)(\lambda^{-1})'\big(\lambda(x)\big) + [1 - G(x)]\Big(1 - H\big(\lambda(x)\big)\Big) = 0$$

Note agora que $\lambda^{-1}(\lambda(x)) = x \Rightarrow (\lambda^{-1})'(\lambda(x)) = (\lambda'(x))^{-1}$.

Portanto, a CPO se reduz a:

$$-\left[\lambda(x) - x - \mathcal{H}(\lambda(x)) + \mathcal{H}(x)\right]g(x) + [1 - G(x)]\left(1 - H(\lambda(x))\right)\lambda'(x) = 0$$

Note agora que:

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(x) - x - \mathcal{H}(\lambda(x)) + \mathcal{H}(x)\right] = \lambda'(x) - 1 - H(\lambda(x))\lambda'(x) + H(x)$$

$$= \left(1 - H(\lambda(x))\right)\lambda'(x) - \left(1 - H(x)\right)$$

Mas,

$$[1 - G(x)]\left(1 - H(\lambda(x))\right)\lambda'(x)$$

$$= [1 - G(x)]\left[\left(1 - H(\lambda(x))\right)\lambda'(x) - \left(1 - H(x)\right)\right] + [1 - H(x)][1 - G(x)]$$

Portanto, a CPO pode ser reescrita como:

$$[1 - G(x)]\left[\left(1 - H(\lambda(x))\right)\lambda'(x) - \left(1 - H(x)\right)\right] + [-g(x)]\left[\lambda(x) - x - \mathcal{H}(\lambda(x)) + \mathcal{H}(x)\right]$$
$$= -[1 - H(x)][1 - G(x)]$$

Ou ainda,

$$\frac{d}{dx}[1 - G(x)]\left[\lambda(x) - x - \mathcal{H}(\lambda(x)) + \mathcal{H}(x)\right] = -[1 - H(x)][1 - G(x)]$$

Mas então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$[1 - G(x)]\left[\lambda(x) - x - \mathcal{H}(\lambda(x)) + \mathcal{H}(x)\right]_x^{\overline{\omega}} = -\int_x^{\overline{\omega}} [1 - H(y)][1 - G(y)]dy$$

Como $G(\overline{\omega}) = 1$, a condição acima se reduz à expressão procurada:

$$\lambda(x) - x - \mathcal{H}(\lambda(x)) + \mathcal{H}(x) = \frac{1}{1 - G(x)}\int_x^{\overline{\omega}} [1 - H(y)][1 - G(y)]dy$$

Portanto,

$$\lambda(x) = x + \mathcal{H}\big(\lambda(x)\big) - \mathcal{H}(x) + \frac{1}{1 - G(x)} \int_x^{\overline{\omega}} [1 - H(y)][1 - G(y)]dy$$

Cálculos do Exemplo 7

Os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], inclusive quanto ao valor de reserva r. Então:

$F(x) = x, \qquad G(x) = 1 - (1 - x)^{n-1}, \qquad 1 - G(x) = (1 - x)^{n-1},$

$g(x) = (n - 1)(1 - x)^{n-2},\ \ yg(y) = (n - 1)y(1 - y)^{n-2},\ H(r) = r,\ h(r) = 1.$

Então, $\mathcal{H}(x) = \frac{x^2}{2}$.

Portanto,

$$\lambda(x) - \frac{\lambda^2(x)}{2} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(1 - x)^{n-1}} \int_x^1 [1 - y][(1 - y)^{n-1}]dy \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2}(2x - x^2) - \frac{1}{(1 - x)^{n-1}} \frac{(1 - y)^{n+1}}{(n + 1)}\Bigg|_x^1 = \frac{1}{2}(2x - x^2) + \frac{(1 - x)^2}{n + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{n + 1}[2(n + 1)x - (n + 1)x^2 + (2 - 4x + 2x^2)]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{n + 1}[2(n - 1)x - (n - 1)x^2 + 2]$$

Busquemos um equilíbrio de Nash bayesiano linear, i.e., $\lambda^{prs}(x) = \alpha x + \beta$. Então a equação acima pode ser reescrita como:

$$\lambda(x) - \frac{\lambda^2(x)}{2} = \alpha x + \beta - \frac{\alpha^2}{2}x^2 - \alpha\beta x - \frac{\beta^2}{2} = \qquad (2)$$

$$\alpha(1 - \beta)x - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \frac{1}{2}\beta(2 - \beta)$$

Comparando as expressões (1) e (2) chegamos a:

$$\alpha = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta = 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Portanto, a solução procurada é:

$$\lambda^{psn}(x) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} x + \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Demonstração da Proposição 9

Suponha que o jogador 1 incorra no custo x para fornecer a obra. Então, no equilíbrio simétrico encontrado ele vencerá se seu custo for o menor de todos e, além disso:

(i) seu lance for menor que o preço de reserva ou ainda que,

(ii) tendo feito um lance maior que o preço de reserva, seu custo seja menor que esse preço.

Seu custo será menor que os demais com probabilidade $[1 - F(x)]^{n-1} = 1 - G(x)$.

Seu lance $\lambda(x)$ será menor que o valor de reserva r se: $\lambda(x) \leq r \Leftrightarrow x \leq \lambda^{-1}(r) =: s$.

Ademais, seu lance $\lambda(x)$ será maior que r, mas seu custo será menor que r se:

$$x \leq r < \lambda(x) \Leftrightarrow \lambda^{-1}(x) < \lambda^{-1}(r) =: s < x$$

Ou ainda, $\lambda(x) > r \Leftrightarrow x > \lambda^{-1}(r) =: s$ mas $x \leq r$.

Consideremos dois casos.

Caso 1: $\lambda(\underline{\omega}) > r$

Nesse caso todos os lances serão acima do valor de reserva r. Portanto, a obra somente será contratada se $x \leq r$, de forma que:

Se $x > r$ a licitação fracassa e o pagamento do governo é zero.

Se $x \leq r$ a obra é contratada e o pagamento do governo é:

$$[1 - G(x)]r$$

Portanto, o pagamento esperado a esse jogador é:

$$r\int_0^r [1 - G(x)]f(x)dx$$

Logo, o pagamento esperado considerando todos os jogadores nesse caso é:

$$m^{psn}(r) = nr\int_0^r [1 - G(x)]f(x)dx$$

Caso 2: $\lambda(\underline{\omega}) \leq r$

Subcaso 2.1: $\lambda(x) \leq r \Leftrightarrow x \leq \lambda^{-1}(r)$

Então, o governo pagará:

$$[1 - G(x)]\lambda(x)$$

Subcaso 2.2: $(\lambda(x) > r) \quad \wedge \quad \left(x \leq r \Leftrightarrow \lambda^{-1}(x) \leq \lambda^{-1}(r) =: s(< x)\right)$

Então, o governo pagará:

$$[1 - G(x)]r$$

Subcaso 2.3: $(\lambda(x) > r) \quad \wedge \quad \left(x > r \Leftrightarrow \lambda^{-1}(x) > \lambda^{-1}(r) =: s(< x)\right)$

Nesse caso a obra não é contratada: o vencedor desiste de executar a obra na etapa de negociação, pois seu custo é maior que o valor de reserva.

Mas então, o pagamento esperado ao jogador 1, considerando todos os seus possíveis tipos é:

$$\int_{\underline{\omega}}^{s} [1 - G(x)]\lambda(x)f(x)dx + r\int_s^r [1 - G(x)]f(x)dx$$

Seja $A(s) = \int_{\underline{\omega}}^{s}[1 - G(x)]\lambda(x)f(x)dx$

Como

$$\lambda(x) = x + \mathcal{H}\big(\lambda(x)\big) - \mathcal{H}(x) + \frac{1}{1 - G(x)}\int_{x}^{\overline{\omega}}[1 - H(y)][1 - G(y)]dy$$

$$A(s) = \int_{\underline{\omega}}^{s}[1 - G(x)]\lambda(x)f(x)dx =$$

$$= \int_{\underline{\omega}}^{s} x[1 - G(x)]f(x)dx + \int_{\underline{\omega}}^{s}\int_{x}^{\overline{\omega}}[1 - H(y)][1 - G(y)]dy\, f(x)dx$$

$$+ \int_{\underline{\omega}}^{s}[\mathcal{H}\big(\lambda(x)\big) - \mathcal{H}(x)][1 - G(x)]f(x)dx$$

Mas então podemos concluir que o pagamento esperado do governo, considerando todos os jogadores neste segundo caso é:

$$m^{psn}(r) =$$

$$n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)} x[1 - G(x)]f(x)dx + n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)}\int_{x}^{\overline{\omega}}[1 - H(y)][1 - G(y)]dy\, f(x)dx$$

$$+n\int_{\underline{\omega}}^{\lambda^{-1}(r)}[\mathcal{H}\big(\lambda(x)\big) - \mathcal{H}(x)][1 - G(x)]f(x)dx + nr\int_{\lambda^{-1}(r)}^{r}[1 - G(x)]f(x)dx$$

Cálculos do Exemplo 8

Os valores são uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], com a solução linear. Então: $\underline{\omega} = 0, \overline{\omega} = 1$ e:

$$F(x) = x, G(x) = 1 - (1 - x)^{n-1}, 1 - G(x) = (1 - x)^{n-1}, H(x) = x$$

Então, $\mathcal{H}(x) = \dfrac{x^2}{2}$ e

$$\lambda^{psn}(x) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} x + \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} x + \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = r \Leftrightarrow \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} x = r - \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$x = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} r - \left(\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = \lambda^{-1}(r) =: s$$

Analisemos separadamente os dois possíveis casos.

Caso 1: $\lambda(\underline{\omega}) > r$

$$m^{psn}(r) = nr\int_0^r [1 - G(x)]f(x)dx = nr\int_0^r [1 - x]^{n-1}dx = r(-1)\,(1 - x)^n\Big|_0^r$$

$$m^{psn}(r) = r(-(1-r)^n + 1) = r(1 - (1-r)^n)$$

Caso 2: $\lambda(\underline{\omega}) \leq r$

Sejam

$$A(s) = \int_0^s x[1 - G(x)]f(x)dx$$

$$B(s) = \int_0^s \int_x^1 [1 - H(y)][1 - G(y)]dy\, f(x)dx$$

$$C(s) = \int_0^s [\mathcal{H}(\lambda(x)) - \mathcal{H}(x)][1 - G(x)]f(x)dx$$

$$D(s) = r\int_s^r [1 - G(x)]f(x)dx$$

Então,

$$m^{psn}(r) = nA(\lambda^{-1}(r)) + nB(\lambda^{-1}(r)) + nC(\lambda^{-1}(r)) + nD(\lambda^{-1}(r))$$

Primeiramente calculemos $A(s)$. Conforme visto anteriormente (no exemplo após a Proposição 7),

$$A(s) = \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}[1-(1-s)^n(1+ns)]$$

Mas $s = \lambda^{-1}(r) = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} r + 1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}(1-r)$, portanto,

$$1-s = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}(1-r) \Rightarrow (1-s)^n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}(1-r)^n$$

E $\quad 1+ns = 1+n\left(1-\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}(1-r)\right)$

Logo,

$$[1-(1-s)^n(1+ns)] = \left[1-\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}(1-r)^n\left[1+n\left(1-\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}(1-r)\right)\right]\right]$$

Portanto,

$$nA(s) = \frac{1}{n+1}\left[1-\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}(1-r)^n\left[1+n\left(1-\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}(1-r)\right)\right]\right]$$

Calculemos agora $B(s)$:

$$B(s) = \int_0^s \int_x^1 [1-y][1-y]^{n-1} dy\, dx = \int_0^s \int_x^1 (1-y)^n dy\, dx$$

$$= -\frac{1}{n+1}\int_0^s (1-y)^{n+1}\Big|_x^1 dx = \frac{1}{n+1}\int_0^s (1-x)^{n+1} dx$$

$$\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}(-1)\,(1-x)^{n+2}\Big|_0^s = -\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}[(1-s)^{n+2}-1]$$

$$nB(s) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}[1-(1-s)^{n+2}]$$

Mas, $$1-s = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}(1-r) \Rightarrow (1-s)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n+2)}(1-r)^{n+2}$$

Logo,

$$nB(s) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}\left[1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n+2)} (1-r)^{n+2}\right]$$

$$nB(s) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n+2)} (1-r)^{n+2}$$

$$nB(s) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2} - \frac{n}{n+2}\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}(n+2)}}(1-r)^{n+2}$$

Ou ainda,

$$nB(s) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}\left[1 - \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n} (1-r)^{n+2}\right]$$

Continuando,

$$C(s) = \int_{\underline{\omega}}^{s} [\mathcal{H}\big(\lambda(x)\big) - \mathcal{H}(x)][1 - G(x)]f(x)dx$$

$$C(s) = \int_{\underline{\omega}}^{s} \left[\frac{\lambda(x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right][1-x]^{n-1}dx$$

$$\lambda^{psn}(x) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} x + \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Sejam $\alpha = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\beta = 1 - \alpha$. Então: $\lambda(x) = \alpha x + \beta$

$$\mathcal{H}(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\mathcal{H}(\lambda(x)) = \frac{\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2}{2}$$

$$\frac{\lambda(x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}[(\alpha^2 - 1)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2]$$

Portanto,

$$C(s) = \int_{\underline{\omega}}^{s} \left[\frac{\lambda(x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right][1-x]^{n-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^s [(\alpha^2-1)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2][1-x]^{n-1}dx$$

$a(x) = (\alpha^2-1)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 \quad \Rightarrow \quad a'(x) = 2(\alpha^2-1)x + 2\alpha\beta$

$b'(x) = [1-x]^{n-1} \quad \Rightarrow \quad b(x) = -\frac{1}{n}[1-x]^n$

$$\int_0^s [(\alpha^2-1)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2][1-x]^{n-1}dx = [a(x)b(x)]|_0^s + \frac{1}{n}\int_0^s [2(\alpha^2-1)x + 2\alpha\beta][1-x]^n dx$$

$$= -a(s)\frac{1}{n}[1-s]^n + \frac{1}{n}\beta^2 + \frac{1}{n}\int_0^s [2(\alpha^2-1)x + 2\alpha\beta][1-x]^n dx$$

$c(x) = 2(\alpha^2-1)x + 2\alpha\beta \quad \Rightarrow \quad c'(x) = 2(\alpha^2-1)$

$d'(x) = [1-x]^n \quad \Rightarrow \quad d(x) = -\frac{1}{n+1}[1-x]^{n+1}$

$$\int_0^s [2(\alpha^2-1)x + 2\alpha\beta][1-x]^n dx = [c(x)d(x)]|_0^s + 2(\alpha^2-1)\frac{1}{n+1}\int_0^s [1-x]^{n+1}dx$$

$$= -c(s)\frac{1}{n+1}[1-s]^{n+1} + 2\alpha\beta\frac{1}{n+1} + 2(\alpha^2-1)\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}[-(1-s)^{n+2}+1]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+2}2(\alpha^2-1) + 2\alpha\beta\right] - \frac{1}{n+1}\left[c(s)[1-s]^{n+1} + \frac{1}{n+2}2(\alpha^2-1)(1-s)^{n+2}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1) + 2\alpha\beta\right] - \frac{1}{n+1}\left[c(s) + \frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)(1-s)\right][1-s]^{n+1}$$

Então,

$$\int_0^s [(\alpha^2-1)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2][1-x]^{n-1}dx$$

$$= -a(s)\frac{1}{n}[1-s]^n + \frac{1}{n}\beta^2$$

$$+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n+1}\left[\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1) + 2\alpha\beta\right] - \frac{1}{n+1}\left[c(s) + \frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)(1-s)\right][1-s]^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\beta^2 + \frac{1}{n+1}\left[\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1) + 2\alpha\beta\right]\right]$$

$$-\frac{1}{n}\left[a(s)[1-s]^n+\frac{1}{n+1}\left[c(s)+\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)(1-s)\right][1-s]^{n+1}\right]$$
$$=\frac{1}{n}\left[\beta^2+\frac{1}{n+1}\left[\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)+2\alpha\beta\right]\right]$$
$$-\frac{1}{n}\left[a(s)+\frac{1}{n+1}\left[c(s)+\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)[1-s]\right][1-s]\right][1-s]^n$$

Finalmente,

$$nC(s)=\frac{1}{2}\left[\beta^2+\frac{1}{n+1}\left[\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)+2\alpha\beta\right]\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[a(s)+\frac{1}{n+1}\left[c(s)+\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)[1-s]\right][1-s]\right][1-s]^n$$

Lembrando que $1-s=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}[1-r]$,

$$nC(s)=\frac{1}{2}\left[\beta^2+\frac{1}{n+1}\left[\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)+2\alpha\beta\right]\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[a(s)+\frac{1}{n+1}\left[c(s)+\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}[1-r]\right]\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}[1-r]\right]\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}(1-r)^n$$

Continuando,

$$D(s)=\ r\int_s^r[1-G(x)]f(x)dx=r\int_s^r[1-x]^{n-1}dx=-\frac{r}{n}[1-x]^n|_s^r$$
$$=-\frac{r}{n}\left[[1-r]^n-[1-s]^n\right]=\frac{r}{n}\left[[1-s]^n-[1-r]^n\right]$$

Como $[1-s]^n=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}(1-r)^n$,

$$D(s)=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}-1\right]r[1-r]^n$$

Portanto,

$$nD(s) = \left[\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n} - 1\right] r[1-r]^n$$

Mas então, o pagamento esperado procurado é:

$$m^{psn}(r) = nA\left(\lambda^{-1}(r)\right) + nB\left(\lambda^{-1}(r)\right) + nC\left(\lambda^{-1}(r)\right) + nD\left(\lambda^{-1}(r)\right)$$

$$m^{psn}(r) = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n r(1-r)^n$$

$$+\frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2} - \frac{n}{n+2}\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}(n+2)}}(1-r)^{n+2}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\beta^2 + \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+2}2(\alpha^2-1) + 2\alpha\beta\right]\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[a(s) + \frac{1}{n+1}\left[c(s) + \frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}[1-r]\right]\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}[1-r]\right]\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}(1-r)^n$$

$$+\left[\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n} - 1\right] r[1-r]^n$$

em que:

$$\alpha = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = 1 - \alpha$$

$$s = \frac{1}{\alpha}r - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\alpha}(1-r)$$

$$a(s) = (\alpha^2-1)s^2 + 2\alpha\beta s + \beta^2$$

$$c(s) = 2(\alpha^2-1)s + 2\alpha\beta$$

Alternativamente, podemos escrever: $\alpha = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \beta = 1 - \alpha$

$$s=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}r-\left(\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)=\alpha^{-1}r+1-\alpha^{-1}\Rightarrow 1-s=\alpha^{-1}(1-r)$$

$$=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}(1-r)$$

Portanto, o pagamento esperado do leiloeiro nesse caso pode ser escrito como:

$$m^{psn}(r)=nA(s)+nB(s)+nC(s)+nD(s) \text{ em que:}$$

$$nA(s)=\frac{1}{n+1}[1-(1-s)^n(1+ns)]$$

$$nB(s)=\frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}[1-(1-s)^{n+2}]$$

$$nC(s)=\frac{1}{2}\left[\beta^2+\frac{1}{n+1}\left[\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)+2\alpha\beta\right]\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[a(s)+\frac{1}{n+1}\left[c(s)+\frac{2}{n+2}(\alpha^2-1)[1-s]\right][1-s]\right][1-s]^n$$

$$nD(s)=r\big[[1-s]^n-[1-r]^n\big]$$

$s=1-\alpha^{-1}(1-r)$, $\alpha=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\beta=1-\alpha$, $a(s)=(\alpha^2-1)s^2+2\alpha\beta s+\beta^2$

$c(s)=2(\alpha^2-1)s+2\alpha\beta$.

Demonstração da Proposição 10.

Suponha que $b>r$. O retorno líquido esperado para o governo na licitação com negociação é:

$$b\Big(1-\big(1-F(r)\big)^n\Big)-m^{psn}(r)$$

Por outro lado, o retorno líquido esperado na licitação sem negociação é:

$$b\left(1-\left(1-F\left((\lambda^{prs})^{-1}(r)\right)\right)^{n}\right)-m^{prs}(r)$$

Portanto, será (estritamente) vantajoso para o governo usar o instrumento da negociação se:

$$b\left(1-\left(1-F(r)\right)^{n}\right)-m^{psn}(r)>b\left(1-\left(1-F\left((\lambda^{prs})^{-1}(r)\right)\right)^{n}\right)-m^{prs}(r)$$

$$\Leftrightarrow\ b\left(\left(1-F\left((\lambda^{prs})^{-1}(r)\right)\right)^{n}-\left(1-F(r)\right)^{n}\right)>m^{psn}(r)-m^{prs}(r)$$

Como λ^{prs} é estritamente crescente e $\lambda^{prs}(r)>r$, então $(\lambda^{prs})^{-1}(r)<r$.

Portanto, $\left(1-F\left((\lambda^{prs})^{-1}(r)\right)\right)^{n}>\left(1-F(r)\right)^{n}$ e a condição acima se escreve como:

$$b>\frac{m^{psn}(r)-m^{prs}(r)}{\left(1-F\left((\lambda^{prs})^{-1}(r)\right)\right)^{n}-\left(1-F(r)\right)^{n}}$$